Somme des n premiers entiers à la puissance p et formule de Faulhaber

19 juin 2017

il est évident que $\sum_{k=0}^{n} k^0 = n$ de plus il est bien connu que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ La question que nous pouvons alors nous poser est, comment généraliser cette forme à tout puissance naturel de k (en admettant qu'elle existe) ? Par la suite $\phi_p(n)$ désignera la somme des n premiers nombres entiers élevés à la puissance p et "le polynôme d'ordre p" désignera son expression polynomiale.

1 sur le degrés de $\phi_p(n)$

Pour généraliser les formules vues plus haut il va falloir commencer par déterminer un nombre raisonnable d'expressions polyniomiales de $\phi_p(n)$ pour différentes valeur de p et ainsi pouvoir émettre une conjecture quant à la formule générale que nous démontrerons bien évidemment par la suite. Les polynômes d'ordre 1 et 0 nous permettent de conjecturer dans un premier temps que :

$$\forall p \in \mathbb{N} : deg\,\phi_p = p + 1$$

Si cette conjecture se révèle être vraie cela signifie que les coefficients d'un polynôme d'ordre p sont les solutions d'un système à $p + 2$ inconnues et équations donc soluble. Cela nous permettrait de déterminer l'expression polynomiale de $\phi_p(n)$ pour n'importe quel valeur de p et ainsi de déterminer comme nous le souhaitons un nombre raisonnable d'expressions polynômiales de $\phi_p(n)$. Montrons donc la véracité de cette conjecture par récurrence, soit Q_p la propostion défini $\forall p \in \mathbb{N}$ par :

$$Q_p : \text{"}deg\,\phi_p = p + 1\text{"}$$

Commençons par montrer que Q est initialisée au rang 0 :

on a, Q_0 : "$deg\,\phi_0 = 1$" or on sait que :

$$\phi_0(n) = \sum_{k=0}^{n} k^0 = n$$

et il est parfaitement trivial que $deg\, n = 1$, on a donc $deg\,\phi_0 = 1$. La propostion Q est donc bel et bien initialisée au rang 0, montrons à présent l'implication suivant :

$$\forall k \leq p, Q_k vrai \Rightarrow Q_p$$

Considérons le polynôme P défini pour tout entier naturel n par :

$$P(n) = -1 + \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^k 1^{p+1-k}$$

le coefficient du terme n^{p+1} étant non nul étant le terme de plus haut degrés du polynôme P on peut écrire que $deg\, P = p + 1$, de plus en factorisant P à l'aide du binôme de newton on obtient que :

$$P(n) = (n+1)^{p+1} - 1$$

Tentons maintenant de réecrire P différement de sorte à faire apparaître $\phi_p(n)$, il est immédiat que le polynôme P peut-être réecrit comme la somme téléscopique suivante :

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - k^{p+1}$$

Vérifiant tout de même que c'est bien le cas en dévellopant cette somme :

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - k^{p+1}$$

$$P(n) = (n+1)^{p+1} - n^{p+1} + n^{p+1} - (n-1)^{p+1} + ... - 2^p + 1 + 2^{p+1} - 1^{p+1}$$

$$P(n) = (n+1)^{p+1} - 1$$

Poursuivons en développant notre nouvelle expression de P, encore une fois à l'aide du binôme de newton :

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} k^q 1^{p+1-q} \right) - k^{p+1} \right)$$

On simplifie,

$$P(n) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{q} \sum_{k=1}^{n} k^q$$

Il vient alors :

$$P(n) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{q} \phi_q(n)$$

à gauche on trouve P, un polynôme de degrés $p+1$ et à droite un expression faisant apparaître $\phi_p(n)$, par hypothèse de récurrence si $q < p$ alors $deg\, \phi_q(n) = q + 1$, autrement dit pour tout $q < p$: $deg\, \phi_q(n) < p + 1$. Or, la somme dans son entièreté doit avoir le même degrés que P c'est à dire p+1 cela signifie qu'il existe au moins un entier i tel que $deg\,\phi_i(n) = p + 1$.Nous venons de dire que tout les polynômes d'ordre inférieur strictement à p ont un degré strictement inférieur à p+1 cela veut dire que le ou les polynômes de degré p+1 sont d'ordre supérieur ou égal à p et donc $i \geq p$. Comme l'indice q est au maximum égal à p on a également $i \leq p$. Sous ces conditons i ne peut qu'être égal à p et donc l'unique polynôme de degré p+1 sera celui d'ordre p.

