Pósa Lajos

ANALÍZIS I.

Műszaki Könyvkiadó, Budapest

E tankönyv használatát az Oktatási Minisztérium
a T511.845-H/1999. számon engedélyezte.

A könyv a Soros Alapítvány támogatásában részesülő Matematika-módszertani Kutatócsoport közreműködésével, az először 1982-ben megjelent jegyzet alapján készült.

A rajzokat készítette: Varga János

ISBN 963 16 2658 X
Azonosító szám: MK 1101101

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Halmos Mária
Műszaki vezető: Abonyi Ferenc
Borítóterv: Biró Mária
Műszaki szerkesztő: Ihász Viktória
A könyv terjedelme: 6,79 (A/5) ív
E-mail: vevoszolg@muszakikiado.hu
Honlap: www.muszakikiado.hu
Készült a Dabas Jegyzet Nyomdában
Felelős vezető: Marosi György ügyvezető igazgató

Néhány szó a könyvsorozatról

A Matematika-módszertani Kutatócsoport középiskolai matematikatankönyv-sorozata, melynek ez a könyv is része, egy 1973-tól mintegy másfél évtizeden keresztül folyt tanítási kísérlet eredménye.

Ezúton mondunk köszönetet azoknak a tanároknak, akik részt vettek a kísérletben és minden munkatársunknak, akik értékes tapasztalataikkal, beszámolóikkal, megjegyzéseikkel nagyon sokat csiszoltak, javítottak az anyagokon.

Köszönetet mondunk Surányi Jánosnak, aki két évtizedig vezette a kutatócsoport sok nehézséggel terhes munkáját, figyelemmel kísérte, összefogta és kézben tartotta a tanítási kísérletet, nagy szakmai tudásával és emberségével segítette az iskolákban folyó munkát, a tanárok számára komoly támaszt jelentve; vállalta a kísérleti anyagok elkészítésének folyamatos szakmai irányítását, beleértve az anyagokhoz készített részletes bírálatait, amelyek alapján az évek folyamán sok jelentős javításra került sor.

Köszönettel tartozunk Gádor Endrénének, aki a kísérletező tanárok munkáját segítette, és akinek a kísérleti anyagok javításában is sok része volt, és Genzwein Ferencnek, aki a 80-as években nagy segítséget nyújtott ahhoz, hogy a kísérleti munkákat folytathassa a kutatócsoport.

Nagy szeretettel gondolunk Gábos Ildikóra, aki már sajnos nincs közöttünk, és aki nagy tanári tapasztalatával, a kísérletben való lelkes és áldozatkész részvételével, tanári útmutatók készítésével nagyon jelentős részt vállalt könyvsorozatunk kialakításában.

Hálával tartozunk Péter Rózsának, aki élete utolsó éveiben – már nagyon betegen is – igen sokat segített a könyvek elkészítésében; Rényi Alfrédnak, aki annak idején a Matematika-módszertani Kutatócsoportot a Matematikai Kutató Intézetben létrehozta, és aki nagyon hatékonyan támogatta a tanulók önállóságára, kezdeményezéseire, tapasztalataira, felfedezéseire építő matematikatanítást.

Köszönettel tartozunk Kékes Máriának, aki a Műszaki Kiadó részéről sokat tett azért, hogy ez a könyvsorozat minél tökéletesebben juthasson el az iskolákba.

Könyveink szedését D. E. Knuth amerikai matematikus TEX matematikai kiadványszerkesztő programjával készítjük. Bori Tamásnak, Fried Katalinnak és Juhász Lehelnek köszönjük, hogy ennek a lenyűgözően matematikuslelkületű programnak különböző fortélyait megismertették velünk.

Halmos Mária
a könyvsorozat alkotó szerkesztője

I. Függvények

Halmazjelölések, elnevezések

R a valós számok halmaza.
$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a természetes számok halmaza.
N^+ a pozitív egész számok halmaza.
Q a racionális számok halmaza.

Legyen $a < b$. Ekkor:
$(a, b) = \{x |\ a < c < b\}$ (nyílt intervallum)
$[a, b] = \{x |\ a \leq x \leq b\}$ (zárt intervallum)
$(a, \infty) = \{x |\ a < x\}$
$(-\infty, a] = \{x |\ x \leq a\}$
stb.

Legyen A és B két tetszőleges halmaz.

$A \cap B$ jelöli a két halmaz közös részét (metszetét), tehát azokból az elemekből áll, amelyek mindkét halmazban szerepelnek.

$A \cup B$ jelöli a két halmaz egyesítését (unióját), tehát azokból az elemekből áll, amelyek legalább az egyik halmazban szerepelnek.

$A \setminus B = \{x |\ x \in A \text{ és } x \notin B\}$, vagyis $A \setminus B$-hez úgy jutunk, hogy az A elemei közül elhagyjuk azokat, amelyek B-ben is szerepelnek.

A c szám r sugarú környezete a c-hez r-nél közelebb eső számokból áll.

A fenti jelölésekkel:

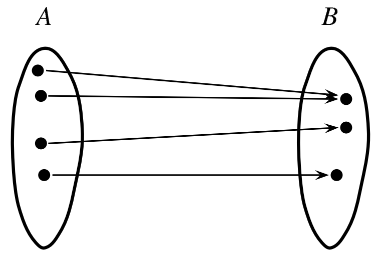
A c szám r sugarú lyukas környezete az r sugarú környezetből c elhagyásával jön létre.

A fenti jelölésekkel:

A fenti két definícióban r csak pozitív számot jelölhet.

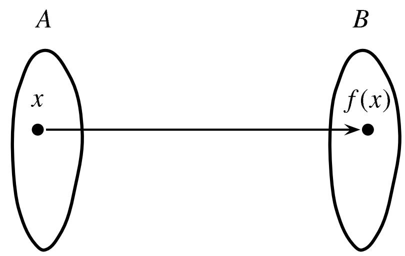
A függvény fogalma (ismétlés)

Legyen A és B két tetszőleges halmaz. Rendeljünk hozzá A minden eleméhez pontosan egy B-beli elemet. Az ilyen hozzárendelést függvénynek nevezzük.



Ez például függvény

Ha a függvényt f-fel jelöljük, az x elemhez hozzárendelt elemet a függvény x helyen felvett értékének nevezzük, és $f(x)$-szel jelöljük.

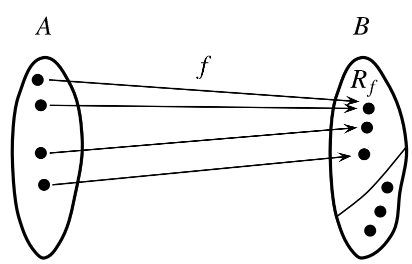


Az A halmazt a függvény értelmezési tartományának, a függvényértékek halmazát pedig a függvény értékkészletének nevezzük. (Ez a halmaz B-nél szűkebb is lehet.)

Jelölésük: D_f, illetve R_f.

Tehát:

$$D_f = A \qquad\qquad R_f = \{f(x) |\ x \in A\}$$



Ebben az anyagban kizárólag olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek valós számokat rendelnek valós számokhoz. Ezeket **valós függvényeknek** nevezzük.

A továbbiakban számon mindig **valós** számot, függvényen – akkor is, ha ezt nem hangsúlyozzuk – mindig **valós függvényt** értünk.

Függvények megadása

I. Képlettel

1. a) $x \mapsto x^2$

b) $y \mapsto y^2$

c) $f(x) = x^2$

d) $g(y) = y^2$

Ez mind ugyanazt a függvényt adja meg. (Mi az értelmezési tartomány?)

A közelmúltig megengedett volt, sok tankönyvben ma is megtalálható még az $y = x^2$ jelölés, továbbá az „x^2 függvény” kifejezési mód.

2. $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Megállapodás: Ha az értelmezési tartomány nincs megjelölve, akkor a függvény az összes olyan valós számra értelmezve van, amelynél a kijelölt műveletek elvégezhetők (tehát az értelmezési tartomány a szónak ebben az értelmében a valós számok körében a „lehető legbővebb”).

Ez a két függvény is azonos. Két függvény, f és g azonos, ha ugyanazokhoz az elemekhez ugyanazokat az elemeket rendelik hozzá: $D_f = D_g$, és minden $x \in D_f$-re $f(x) = g(x)$.

3. $f(x) = x^2 \quad (x \geq 1)$

$x \mapsto x^2 \quad (x \in N)$

$g(y) = y^3 \quad \left(y = \dfrac{1}{n}, \quad n \in N\right)$

stb.

II. Utasítással, táblázattal

Példák:

III. Egy közelebbről meg nem határozott függvényt általában egyetlen betűvel jelölünk: f, g, h. Ilyenkor azonban meg kell mondanunk, hogy függvényről van szó: „az f függvény ...". Írhatjuk ehelyett azt is, hogy $x \mapsto f(x)$, ez hosszabban, de ugyanazt fejezi ki. Régebben használatos volt az $y = f(x)$, illetve az $f(x)$ jelölés is az f függvényre.

Ha az $x \mapsto x^2$ függvény helyett az „x^2 függvényről", az f helyett az $f(x)$ függvényről beszélünk, akkor ugyanazzal a jelöléssel két teljesen különböző dolgot jelölünk egyszerre: x^2 szám is, függvény is, és hasonlóképpen $f(x)$ egyszerre jelent egy **hozzárendelést** is és az x-hez hozzárendelt **elemet** is. Mindazonáltal ez a pontatlanság időnként megengedhető*, ha kényelmünk így kívánja, és ha nem fenyeget a félreértés veszélye (a szövegösszefüggésből általában tudni lehet, hogy a kérdéses kifejezéseket melyik értelemben használjuk).

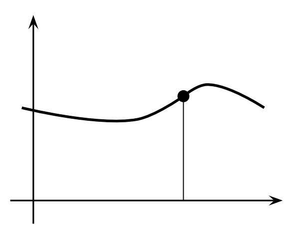
Felvételin, érettségin azonban kerüljük el ezeket a pontatlan kifejezéseket!

Amikor a fizikus az $s(t)$ vagy $s = s(t)$ függvényekről beszél, akkor nem teljesen ugyanaz a kép lebeg a szeme előtt, mint amit most átismételtünk. Számára s és t önálló jelentéssel bíró, úgynevezett **változó mennyiségek**, és a függvény két változó mennyiség kapcsolata (ő tehát nem csak a hozzárendelést látja maga előtt). Ilyen helyzetek vizsgálatánál a fizikában szokásos jelöléseket célszerű használni.

Két változó mennyiség kapcsolatát persze tökéletesen leírja az a hozzárendelési utasítás, amellyel az egyik tetszőleges értékéből megkaphatjuk a másik megfelelő értékét (tehát például az eltelt idő értékéből a megtett utat), matematikai szempontból **csak ez a lényeges**, és **éppen ez a felismerés vezetett a mai értelemben vett függvényfogalomhoz:** „**két változó mennyiség** kapcsolatából" kihullott a két változó mennyiség, és megmaradt a **kapcsolatuk**; az a hozzárendelési utasítás, amelyről az előbb beszéltünk. A fizikában azonban természetesen tovább él az eredeti fogalom, és így az ennek megfelelő jelölés is.

Függvény grafikonja

4. Mit kell érteni egy függvény grafikus ábrázolásán?



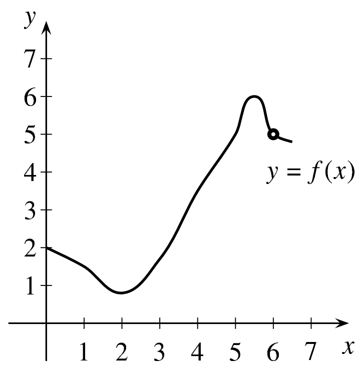
5. Ábrázoljuk az alábbi függvényt!

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 3 - 2x, & \text{ha } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Olvassuk le a grafikonról a függvény értékkészletét!

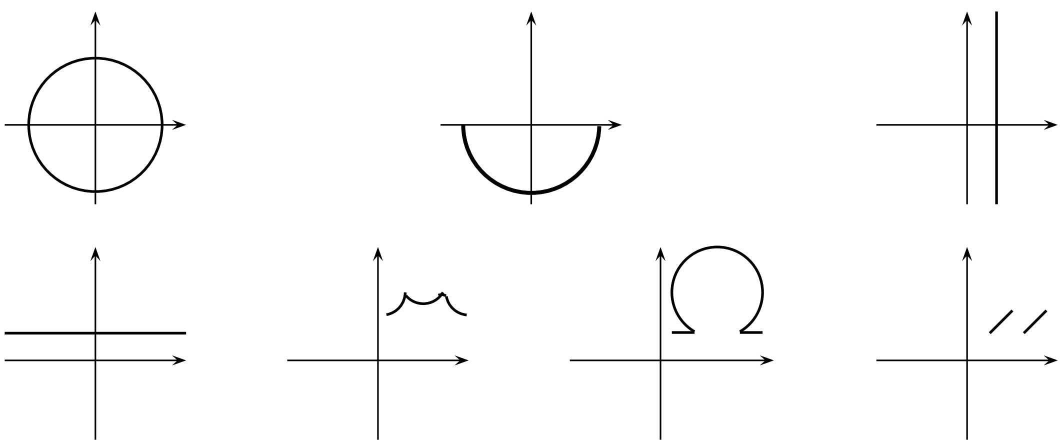
* Van olyan felfogás is, amely szerint ez mindig kerülendő.

6. Az ábrán egy függvény grafikonja látható.



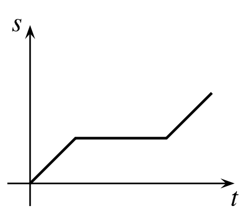
Felveszi-e a függvény a 3 értéket? Van-e olyan érték, amit többször vesz fel? Hogyan lehet leolvasni $f(4)$ értékét?

7. Válogasd ki az alábbi grafikonok közül a függvénygrafikonokat!

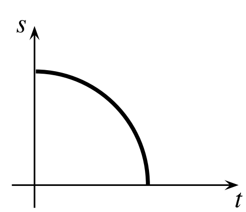


8. Egyenes vonalú mozgás $s(t)$ grafikonjait láthatod. Mi történik?

a)



b)

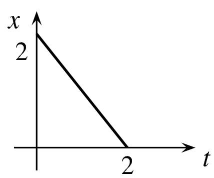


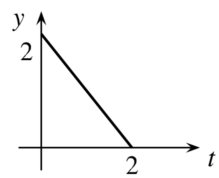
c) Egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test grafikonja hogy néz ki? Hogyan olvasható le a sebessége?

d) Rajzold le egy pattogó labda út-idő görbéjét!

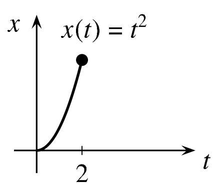
9. Síkmozgás $x(t)$, $y(t)$ grafikonjait látod. Mi történik? Milyen pályán mozog a test?

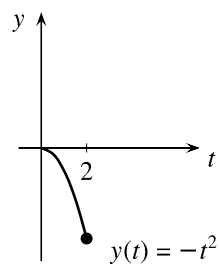
a)





b)





Feladatok

10. Állapítsd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$

b) $g(y) = \sqrt{y^2 - 9}$

c) $x \mapsto \lg\left(9 - x^2\right)$

d) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 4}$

e) $f(x) = x + \dfrac{4}{x} \qquad (x > 0)$

11. Igaz-e, hogy ha egy függvény felveszi az 1 és a 3 értékeket, akkor felveszi valahol a 2 értéket is?

12. Tételezzük fel, hogy
(a) Londontól New Yorkba hajóval 5 napig tart az út.
(b) Minden délben pontosan egy hajó indul és egy hajó érkezik (Londonba is, New Yorkba is). (A delet londoni idő szerint értjük.)

Egy Londonból New Yorkba tartó hajó az utazás teljes időtartama alatt hány szembejövő hajóval találkozik? (A hajók egyetlen rögzített útvonalon haladnak.)

13. Van-e olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya, illetve értékkészlete az alább megadott halmazokkal egyezik meg?

