Materiały do zastosowań metod probabilistycznych.
K.Lubnauer
Część 1
Powtórzenie, prawdopodobieństwo

Teoria

Podstawowy pojęciem probabilistycznym (związanym z teorią prawdopodobieństwa) jest przestrzeń probabilistyczna czyli trójka (Ω, F, P) *gdzie* Ω *przestrzeń zdarzeń elementarnych czyli pewien zbiór,* F *jest* σ *-ciałem podzbiorów* Ω *, zaś P miarą unormowaną na F czyli prawdopodobieństwem. Zdefiniujmy więc te podstawowe pojęcia:*

Definicja 1

Rodzina zbiorów F nazywamy σ ***-ciałem*** *na zbiorze* Ω *jeżeli spełnia następujące warunki:*

(i) $\Omega \in F$,

(ii) $\underset{A\in F}{\forall} A' \in F$ *gdzie* A' *oznacza* $\Omega - A$ *czyli dopełnienie zbioru A.*

(iii) dla dowolnego ciągu zbiorów $A_1, A_2, A_3,...$ *należących do F mamy* $\bigcup_n A_n \in F$.

Ponadto z powyższej definicji wynika:

Własność 1

Jeśli F jest σ *-ciałem to:*

(i) dla dowolnego ciągu zbiorów $A_1, A_2, A_3,...$ *należących do F mamy* $\bigcap_n A_n \in F$.

(ii) Jeżeli $A, B \in F$ *to* $A \cup B \in F$, $A \cap B \in F$ *oraz* $A - B \in F$.

(iii) $\varnothing \in F$

Dowód

(i) Wynika z iż $\bigcap_n A_n = \Omega - \left(\bigcup_n A'_n\right)$ *oraz z warunków (i) i (ii) z Definicji 1.*

(ii) Ćwiczenie własne (zauważmy że dla dowolnych zbiorów A,B możemy w sposób sztuczny zbudować ciąg nieskończony $A, B, \varnothing, \varnothing, \varnothing, ...$*)*

(iii) Zauważmy, że $\varnothing = \Omega'$ *co daje tezę.*

Podam teraz ***aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa:***

Definicja 2

Niech Ω *pewien zbiór zaś F* σ *-ciało zdefiniowane na* Ω. *Prawdopodobieństwem nazywamy dowolną funkcję P określoną na F i spełniającą warunki:*

(i) $P : F \to \mathbf{R}_+$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) *Jeśli* $A_i \in F, i = 1,2,3,\ldots$ *oraz* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$ *,(czyli są parami rozłączne) to* $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

*Możemy mówić również o klasycznej definicji prawdopodobieństwa która jest **szczególnym**, intuicyjnym **przypadkiem:***

Definicja3 (Klasyczna definicja prawdopodobieństwa)
Niech Ω *zbiór skończony,* $\Omega = \{\omega_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n\}$*,* $F = 2^{\Omega}$ *oraz wszystkie zdarzenia elementarne są tak samo prawdopodobne to prawdopodobieństwem klasycznym nazywamy funkcję P określoną na F wzorem:*
$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$*, oraz* $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$.

Przykład 1
Rzucamy kostką do gry, wtedy $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$*, wszystkie wyniki są tak samo prawdopodobne zaś np. prawdopodobieństwo zdarzenia A- wyrzucenia parzystej liczby oczek wynosi* $P(A) = \frac{\overline{\overline{\{2,4,6\}}}}{\overline{\overline{\{1,2,3,4,5,6\}}}} = \frac{3}{6} = 0,5$.

Z powyższych rozważań oraz z aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa otrzymujemy:

Twierdzenie 1 (Własności prawdopodobieństwa)
Jeżeli (Ω, F, P) *jest przestrzenią probabilistyczną oraz* $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n \in F$ *, to*

(i) $P(\emptyset) = 0$
(ii) $P(A) \in [0,1]$
(iii) ***Skończona addytywność.*** *Jeśli mamy skończony ciąg* $A_i \in F, i = 1,2,3,\ldots,n$ *oraz* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$ *, to* $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
(iv) ***Monotoniczność.*** *Dla dowolnych* $A, B \in F$ *takich, że* $A \subset B$ *mamy* $P(A) \leq P(B)$.
(v) ***Przeliczalna subaddytywność.*** *Jeśli* $A_i \in F, i = 1,2,3,\ldots$*, to* $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
(vi) ***Skończona subaddytywność.*** *Jeśli* $A_i \in F, i = 1,2,3,\ldots,n$*, to* $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
(vii) ***Ciągłość.***

a. *Jeśli* $A_n \in F$ *oraz* $A_n \subset A_{n+1}$ *dla n=1,2,3,.... to* $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

b. *Jeśli* $A_n \in F$ *oraz* $A_n \supset A_{n+1}$ *dla n=1,2,3,.... to* $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

(viii) *Dla dowolnych* $A, B \in F$ *takich, że* $A \subset B$ *mamy* $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

(ix) $P(A') = 1 - P(A)$.

(x) *Dla dowolnych* $A, B \in F$ *mamy* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(xi) *Dla dowolnych* $A, B, C \in F$ *mamy*
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
.