Ainsi l'implication$\forall k \leq p, Q_k vrai \Rightarrow Q_p$ est vrai, de plus la proposition Q est initialisée au rang 0 et donc par récurrence forte on a :

$$\forall p \in N : deg\,\phi_p(n) = p + 1$$

2 Algorithme de construction d'un polynôme d'ordre p

Nous savons à présent que tous les polynômes d'ordre p sont de degré $p+1$. Ils ont donc chacun exactement $p+2$ coefficients, donc si on fixe p et que l'on calcule les $p+2$ premières valeurs de $\phi_p(n)$ on pourra écrire un système soluble à $p+2$ équations dont les inconnues sont les coefficients recherchés, ainsi en résolvant ce système on pourra alors déterminer les coefficients d'un nombre raisonnable de polynômes. Écrivons donc une forme géneral d'un tel système en fonction de p :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{1} k^p & = & \sum_{j=0}^{p+1} 1^j a_j \\ \sum_{k=0}^{2} k^p & = & \sum_{j=0}^{p+1} 2^j a_j \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{k=0}^{p+2} k^p & = & \sum_{j=0}^{p+1} (p+2)^j a_j \end{cases}$$

notons M_p la matrice des coefficients de ce système linéaire on peut immédiatement déduire deux propriétés clef de M_p, c'est une matrice carré d'ordre $p+2$ de terme général, $m_{ij} = i^{j-1}$ Ainsi la matrice colonne des solutions S_p, où s_i correspond au coefficient du terme de degré $i-1$, est défini par :

$$S_p = {M_p}^{-1} \times \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{1} k^p \\ \sum_{k=0}^{2} k^p \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{k=0}^{p+2} k^p \end{pmatrix}$$

Grâce au logiciel Xcas on peut ensuite entrer ce produit et le logiciel nous donnera les valeurs des coeffcients pour chaque valeur de p (on s'arrête à $p = 12$ car lorsque $p > 12$ le logiciel n'est pas assez précis/puissant et donne des résultats éronnés). On obtient le résultat suivant :

Ces polynômes ont des propriétés remarquables en voici quelques-une :

le coefficient du terme de degrés p vaut toujours 1/2 le coefficient du terme de degrés $p+1$ vaut toujours $1/p+1$ si on fait absatraction des deux coeffecients des termes de plus haut degrés les coefficients sont tour à tour nul et non nul et leurs signes alternent (caractéristique commune aux nombres de Bernoulli) le coefficient du terme de degré 1 vaut le p-ième nombre de Bernoulli

3 Démonstration de la formule de Faulhaber

La liste des polynômes expliciter dans la partie 2. sont lié par une seule et même formule établie par Faulhaber :

$$\phi_p(n) = \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}B_j n^{p+1-j}$$

avec B_j le j-ième nombre de Bernoulli sauf pour j=1 où B_j prendra la valeur 1/2 plutôt que -1/2.

