O BRILHO MÁXIMO DE VÊNUS

Guilherme Limberg, nº USP: 9346200

O BRILHO MÁXIMO DE VÊNUS

Guilherme Limberg
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo
Última versão dia 26 de junho de 2017

RESUMO

Utilizo conhecimentos de geometria analítica, vetores e cálculo diferencial, aliados aos conteúdos estudados de acordo com o programa da disciplina Planetas e Sistemas Planetários, ministrada para estudantes de graduação, oferecida pelo Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo (IAG -USP) para encontrar a posição do planeta Vênus, em relação à Terra, para qual seu brilho é máximo.

ABSTRACT

I utilize knowledge of analytical geometry, vectors and differential calculus alongside contents studied accordingly to the program of the discipline Planets and Planetary Systems, ministered for undergrad students, offered by the Institute of Astronomy, Geophysics and Atmospheric Sciences of the University of Sao Paulo (IAG-USP) in order to find the position of the planet Venus, relative to the Earth, wich its brilliancy is maximized.

1. Introdução

No escopo da disciplina de Planetas e Sistemas Planetários oferecida pelo Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo (IAG-USP), oferecida a alunos dos bacharelados em Física ou Astronomia, apresenta-se efeitos de projeção de acordo com as posições relativas entre Vênus, o Sol e a Terra, manipulações trigonométricas e diferenciações nas quais, ao serem igualadas a zero, encontra-se valores de máximo e mínimo das funções.

Para um objeto no Sistema Solar (como asteroides e planetas), seu brilho depende de uma diversidade de variáveis: a distância a partir da fonte de luz que, nesse caso, é o Sol, a distância até a Terra, a fração da superfície iluminada, a fração da superfície visível, o albedo do copo e a rotação do mesmo, já que diferentes regiões da superfície do mesmo podem apresentar diferentes capacidades de reflexão.

Consideremos, para a problemática apresentada, que a órbita de Vênus é circular ao redor do Sol e sua inclinação em relação ao plano da eclíptica é muito pequena. Também considera-se o albedo sobre a superfície do planeta como constante. Escrevemos:

$$L = k\frac{p}{\Delta^2} \tag{1}$$

equação na qual L é a luminosidade de Vênus, Δ é a distância a partir da Terra, k é uma constante de proporcionalidade e p é a chamada fase do planeta, a qual discutiremos mais ao longo deste trabalho. Importante ressaltar que a constante k depende de fatores como o albedo do objeto, a variação do mesmo ao longo da superfície do planeta, excentricidades da órbita, variações de inclinação com relação à eclíptica, influências da geometria do próprio formato do planeta que, com certeza não é uma esfera perfeita já que detém momento angular, entre outras particularidades não previstas do planeta Vênus.

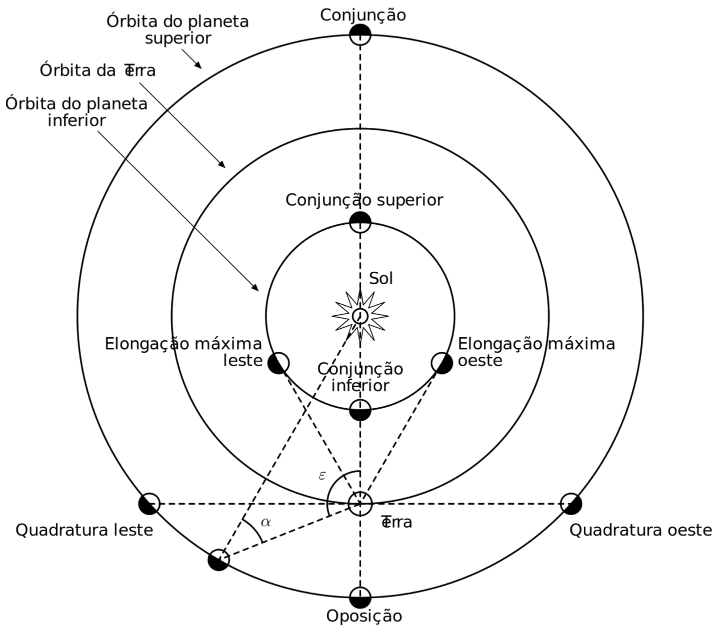

Figura 1: as diferentes posições notáveis para um objeto com relação à Terra.