	értelmezési tartomány	értékkészlet
a)	R	$[-1, 1]$
b)	R	$[0, 1]$
c)	$[0, 1]$	$[1, \infty)$
d)	$[0, 1]$	$[0, \infty)$

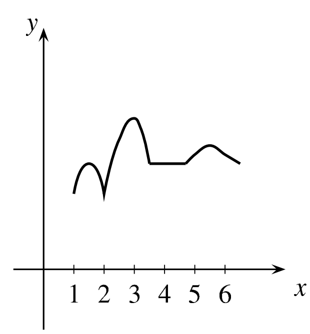
14. $A = \{a, b, c\}$ $B = \{d, e\}$

Hány olyan függvény van, amely A-n van értelmezve, és B-ből vesz fel értékeket?

Általánosítsuk a feladatot!

Monotonitás, szélsőérték

Az f valós függvény monoton növő, ha



f monoton nő $[a, b]$-ben, ha

f-nek maximuma van c-ben, ha

f-nek lokális maximuma van c-ben, ha

f szigorúan monoton nő, ha

Feladatok

★**15.** **a)** Van-e olyan monoton növő függvény, amelynek értelmezési tartománya R, értékkészlete pedig $[0, 1]$?

b) Van-e olyan szigorúan monoton növő függvény, amely mindenütt (vagyis R minden elemére) értelmezve van, és az összes függvényérték -1 és 1 közé esik?

★**16.** Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amely egyetlen intervallumban sem monoton?

17. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitás, szélsőérték és értékkészlet szempontjából!

a) $f(x) = x^2 + 6x + 8$

b) $f(x) = 3 - x^2 - 2x$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x$

18. Hol van maximuma, illetve minimuma az $f(x) = x^2 - 4x + 11$ függvénynek az $[1, 4]$ intervallumban? Mi a függvény értékkészlete itt?

19. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit és értékkészletét!

a) $x^4 - 4x^2 + 3$

b) $4^x - 2^{x+2} + 3$

c) $\cos^2 x + \cos x - 1$

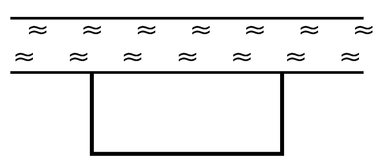
d) $\sqrt{3 - x^2 - 2x}$

e) $\dfrac{1}{3 - x^2 - 2x}$

(A 10. oldalon engedélyezett pontatlanság: $x \mapsto f(x)$ helyett $f(x)$-et írtunk. Nem lehet félreérteni!)

20. Az $y = x^2$ parabola melyik pontja van legközelebb a $(0, 1)$ ponthoz?

21. Folyóparton 100 m kerítéssel legfeljebb mekkora téglalap alakú kertet lehet bekeríteni?



22. Adottak a síkbeli A, B, C pontok. A sík mely P pontjára lesz a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg a legkisebb?

Páros, páratlan, periodikus függvények

Az f valós függvény

páros,	$\vdots$	páratlan,
	ha	
	(a) értelmezési tartománya 0-ra szimmetrikus, és	
(b) $f(x) = f(-x)$	$\vdots$	$f(x) = -f(-x)$
	minden x-re, ahol $f(x)$ értelmezve van.	

Az f függvény p periódussal periodikus ($p > 0$), ha az értelmezési tartományon belül felvett minden x-re $x \pm p$ is benne van az értelmezési tartományban, és $f(x) = f(x + p)$.

Kérdések

23. Az $f(x) = x^n$ függvény n mely pozitív egész értékeinél páros, illetve páratlan?

24. Van-e olyan függvény, amely se nem páros, se nem páratlan?

25. Hogyan néz ki

- **a)** egy páros függvény grafikonja;
- **b)** egy páratlan függvény grafikonja;
- **c)** egy p szerint periodikus függvény grafikonja?

26. Van-e olyan periodikus függvény, amelynek csak egy periódusa van?

27. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket a párosság, páratlanság szempontjából!

- **a)** $\sin x \cdot \operatorname{tg} x + x^3 \cdot \cos x$
- **b)** $2^{x^2} \cdot x - \dfrac{\sin x}{1 + x^2}$
- **c)** $\sin x + \cos x$
- **d)** $\lg\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)$

28. Periodikusak-e az alábbi függvények? Ha igen, állapítsuk meg a legkisebb periódusukat.

a) $\sin(x + 2)$

b) $\sin x^2$

c) $(\sin x)^2$

d) $\sqrt{\operatorname{tg} x} + 6$

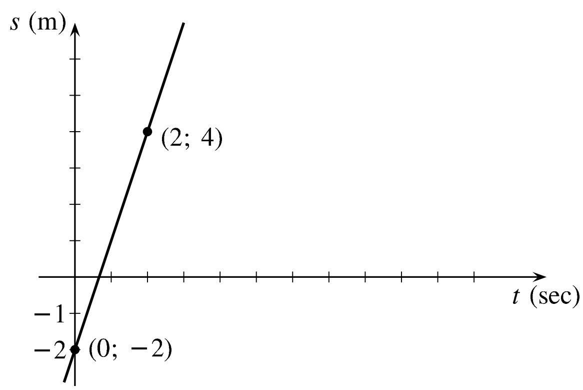
e) $\cos 2x$

f) $\cos \frac{x}{2}$

II. Sebesség és érintő

Egyenes vonalú egyenletes mozgás

1. Az ábra szerint mozgó testnek mekkora a sebessége?

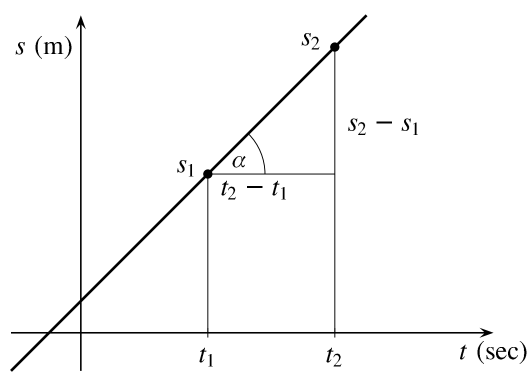


2. Rajzolj olyan $s(t)$ grafikont, amely egy

a) $\frac{1}{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ sebességgel haladó test mozgását írja le!

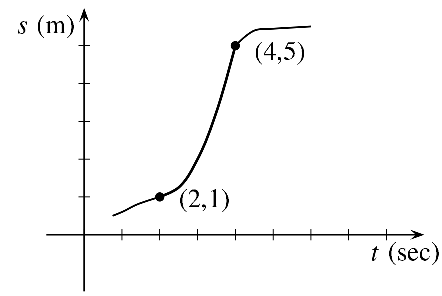
b) $1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ sebességgel haladó test mozgását írja le!

3. $v = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \operatorname{tg}\alpha$



Az egyenes iránytangense a sebességet adja meg $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\text{-ban}\right)$.

4. Egyenes vonalú, de nem egyenletes mozgást végző test út-idő grafikonját látod. Mekkora a test átlagsebessége a $2 \leq t \leq 4$ időintervallumban?

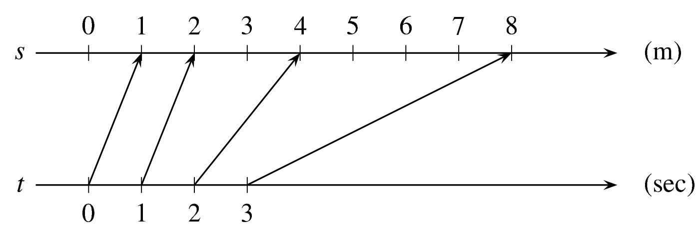


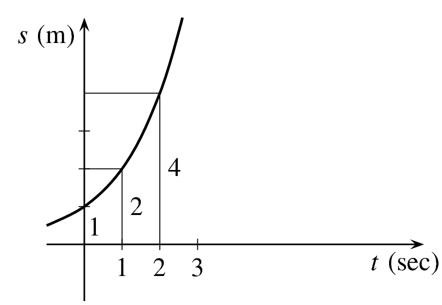
Pillanatnyi sebesség

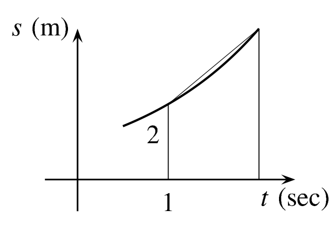
5. Megadjuk egy egyenes vonalú mozgást végző test helyzetét az idő függvényében:

$$s(t) = 2^t$$

Mekkora a test sebessége a $t = 1$ pillanatban, azaz mennyi $v(1)$?





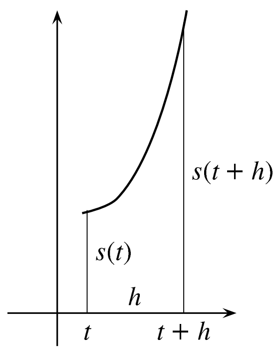


6. Egy másik mozgást is megnézünk.

A test mozgását leíró függvény:

A vizsgált pillanat: $t =$

$h =$



$s(t) =$

$s(t + h) =$

$v(t) \approx$

Egy másik pillanatban: $t =$

h	t	$s(t)$	$t + h$	$s(t + h)$	$v(t) \approx$

A sebességfüggvény:

t						
$v(t)$						

Érintő

7. Határozzuk meg az $y = x^3$ egyenletű görbe érintőjét

a) a $(2;\ 8)$ pontban;

b) az $(1;\ 1)$ pontban!

8. Határozzuk meg az $y = x^2$ egyenletű görbe érintőjének meredekségét

a) az (1; 1) pontban;

b) a (3; 9) pontban;

c) egy tetszőleges pontjában!

9. Tudnál-e olyan érintőmeghatározási feladatokat mondani, amelyekre a válasz már az eddigiek alapján a birtokunkban van?

10. Állapítsd meg az érintő meredekségét az alábbi görbék megadott pontjában:

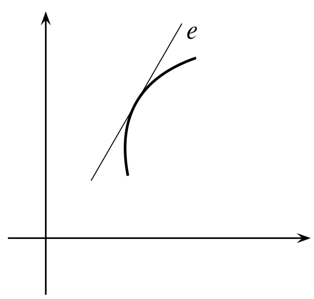
a) $y = 2x^3$ $\quad P(2;\ 16)$

b) $y = 3x^3$ $\quad P(1;\ 3)$

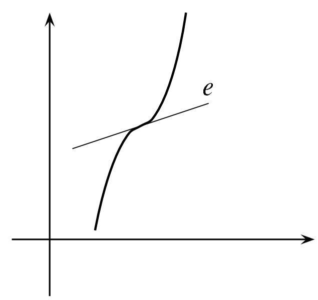
c) $y = x^2 + x^3$ $\quad P(2;\ 12)$

11. Az alábbi ábrák közül melyiken látható érintő, és melyiken nem?

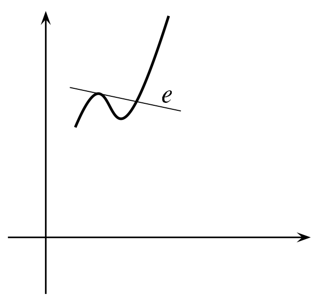
a)



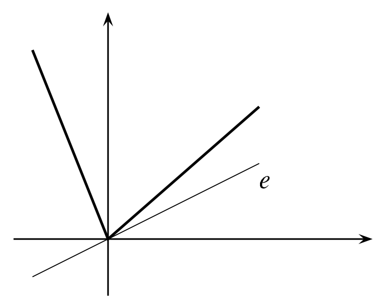
b)



c)



d)

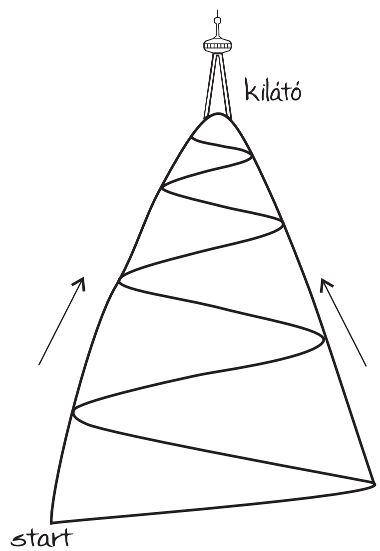


III. Sorozat határértéke

Bevezetés

1. Ábránkon két meredek hegyi út és egy azok közt kígyózó szerpentin látható.

Hányféleképpen juthatunk fel a kilátóhoz, ha ezeket az utakat akár felváltva is használhatjuk (de végig csak felfelé haladhatunk)?



2. Az 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... sorozat Fibonacci nevét viseli, n-edik tagját f_n-nel fogjuk jelölni.

$f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$ stb.

A képzési szabály így írható le:

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

***3.** Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozat szomszédos tagjai mindig relatív prímek!

4. Figyeljük meg a szomszédos tagok hányadosát!

Körülbelül mekkora lehet $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ értéke n nagyobb értékeire (vagyis milyen gyorsan nő a Fibonacci-sorozat)?

n	f_n	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$
1	1	1
2	1	2
3	2	1,5
4	3	1,667
5	5	

n	f_n	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$

Az 1000-nél kisebb tagokra írd fel a hányadost!

Mit figyeltél meg?

★5. Tegyél fel ésszerű kérdéseket a megfigyeléseiddel kapcsolatban!

6. Most vizsgáljunk meg egy másik, hasonló típusú sorozatot is ebből a szempontból:

$F_1 = 3, F_2 = 4, \ldots \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

n	F_n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$
1	3	1,33
2	4	1,75
3	7	1,57
4	11	

Elnevezés: az $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ $(n \in N^+)$ feltételnek eleget tevő sorozatokat Fibonacci-típusúaknak nevezzük.

7. $a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$

Mihez tarthat az (a_n) sorozat?

8. $a_0 = 0 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_{n+3} = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3}$

$(a_n) \to ?$

Kérdezz tovább!

9. Tippeld meg a határértékeket számolás nélkül! Ellenőrizd a sejtésed! (Be tudod bizonyítani, hogy jó volt a sejtésed?)

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

b) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$

c) $a_n = \dfrac{2n+3}{n}$

d) $b_n = \sqrt[n]{2}$

e) $c_n = \dfrac{2n^2+3n-7}{4n^2-n+5}$

f) $d_n = \dfrac{1{,}01^n}{n}$

g) $e_n = n \cdot 0{,}99^n$

h) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

10. Mi a határértéke a

$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ sorozatnak?

A határérték definíciója

Már a sebességgel, érintővel foglalkozó részben láttuk, mennyire szükségünk lenne a határérték pontos megfogalmazására. Ezt támasztják alá az előző feladatok is. Igaz, most **sorozat** határértékéről van szó, ami szemlátomást más jellegű kérdés, mint amivel az előző fejezetben foglakoztunk. Mégis várható, hogy ha az egyiket sikerül megfogni, az megkönnyíti a másik megfogalmazását is.

Nem könnyű feladat ezeknek a definícióknak a kitalálása. A matematika történetében körülbelül 200 év telt el úgy, hogy már használták a kérdéses fogalmakat, de még nem születtek meg a pontos definíciók.

11. Találjuk ki a sorozat határértékének definícióját!

Ebben a könyvben sorozaton mindig valós számsorozatot értünk.

Az (a_n) sorozat a c számhoz tart, ha

Mit kívánjunk az (a_n) sorozattól?

Megjegyzés: Persze tőlünk függ, hogy milyen értelmet adunk „$(a_n) \to c$”-nek, a definíció elvben önkényes. De van egy intuitív képünk a határértékről, és olyan definíciót keresünk, amely megfelel ennek a képnek.

12. Annyit elárulok, hogy a keresett definíció a c szám környezetével kapcsolatos. Valami olyasmiről van szó, hogy a „sorozat tagjainak zöme jó közel kell legyen c-hez”, ha tehát vesszük c-nek egy kis sugarú környezetét, akkor . . . ?

Hogyan kell elhelyezkedniük a sorozat tagjainak a környezethez képest? Mit kívánjunk meg?