A présent dans un soucis de clareté nous noterons l'écriture polynomiale de $\mu_p(n)$ plutôt que $\phi_p(n)$

Démontrons cette formule : dans un premier temps, il est évident que selon l'écriture sous forme de somme de $\phi_p(n)$ on ait :

$$\phi_p(n) - \phi_p(n-1) = n^p$$

ainsi il est immédiat que si $\mu_p(n)$ ne vérifie pas cette égalité alors la formule Faulhaber est fausse, plus important, si elle la vérifie bel et bien alors cela est une conditon suffisante pour qu'elle soit vraie car on aurait alors la somme téléscopique suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = n^p + (n-1)^p + ... + 2^p + 1^p + 0^p = (\mu_p(n) - \mu_p(n-1)) + (\mu_p(n-1) - \mu_p(n_2)) + (\mu_p(1) - \mu_p(0))$$

ce qui se simplifierait par :

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \mu_p(n)$$

et finalement $\mu_p(n) = \phi_p(n)$
Montrons donc que $\mu_p(n) - \mu_p(n-1) = n^p$, commençons par remplacer $\mu_p(n)$ par son expression :

$$\mu_p(n) - \mu_p(n-1) = \left(\frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}B_j n^{p+1-j}\right) - \left(\frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}B_j (n-1)^{p+1-j}\right)$$

ce qui se simplifie par :

$$\mu_p(n) - \mu_p(n-1) = \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j \left(n^{p+1-j} - (n-1)^{p+1-j} \right) \right)$$

On développe maintenant $(n-1)^{p+1-j}$ pour obtienir :

$$\mu_p(n) - \mu_p(n-1) = \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j \left(n^{p+1-j} - \sum_{l=0}^{p+1-j} \binom{p+1-j}{l} n^l 1^{p+1-j-l} \right) \right)$$

On simplifie l'expression entre paranthèses et on abaisse de 1 l'exposant de -1 pour changer sa parité et ainsi annuler le signe moins devant la somme :

$$\mu_p(n) - \mu_p(n-1) = \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j \sum_{l=0}^{p-j} \binom{p+1-j}{l} n^l (-1)^{p-j-l} \right)$$

réarengeons les termes :

$$\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \sum_{l=0}^{p-j} \binom{p+1-j}{l} \binom{p+1}{j} B_j n^l (-1)^{p-j-l}$$

La définition par récurrence des nombres de Bernoulli nous apprend que lorsque n > 0 :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

Il s'agit donc de faire apparître une expression de cette forme dans notre expression de départ avec nos notations cela donnerait un expression de cette forme :

$$\sum_{j=0}^{p-l} (-1)^j \binom{p-l+1}{j} B_j = 0$$

Or dans l'expression de $\mu_p(n) - \mu_p(n-1)$ avec laquel nous sommes entrain de trvailler on peut remarquer le produit de coeffecient binomial suivant :

$$\binom{p+1-j}{l} \binom{p+1}{j}$$

tentons donc de transformer ce produit en un produit de la forme $\binom{p-l+1}{j} \binom{a}{b}$:

$$\binom{p+1-j}{l} \binom{p+1}{j} = \frac{(p+1)!(p+1-j)!}{(p+1-j)!j!(p+1-j-l)!l!} =$$

$$\frac{(p+1)!}{j!(p+1-j-l)!l!} = \frac{(p+1)!(p+1-l)!}{(p+1-l)!j!(p+1-j-l)!l!} = \binom{p+1-l}{j} \binom{p+l}{l}$$

On remplace maintenant dans notre exression de $\mu_p(n) - \mu_p(n-1)$:

$$\frac{1}{p+1}\sum_{l=0}^{p}(-1)^{p-l}\binom{p+1}{l}\left(\sum_{j=0}^{p-l}(-1)^j\binom{p+1-l}{j}B_j\right)n^l$$

selon la définition par récurrence des nobmre des bernoulli on peut simplifier l'expression et obtenir :

$$\frac{1}{p+1}\times(-1)^{p-p}\binom{p+1}{p}n^p\times 1+0$$

Ce qui donne $\frac{p+1}{p+1}n^p$ et on a donc $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 : \mu_p(n) - \mu_p(n-1) = n^p$

et donc grâce a la condition nécessaire et suffisante établi plus haut on en déduit que $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}B_j n^{p+1-j}$$