Dowód

(i) *Korzystając z przeliczalnej addytywności prawdopodobieństwa mamy*
$P(\varnothing) = P(\varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup .....) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + ...$ *stąd* $P(\varnothing) = 0$

(ii) *Wykażę (iv) wtedy (ii) jest oczywiste z faktu iż* $P(\Omega) = 1$ *i P nieujemna funkcja.*

(iii) *Weźmy* $A_i \in F, i = 1,2,3,...,n$ *oraz* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *dla* $i \neq j$, *oraz dla* $i > n$ *niech* $A_n = \varnothing$ *wtedy korzystając z przeliczalnej addytywności oraz z warunku (i) mamy* $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(iv) *Skorzystamy z warunku (iii). Niech* $A, B \in F$ *takie, że* $A \subset B$, *mamy wtedy:*
$P(B) = P(A \cup (B - A))$ *gdzie oczywiście oba składniki sumy są rozłączne czyli*
$P(B) = P(A) + P(B - A)$ *oraz* $P(B - A) \geq 0$ *co daje tezę.*

(v) *Dla* $A_i \in F, i = 1,2,3,...,$ *zdefiniujmy w następujący sposób ciąg* B_n. *Niech* $B_1 = A_1$, $B_n = A_n - (A_1 \cup ... \cup A_{n-1})$, *wtedy oczywiście mamy ciąg zbiorów z F rozłącznych parami i takich, że* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *oraz dla każdego n mamy* $B_n \subset A_n$ *czyli* $P(B_n) \leq P(A_n)$. *Policzmy więc:*
$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *co daje tezę.*

(vi) *Wniosek z (v) uzupełniając ciąg zbiorami pustymi.*

(vii) *Niech* $A_n \in F$ *oraz* $A_n \subset A_{n+1}$ *dla n=1,2,3,.... Zdefiniujemy ciąg* C_n *w następujący sposób:* $C_1 = A_1, C_2 = A_2 - A_1, ..., C_n = A_n - A_{n-1}, ...$ *wtedy oczywiście zbiory* C_n *należą do F oraz są rozłączne oraz* $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, *więc mamy:*
$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(C_i) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

(viii) *Weźmy dowolne* $A, B \in F$ *takie, że* $A \subset B$ *mamy*
$P(B) = P((B - A) \cup A) = P(B - A) + P(A)$ *bo* $A - B, A$ *rozłączne. Ostatnia równość daje tezę.*

(ix) *Weźmy dowolne* $A, B \in F$ *korzystając z algebry zbiorów oraz własności (viii) oraz (iii) mamy:*

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B - (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(x) *Do samodzielnej pracy.*

Innym przykładem prawdopodobieństwa jest ***prawdopodobieństwo geometryczne:***

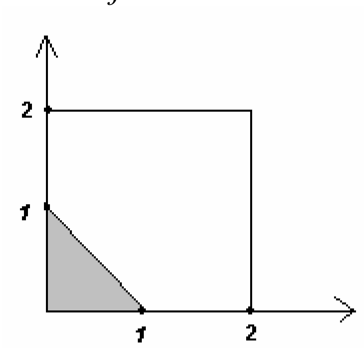
Definicja 4

Niech Ω *podzbiór* $\mathbf{R}^n$ *taki, że gdzie* λ_n *miara Lebesgu'a określona na* $\mathbf{R}^n$ *(w uproszczeniu oznacza to długość w* $\mathbf{R}$ *,pole w* $\mathbf{R}^2$*, objętość w* $\mathbf{R}^3$*), wtedy prawdopodobieństwem geometrycznym na* Ω *nazywamy miarę* P *określoną wzorem* $P(A) = \dfrac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(\Omega)}$ *gdzie A dowolny zbiór mierzalny względem miary Lebesgu'a.*

Przykład 2

Z odcinka (0,2) losujemy 2 liczby. Policzę prawdopodobieństwo zdarzenia A, że ich suma jest mniejsza niż 1.

Rys 1



Zauważmy, że losowanie 2 liczb z odcinka (0,2) polega na wylosowaniu punktu z kwadratu $(0,2)\times(0,2)$ *czyli* Ω *to ten kwadrat. Oczywiście* $\lambda_2(\Omega) = 4$*, mamy ponadto* $A = \{(x, y) \in \Omega : x + y < 1\}$ *czyli* $\lambda_2(A) = \dfrac{1}{2}$*, stąd* $P(A) = \dfrac{1}{8}$.

Dwoma podstawowymi pojęciami w teorii prawdopodobieństw, których nie należy mylić są rozłączność i niezależność zdarzeń, przypomnijmy zdarzenia A,B są ***rozłączne tak jak zbiory, gdy*** $A \cap B = \varnothing$ **.** *Niezależność oznacza zaś następującą własność pary zbiorów:*

Definicja 5

Zbiory A,B są ***niezależne jeśli spełniają warunek:*** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$**.**

Przykład 3

Rzucamy 2 razy monetą i rozważmy zdarzenia A- wylosowaliśmy 1 reszkę i 1 orła i B- w drugim rzucie wylosowaliśmy orła. Zbadaj niezależność zdarzeń A,B.

$\Omega = \{(o,o),(r,r),(o,r),(r,o)\}$ *i mamy model klasyczny czyli* $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

$P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ *oraz mamy* $P(A \cap B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{1}{4}$, *czyli* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Zdarzenia A,B są więc niezależne.

Uwaga.

Dla trzech zdarzeń A,B,C mówimy że są one niezależne gdy niezależne są pary A,B i B,C i A,C oraz zachodzi warunek $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Przejdźmy teraz do prawdopodobieństwa warunkowego które pozwoli nam wprowadzić twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i wzór Bayes'a.

Definicja 6

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$, *nazywamy liczbę*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Przykład 4

Rozważmy pewną rodzinę z dwójką dzieci. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że w rodzinie są dwie dziewczynki, jeśli wiemy, że w tej rodzinie:

(i) młodsze dziecko jest dziewczynką

(ii) co najmniej jedno z dzieci jest dziewczynką

W obu przypadkach $\Omega = \{(d,d),(d,c),(c,d),(c,c)\}$ *i mamy do czynienia z modelem klasycznym.*

(i) $P(\{(d,d)\}/\{(d,d),(c,d)\}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(ii) $P(\{(d,d)\}/\{(d,d),(c,d),(d,c)\}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

Zauważmy, że prawdopodobieństwo warunkowe przy ustalonym warunku spełnia wszystkie aksjomaty prawdopodobieństwa. (Ćwiczenie do samodzielnej pracy).