(Ne olvass tovább!)

13. Vizsgáljuk meg a következő javaslatot:

$(a_n) \to c$, ha c-nek van olyan környezete, amelybe a sorozat minden tagja beleesik.

14. Vizsgáljuk meg a következő javaslatokat:

(a) $(a_n) \to c$, ha c-nek bármelyik környezetébe a sorozat minden tagja beleesik.

(b) $(a_n) \to c$, ha c-nek bármelyik környezetébe a sorozatnak végtelen sok tagja esik bele.

15. Szemléletes elképzelésünkhöz képest a **14.** (a) túl sokat kíván, a **14.** (b) pedig túl keveset. A kettő között van az igazi. De hát van valami a kettő között? Az egyik végtelen sok tagot kíván a környezetbe, a másik az összeset. Mi az, ami több a „végtelen sok”-nál, de kevesebb az „összes”-nél?

(Ne olvass tovább!)

Definíció: Az (a_n) számsorozat a c számhoz tart, ha c bármely környezetéből a sorozatnak csak véges sok tagja marad ki.

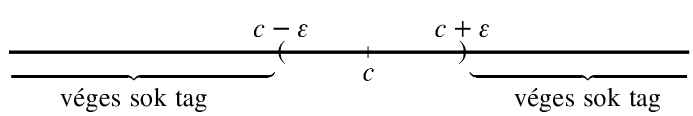
Jelölése: $(a_n) \to c$

$$a_n \to c, \text{ ha } n \to \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = c$$

Ezt a definíciót így is megfogalmazhatjuk:

$(a_n) \to c$, ha minden ε pozitív számra igaz, hogy a sorozatnak csak véges sok tagja esik a $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ intervallumon kívülre.



És még egy, az előbbiekkel ekvivalens definíció:

$(a_n) \to c$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz található olyan n_0 szám, amelyre teljesül, hogy

$$c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon, \text{ ha } n > n_0 \text{ (és } n \in N^+).$$

Az utóbbi definíció annak a kissé homályos gondolatnak ad pontos értelmet, hogy „a_n borzasztó közel van c-hez, ha n elég nagy”.

A definíció használata

16. Mihez tartanak az alábbi sorozatok? A definíció segítségével bizonyítsuk is be, amit állítunk!

a) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$

b) $a_n = 3 + \frac{4}{n}$

c) $b_n = \frac{4n + 2}{2n - 3}$

Ha nehezen megy a bizonyítás, válassz konkrét ε-t! Legyen például $\varepsilon = 0{,}01$!

17. Tekintsük a következő sorozatot:

$$1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \ldots$$

a) Mihez tart a sorozat?

b) Nézzük meg, hogy

– a határérték ε sugarú környezetéből hány tag marad ki, továbbá

– hányadik tagtól kezdve esik mindegyik tag az ε sugarú környezetbe, ha

$\varepsilon = 3;\ 1;\ \frac{1}{2};\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001.$

ε	ennyi tag van az ε sugarú környezeten kívül	az ennél nagyobb sorszámú tagok már mind az ε sugarú környezeten belül vannak
3		
1		
0,5		
0,1		
0,01		
0,001		

18. Igaz-e, hogy a 0, 1, 0, 1, 0, ... sorozat $\frac{1}{2}$-hez tart?
Válaszodat bizonyítással támaszd alá!

19. Az $(a_n) \to c$ definíciója minden $\varepsilon > 0$-ra (minden környezetre) kíván valamit. Mit jelent, ha $(a_n) \to c$ nem teljesül?

20. Válaszd ki az alábbi állítások közül azt, amelyik $(a_n) \to c$ tagadásával egyenértékű (tehát azzal, hogy „ $(a_n) \to c$ nem igaz")!

(Vigyázat: „x páros szám" tagadásával nem egyenértékű, hogy „x 7-re végződő szám"!)

(a) c bármely környezetén kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van.

(b) c-nek van olyan környezete, amelyen kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van.

(c) c-nek van olyan környezete, amelyen belül a sorozatnak véges sok tagja van.

Mi a fenti három állítás logikai kapcsolata (melyikből következik a másik)?

Definíció: Ha az (a_n) sorozat tart valamilyen c számhoz, akkor konvergensnek, ellenkező esetben divergensnek mondjuk.

21. Lehetséges-e, hogy egy konvergens sorozatban végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív szám szerepel?

22. Konvergensek vagy divergensek az alábbi sorozatok?

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

★**b)** $a_n = 1{,}01^n$

c) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

d) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

e) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$

★**23.** Állapítsd meg a következő sorozatok határértékét (szükség esetén válassz először konkrét ε értékeket, legyen például $\varepsilon = 0{,}01$)!

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $a_n = \sqrt[n]{2}$

c) $a_n = 0{,}9^n$

d) $a_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$

24. Állapítsd meg a következő sorozatok határértékét!

a) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$

b) $a_n = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$

c) $b_n = \dfrac{10}{\sqrt{n}+1}$

d) $c_n = \dfrac{\cos n}{n}$

e) $d_n = \dfrac{6n+1}{2n-11}$

f) $a_n = \dfrac{3\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}$

Feladatok

25. Bizonyítandó, hogy egy sorozatnak nem lehet két határértéke!

26. Mutassuk meg, hogy ha $(a_n) \to c$ és $c > 0$, akkor a sorozatban csak véges sok negatív szám szerepelhet!

27. Igaz-e, hogy ha (a_n) konvergens, akkor $(a_{n+1} - a_n) \to 0$?
Igaz-e az állítás megfordítása?

28. Hogyan definiálnád azt, hogy $(a_n) \to \infty$?

Nevezetes határértékek

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, ha $a > 0$;

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ha $-1 < q < 1$.

$\big((q^n) \to 1$, ha $q = 1$, és (q^n) divergens, ha $q \leq -1$ vagy $q > 1.\big)$

Műveletek sorozatokkal

29. Tippeld meg, hogy mi a határértéke a következő sorozatoknak!

a) $a_n = \sqrt[n]{2} + \dfrac{n+1}{n}$

b) $a_n = \left(\sqrt[n]{2} + 3\right) \cdot \dfrac{n+2}{n}$

30. Fogalmazd meg azokat a tételeket, amelyek várhatólag igazak, és amelyek felhasználásával könnyen igazolhatók lesznek az előbb kapott eredmények!

Tétel: Ha $(a_n) \to a$ és $(b_n) \to b$, akkor

31. Mi a következő sorozatok határértéke?

a) $\dfrac{\sqrt[n]{2} + 1}{3 + 0{,}9^n}$

b) $\dfrac{\left(1 + \sqrt[n]{3}\right) \cdot \left(2 + \sqrt[n]{3}\right)}{\sqrt[2n]{5}}$

Megjegyzés: Ha például „a 2^n sorozatról” beszélünk, akkor a (2^n) sorozatra, és nem annak n-edik tagjára, vagyis 2^n-re gondolunk. Ez a pontatlanság is megengedhető (vö. a 10. és a 14. oldalon mondottakkal). Ennek megfelelően $\left(\dfrac{1}{n}\right) \to 0$ helyett azt is leírhatjuk, hogy $\dfrac{1}{n} \to 0$. (Ez a megállapodás sem általánosan elfogadott.)

32. Állapítsd meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $\dfrac{3n^2 + 7n + 1}{100n^2 - 17n + \pi}$

b) $\dfrac{26n^3 + 100n^2 - 9n + 7}{13n^3 - 6n^2 - 8n + \dfrac{1}{2}}$

c) $\dfrac{4n^3 + 5n^2 + 6n + 7}{3n^4 - 27n^3 - 9n^2 + 1}$

33. Tippelj a következő sorozatok határértékére!

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2}$

b) $b_n = n^2 \cdot \left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n}\right)$

c) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$

d) $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

⋆34. Bizonyítsd be, hogy ha $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, és $(a_n) \to a$, akkor $\left(\sqrt{a_n}\right) \to \sqrt{a}$!

⋆35. $\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n\right) \to ?$

Útmutatás: Szorozzunk és osszunk $\left(\sqrt{n^2 + n + 1} + n\right)$-nel!

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + n + 1} + n\right)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} =$$

A megoldás (folytatása):

$$= \frac{(n^2 + n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

Itt a számláló 1-hez, a nevező 2-höz tart (felhasználva az előző feladat állítását), tehát a hányados határértéke $\dfrac{1}{2}$.

36. Állapítsd meg a következő sorozatok határértékét!

a) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2},\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3},\ \ldots$

b) $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2},\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3},\ \ldots$

c) $a_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$

Feladatok

37. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

a) $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{n} - \dfrac{n^2}{n+1}$

b) $b_n = \dfrac{n^3}{n^2-1} - \dfrac{n^2}{n-1}$

⋆c) $a_n = \dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{n^2}{n^3}$

⋆d) $a_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n^2}$

⋆e) $a_n = \sqrt[n]{2 + \dfrac{1}{n}}$

f) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{5}{n^2} + \ldots + \dfrac{2n-1}{n^2}$

⋆g) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}},\ \ldots$

h) $a_n = \left(\dfrac{1}{n^2+1} - \dfrac{1}{n^2+2}\right)\cdot\left(2n^4 - 3n^3\right)$

i) $b_n = \dfrac{n^3+n^2}{3n^2+1} - \dfrac{n}{3}$

⋆38. a) $a_1 = 20 \qquad a_{n+1} = \dfrac{5+a_n}{4} \qquad (a_n) \to ?$

b) $a_1 = -3 \qquad a_{n+1} = \dfrac{5+a_n}{4} \qquad (a_n) \to ?$

c) $a_1 = 0{,}9 \qquad a_{n+1} = a_n - a_n^2 \qquad (a_n) \to ?$

⋆39. Konvergens-e az $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ képletekkel értelmezett sorozat?

40. Állapítsd meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $\left(\sqrt{2n^2+3n} - \sqrt{2n^2-n}\right)$

b) $n\cdot\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{1-\dfrac{2}{n}}\right)$

c) $\sqrt{n^4+2n^2+n} - n^2$

★41. Mi a következő két állítás kapcsolata (következik-e valamelyikből a másik)?

$$(a_n - b_n) \to 0 \qquad\qquad \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to 1$$

A (b_n) sorozatban nem szerepelhet a 0.

(Mindkét állítás valami olyasmit fejez ki, hogy $a_n \approx b_n$.)

42. **a)** Abból, hogy $(a_n + b_n)$ konvergens, következik-e, hogy (a_n) is, és (b_n) is konvergens?

b) Abból, hogy (a_n) konvergens, és (b_n) divergens, következik-e az, hogy $(a_n + b_n)$ divergens? És az, hogy $(a_n \cdot b_n)$ divergens?

43. Abból, hogy $(a_n) \to 3$, és $a_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, következik-e, hogy $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ konvergens?

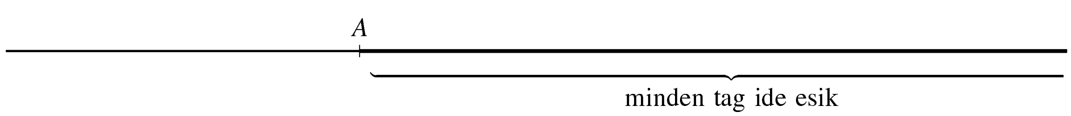
Részsorozat, monotonitás, korlátosság és konvergencia

44. Adjunk példát olyan sorozatra, amelyben sem legnagyobb, sem legkisebb tag nem található!

45. (Folytatás) Tudnál **korlátos** sorozatot is megadni az előző feladatra? (Mi lehet a korlátosság definíciója?)

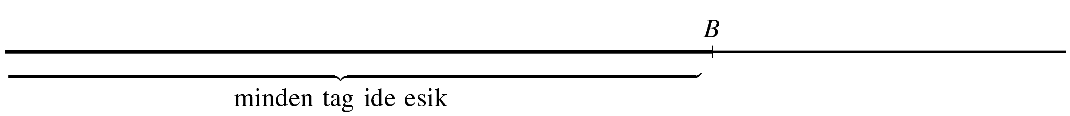
Definíció: Az (a_n) sorozat alulról korlátos, ha megadható egy A szám, amelynél kisebb eleme nincs a sorozatnak, más szóval $a_n \geq A$ minden n-re teljesül (n persze csak pozitív egész szám lehet).

Az ilyen tulajdonságú A számot a sorozat alsó korlátjának nevezzük ($a_n = A$ megengedett!).



(a_n) felülről korlátos, ha megadható egy B szám, amelynél nagyobb eleme nincs a sorozatnak (azaz $a_n \leq B$ minden n-re teljesül).

Az ilyen tulajdonságú B számot a sorozat felső korlátjának nevezzük.



(a_n) korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos.

46. Melyik állításból következik a másik?

(a_n) korlátos sorozat $\qquad\qquad$ (a_n) konvergens sorozat

47. Mondj példát sorozatra, amely

a) felülről korlátos, alulról nem korlátos;

b) alulról korlátos, felülről nem korlátos;

c) se alulról, se felülről nem korlátos!

Definíció:

(a_n) monoton nő, ha $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ \ldots$

(a_n) szigorúan monoton nő, ha $a_1 < a_2 < a_3 \ \ldots$

(a_n) monoton fogy, ha $a_n \geq a_{n+1} \ \ (n = 1, 2, 3, \ \ldots)$

(a_n) szigorúan monoton fogy, ha $a_n > a_{n+1} \ \ (n = 1, 2, 3, \ \ldots)$

48. Lehet-e szigorúan monoton növő sorozat konvergens?

49. Igaz-e, hogy minden konvergens sorozat véges sok tag elhagyásával monoton sorozattá tehető?

50. Legyen (a_n) monoton növő sorozat. Mire **tippelsz**, mi a következő két állítás kapcsolata?

(a_n) konvergens $\qquad\qquad$ (a_n) korlátos

(Ne olvass tovább!)

Tétel

Monoton korlátos sorozat mindig konvergens.

Ez a tétel módot ad arra, hogy sorozat konvergenciáját bizonyítsuk anélkül, hogy ismernénk a határértékét.

Például legyen: $a_n = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{2 \cdot 10^2} + \dfrac{1}{3 \cdot 10^3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot 10^n}$

Ez a sorozat monoton nő, és korlátos is, hiszen

$$a_n < 0,\underbrace{111\ldots 1}_{n \text{ darab}} < \frac{1}{9}.$$

Tehát a fenti tétel szerint (a_n) konvergens.

51. $a_n = \sqrt[3n+7]{5} \qquad (a_n) \to ?$

52. Az előző sorozat a $b_n = \sqrt[n]{5}$ sorozat **részsorozata**.

Húzzuk ki egy végtelen sorozat tagjainak egy részét! A megmaradó tagok az eredeti sorozat egy részsorozatát alkotják (feltéve, hogy végtelen sok tag maradt meg).

Példák:

sorozat: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

részsorozatai például: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

$\frac{1}{11}, \frac{1}{111}, \frac{1}{1111}, \ldots$

$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

sorozat: $a_1, a_2, a_3 \ldots$

részsorozatai például: $a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ ez az (a_{2n}) sorozat

$a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots$ ez az $\left(a_{n^2}\right)$ sorozat

$a_2, a_5, a_8, a_{11}, \ldots$ ez az (a_{3n+2}) sorozat

Írd le az (a_{4n-1}), az (a_{3n}), valamint az (a_{n^2+n}) sorozatok első néhány tagját!

Definíció: Az (a_n) sorozat részsorozatai az $(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots)$ sorozatok, ahol (i_n) pozitív egészekből álló, tetszőleges szigorúan monoton növő sorozat.

53. Van-e olyan 2-höz tartó (a_n) sorozat, amelyre $(a_{2n}) \to 4$?

54. Mi a következő két állítás kapcsolata?

(a_{2n}) konvergens (a_n) konvergens

55. Lehetséges-e, hogy (a_{2n}) határértéke más, mint (a_{2n+1}) határértéke (feltéve, hogy mindkettőnek van határértéke)?