Definicja 7

Układem zupełnym zdarzeń *(rozbiciem przestrzeni* Ω*) nazywamy skończony bądź nieskończony ciąg zdarzeń* $B_1, B_2, B_3, \ldots$ *parami rozłącznych i dających w sumie przestrzeń* Ω*:*

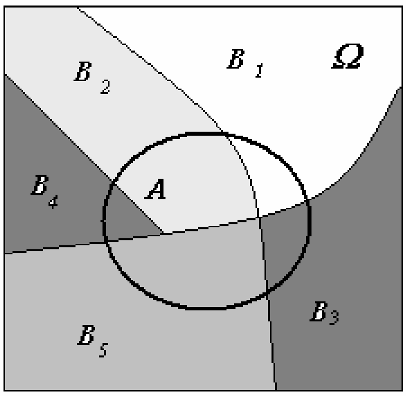
$$\bigcup_n B_n = \Omega, \; B_i \cap B_j = \varnothing \;, i \neq j .$$

Twierdzenie 2 (Wzór na prawdopodobieństwo całkowite)
Jeżeli $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ *jest układem zupełnym zdarzeń na* Ω *dodatnich niezerowych prawdopodobieństwach, to dla dowolnego zdarzenia A zachodzi wzór:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A / B_i) P(B_i)$$

Dowód

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A / B_i) P(B_i).$$

Rys 2	

Uwaga
Powyższe twierdzenie jest prawdziwe również dla przeliczalnej, nieskończonej liczby zdarzeń B_i*.*

Przykład 5
W fabryce pracują 3 roboty montażowe. Pierwszy robot ma 0,03 braków, robot drugi ma 0,05 braków a robot trzeci ma 0,02 braków. Roboty te wykonują tyle samo zabawek na godzinę.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana zabawka z tej fabryki okaże się brakiem?

A *-zdarzenie polegające na tym, że wylosowana zabawka jest brakiem.*
B_1 *-zdarzenie polegające na tym, że wylosowana zabawka pochodzi od robota 1.*

B_2-zdarzenie polegające na tym, że wylosowana zabawka pochodzi od robota 2.
B_3-zdarzenie polegające na tym, że wylosowana zabawka pochodzi od robota 3.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A/B_i)P(B_i)=0{,}03\cdot\frac{1}{3}+0{,}05\cdot\frac{1}{3}+0{,}02\cdot\frac{1}{3}=0{,}1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$$

Drugim z podstawowych twierdzeń jest twierdzenie pozwalające prześledzić przebieg doświadczenia na podstawie jego wyniku:

Twierdzenie 3 (Wzór Bayes'a)
Jeżeli $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ jest układem zupełnym zdarzeń na Ω dodatnich niezerowych prawdopodobieństwach i A dowolne zdarzenie o dodatnim prawdopodobieństwie to zachodzi wzór:

$$P(B_j/A)=\frac{P(A/B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A/B_i)P(B_i)}.$$

Dowód
Wystarczy skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe oraz ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite aby otrzymać:

$$P(B_j/A)=\frac{P(B_j\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A/B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A/B_i)P(B_i)}$$

Wykorzystajmy sytuację z przykładu 4 zmieniając tylko treść pytania. Zauważmy, że znamy już wynik losowania a pytamy się o przebieg losowania.

Przykład 6
W fabryce pracują 3 roboty montażowe. Pierwszy robot ma 0,03 braków, robot drugi ma 0,05 braków a robot trzeci ma 0,02 braków. Roboty te wykonują tyle samo zabawek na godzinę.
Losujemy zabawkę, okazała się ona brakiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi od robota nr 2?

A-zdarzenie polegające na tym, że wylosowana zabawka jest brakiem.
B_1-zdarzenie polegające na tym, że wylosowana zabawka pochodzi od robota nr 1.
B_2-zdarzenie polegające na tym, że wylosowana zabawka pochodzi od robota nr 2.
B_3-zdarzenie polegające na tym, że wylosowana zabawka pochodzi od robota nr 3.

$$P(B_2/A)=\frac{P(A/B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A/B_i)P(B_i)}=\frac{0{,}05\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{30}}=0{,}5.$$

Definicja8

Schematem Bernoulliego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia o dwu możliwych wynikach nazwanych umownie sukcesem i porażką. Poszczególne doświadczenia to próby Bernoulliego.

W powyższej sytuacji zachodzi wzór:

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

gdzie: $P_n(k)$*prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach Bernoulliego,*
p *prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie,* $q=1-p$ *prawdopodobieństwo porażki w jednej próbie.*

Zadania z przykładowymi rozwiązaniami
Model klasyczny prawdopodobieństwa

1. Losowo ustawiam w szeregu klocki z literami MMAAATTYKE. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych i obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy wyraz MATEMATYKA.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że klocki są rozróżnialne i oznaczmy
$T = \{M_1, M_2, A_1, A_2, A_3, T_1, T_2, Y, K, E\}$.
Wtedy przestrzeń zdarzeń elementarnych to wszystkie permutacje elementów ze zbioru T czyli:
$\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_{10}), x_i \neq x_j, x_i \in T\}$. *Zauważmy, że każde ustawienie klocków jest tak samo prawdopodobne a* Ω *jest zbiorem skończonym więc jest to model klasyczny. Z kombinatoryki wiemy, że* $\overline{\overline{\Omega}} = 10!$
Niech A zdarzenie polegające na ułożeniu słowa MATEMATYKA. Łatwo widać, z kombinatoryki, że $\overline{\overline{A}} = 2! \cdot 3! \cdot 2! = 24$. *Stąd:*

$$P(A) = \frac{24}{10!} = \frac{1}{151200}.$$

2. 2 chłopców i 3 dziewczynki ustawiam w szereg . Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych i obliczyć prawdopodobieństwo, że

- *a) chłopcy stoją obok siebie*
- *b) chłopcy i dziewczynki stoją na zmianę.*

3. Cyfry 0,1,2,...,9 ustawiono losowo. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych i obliczyć prawdopodobieństwo, że

- *a) między 0 i 9 stoją dokładnie 4 cyfry*
- *b) 1,2,3,4 będą stały obok siebie.*

4. Przy okrągłym stole usiadło dziesięć kobiet i dziesięciu mężczyzn. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych i obliczyć prawdopodobieństwo, że osoby tej samej płci nie siedzą koło siebie.

5. Z grupy 25 osób w której jest 10 kobiet i 15 mężczyzn wybrano

- *a) 3 osoby na stanowisko starszego specjalisty.*
- *b) 3 osoby do zarządu firmy (prezesa, wiceprezesa ds. marketingu i wiceprezesa ds. produkcji)*

Dla każdego z przypadków opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych i obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wybranych są dokładnie 2 kobiety.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że ludzie są zawsze rozróżnialne i oznaczmy $T = \{k_1, ..., k_{10}, m_1, ..., m_{15}\}$.

a) Ponieważ wybór 3 specjalistów nie wymaga uwzględnienia kolejności więc przestrzeń zdarzeń elementarnych to wszystkie kombinacje 3 elementowe ze zbioru T czyli: $\Omega = \{\{x_1, x_2, x_3\}, x_i \neq x_j, x_i \in T\}$. *Zauważmy, że każdy wybór 3 osób jest tak samo prawdopodobny a* Ω *jest zbiorem skończonym więc jest to model klasyczny. Z kombinatoryki wiemy, że* $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{25}{3}$.

Niech A zdarzenie polegające na wybraniu dokładni 2 kobiet. Łatwo widać, że

$\overline{\overline{A}} = \binom{10}{2}\binom{15}{1}$.

Stąd:

$$P(A) = \frac{\binom{10}{2}\binom{15}{1}}{\binom{25}{3}}.$$

b) W tym przypadku kolejność jest istotna (różne funkcje) więc zmienia się model: $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3), x_i \neq x_j, x_i \in T\}$. *Zauważmy, że każdy wybór 3 osób jest tak samo prawdopodobny a* Ω *jest zbiorem skończonym więc jest to model klasyczny. Z kombinatoryki wiemy, że* $\overline{\overline{\Omega}} = \frac{n!}{(n-3)!}$.

Niech A zdarzenie polegające na wybraniu dokładni 2 kobiet. Łatwo widać, że

$\overline{\overline{A}} = \binom{10}{2}\binom{15}{1}3!$.

Stąd:

$$P(A) = \frac{\binom{10}{2}\binom{15}{1}3!}{\frac{n!}{(n-3)!}} = \frac{\binom{10}{2}\binom{15}{1}}{\binom{25}{3}}.$$

Widzimy, że wynik jest ten sam niezależnie od modelu, ponieważ zdarzenie A nie zależało od kolejności.

6. W pudełku jest 6 śrubek dobrych i 2 złe. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych i obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 4 wybranych śrubek są 3 dobre i 1 zła.

7. Ze schroniska na szczyt prowadzą 3 szlaki: czarny, zielony i niebieski. Odbywam wycieczkę na szczyt i z powrotem wybierając szlaki losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo iż będę wchodzić i schodzić tym samym szlakiem?

Rozwiązanie

Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{(x_1, x_2), x_i \in \{cz, z, n\}\}$. *Zauważmy, że w parze mogą się powtarzać kolory. Znowu mamy do czynienia z modelem klasycznym ponadto* $\overline{\overline{\Omega}} = 3^2 = 9$. *Niech A zdarzenie polegające na powrocie tą trasą którą przyszliśmy,* $A = \{(cz, cz), (z, z), (n, n)\}$, *stąd* $\overline{\overline{A}} = 3$. *Mamy więc* $P(A) = \frac{1}{3}$.

8. Rzucam 2 razy kostką symetryczną. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo

a) wyrzucenia dwukrotnie tego samego?

b) wyrzucenia w sumie 10 oczek?

9. Autobus zatrzymuje się na 10 przystankach. W autobusie jest 8 pasażerów, z których każdy musi wysiąść na jednym z przystanków. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo iż każdy spośród 8 pasażerów wysiądzie na innym przystanku. Jakie jest prawdopodobieństwo iż wszyscy pasażerowie wysiądą na tym samym przystanku.

10. Losowo dzielimy 15 delicji szampańskich między 4 osoby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z nich dostanie:

a) przynajmniej jedno ciasteczko?

b) przynajmniej 2 ciasteczka?

Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Rozwiązanie

Jeśli uznamy, że w modelu tym nie ma znaczenia które delicje otrzymała która osoba to: $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4), x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15\}$*, (przyjmijmy dla ułatwienia zapisu, że 0 należy do liczb naturalnych), gdzie* x_i *to ilość delicji otrzymanych przez i-tą osobę. Z kombinatoryki mamy* $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{15+4-1}{4-1}$ *(wzór na ilość kombinacji z powtórzeniami).*

a) A zdarzenie polegające na otrzymaniu przynajmniej jednego ciasteczka przez każdą osobę,

$A = \{(1+x_1, 1+x_2, 1+x_3, 1+x_4), x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11\}$,

mamy więc z tego samego wzoru co powyżej $\overline{\overline{A}} = \binom{11+4-1}{4-1}$.