56. Lehetséges-e, hogy (a_{2n}) határértéke más, mint (a_{3n}) határértéke (feltéve, hogy mindkettőnek van határértéke)?

Tétel: Ha $(a_n) \to c$, akkor (a_n) minden részsorozata is c-hez tart.

★**57.** Adjunk példát olyan sorozatra, amelynek végtelen sok különböző számhoz van odakonvergáló részsorozata!

★**58.** Létezik-e olyan sorozat, amelynek **minden számhoz** van odakonvergáló részsorozata?

★**59.** Bizonyítsuk be, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata. (Következmény: minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.)

Egy új módszer határérték megállapítására (olvasmány)

Tudjuk, hogy ha egy sorozatról kimutatjuk, hogy monoton és korlátos, akkor ezzel azt is igazoltuk, hogy konvergens, mégpedig anélkül, hogy a határértékét meghatároztuk volna. Most egy módszert mutatunk be, amellyel a határérték létezéséből annak értékére lehet következtetni, legalábbis az esetek egy részében.

Példák:

60. $a_n = \sqrt[n]{6}$

A sorozat monoton fogyó. Korlátossága nyilvánvaló (felső korlát például a 6, alsó pedig az 1), tehát konvergens. Jelöljük a határértéket x-szel!

$a_{2n} = \sqrt[2n]{6} \to x$, mivel részsorozat határértékéről van szó.

$\sqrt[n]{6} = \sqrt[2n]{6} \cdot \sqrt[2n]{6}$

A bal oldal x-hez, a jobb oldal $x \cdot x$-hez tart, innen $x = x^2$. Ezek szerint $x = 0$ vagy $x = 1$. Ebből az $x = 0$ nem jöhet szóba (a sorozat minden tagja 1-nél nagyobb), így:

$$\left(\sqrt[n]{6}\right) \to 1$$

61. $a_n = 0{,}99^n$

A sorozat monoton fogy és korlátos (felső korlát: 1, alsó korlát: 0). Tehát van határérték.

Mondjuk: $0{,}99^n \to x$

A befejezés kétféleképpen is alakulhat:

I.
$$\begin{array}{cccc} a_{n+1} = & 0{,}99^{n+1} & = & 0{,}99 \cdot a_n \\ \downarrow & & & \downarrow \\ x & & = & 0{,}99 \cdot x \end{array}$$

Innen $x = 0$.

II.
$$\begin{array}{cccc} a_{2n} = & 0{,}99^{2n} & = & a_n^2 \\ \downarrow & & & \downarrow \\ x & & = & x^2 \end{array}$$

Innen $x = 0$ vagy $x = 1$. Ebből $x = 1$ könnyen kizárható, tehát $x = 0$.

★62. $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n + \dfrac{2}{a_n}}{2}$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \dfrac{2}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}$$

$a_1 = 2$ figyelembevételével elmondhatjuk, hogy $a_n \geq \sqrt{2}$ a sorozat minden tagjára teljesül.

Most belátjuk, hogy a sorozat monoton fogyó, tehát hogy $a_n \geq a_{n+1}$:

$$a_n \geq \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$$

$$2a_n \geq a_n + \frac{2}{a_n}$$

$$a_n \geq \frac{2}{a_n}$$

$$a_n^2 \geq 2$$

Ezt tudjuk, és a lépések ekvivalens átalakítások voltak.

A sorozat ezek szerint korlátos is; felső korlát: 2, alsó korlát: $\sqrt{2}$. Így a_n konvergens sorozat, mondjuk:

$a_n \to x \qquad (x > 1)$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \dfrac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$x = \frac{x + \frac{2}{x}}{2}$$

$$2x = x + \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{2}{x}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \qquad (\text{mivel } x = -\sqrt{2} \text{ lehetetlen})$$

Tehát $a_n \to \sqrt{2}$.

63. A módszer alkalmazásával vizsgáld meg a következő sorozatok határértékét!

a) $a_1 = 10 \qquad a_{n+1} = \dfrac{5 + a_n}{3}$

b) $a_1 = 0{,}9 \qquad a_{n+1} = a_n - a_n^2$

c) $a_1 = 0{,}7 \qquad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1 + {a_n}^2}$

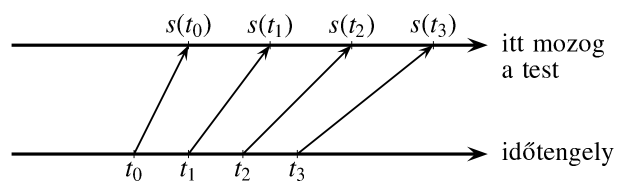
d) $a_1 = 0 \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

IV. Függvény határértéke és folytonossága

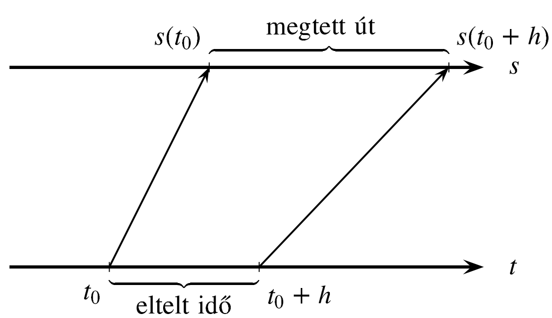
Bevezetés

A pillanatnyi sebességet (II. fejezet) határértékként szeretnénk értelmezni. Ha egy egyenes vonalú mozgást végző test helykoordinátáját a t pillanatban $s(t)$-vel jelöljük, akkor a test sebességére a t_0 pillanatban jó közelítést kaphatunk a következő módon:

Választunk egy „nagyon kicsi” h számot, és a t_0-tól $(t_0 + h)$-ig tartó időtartamra* meghatározzuk az átlagsebességet.

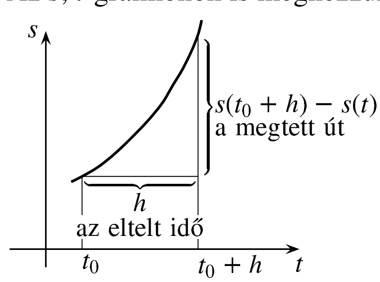


Az $s(t)$ jelölés értelme alapján:



$$\overline{v} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Az s, t grafikonon is megnézzük ugyanezt:



$$\overline{v} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

* h negatív is lehet, ekkor persze helyesebb lenne $(t_0 + h)$-tól t_0-ig tartó időtartamról beszélni.

Ez tehát **közelítés** a pillanatnyi sebesség értékére. Ám a **végtelen sok közelítés** elvezet a pillanatnyi sebesség **pontos** értékéhez:

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Azaz **elvezetne**, ha az itt látható határérték-fogalom a birtokunkban lenne!

Minek a határértékéről van szó? Mi a változó? A h szám, az időtartam változik, itt tehát a

$$h \mapsto \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

függvény határértékéről van szó a 0 helyen.

Meg kell találnunk a függvényhatárérték pontos definícióját, és a most következő fejezetben épp ezzel foglalkozunk majd.

Egy példán nézzük meg, hogy a definíció nélkül is, „józan ész” alapon is lehet sebességet meghatározni:

$$s(t) = c \cdot t^3$$

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \frac{c \cdot (t_0 + h)^3 - c \cdot t_0^3}{h} = c \cdot \frac{t_0^3 + 3t_0^2 \cdot h + 3t_0 \cdot h^2 + h^3 - t_0^3}{h} =$$
$$= c \cdot \left(3t_0^2 + 3t_0 \cdot h + h^2\right)$$

Ha most h iszonyatosan kicsi, akkor $3t_0 \cdot h$ és h^2 is fantasztikusan kicsi, elmondhatjuk tehát, hogy

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} c \cdot \left(3t_0^2 + 3t_0 \cdot h + h^2\right) = 3ct_0^2$$

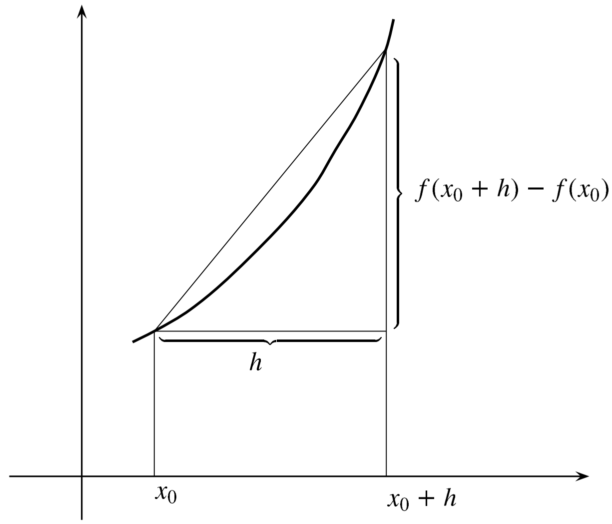
$$\boxed{v(t) = 3ct^2}$$

Pontatlan az okoskodás? Nyilván az, hiszen egy definiálhatatlan fogalomra épít, mégis meggyőző, minden kétséget eloszlató.

Említettük már, hogy kb. 200 éven keresztül virágzott a matematikának ez az ága – anélkül, hogy a benne szereplő alapfogalmakat sikerült volna tisztázni. Az előző példa fényében ez nem is olyan meglepő – meghatároztuk egy test sebességét, és ehhez elég volt a határértékről alkotott szemléletes elképzelés.

Ez az elképzelés azonban nem mindig és nem mindenhez elegendő. A sorozat határértékével kapcsolatban is jöttünk már zavarba, a szemlélet a bonyolultabb helyzetekben felmondhatja a szolgálatot. Az analízis történetének első 200 évében jó néhányszor bukkantak fel olyan paradoxonok (tehát jónak látszó lépésekből felépülő, de hamis eredményre vezető okoskodások), amelyek magyarázatára épp az alapfogalmak homályossága miatt nem volt remény. Többek között emiatt is következett be az a nagyjelentőségű fordulat e témakör történetében, hogy a múlt század második felében az összes idevágó fogalomra precíz definíciót adtak, és az odáig felállított tételeket, gondolatmeneteket ezek fényében felülvizsgálták. (Jó néhány addig helyesnek tartott tétel hamisnak bizonyult!)

Végül arra is érdemes visszaemlékeznünk, hogy hasonló kérdésekre vezetett az $y = f(x)$ egyenletű görbe érintőjének keresése.



Az ábrán látható szelő „kicsi” h-ra várhatóan „jó közel” van az x_0-beli érintőhöz*, így minden reményünk megvan arra, hogy az x_0-beli érintő iránytangense a szelő iránytangensének határértéke lesz:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Matematikai szempontból tehát a sebességmeghatározás és az érintőmeghatározás ugyanaz a feladat (pedig mennyire más dologról van szó!), így módszerünk két teljesen különböző helyen lesz felhasználható – és tegyük hozzá: még jó néhány egyéb területen is.

A határérték definíciója

1. Mi lehet körülbelül az $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ kifejezés értéke, ha x nagyon közel van az 1-hez? És ha még sokkal közelebb? Mi az $x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ függvény határértéke, ha x 1-hez tart? Számolj géppel!

Szemléletesen tehát arról van szó, hogy ha x fantasztikusan közel van az 1-hez, akkor $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ is rendkívül közel lesz egy számhoz, mégpedig a ..... -hoz, és ezért ez a szám az ő határértéke.

---

* Pontosabban szólva az $(x_0;\ f(x_0))$ pontbeli érintőkről van szó – ehelyett gyakran csak a pont abszcisszáját mondjuk.

2. Sejtsük meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 1}{3x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 5x - 6}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

3. Ábrázold a számegyenesen az alábbi egyenlőtlenségek megoldását!

a) $|x - 5| < 2$

b) $|x - 5| < 0{,}5$

c) $|x - 3| < 0{,}1$

d) $0 < |x - 5| < 0{,}5$

e) $0 < |x - 3| < 0{,}1$

Fogalmazd meg, hogy mely számok milyen sugarú lyukas, illetve nem lyukas környezetét kaptad eredményül (ezek definíciója a 7. oldalon található)!

4. Tehát mit keresünk? Annak a pontos értelmét, hogy $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$.

Erről van egy szemléletes képünk, ami lényegében a következőt jelenti:

„$f(x)$ nagyon közel van a c számhoz, ha x elég közel van a b értékhez.”

Kíséreld meg a pontos definíció megalkotását!

A definíció azzal kapcsolatos, hogy bármilyen kicsi pozitív szám is az ε, az $f(x)$ függvény értéke $c - \varepsilon$ és $c + \varepsilon$ közé esik, ha

Definíció: Az f függvény határértéke a b helyen c (b, $c \in R$), ha

I. f értelmezve van b egy lyukas környezetében, és

II. minden $\varepsilon > 0$-hoz megadható egy olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy

$$c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon, \text{ ha } b - \delta < x < b + \delta, \text{ és } x \neq b.$$

Ugyanez másként kifejezve:

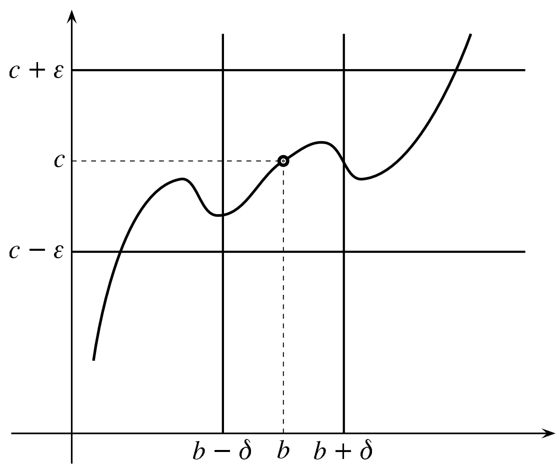
$$|f(x) - c| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x - b| < \delta.$$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$,

$\lim\limits_{b} f = c$,

$f(x) \to c$, ha $x \to b$.

Szemléltetés:



Akármilyen icipici szám is az ε, van b-nek egy olyan lyukas környezete, amelyhez tartozó összes függvényérték az ε-sávon belül helyezkedik el – lásd ábra.

5. Legyen

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

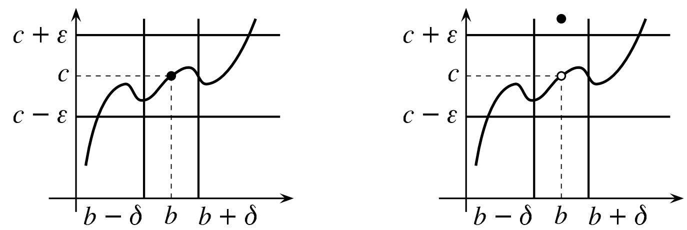
$g(x) = x + 1$

$$h(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \neq 1, \\ 4, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Ábrázold a függvényeket, és mindegyiket vizsgáld meg határérték szempontjából, ha $x \to 1$.

Megjegyzés: Az f függvény b-beli viselkedésének (tehát annak, hogy b-ben értelmezve van-e, vagy sem, és ha értelmezve van, mennyi ott az értéke) nincs kihatása a b-beli határérték létezésére.

Az előző oldal ábrája tehát például így is kinézhet:



A sebességre, érintőre vezető példáinkban szereplő függvények nem voltak értelmezve a kérdéses helyen, például:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(t_0+h)^3-t_0^3}{h}$$

$h=0$-ra ez a függvény (mármint a $h \mapsto \dfrac{(t_0+h)^3-t_0^3}{h}$ függvény) nincs értelmezve.

6. Vizsgáld a következő határértékeket a definíció segítségével!
$\varepsilon = 0{,}01$-hoz adjál meg egy jó δ-t!

Minden $\varepsilon > 0$-hoz is megadható jó δ?

a) $\lim\limits_{x\to 1}(5x+3)$

b) $\lim\limits_{x\to 2}(7x-1)$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}x^2$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2-1}{3x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

7. $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{ha } x<0 \\ 0, & \text{ha } x=0 \\ 1, & \text{ha } x>0 \end{cases}$

Létezik-e a $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ határérték?