Ostatecznie $P(A) = \dfrac{\binom{11+4-1}{4-1}}{\binom{15+4-1}{4-1}}$.

Podpunkt b robi się analogicznie.

11. Do windy zatrzymującej się na 4 piętrach wsiadło 20 osób. Oblicz prawdopodobieństwo iż na każdym z pięter wysiądzie dokładnie 5 osób. Oblicz prawdopodobieństwo iż przynajmniej na jednym piętrze nikt nie wysiądzie. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych.

12. Z liczb 1-1001 wylosowano 2. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Oblicz prawdopodobieństwo iż ich suma jest podzielna przez 3.

13. Używając różnych cyfr ze zbioru $Z = \{3,4,5,7,9\}$ *utworzono liczbę trzycyfrową. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Oblicz prawdopodobieństwo, że:*

a) Jedną z cyfr jest 7

b) Jest to liczba parzysta.

Własności prawdopodobieństwa

1. Niech A,B,C będą zdarzeniami. Niech ponadto:

$P(A) = 0{,}5;\ P(B) = 0{,}2;\ P(C) = 0{,}4;\ P(A \cap C) = 0{,}2;\ P(B \cap C) = 0{,}1;\ P(A \cap B) = 0{,}1;\ A \cap B \cap C = \emptyset$

Policz prawdopodobieństwo:

a) zachodzi przynajmniej jedno ze zdarzeń

b) zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A,B,C

c) zachodzą przynajmniej dwa ze zdarzeń A,B,C

d) nie zachodzi żadne z tych zdarzeń.

Rozwiązanie

a) *Interesuje nas zdarzenie postaci* $A \cup B \cup C$, *gdzie oczywiście A,B,C niekoniecznie rozłączne, stąd*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

i podstawiając otrzymujemy:

$$P(A \cup B \cup C) = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}2 - 0{,}1 - 0{,}1 + 0 = 0{,}7.$$

b) *Interesuje nas zdarzenie postaci*

$\left(A \cap (B \cup C)'\right) \cup \left(B \cap (A \cup C)'\right) \cup \left(C \cap (A \cup B)'\right)$, *tu sumowane zdarzenia są rozłączne , liczymy więc*

$$P\left(\left(A \cap (B \cup C)'\right) \cup \left(B \cap (A \cup C)'\right) \cup \left(C \cap (A \cup B)'\right)\right) =$$

$$P\left(\left(A \cap (B \cup C)'\right)\right) + P\left(\left(B \cap (A \cup C)'\right)\right) + P\left(\left(C \cap (A \cup B)'\right)\right) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) =$$

$$0{,}5 - 0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}1 - 0{,}1 + 0{,}4 - 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}3$$

c) *Samodzielnie*

d) *Teraz musimy policzyć*

$$P(A' \cap B' \cap C') = P\left((A \cup B \cup C)'\right) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 0{,}3.$$

2. *Udowodnij, że* $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

Wskazówka:

Skorzystać z wzoru na sumę zdarzeń oraz z faktu, że prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest mniejsze bądź równe 1.

3. *Dane są* $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ *i* $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. *Oblicz* $P(A), P(A \setminus B)$.

4. *Dane są* $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $A \cap B = \varnothing$. *Uporządkować rosnąco* $P(A \cup B)$, $P(A \cup B')$, $P(A' \cup B)$.

5. *Mając dane zdarzenia niezależne A i B o prawdopodobieństwach:* $P(A) = 0{,}4$ *oraz* $P(B) = 0{,}6$, *znajdź:*

a) $P(A / B)$

b) $P(A \cup B)$

c) $P(A' \cup B)$.

Wskazówka:

Niezależność daje nam $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}24$.

6. *Zbadaj kiedy zdarzenie jest niezależne samo od siebie.*

Rozwiązanie.

Musimy zbadać dla jakich A zachodzi $P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A)$. *Zauważmy, że* $(A \cap A) = A$, *czyli musimy zbadać równość* $a = a^2$ *gdzie* $a = P(A)$. *Oczywiście równość ta zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy* $a = 0 \vee a = 1$. *Stąd mamy, że zdarzenie jest niezależne samo od siebie gdy jego prawdopodobieństwo wynosi 0 lub 1.*

7. *W szafce są 3 pary kaloszy w 3 różnych kolorach i tym samym rozmiarze. Człowiek nie rozróżniający kolorów dzieli je na pary: lewy z prawym. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna para nie będzie jednokolorowa?*

Rozwiązanie

Mamy do czynienia z modelem klasycznym. Wyobraźmy sobie, że nasz daltonista ustawia najpierw 3 prawe kalosze a potem dopasowuje do nich 3 lewe, wtedy każde zdarzenie elementarne to jedno z ustawień 3 kaloszy lewych w ciąg, stąd $\overline{\overline{\Omega}} = 3! = 6$.