8. Fontos függvénnyel ismerkedünk meg:

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Neve: Dirichlet-függvény.

a) Létezik-e a $\lim\limits_{x\to 0} D(x)$ határérték?

b) Periodikus-e a Dirichlet-függvény? Rendelkezik-e valamilyen más, eddig tanult függvénytulajdonsággal?

9. Létezik-e a $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$ határérték?

10. Ha $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ nem teljesül, akkor a definíció I. vagy II. pontjával lehet baj. A II. pont azt kívánja meg, hogy minden pozitív ε-hoz legyen található egy bizonyos tulajdonságokkal rendelkező (röviden „jó”) δ szám. Mit jelent az, hogy ez nem áll fenn?

Egyetlen ε-hoz sem található jó δ? Vagy van olyan ε, amelyhez nem található? Nézzük meg ebből a szempontból az előbbi példákat!

Határérték a végtelenben

11. Mit jelenthet szemléletesen: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x+3}{2x-4}$?

És mennyi az értéke?

Hogyan néz ki a függvény grafikonja?

12. Találjuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ definícióját!

„Ha x nagyon nagy, $f(x)$ rettentően közel van c-hez” – valami ilyesmit fejezhet ki.

Hol legyen a függvény értelmezve? (Hol kell mindenképp értelmezve lennie?)

Bizonyára most is szerepelni fog a definícióban a $c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon$ egyenlőtlenség. Milyen x értékekre kívánjuk ezt meg?

Definíció:

Az f függvény határértéke a ∞-ben c ($c \in R$), ha

I. létezik egy p szám, amelynél nagyobb minden x-re $f(x)$ értelmezve van;

(jelekkel: $(p, \infty) \subset D_f$), és

II. minden $\varepsilon > 0$-hoz megadható egy olyan K szám, amelyre teljesül, hogy

$$c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon, \text{ ha } x > K.$$

Jelölése: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$

$\lim\limits_{\infty} f = c$

$f(x) \to c, \text{ ha } x \to \infty.$

1. megjegyzés: Hasonlóan értelmezhető a $(-\infty)$-ben vett határérték is.

13. Létezik-e határértéke az alábbi függvényeknek a ∞-ben?

a) $x \mapsto \sin x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

e) $x \mapsto D(x)$ (Dirichlet-függvény)

f) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-4}$

g) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

2. megjegyzés: A sorozat határértéke a fenti definíció alapján nem vezethető vissza a függvény végtelenbeli határértékére, mivel egy sorozat – mint N^+-on értelmezett függvény – nem elégítheti ki a definíció I. pontját. Ezt a pontot azonban módosíthatjuk:

I.' D_f felülről nem korlátos.

Ekkor a II. pont is módosulásra szorul:

II.' Minden $\varepsilon > 0$-hoz megadható egy olyan K szám, amelyre teljesül, hogy $c-\varepsilon < f(x) < c+\varepsilon$, ha $x > K$ és $x \in D_f$.

Ez a definíció már speciális esetként tartalmazza a sorozat-határérték fogalmát.

Műveletek függvényekkel

14. Tippeld meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+5x+7}{2x^2+x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

15. Milyen tételekre lenne szükségünk ahhoz, hogy az előző feladat eredményét könnyen tudjuk igazolni?

Tétel: Ha $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ és $\lim\limits_{x\to b} g(x) = d$, akkor

Megjegyzés: az előző tétel $x \to \infty$ mellett is igaz.

16. **a)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - x + 1} =$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3 + 1}{x^2 - 2x + 10} =$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{5x^2 - 11x + 2} =$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{5x^2 - 18x + 9} =$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1} =$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1} =$ (n, m pozitív egészek)

17. **a)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 5x}{x^7 - 8x^5 + 2x} =$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3 + 7x^6 - 5x^2}{3x^2 + 9x^3 - 10x^8} =$

18. **a)** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3 + 6x + 1}{8x^3 + 9x^2 + 5} =$ **b)** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3 + 6x + 1}{2x^4 + 9x^2 + 5} =$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x + 2 \cdot \sqrt{x} - 3}{2x - 3 \cdot \sqrt{x} + 1} =$ **d)** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 1} - \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x} \right) =$

19. Az alábbi határértékek meghatározásánál felhasználható a következő tétel:
Ha $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ és $c > 0$, akkor $\lim\limits_{x\to b} \sqrt{f(x)} = \sqrt{c}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2} + 3x^2 + 2x}{5x^3 - 2x^2 + 7x}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1} \right)$

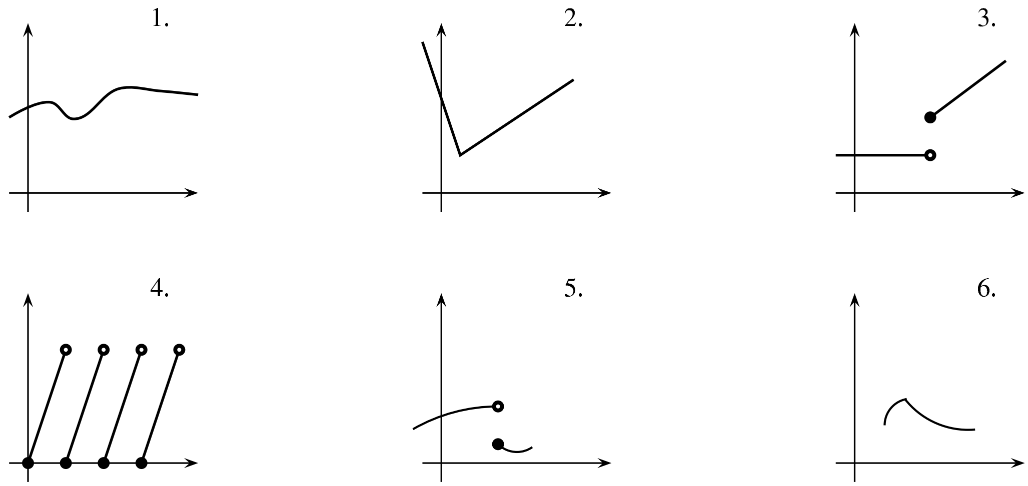
c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2x \right)$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2\sqrt{x^6 + 3x^5 + 2x - 1} + x^2 + 5x + 3}{3\sqrt{4x^6 - 7x + 5} - 2x^2 + 5x - 3}$

20. Abból, hogy $\lim\limits_{x\to b} \big(f(x) + g(x)\big)$ létezik, következik-e, hogy mindkét függvénynek külön-külön is van határértéke b-ben?

Folytonosság

21. Függvények grafikonját látod. Melyik függvényt érzed „folytonosnak”?

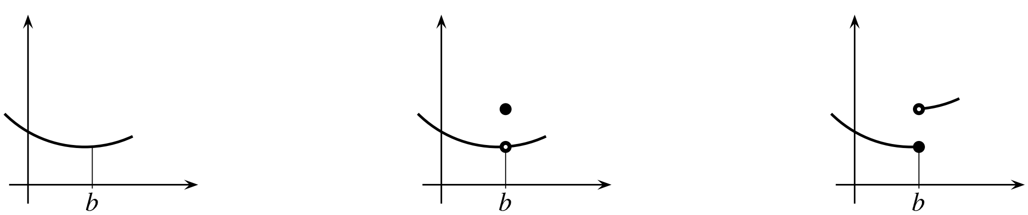


Amelyikről úgy véled, hogy nem folytonos, arról mondhatjuk-e azt, hogy „általában folytonos”, csak egyes kivételes helyeken nem az?

22. Találjuk ki a következő fogalom definícióját:

„az f függvény folytonos a b helyen”

1. Segítség: a következő három függvénygrafikon:



2. Segítség: a definíció a b helyen vett határértékkel kapcsolatos.

1. Definíció: Az f függvény folytonos a b helyen, ha

I. értelmezve van a b egy környezetében,

II. létezik a b-beli határértéke, és

III. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$.

(Tulajdonképpen a III. állítás tartalmazza az első kettőt, hiszen csak akkor értelmes a bal oldala, ha van b-beli határérték, ehhez viszont f-nek értelmezve kell lennie b egy lyukas környezetében, továbbá III. jobb oldalán szerepel $f(b)$, tehát f-nek b-ben is értelmesnek kell lennie, ez „betömi a lyukat”, így f b-nek egy teljes környezetében is értelmezett.)

Ha a határérték definícióját is figyelembe vesszük, akkor a folytonosság következő, az előbbivel persze egyenértékű definíciójához jutunk:

2. Definíció: Az f függvény folytonos b-ben, ha

I. f értelmezve van b egy környezetében, és

II. minden $\varepsilon > 0$-hoz megadható egy olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy

$$|f(x) - f(b)| < \varepsilon, \text{ ha } |x - b| < \delta.$$

(Szó szerint $0 < |x - b| < \delta$ lenne, de az $x = b$ esetet most felesleges kizárni, ekkor $f(x) - f(b)$ úgyis éppen 0-val egyenlő.)

23. Nézd meg újra az ebben a fejezetben szereplő **5.** feladatot! 3 függvény szerepel benne. Közülük melyek folytonosak 1-ben? És másutt?

24. Folytonosak-e az alábbi függvények a megadott helyeken?

a) $f(x) = x^2;$ $\qquad x = 3$

b) $g(x) = \sqrt{x};$ $\qquad x = 0$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 4, & \text{ha } x = 1 \end{cases};$ $\qquad x = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 3, & \text{ha } x = 1 \end{cases};$ $\qquad x = 1$

e) $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1};$ $\qquad x = 1$

f) $h(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases};$ $\qquad x = 0$

25. Adj példát olyan mindenütt értelmezett valós függvényre, amely sehol sem folytonos!

★26. Adj példát olyan mindenütt értelmezett valós függvényre, amely összesen 1 pontban folytonos!

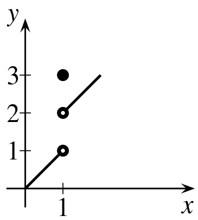
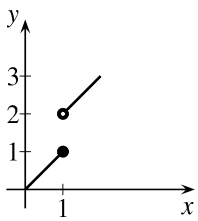
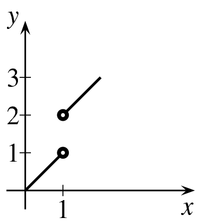
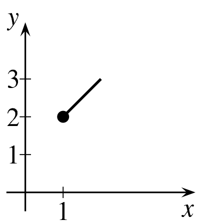
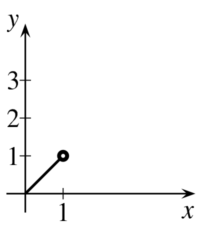
Definíció: A határérték és a folytonosság mintájára lehet értelmezni a féloldali határérték és a féloldali folytonosság fogalmát. Bal oldali határérték, illetve folytonosság esetén a kérdéses helynek csak a bal oldali környezeteit kell vizsgálni, jobb oldali határértékeknél, folytonosságnál pedig csak a jobb oldali környezeteket.

27. Töltsd ki a következő táblázatot!

A lehetséges válaszok:

– ha határértékről van szó: „nincs”, illetve meg kell adni az értékét,

– ha folytonosságról van szó: „nincs”, illetve „van”.

a függvény görbéje	bal oldali határérték	jobb oldali határérték	bal oldali folytonosság	jobb oldali folytonosság
	az 1-ben			
				
				
				
				
				

Definíció: Az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, ha minden (a, b)-beli pontban folytonos, továbbá a-ban jobbról, b-ben balról is folytonos.

Hasonlóan értelmezhető a folytonosság más típusú intervallumra is.

Definíció: Az f függvény folytonos, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos. (Ezt a kívánalmat célszerű enyhíteni, és többféleképp is történhet a módosítás. Mivel azonban nem fogjuk használni a kérdéses fogalmat, ezért nem bocsátkozunk részletekbe.)

Tétel: Az $x \mapsto x^n$ ($n \neq 0$, egész), $x \mapsto x^t$ (t valós szám, $x > 0$), $x \mapsto a^x$, $x \mapsto \log_b x$ ($b > 0$, $b \neq 1$), $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ függvények folytonosak.

Definíció: f és g legyenek valós függvények. Ekkor a következőképpen értelmezzük az $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ függvényeket:

(1) $f + g = x \mapsto \big(f(x) + g(x)\big)$, tehát $f + g$ az a függvény, amely x-hez $\big(f(x) + g(x)\big)$-et rendel minden olyan x-re, amelynél $\big(f(x) + g(x)\big)$-nek értelme van – ezek szerint $(f + g)$ értelmezési tartománya f és g értelmezési tartományának közös része.

(2) $f - g = x \mapsto \big(f(x) - g(x)\big)$

(3) $fg = x \mapsto f(x) \cdot g(x)$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$

(4) $\dfrac{f}{g} = x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$D_{\frac{f}{g}}$ szűkebb lehet $D_f \cap D_g$-nél, mert $g(x) = 0$ gyökeit el kell hagynunk még belőle.

Tétel: Ha f és g folytonosak b-ben, akkor $f + g$, $f - g$, fg is folytonos b-ben. Ha még $g(b) \neq 0$ is teljesül, akkor $\dfrac{f}{g}$ is folytonos b-ben. Hasonló tétel mondható ki az intervallumon folytonos függvényekre.

28. A fenti tételek felhasználásával igazold, hogy az $f(x) = x^3 \cos^2 x + \sin x + 2^x$ függvény folytonos!

29. Határozd meg b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha } x < 2 \\ x^2 - x + b, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen!

30. **a)** Abból, hogy $(f + g)$ folytonos b-ben, következik-e, hogy f is és g is folytonos b-ben?

b) Igaz-e, hogy ha f folytonos, g pedig nem folytonos b-ben, akkor $(f + g)$ nem folytonos b-ben? És az, hogy (fg) nem folytonos b-ben?

Függvénytulajdonságok

31. Fogalmazd meg az alábbi definíciókat!

A H valós számhalmaz

felülről korlátos, ha

alulról korlátos, ha

korlátos, ha

Az f függvény

felülről korlátos, ha

alulról korlátos, ha

korlátos, ha

Hasonlóan értelmezhető az, hogy az f függvény egy megadott intervallumon (alulról, felülről) korlátos.

32. Adj példát olyan [0, 1]-ben értelmezett függvényre, amely

a) felülről nem korlátos, de alulról korlátos;

b) sem felülről, sem alulról nem korlátos!

33. Keress olyan mindenütt értelmezett* korlátos függvényt, amely

a) periodikus;

b) nem periodikus!

34. Van-e olyan mindenütt értelmezett szigorúan monoton növekvő függvény, amely korlátos?

35. Van-e olyan [0, 1]-ben értelmezett korlátos függvény, amelynek nincs maximuma?

36. Mit gondolsz, van-e olyan folytonos függvény, amely

a) a **32.** feladat megoldása lehetne?

b) az előző feladat megoldása lehetne?

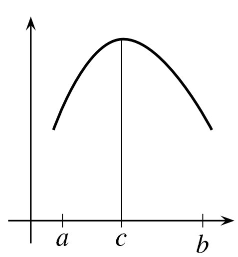
37. Hány megoldása van az $x^3 + x = 3$ egyenletnek?
Tudod-e bizonyítani, amit állítasz?

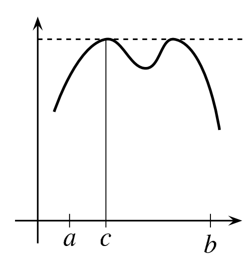
38. Keressünk olyan tételt, amely az előző feladat megoldásához jól jönne!

Zárt intervallumban folytonos függvények tulajdonságai

Tétel: Ha f folytonos $[a, b]$-ben, akkor ott korlátos is.

Tétel: Ha f folytonos $[a, b]$-ben, akkor ott van maximuma is, azaz létezik olyan c hely ($a \leq c \leq b$), melyre $f(c) \geq f(x)$, ha $a \leq x \leq b$.
Hasonlóképpen f-nek minimuma is van $[a, b]$-ben.

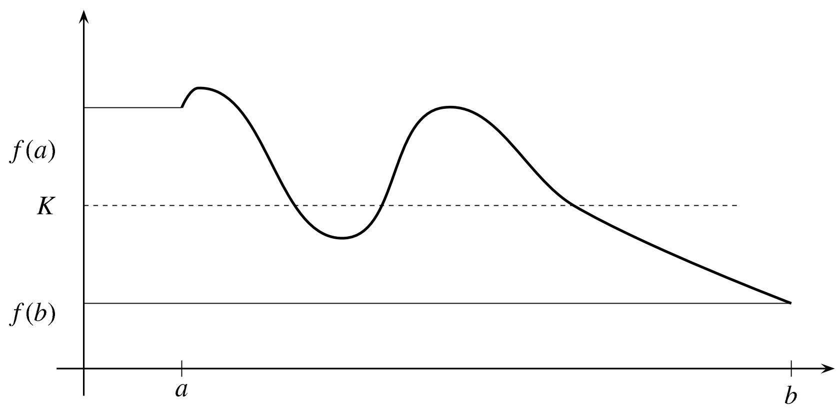




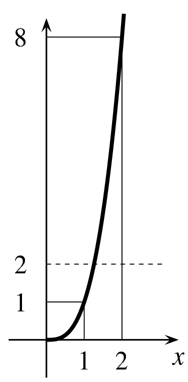
* Ez persze csak annyit jelent, hogy az értelmezési tartomány R.

Megjegyzés: Az utóbbi tétel tartalmazza az előzőt, hiszen a maximum egyben felső korlát, a minimum pedig alsó korlát is.

Tétel: Ha f folytonos $[a, b]$-ben, akkor ott felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket (vagyis: ha a K szám $f(a)$ és $f(b)$ közé esik, akkor az $f(x) = K$ egyenletnek van megoldása $[a, b]$-ben).



Megjegyzés: Ezt a tételt kimondatlanul már igen sokszor felhasználtuk. Honnét tudjuk például azt, hogy van értelme $\sqrt[3]{2}$ -ről beszélni? Ehhez az $x^3 = 2$ egyenlet megoldhatósága kell, ami viszont egyszerű következménye az előző tételnek.



$f(x) = x^3$

$a = 1 \qquad b = 2$

$f(a) = 1 \qquad f(b) = 8$

$K = 2$

★**39.** f folytonos $[0, 1]$-ben, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Az előbbiek szerint az $f(x) = 0$ egyenletnek van gyöke 0 és 1 között.

De hány gyöke van?

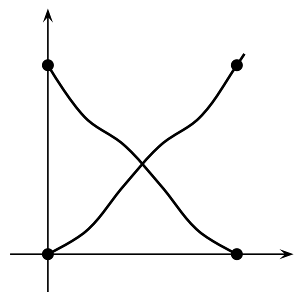
a) Lehet-e 7 gyöke?

b) Lehet-e 10 gyöke?

c) Lehetséges-e, hogy végtelen sok gyöke van?

40. f és g $[0, 1]$-ben folytonos függvények.

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 1$, $g(1) = 0$. Bizonyítandó, hogy az $f(x) = g(x)$ egyenletnek van megoldása.



V. Differenciálszámítás

A differenciálhányados

Olvassuk el újra a IV. fejezet bevezetését!

Gondolkozzunk azon, hogy mit lenne célszerű érteni egy függvénygörbe érintőjén!

Definíció: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 hely egy környezetében. f differenciálható az x_0 helyen, ha a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

határérték létezik (és véges*).

Ez a határérték az f függvény differenciálhányadosa (vagy deriváltja) az x_0 helyen. Jelölése: $f'(x_0)$.

Megjegyzések:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ helyett írhattuk volna ezt is:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(2) Gyakori hiba, ha valaki azt hiszi, hogy itt az f függvény határértékéről van szó. Egy pillantás az előbbi képletekre, és máris látjuk, hogy a

$$h\mapsto\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

függvény határértéke szerepel a 0 helyen, vagy a másik képletnél az

$$x\mapsto\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

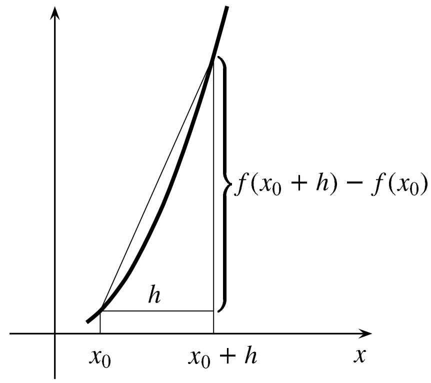
függvény határértékéről van szó az x_0 helyen.

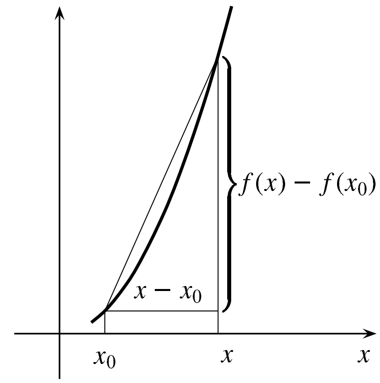
---

* A mi anyagunkban nincs szó ugyan róla, de egyébként értelmezhető az is, hogy egy határérték végtelen. Például $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$.

Emiatt célszerű kikötni a definícióban a fenti határérték végességét is.

Az utóbbi függvényt az f függvény **differenciahányados**-függvényének nevezzük az x_0 helyen.

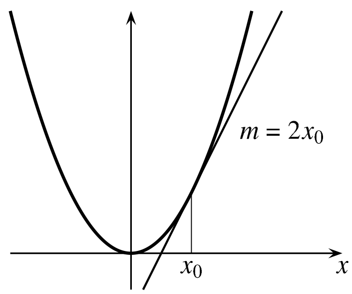




1. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény differenciálhányadosát az x_0 helyen!

Megoldás:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$$



Tehát az x_0 helyhez tartozó differenciálhányados $2x_0$.

Általában a differenciálhányados értéke függ attól a helytől, amelyben képeztük.

Ha most minden helyhez, ahol a függvény differenciálható, hozzárendeljük az abban a pontban vett differenciálhányados értékét, akkor egy függvényt kapunk, amelyet differenciálhányados-függvénynek hívunk.

Az $f(x) = x^2$ függvény differenciálhányados-függvénye tehát:

Az f függvény differenciálhányados-függvényét f'-vel jelöljük. (Szokásos egyéb elnevezések: deriváltfüggvény, illetve röviden, bár pontatlanul: differenciálhányados vagy derivált.)

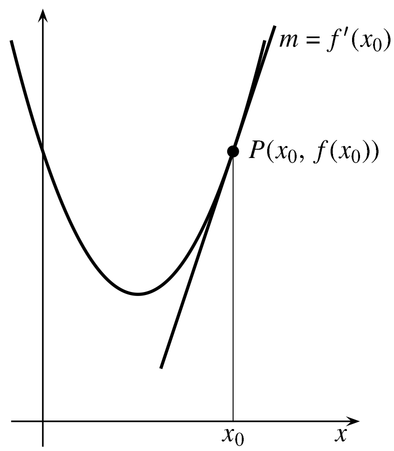
Tehát f' ott van értelmezve, ahol f differenciálható, és ezeken a helyeken az értéke megegyezik az abban a pontban vett differenciálhányados értékével.

Megjegyzés: az f függvény x_0 helyen vett differenciálhányadosát már ezt megelőzően $f'(x_0)$-lal jelöltük. Ennek a jelölésnek az ésszerűsége most derült ki: az f' függvény értéke az x_0 helyen.

A differenciálhányados **fizikai** jelentése: ha egy test egyenes vonalú mozgását az $s(t)$ függvény írja le, akkor a sebességfüggvény a helyfüggvény deriváltfüggvénye:

$$v(t) = s'(t)$$

A differenciálhányados **geometriai** jelentése: az $y = f(x)$ függvénygörbe $(x_0, f(x_0))$ pontjához tartozó érintőjének iránytangense $f'(x_0)$.



Ezek szerint az érintő egyenlete:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Megjegyzés: A sebességnek, illetve az érintőnek ez a **definíciója**. (Ez tehát **nem tétel**, hanem – ésszerű és a szemléletes képnek teljesen megfelelő – definíció.)

A differenciálhányados meghatározása

2. Határozd meg az érintő egyenletét az alábbi függvénygörbék megadott pontjában!

a) $y = x^2$ $P(3;\ 9)$

b) $y = x^3$ $P(-1;\ -1)$

c) $y = x^2 + x^3$ $P(1;\ 2)$

d) $y = \dfrac{12}{x}$ $P(2;\ 6)$

e) $y = \sqrt{x}$ $P(9;\ 3)$

3. Határozd meg a helyfüggvényből a sebességfüggvényt!

a) $s(t) = ct^3$
$v(t) = ?$

b) $s(t) = bt^2 + ct^3$
$v(t) = ?$

A gyorsulást is meg tudod határozni?

4. **a)** $f(x) = 6x^2$
$f'(2) = ?$
$f'(x) = ?$

b) $f(x) = 3x^2 + 4x^3 + 5$
$f'(3) = ?$
$f'(x) = ?$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = ?$

d) $f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = ?$

e) $f(x) = x^4$
$f'(x) = ?$

f) $f(x) = 6x$
$f'(x) = ?$

g) $f(x) = 8$
$f'(x) = ?$

h) Van-e valami sejtésed az $x \mapsto x^n$ függvény deriváltjáról?

Példa nem differenciálható függvényre. Differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata. Féloldali differenciálhatóság. Intervallumon differenciálható függvények

5. Adj példát egy f függvényre, amely értelmezve van a b hely egy környezetében, de nem differenciálható b-ben!

6. Mit gondolsz, mi a következő két állítás kapcsolata?

f folytonos b-ben $\qquad\qquad$ f differenciálható b-ben

7. Keressünk olyan valós függvényt amely mindenütt értelmezve van, és sehol se differenciálható! (A „mindenütt” most is a valós számok halmazát jelenti.)

8. Adj példát olyan függvényre, amely folytonos a 0-ban, de ott nem differenciálható!

Tétel: Ahol egy függvény differenciálható, ott folytonos is.

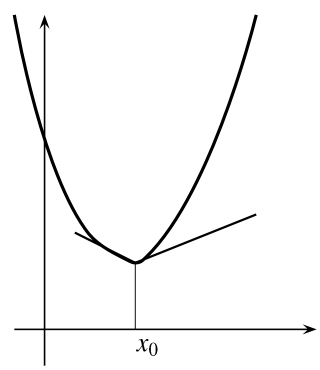
Példa folytonos, de nem differenciálható függvényre:

$$f(x) = |x|$$

f folytonos a 0-ban, de nem differenciálható ott. (Mindenütt másutt differenciálható.)

9. Mi az $x \mapsto |x|$ függvény differenciálhányados-függvénye?

Megjegyzés: Mitől nem differenciálható az $f(x) = |x|$ függvény a 0-ban? Attól, hogy az $\dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0}$ különbségi hányadosok máshoz tartanak, ha h jobbról, illetve ha balról tart a 0-hoz. Tehát a differenciahányadosnak ebben az esetben nincs ugyan határértéke, de a jobb oldali és a bal oldali határértékek léteznek. Ez a felismerés elvezet a jobb oldali és a bal oldali differenciálhányados fogalmához.



Definíció: f jobbról differenciálható az x_0 helyen, ha az $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ differencia-hányados-függvénynek létezik (és véges) a jobb oldali határértéke az x_0 helyen. Ez a határérték az f függvény jobb oldali differenciálhányadosa (deriváltja) az x_0 helyen.

Hasonlóan értelmezhető a bal oldali differenciálhatóság és differenciálhányados is.

Az $x \mapsto |x|$ függvény 0 helyen vett jobb oldali deriváltja: 1, a bal oldali derivált: -1.

*10. Konstruálj olyan mindenütt értelmezett folytonos függvényt, amely sem jobbról, sem balról nem deriválható a 0-ban!

Definíció: f differenciálható $[a, b]$-ben, ha (a, b) minden pontjában differenciálható, továbbá a-ban jobbról, és b-ben balról is differenciálható. Hasonlóan értelmezhető a differenciálhatóság más típusú intervallumon.

Néhány függvény deriváltfüggvénye

Azt a tényt, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény differenciálhányados-függvénye az $x \mapsto 2x$ függvény, a következő módokon tudjuk képlettel leírni:

a) $(x \mapsto x^2)' = (x \mapsto 2x)$

b) $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

c) $\left(x^2\right)' = 2x$

Az utóbbi képlet a legegyszerűbb, bár egy kissé pontatlan, hiszen x^2-re rövidítettük az $x \mapsto x^2$ jelölést.

Tétel:

$(x \mapsto c)' = x \mapsto 0$

Rövidebben: $(c)' = 0$

$(x \mapsto ax + b)' = x \mapsto a$

Rövidebben: $(ax + b)' = a$

Mostantól a rövid (de pontatlan) módon fejezzük ki magunkat:

$(x^2)' = 2x$

$(x^3) = 3x^2$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (n pozitív egész, x tetszőleges*; vagy n negatív egész, $x \neq 0$; vagy n nem egész, és $x > 0$.)

Ez a képlet tartalmazza az előző négyet $\left(n = 2, 3, -1, \frac{1}{2}\right)$.

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

A tétel értelemszerűen a differenciálhatóság tényét is állítja a megfelelő helyeken.

Differenciálási szabályok

11. $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = ?$

Tétel: Tegyük fel, hogy f és g differenciálható az x_0 helyen. Ekkor a következő függvények is differenciálhatók x_0-ban, és deriváltjuk az alábbiak szerint számítható ki:

$A(x) = c \cdot f(x) \quad (c \in R) \qquad A'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

$B(x) = f(x) \pm g(x) \qquad B'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

$C(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad C'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Ha még $g(x_0) \neq 0$ is teljesül, akkor a hányadosfüggvény is differenciálható:

$$D(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

Jelölés: $\left(g(x_0)\right)^2$ helyett $g^2(x_0)$-t szoktunk írni.

Megjegyzés: tételünk pontatlanul így is leírható:

$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$

$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Bizonyítás:

(1) $$\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = \frac{c \cdot f(x_0 + h) - c \cdot f(x_0)}{h} =$$

$$= c \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to c \cdot f'(x_0) \quad (\text{ha } h \to 0)$$

---

* az $n = 1$, $x = 0$ esetet leszámítva – de ha átmenetileg 0^0-t 1-nek értelmezzük, akkor jó a képlet ebben az esetben is.

(2) $B(x) = f(x) + g(x)$ esete (a másik ugyanígy megy, vagy visszavezethető erre):

$$\frac{B(x_0+h) - B(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - \big(f(x_0) + g(x_0)\big)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \to f'(x_0) + g'(x_0) \quad (\text{ha } h \to 0)$$

(3) $$\frac{C(x_0+h) - C(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0+h)\cdot g(x_0) + f(x_0+h)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0+h)\cdot g(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} =$$

$$= f(x_0+h)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to$$

$$\to f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0) \quad (h \to 0)$$

A befejező lépésnél használtuk, hogy $f(x_0+h) \to f(x_0)$, ha $h \to 0$, ami f x_0-beli folytonosságával egyenértékű.