Niech A zdarzenie polegające na tym, że żadna para nie jest jednokolorowa. Zbadamy zdarzenie przeciwne do A czyli zdarzenie A' *- przynajmniej 1 para jest jednokolorowa.*

Ponumerujmy pary kaloszy i określmy zdarzenia:

A_1 *para numer 1 jest prawidłowo sparowana,*

A_2 *para numer 2 jest prawidłowo sparowana,*

A_2 *para numer 3 jest prawidłowo sparowana.*

Wtedy

$P(A') = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = .$

$\frac{2!}{3!} + \frac{2!}{3!} + \frac{2!}{3!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} = 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

Czyli $P(A) = 1 - P(A') = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

8. *Na zabawie są 3 pary małżeńskich. W sposób losowy kobiety losują mężczyzn do tańca. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden mąż nie tańczy ze swoją żoną?*

Prawdopodobieństwo geometryczne

1. *Z odcinka* $[-2,3]$ *losujemy liczbę policz prawdopodobieństwo, iż:*
   a) *wylosowana liczba będzie dodatnia*
   b) *kwadrat wylosowanej liczby będzie mniejszy od 1*
   c) *kwadrat wylosowanej liczby będzie większy od 2*
   d) *będzie to liczba wymierna*

Rozwiązanie

Ponieważ losujemy 1 liczbę z odcinka $[-2,3]$, *więc* $\Omega = [-2,3]$, *zaś prawdopodobieństwo określone jest wzorem:* $P(A) = \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_1(\Omega)} = \frac{\lambda_1(A)}{3-(-2)} = \frac{\lambda_1(A)}{5}$.

a) *Niech A zdarzenie: wylosowana liczba będzie dodatnia, wtedy*
$A = \{x \in [-2,3] : x > 0\} = (0,3]$, *stąd* $P(A) = \frac{\lambda_1(A)}{5} = \frac{3}{5}$.

b) *Niech B zdarzenie: kwadrat wylosowanej liczby będzie mniejszy od 1, wtedy*
$A = \{x \in [-2,3] : x^2 < 1\} = (-1,1)$, *stąd* $P(A) = \frac{\lambda_1(A)}{5} = \frac{2}{5}$.

c) *samodzielnie*

d) zbiór liczb wymiernych jest przeliczalną sumą zbiorów jednopunktowych, więc jego miara Lebesgu'a wynosi 0, stąd prawdopodobieństwo zdarzenia z podpunktu d) wynosi 0.

2. *Z odcinka* $[-1,2]$ *losujemy 2 liczby. Policz prawdopodobieństwo tego, że:*
    a) *ich suma jest dodatnia,*
    b) *ich maksimum jest mniejsze od 1,*
    c) *jedna z nich jest 2 razy większa od drugiej,*
    d) *jedna jest wymierna,*
    e) *obie są niewymierne.*

Wskazówka

Zobacz Przykład 2 z części teoretycznej. Zadanie to robimy analogicznie.

3. *Z odcinka* $[0,5]$ *losujemy 3 liczby. Policz prawdopodobieństwo tego, że:*
    a) *ich minimum jest większe od 2,*
    b) *ich maksimum jest większe od 3,*
    c) *jedna z nich jest liczbą naturalną.*
4. *Na odcinku wybrano losowo dwa punkty, które dzielą go na trzy odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że można z tych 3 odcinków zbudować trójkąt?*
5. *Na stół o kształcie koła i promieniu 60 cm rzucono monetę o promieniu 1 cm, która upadła na stół. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moneta nie dotknęła brzegu stołu?*

Rozwiązanie

Musimy określić najpierw model, zauważmy, że jeśli moneta upadła na stół to jej środek ciężkości musi leżeć na stole i właśnie środek monety będzie wyznaczał nam jej położenie. Teraz Ω *to nasz stolik czyli koło o promieniu 60 cm, stąd* $\lambda_2(\Omega) = \Pi(60)^2 = 3600\Pi$. *Niech A zdarzenie polegające nadym, że moneta nie dotknie stołu, oznacza to, że A to koło o promieniu 59 cm, bo promień monety to 1 cm. Stąd* $\lambda_2(A) = \Pi(59)^2 = 3481\Pi$, *czyli* $\frac{\lambda_2(A)}{\lambda_2(\Omega)} = \frac{3481\Pi}{3600\Pi} = \frac{3481}{3600}$.

6. **Zadanie Bufona o igle. Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości a* $(l \le a)$. *Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?*

Prawdopodobieństwo – inne modele, prawdopodobieństwo warunkowe, badanie niezależności zdarzeń ,prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa.

1. *Rzucam 3 razy monetą dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki jest 2 razy większe niż orła. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Policz prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie 2 orłów.*

Rozwiązanie

Ten model nie jest modelem klasycznym bo wyrzucenie reszki jest dwukrotnie bardziej prawdopodobne niż orła, stąd zdarzenia elementarne nie są równie prawdopodobne. Oczywiście $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3), x_i \in \{o, r\}\}$, *ponieważ w jednym rzucie* $P(\{o\}) = \frac{1}{3}, P(\{r\}) = \frac{2}{3}$, *więc poszczególne zdarzenia elementarne mają następujące prawdopodobieństwa:*

$P(\{(o,o,o)\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$, $P(\{(r,o,o)\}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$, $P(\{(o,r,o)\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$,
$P(\{(o,o,r)\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{27}$, $P(\{(r,r,o)\}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$, $P(\{(o,r,r)\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$,
$P(\{(r,o,r)\}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$, $P(\{(r,r,r)\}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$. *Warto jeszcze przeliczyć czy suma prawdopodobieństw wszystkich zdarzeń elementarnych wynosi 1, sprawdzamy, zgadza się. Niech A zdarzenie: wyrzucenie dokładnie 2 orłów. Mamy wtedy sumując odpowiednie prawdopodobieństwa następujący wynik:* $P(A) = \frac{6}{27}$.