(4) Legyen $E(x) = \dfrac{1}{g(x)}$

Először belátjuk, hogy E differenciálható x_0-ban, és $E'(x_0) = \dfrac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Ugyanis:

$$\frac{E(x_0+h) - E(x_0)}{h} = \frac{\dfrac{1}{g(x_0+h)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h\cdot g(x_0+h)\cdot g(x_0)} =$$

$$\frac{-1}{g(x_0)\cdot g(x_0+h)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \to \frac{-1}{g^2(x_0)} \cdot g'(x_0)$$

Innen a D függvény differenciálhatósága x_0-ban nyilvánvaló, hiszen:

$$D(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = f(x)\cdot E(x)$$

A (3) pont szerint:

$$D'(x_0) = f'(x_0)\cdot E(x_0) + f(x_0)\cdot E'(x_0) = f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} =$$

$$= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

12. Igaz-e tetszőleges f, g függvényekre, hogy

$$x \mapsto (f(x) + g(x))' = x \mapsto f'(x) + g'(x),$$

vagyis hogy

$$(f+g)' = f' + g'?$$

13. Deriváld a következő függvényeket!

a) $f(x) = 6x^3 + \sin x - \cos x$

b) $g(x) = x \cdot \cos x$

c) $h(x) = \sin^2 x$

d) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

f) $x \mapsto \operatorname{tg} x$

14. Adott egy egyenes vonalú mozgást végző test helyfüggvénye.
Határozd meg a gyorsulását!

a) $s(t) = at^4 + bt^3 + dt^2$

b) $s(t) = a\sqrt{t}$

15. Állapítsd meg c és d értékét úgy, hogy az alábbi függvény mindenütt differenciálható legyen!

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x < 0 \\ x^2 + cx + d, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Függvényvizsgálat

16. Mi az $f(x) = x + \dfrac{3}{x}$ $(x > 0)$ függvény értékkészlete?

17. $f(x) = x^2 \cdot (6 - x)$
$0 \leq x \leq 6$ mellett mikor maximális a függvény?

18. Határozzuk meg az $x \mapsto \left(x^4 - 4x\right)$ függvény minimumát!

19. Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^5 - 80x$ függvény menetét! Hol vannak a függvény lokális szélsőértékhelyei? Mely értékeket vesz fel többször is az f? Melyeket csak egyszer?

20. $f(x) = 2x^5 - 5x^2$ $(-1 \leq x \leq 2)$
Állapítsuk meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

21. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Hol növekszik, és hol csökken a függvény?

22. $g(x) = ax^2 + bx + c$

Vizsgáljuk meg a függvény menetét

a) a differenciálszámítás,

b) a teljes négyzetté kiegészítés módszerével!

23. Igazak-e a következő állítások?

a) Ha f differenciálható $[a, b]$-ben, és egy c helyen maximuma van, akkor $f'(c) = 0$.

b) $f'(a) = 0$ esetén f-nek a-ban maximuma vagy minimuma van.

c) $f'(a) = 0$ esetén f-nek a-ban lokális szélsőértéke van.

d) Ahol egy differenciálható függvénynek lokális szélsőértéke van, ott a derivált 0.

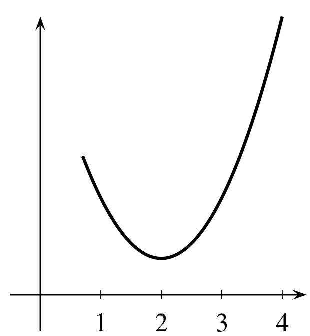
e) Minden szélsőértékhely egyben lokális szélsőértékhely is.

f) $[a, b]$-ben differenciálható függvénynek van maximuma is, minimuma is, mégpedig vagy az intervallum szélén van, vagy olyan helyen, ahol a derivált 0.

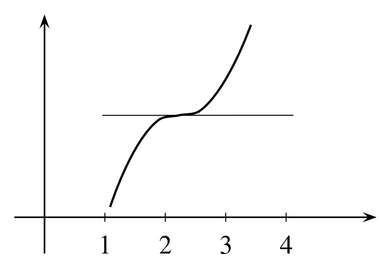
g) $[a, b]$-ben szigorúan monoton függvénynek a deriváltja mindenütt pozitív.

24. Az itt következő ábrákon differenciálható függvények görbéit látod. Melyik függvénynek hol van maximuma, minimuma, lokális maximuma, lokális minimuma? Hol növekszenek, hol csökkennek ezek a függvények? Hol 0 a deriváltjuk?

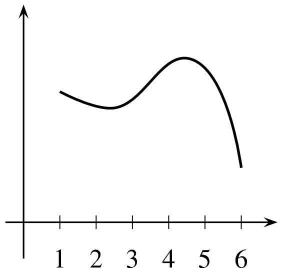
a)



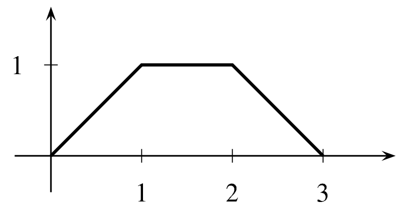
b)



c)



d) Ennél a példánál nem differenciálható a függvény mindenütt. (Hol nem differenciálható?)
A kérdések ugyanazok.

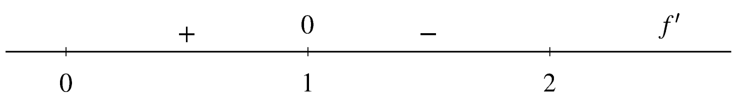


25. f differenciálható függvény $[0, 2]$-ben.

a) Ezeket tudjuk a deriváltjáról:

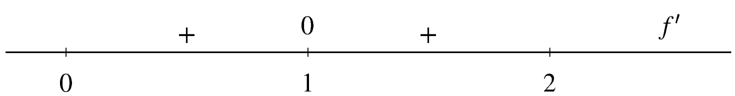
$f'(x) > 0,\qquad$ ha $\quad 0 < x < 1;$
$f'(1) = 0;$
$f'(x) < 0,\qquad$ ha $\quad 1 < x < 2.$

Ábrával kifejezve:



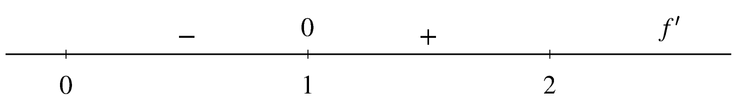
Mit tudunk ennek alapján mondani az f függvény szélsőértékhelyeiről (abszolút és lokális maximum- és minimumhelyeiről)? Mit nem lehet eldönteni a megadott ismeretekből?

b) Most ezt tudjuk f'-ről:



A kérdés ugyanaz.

c) Feltétel:



A kérdés ugyanaz.

Definíciók és tételek a függvényvizsgálat témaköréből

Definíció: f monoton növő $[a, b]$-ben, ha ott értelmezve van, és $a \le x < y \le b$ esetén $f(x) \le f(y)$.

f szigorúan monoton növő $[a, b]$-ben, ha ott értelmezve van, és $a \le x < y \le b$ esetén $f(x) < f(y)$.

Hasonlóan értelmezhető a monoton fogyás, valamint a szigorúan monoton fogyás is.

A definíciók $[a, b]$ helyett más intervallumtípusra is átvihetők. [*]

Definíció: f-nek maximuma van a c helyen, ha $f(x) \le f(c)$ minden x-re, ahol f értelmes.

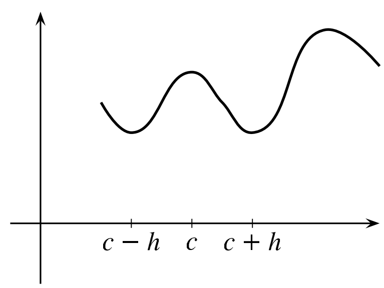
(Néha az abszolút maximum kifejezést használjuk, ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy **nem** lokális maximumra gondolunk.)

f minimumhelye hasonlóan értelmezhető.

Definíció: f-nek lokális maximuma van a c helyen, ha létezik egy pozitív h szám, amelyre teljesül, hogy

I. f értelmezve van c-nek a h sugarú környezetében, és

II. $f(x) \le f(c)$, ha $c - h < x < c + h$.



Másként fogalmazva: f-nek lokális maximuma van a c helyen, ha van c-nek egy olyan környezete, amelyben f értelmezve van, és amelyben az f függvény legnagyobb értéke $f(c)$. A lokális minimum hasonlóan értelmezhető.

Tétel: Legyen f egy tetszőleges $[a, b]$-ben differenciálható függvény. Ekkor

(1) f monoton nő $[a, b]$-ben	$\Longleftrightarrow$	$f'(x) \ge 0$, ha $a < x < b$
(2) f monoton csökken $[a, b]$-ben	$\Longleftrightarrow$	$f'(x) \le 0$, ha $a < x < b$
(3) f szigorúan monoton nő $[a, b]$-ben	$\Longleftarrow$	$f'(x) > 0$, ha $a < x < b$
(4) f szigorúan monoton csökken $[a, b]$-ben	$\Longleftarrow$	$f'(x) < 0$, ha $a < x < b$

Megjegyzés: a (3) és a (4) állítás megfordítása hamis.

---

[*] Sőt, arról is lehet beszélni, hogy egy függvény monoton növő egy halmazon, például a racionális számok halmazán. (Nyilván e halmazbeli $x < y$ számokra kell $f(x) \le f(y)$-nak teljesülnie ehhez.)

Példa erre:

Tétel: Legyen f egy tetszőleges $[a, b]$-ben differenciálható függvény, és legyen $a < c < b$. Ha f-nek lokális maximuma (vagy minimuma) van c-ben, akkor $f'(c) = 0$.

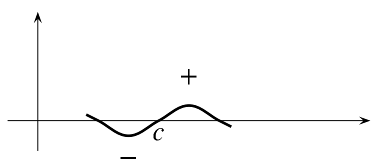
Megjegyzés: Ez a tétel sem fordítható meg.

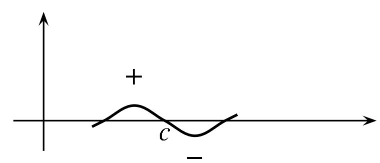
Példa:

Definíció: Azt mondjuk, hogy a g függvény előjelet váltva 0 a c helyen, ha $g(c) = 0$, és létezik egy $h > 0$ szám, amelyre g értelmezve van $(c - h, c + h)$-ban, továbbá:

(a) $g(x)$ negatív $(c - h, c)$-ben, és pozitív $(c, c + h)$-ban vagy fordítva:

(b) $g(x)$ pozitív $(c - h, c)$-ben és negatív $(c, c + h)$-ban.





Tétel: Ha f' előjelet váltva 0 a c helyen, akkor ott f-nek lokális szélsőértéke van, mégpedig az (a) esetben lokális minimuma, a (b) esetben pedig lokális maximuma.

Szélsőérték-feladatok megoldásánál – ha **abszolút** maximumot vagy minimumot keresünk – az utóbbi tételnek általában nincs jelentősége (nagyon gyakori hiba még **szakkönyvekben** is, hogy lokális szélsőértéket keresnek a derivált előjelváltásával, pedig a feladat az abszolút szélsőértéket kérdezi).

Nézzük végig egy szélsőérték-feladat teljes megoldását két módszerrel is!

Feladat: Állapítsuk meg az $x^2 \cdot (12 - x)$ maximális és minimális értékeit az $[1,\ 11]$ intervallumban!

1. megoldás:

Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^2 \cdot (12 - x)$ függvény menetét!

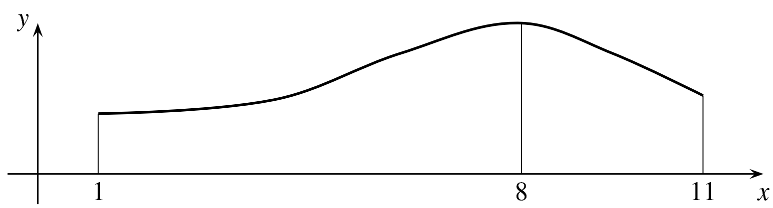
$f'(x) = 24x - 3x^2 = 3x(8 - x)$, tehát $f'(x)$ előjele:

$-$		$+$		$-$
$x < 0$	0	$x > 0$	8	$x > 0$
$8 - x > 0$		$8 - x > 0$		$8 - x < 0$

Ennélfogva f [1, 8]-ban szigorúan monoton növő, [8, 11]-ben szigorúan monoton csökken. Ebből pedig azonnal leolvasható, hogy f-nek 8 az egyetlen maximumhelye, továbbá, hogy a minimumhely vagy 1, vagy 11, attól függően, hogy melyiknél kisebb a függvényérték (ha egyenlő, akkor mindkettő minimumhely).

$$f(1) < f(11),$$

tehát 1 az egyetlen minimumhely.



2. megoldás:

Az $f(x) = x^2 \cdot (12 - x)$ függvény folytonos, tehát egy korábbi tétel szerint van maximális, illetve minimális értéke az [1, 11] intervallumban.

Jelöljük b-vel a függvény maximumhelyét (vagy ha több ilyen van, ezek valamelyikét).

Két esetet különböztetünk meg:

(1) b az intervallum szélén van, azaz $b = 1$ vagy $b = 11$.

(2) b az intervallum belsejében van, azaz $1 < b < 11$.

Az **utóbbi** esetben b-nek lokális maximumhelynek is kell lennie, tehát az egyik előző tétel szerint $f'(b) = 0$.

$$\left(12x^2 - x^3\right)' = 24x - 3x^2, \text{ tehát } 24b - 3b^2 = 0, \text{ innen } b = 8.$$

Tehát b értékére összesen csak három szám jöhet szóba: 1, 8, 11.

Melyik (vagy melyek) lesznek jók? Ezt behelyettesítéssel döntjük el:

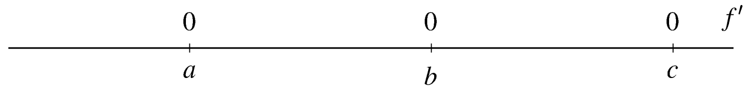
$$f(1) = 11 \qquad f(8) = 256 \qquad f(11) = 121$$

Tehát a függvény (egyetlen) maximumhelye [1, 11]-ben a 8, maximális értéke pedig 256.

Térjünk át a minimumhely(ek) meghatározására. Legyen c f (egyik) minimumhelye [1, 11]-ben. Az előző gondolatmenetet c-re alkalmazva ugyanúgy azt kapjuk, hogy c csak az 1, 8, 11 számok valamelyike lehet. A behelyettesítést figyelembe véve $c = 1$, és f minimális értéke 11.

A megoldás általános módszert ad differenciálható függvény maximum- és minimumhelyeinek meghatározására, zárt intervallumban. E szerint meg kell keresni a derivált 0 helyeit, és ezek meg a két végpont közül behelyettesítéssel kiválasztani a megfelelőket. (Durva hiba elfelejtkezni arról, hogy a végpontban is lehet maximuma vagy minimuma a függvénynek, és ott nem kell a deriváltnak 0-nak lennie!)

Megjegyzés: Gyakran vagyunk kíváncsiak arra, hogy egy differenciálható függvény deriváltja hol milyen előjelű. Ehhez általában először meghatározzuk a derivált összes gyökhelyét:



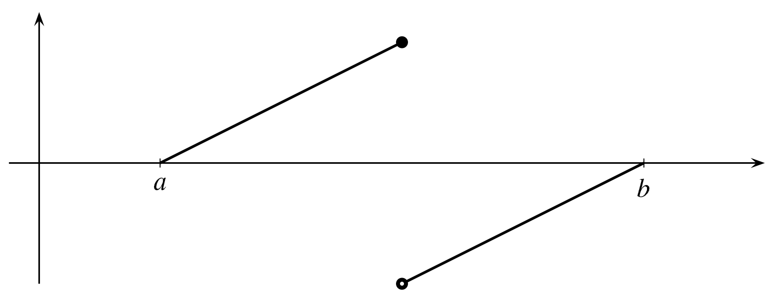
Mondjuk az a, b, c helyeket kaptuk eredményül.

Hogyan lehet megállapítani f' előjelét például az (a, b) intervallumban? Állandó-e az előjele?

Tegyük fel a kérdést kicsit általánosabban!

Ha egy tetszőleges g függvénynek a és b két szomszédos gyökhelye, ekkor ettől még elképzelhető, hogy a és b között felvesz pozitív értéket is, meg negatív értéket is.

Példa:



Folytonos függvénnyel ez nem történhet meg, hiszen ha egy folytonos függvény valahol negatív értéket vesz fel, egy másik helyen pedig pozitívat, akkor a két hely között valahol 0-t is fel kell vennie (lásd a IV. fejezetben a „Zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai” c. részt), ez viszont egy újabb gyökhelyet jelentene a és b között, ami ellentmond a feltételeknek.