2. *Rzucam kostką a następnie monetą tylokrotnie ile wypadło oczek na kostce. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Znajdź prawdopodobieństwo wyrzucenia*
   a) *dokładnie 5 orłów.*
   b) *przynajmniej 1 reszki*
3. *Do urny wkładam 5 kul zielonych, 4 niebieskie, oraz 2 białe. Z urny losuje kolejno 2 kule. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Policz prawdopodobieństwo wylosowania kul we wszystkich kolorach.*
4. *Rzucam kostką do gry do momentu wyrzucenia 6-stki. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Policz prawdopodobieństwo:*
   a) *rzucaliśmy parzystą ilość razy*
   b) *rzucaliśmy mniej niż 5 razy.*

Rozwiązanie

Zauważmy, że mamy do czynienia z przestrzenią nieskończoną
$\Omega = \{6, x6, xx6, xxx6, xxxx6, xxxxx6, \ldots\}, x \in \{1,2,3,4,5\}$. *Jednocześnie* $P(\{x\ldots x6\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{6}$,
gdzie n liczba x-ów poprzedzających 6.

a) *Niech teraz A zdarzenie polegające na tym, że rzucaliśmy parzystą ilość razy,* $A = \{x6, xxx6, xxxxx6, \ldots\}$, *stąd* $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1}\frac{1}{6} = \frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{5}{11}$.

b) *Niech teraz B zdarzenie polegające na tym, że rzucaliśmy mniej niż 5 razy,* $B = \{6, x6, xx6, xxx6\}$, *mamy wtedy* $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{25}{6^3} + \frac{125}{6^4}$.

5. *Rzucamy monetą do momentu wyrzucenia 2 razy pod rząd tej samej strony monety. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Policz prawdopodobieństwo iż rzucaliśmy nieparzystą ilość razy.*
6. *Dwóch graczy A i B rzucają na zmianę monetą. Wygrywa ten z nich który pierwszy wyrzuci orła. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Policz prawdopodobieństwo wygrania dla każdego z nich.*
7. *Trzech graczy A ,B i C rzucają na zmianę monetą. Wygrywa ten z nich który pierwszy wyrzuci orła. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Policz prawdopodobieństwo wygrania dla każdego z nich.*
8. *Rzucam 2 razy kostką do gry. Niech A zdarzenie polegające na wyrzuceniu szóstki w pierwszym rzucie, niech B zdarzenie polegające na wyrzuceniu 1 lub 2 w drugim*

rzucie, zaś C zdarzenie polegające na wyrzuceniu w sumie 7 oczek. Zbadaj niezależność:

- *a) Zdarzeń A i B*
- *b) Zdarzeń A i C*
- *c) Zdarzeń B i C*
- *d) Zdarzeń A,B,C razem.*

Rozwiązanie

Oczywiście $\Omega = \{(x,y), x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, *model klasyczny,* $\overline{\overline{\Omega}} = 36$. *Zauważmy ponadto*

$A = \{(6,y), y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ *oraz* $\overline{\overline{A}} = 6$, $P(A) = \frac{6}{36}$;

$B = \{(x,1),(x,2), x \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ *oraz* $\overline{\overline{B}} = 12$, $P(B) = \frac{12}{36}$;

$C = \{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\}$ *oraz* $\overline{\overline{C}} = 6$, $P(C) = \frac{6}{36}$;

$A \cap B = \{(6,1),(6,2)\}$ *oraz* $\overline{\overline{A \cap B}} = 2$, $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$;

$A \cap C = \{(6,1)\}$ *oraz* $\overline{\overline{A \cap C}} = 1$, $P(A \cap C) = \frac{1}{36}$;

$C \cap B = \{(6,1),(5,2)\}$ *oraz* $\overline{\overline{C \cap B}} = 2$, $P(C \cap B) = \frac{2}{36}$;

$A \cap B \cap C = \{(6,1)\}$ *oraz* $\overline{\overline{A \cap B \cap C}} = 1$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}$.

Mamy więc $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$, $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. *Zdarzenia A,B,C są parami niezależne ale nie są niezależne wszystkie 3 razem.*

9. Wybrano losowo rodzinę z dwójką dzieci i okazało się, że jedno z nich ma na drugie imię Piotrek (co nie znaczy że drugie nie ma na imię Piotrek). Jaka jest szansa, że drugie dziecko też jest chłopcem.

Rozwiązanie

10. Przyjmijmy $\Omega = \{(x_1, x_2), x_i \in \{d, c\}\}$, *gdzie* x_i *płeć i-tego dziecka. Niech A zdarzenie: jedno z nich ma na drugie imię Piotrek, zaś B zdarzenie drugie dziecko też jest chłopcem. Liczymy* $P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

11. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła 6, jeśli na każdej kostce jest inny wynik.

12. Mamy trzy krążki. Jeden z dwóch stron jest biały, drugi ma obie strony czarne a trzeci jedną czarną a drugą białą. Rzucaliśmy losowo wybranym krążkiem i na wierzchu wypadła biała strona. Policz prawdopodobieństwo, że po drugiej stronie jest kolor czarny.

13. Jaka jest szansa, że każdy z graczy S,E,W ma co najmniej 1 asa, jeśli wiadomo, że gracz N nie dostał żadnego.

14. W urnie znajduje się 3 kule białe i 7 czarnych. Losuje z urny 10 razy ze zwrotem. Policz prawdopodobieństwo tego, że:

- *a) Wylosuje 10 kul czarnych*
- *b) Wylosuje 4 kule czarne*

c) Wylosuje co najmniej 2 kule czarne.

15. Myśliwy trafia do dzika z prawdopodobieństwem $p=\frac{1}{5}$*. Ile razy powinien strzelić aby z prawdopodobieństwem większym niż 0,5 trafił dzika przynajmniej raz.*

Wskazówka

Skorzystaj ze schematu Bernoulliego.