Visszatérve az eredeti kérdésre: ezek szerint, ha f'-nek a és b két szomszédos gyökhelye, és f' folytonos $[a, b]$-ben, akkor biztosak lehetünk abban, hogy f' (a, b)-ben **mindenütt** pozitív, vagy **mindenütt** negatív. Hogy e két eset közül melyik áll fenn, az **egyetlen** behelyettesítéssel is eldönthető.

(Megemlítjük még azt az érdekes tényt, hogy mindehhez f' folytonosságára valójában nincs is szükség, elég ha f' létezik $[a, b]$-ben. Elképzelhető ugyan, hogy f' nem folytonos, de akkor is rendelkezik a folytonos függvényeknek azzal a tulajdonságával, hogy két felvett érték közötti összes közbülső értéket is felveszi.)

Feladatok

26. Mely a, b értékek mellett differenciálható mindenütt az
$$f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{ha } x < 2 \\ x^3 + ax^2 + b, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$
függvény?

27. Legyen $f(x) = x \cdot g(x)$.
Az f 0-beli differenciálhatósága mit jelent g-re nézve (g milyen tulajdonságával egyenértékű)?
Mivel egyenlő $f'(0)$?

28. Differenciálhatók-e a 0-ban a következő függvények?

a) $f(x) = |x|^3$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

c) $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

d) $f(x) = \sqrt{|x|}$

e) $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x^2$

f) $f(x) = |x| \cdot (x + 1)$

29. Határozzuk meg az alábbi függvénygörbék érintőjét a megadott pontokban!

a) $y = \sin x$ $\quad P_1(0;\ 0)$ $\quad P_2\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$

b) $y = \operatorname{tg} x$ $\quad P_1(0;\ 0)$ $\quad P_2\left(\frac{\pi}{4};\ 1\right)$

c) $y = \dfrac{x + 7}{1 + x^2}$ $\quad P(3;\ 1)$

30. Van-e az $y = x^3 - 6x^2 + 20x - 10$ függvénygörbének az $y - 5x = 20$ egyenessel párhuzamos érintője?

31. Határozzuk meg az alábbi függvénygörbéknek a megadott egyenesekkel párhuzamos érintőit!

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 7$ $\quad y = 2x + 90$

b) $y = x^3 + 3x^2 - \dfrac{x}{x} + 17$ $\quad 3y + x = 150$

c) $y = 2x - \dfrac{1}{x} + 5$ $\qquad$ $y - 3x = 10$

d) $y = \sin x + \cos x$ $\qquad$ $x + y = 7$

e) $y = x + \sqrt{x}$ $\qquad$ $6y - 7x = 4$

32. Határozzuk meg az alábbi függvénygörbéknek a megadott egyenesekre merőleges érintőit!

a) $y = x + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $8y + 9x = 1983$

b) $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{x}{2} - 4$ $\qquad$ $9y + 2x = 7$

c) $y = \sin^2 x$ $\qquad$ $y + \sqrt{2}x = 1$

33. a) Az $y = 3x^2 + 2x$ függvénygörbe melyik érintője zár be 60°-os szöget az x tengellyel?

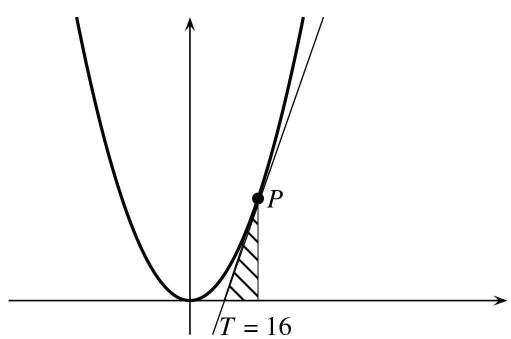
b) Az $y = 3x + \dfrac{1}{x}$ görbe melyik érintője zár be 135°-os szöget az x tengely pozitív felével?

34. Milyen b értékre igaz, hogy az $y = \dfrac{1}{x}$ görbének a $4x + y = b$ egyenes érintője?

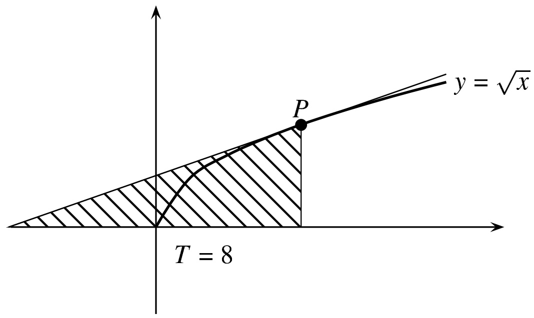
35. Határozzuk meg c és d értékét úgy, hogy az $y = x^3 + cx^2 + dx + 4$ függvénygörbe átmenjen a $P(2;\ -2)$ ponton, és P-beli érintője az $y = x - 4$ egyenes legyen!

36. Határozzuk meg c és d értékét úgy, hogy az $y = cx^2 + dx + 4 - x^3$ görbe átmenjen a $P(2;\ 6)$ ponton, és P-beli érintője merőleges legyen a $21y + x = 40$ egyenesre!

37. a) Az $y = x^2$ görbe melyik P pontjára igaz, hogy a P-beli érintő, a P-ből az x tengelyre bocsátott merőleges és az x tengely határolta háromszög területe 16?



b) Az $y = \sqrt{x}$ görbe melyik P pontjára igaz, hogy az ábrán látható háromszög területe 8?

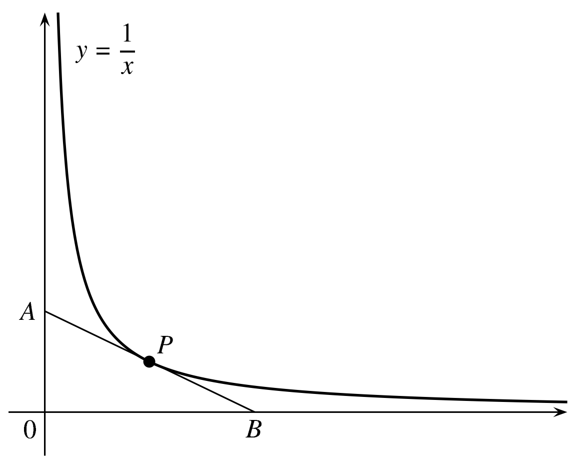


38. Mekkora szöget zárnak be az $y = \sqrt[3]{x}$ és az $y = x^2$ görbék érintői az $(1;\ 1)$ pontban? A szög tangensét határozd meg **táblázat felhasználása nélkül**!

⋆39. Bizonyítsuk be, hogy az $y = \dfrac{1}{x}$ görbe bármelyik érintőjére igaz, hogy

a) P az AB szakasz felezőpontja

b) az OAB háromszög területe 2.



40. Állapítsuk meg a Dirichlet-függvény lokális szélsőértékhelyeit!

41. Keressünk olyan függvényt, amely $[-1;\ 0)$-ban szigorúan nő, $(0;\ 1]$-ben szigorúan fogy, és

a) 0-ban abszolút minimuma van, illetve

b) 0-ban lokális, de nem abszolút minimuma van.

42. Egy [0, 10]-ben értelmezett differenciálható függvényről a következőket tudjuk:

a) $f(0) = f(10) = 7$

b) $f(1) = 9$

c) f'-nek egyetlen gyökhelye a 3.

Ennek alapján el tudjuk-e dönteni, hogy hol vannak a függvény abszolút, illetve lokális szélsőértékhelyei?

43. Egy [0, 10]-ben differenciálható függvényről most csak annyit tudunk, hogy a deriváltjának egyetlen gyöke a 3. Ennek alapján mit állíthatunk a függvény abszolút, illetve lokális szélsőértékhelyeiről. Milyen lehetőségek vannak?

44. Hol vannak az $x \mapsto (x + 2\sin x)$ függvény lokális maximumhelyei? Először tippeld meg az eredményt, és azután ellenőrizd magadat a tanult módszer segítségével!

45. Mely p számokra igaz, hogy az $f(x) = x + p\cos x$ függvény szigorúan monoton növekedő R-ben?

★46. Mit gondolsz, igaz-e a következő állítás?

Ha f differenciálható c egy környezetében, és $f'(c) = 0$, akkor a következő 4 lehetőség valamelyike mindig fennáll:

I. f monoton nő c egy környezetében

II. f monoton fogy c egy környezetében

III. f-nek lokális maximuma van c-ben

IV. f-nek lokális minimuma van c-ben

47. Mi az értékkészlete az alábbi függvényeknek?

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 12}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 6x + 12}$

c) $h(x) = \sin x - \cos x$

d) $f(x) = x^2 - x^3 \qquad (0 \leq x \leq 1)$

e) $g(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} \qquad (0 \leq x \leq 1)$

f) $h(x) = x + \dfrac{4}{x}$

★**48.** Bizonyítsd be az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sin x \geq \frac{2}{\pi} \cdot x,$ ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;

b) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x,$ ha $x \geq 0$;

c) $x^n(1 - x) < \frac{1}{n},$ ha $0 \leq x \leq 1$, és n pozitív egész.

49. Ábrázolandó az $f(x) = x^4 - 4x^3$ függvény. Hol nő, hol fogy, hol vannak a szélsőértékei, hol metszi a tengelyeket? Mi az értékkészlete? Melyek azok az értékek, amelyeket többször vesz fel?

50. Állapítsuk meg a következő függvények legnagyobb és legkisebb értékét a megadott intervallumokon!

a) $f(x) = x^5 - 15x^3$ $[1, 4]$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ $[-3, 3]$

c) $x \mapsto \left(x + \frac{12}{x}\right)$ $[2, 9]$

d) $x \mapsto (x + \sin x)$ $[0, 10\pi]$

e) $x \mapsto (x^3 - 12x)$ $[-5, 2]$

51. a) $f(x) = x^3 + cx^2 + dx$

Mennyi c és d értéke, ha f-nek lokális minimuma van a 2-ben, mégpedig a 4 (azaz $f(2) = 4$).

b) $f(x) = ax + \frac{b}{x}$.

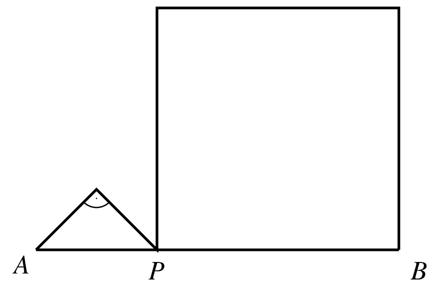
f-ről tudjuk, hogy 3-ban lokális minimuma van, és ez a minimális függvényérték éppen 4.

$a = ?$ $b = ?$

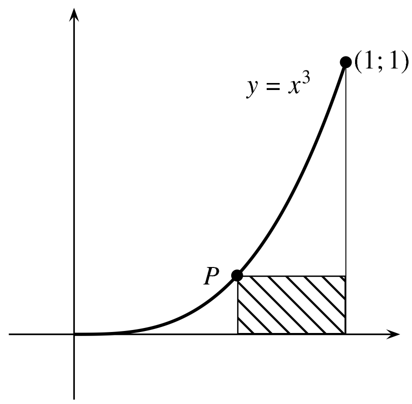
52. Osszuk fel a 60 hosszúságú AB szakaszt egy P ponttal két részre úgy, hogy az AP mint átfogó fölé emelt egyenlő szárú derékszögű háromszög és a PB fölé emelt négyzet együttes területe

a) minimális;

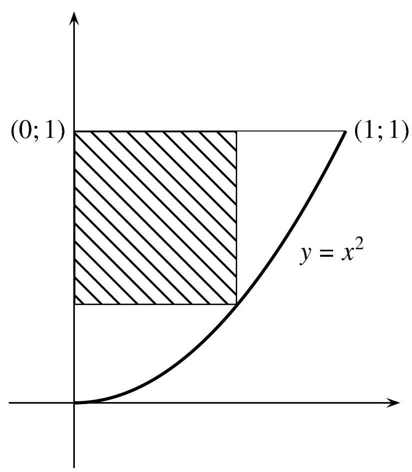
b) maximális legyen!



53. Az ábrán látható téglalap területe melyik P pontnál maximális?



54. Mikor maximális az ábrán látható téglalap területe?



55. A $\frac{x^2}{2}$ egyenletű görbe melyik pontja van legközelebb a $P(0;\ 2)$ ponthoz?

56. Az $y = x^2$ parabola melyik pontja van legközelebb a $Q\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ ponthoz?

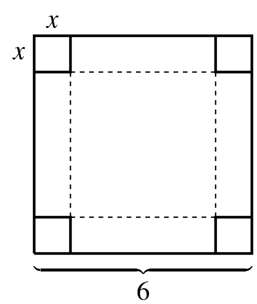
57. Az $y = \frac{4}{x}$ hiperbola melyik pontja van legközelebb az origóhoz?

58. Az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola melyik pontja van legközelebb

a) az $A(0;\ 2)$ ponthoz

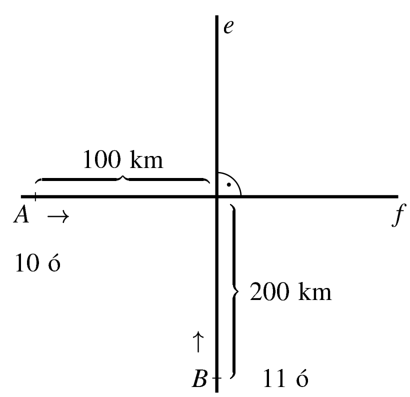
b) a $B(3;\ 0)$ ponthoz?

59. Egy 6×6-os méretű kartonlap mindegyik sarkából levágunk egy-egy azonos méretű kis négyzetet, majd a szaggatott vonalak mentén a szélső sávokat felhajtva egy dobozt készítünk.



Mekkora x mellett kapjuk a legnagyobb térfogatú dobozt?

60. A-ból 10 órakor indul egy autó 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, B-ből pedig 11 órakor indul egy vonat 200 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel az útkereszteződés felé. Mikor lesznek legközelebb egymáshoz?



61. Adott kerületű körcikkek közül melyiknek legnagyobb a területe?

62. Adott felszínű hengerek közül melyiknek legnagyobb a térfogata?

63. Módosítjuk az előző feladatot befedetlen hengerre, vagyis a henger felületéhez csak az alsó körlap és a palást tartozik. Most melyiknek lesz legnagyobb a térfogata?

64. Legfeljebb mekkora lehet a térfogata egy R sugarú gömbbe írt

a) hengernek

b) kúpnak?

65. Két szám összege 10. Mikor minimális a köbösszegük?
A feladat röviden így írható le:

$x + y = 10$

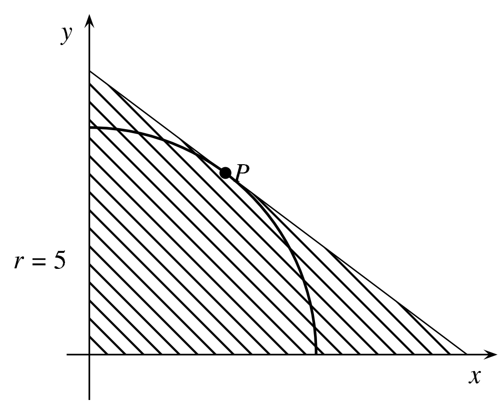
$\min(x^3 + y^3) = ?$

66. $x^2 + y^2 = 25$

$\min(x^6 + y^6) = ?$

67. Az m paraméter mely értékére maximális, illetve minimális az $x_1 + x_2 + 3x_1x_2$ kifejezés értéke, ahol x_1 és x_2 a $2x^2+2(m+2)x+m^2+4m+3 = 0$ egyenlet gyökeit jelölik.

68. Az $x^2 + y^2 = 25$ körvonal első síknegyedbe eső részén felveszünk egy P pontot. Melyik P-re lesz minimális a P-beli érintő és a két tengely határolta háromszög területe?



Tartalom

A nehezebb feladatokat *-gal jelöljük.

 jellel azt jelöljük, hogy a könyvben kihagyott üres helyre írhatsz.