16. Rzucono 10 razy symetryczną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ostatnim rzucie wypadnie 3, jeśli wiadomo, że

a) otrzymano 4 trójki,

b) w pierwszych 9 rzutach wypadły same trójki?

*17. *Zadanie Banacha o zapałkach. Pewien matematyk nosi w kieszeniach (lewej i prawej) po jednym pudełku zapałek. Ilekroć chce zapalić papierosa, sięga do losowo wybranej kieszeni. Jaka jest szansa, że gdy po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko to w drugim będzie k zapałek?(k=1,2,3,...,m gdzie m jest liczbą zapałek w pełnym pudełku. Zakładamy, że początkowo matematyk ma 2 pełne pudełka.)*

18. Z jednej urny zawierającej 4 białe, 3 zielone i 3 niebieskie kule do drugiej zawierającej 8 białych kul przekładamy dwie losowo wybrane kule. Następnie z drugiej urny losujemy 1 kule. Policz prawdopodobieństwo iż:

a) jest to kula biała,

b) przełożyliśmy dwie kule białe jeśli wylosowana kula okazała się biała.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że nas interesują tylko 2 rodzaje kul: białe i inne. W zadaniach wykorzystujących wzór na prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa nie musimy konstruować przestrzeni probabilistycznej dla całego doświadczenia, bo wszystkie potrzebne prawdopodobieństwa zależą od pomocniczych przestrzeni. Pierwszej związanej z losowaniem 2 kul z pierwszej urny $\Omega_1=\{\{x,y\},x,y\in\{b_1,b_2,b_3,b_4,i_1,i_2,...,i_6\}\}$ *gdzie literki* b *oznaczają kule białe a literki* i *inne. Druga zależy od wyniku pierwszego losowania. Oznaczmy:*

B_0 *przełożenie dwóch kul innych z pierwszej do drugiej urny,*

$$P(B_0)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{5}{15};$$

B_1 *przełożenie jednej kuli białej i jednej czarnej z pierwszej do drugiej urny,*

$$P(B_1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{8}{15};$$

B_2 *przełożenie dwóch kul białych z pierwszej do drugiej urny,*

$$P(B_2)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{2}{15}.$$

Zauważmy, że zdarzenia te tworzą układ zupełny, bo są rozłączne i obejmują wszystkie możliwe przypadki ($B_i \cap B_j = \varnothing, i \neq j, \bigcup_{i=0}^{2} B_i = \Omega$ *).*
Niech A *oznacza wylosowanie kuli białej z drugiej urny. Potrzebne nam będą teraz jeszcze prawdopodobieństwa zdarzeń:*
A/B_0 *czyli prawdopodobieństwo wylosowania z drugiej urny kuli białej pod warunkiem przełożenie dwóch kul innych z pierwszej do drugiej urny,*
A/B_1 *czyli prawdopodobieństwo wylosowania z drugiej urny kuli białej pod warunkiem przełożenie jednej kuli białej i jednej czarnej z pierwszej do drugiej urny,*
A/B_1 *czyli prawdopodobieństwo wylosowania z drugiej urny kuli białej pod warunkiem przełożenie dwóch kul białych z pierwszej do drugiej urny.*
Łatwo widać, że
$P(A/B_0) = \frac{8}{10}$,
$P(A/B_1) = \frac{9}{10}$,
$P(A/B_2) = 1$
Potrzebujemy policzyć jeszcze

a) *z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy:*
$$P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(A/B_i)P(B_i) = \frac{8}{10}\cdot\frac{5}{15} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{15} + 1\cdot\frac{2}{15} = \frac{22}{25}$$
b) *z wzoru Bayesa* $P(B_2/A) = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{22}{25}} = \frac{5}{33}$.

19. Rzucam kostką a następnie monetą tyle razy ile wypadło oczek na kostce. Policz prawdopodobieństwo:

a) *wyrzucenia 3 orłów,*
b) *wyrzucenia 6 oczek jeśli wypadły 3 orły,*
c) *wyrzucenia 6 oczek jeśli nie wypadł ani jeden orzeł.*

20. W urnie znajduje się a losów wygrywających, b losów przegrywających i c losów „losuj dalej”. Po losowaniu los wrzucamy z powrotem do urny. Korzystając z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite policz prawdopodobieństwo wygranej dla a=100 i b=200.
21. Dwaj gracze A i B rzucają na zmianę kostką symetryczną. Wygrywa ten z nich który pierwszy wyrzuci 6. Korzystając z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite policz prawdopodobieństwo wygranej dla każdego z graczy.
22. Fabryka A produkuje 500 000 samochodów rocznie, fabryka B produkuje 200 000 samochodów a pozostałe 1 300 000 samochodów pochodzi z importu . 10% samochodów z fabryki A jest niebieskich, 20% z fabryki B ma kolor niebieski i tylko 5% pochodzących z importu to samochody niebieskie. Policz prawdopodobieństwo iż:

a) *losowo wybrany samochód z tego rocznika jest niebieski*
b) *losowo wybrany samochód z tego rocznika pochodzi z fabryki A jeśli okazał się niebieski.*

Uwaga końcowa.
Dodatkowo rozwiązania podobnych zadań mają państwo w przykładach w części teoretycznej oraz w pozycjach, z których korzystałam przy pisaniu zestawów:
„Wstęp do teori prawdopodobieństwa” J.Jakubowski, R.Sztencel;
„Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach”, tom1, W.Krysicki, J.Bartos, W.Dyczka, K.Królikowska, M.Wasilewski;
„Prawdopodobieństwo i miara” P.Billinsley