Da figura 1, já observamos que para as posições de conjunção superior e inferior, o brilho de Vênus observado a partir da Terra deve ser nulo. Isso ocorre já que, na conjunção superior, o planeta Vênus está ocultado pelo próprio Sol ou, no mínimo, ofuscado pelo mesmo, enquanto na conjunção inferior e parte iluminada não está voltada para a Terra. Nos resta, então, investigarmos regiões intermediárias entre as elongações máximas e as conjunções.

2. Ângulo de fase (φ)

Utilizaremos, nesta seção, trigonometria e geometria para determinação de grandezas pertinentes ao problema.

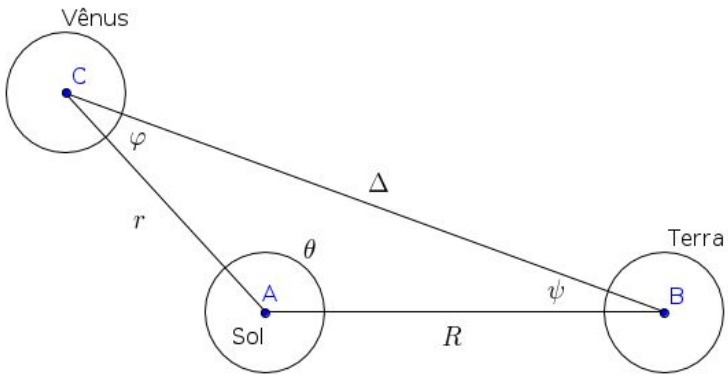

Figura 2: posição relativa entre Terra, Vênus e Sol para $\varphi < \frac{\pi}{2}$

Da figura 2, explicita-se a distância Δ entre Terra e Vênus em relação a outros elementos importantes como R a distância entre Terra e Sol, r a distância entre Vênus e o Sol, θ o ângulo $B\widehat{A}C$ oposto a Δ, ψ o ângulo $A\widehat{B}C$ oposto a r e φ o ângulo de fase. Para o caso da figura 2, $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Para o caso $\varphi > \frac{\pi}{2}$ temos a figura 3:

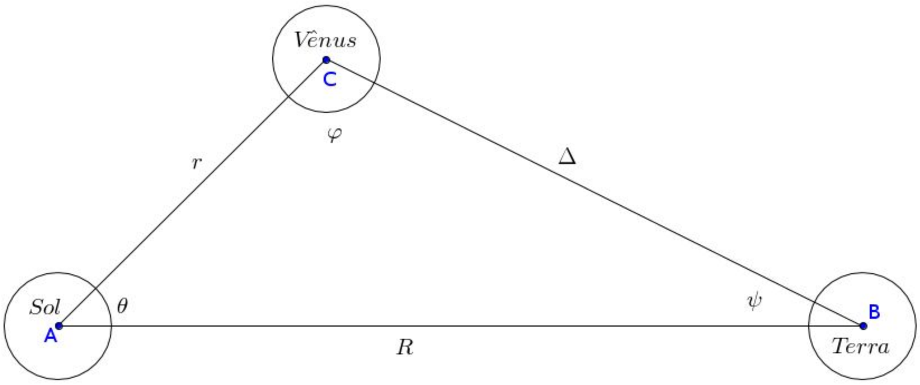

Figura 3: posição relativa entre Terra, Vênus e Sol para $\varphi > \frac{\pi}{2}$.

Das figuras acima, escrevemos imediatamente:

$$R^2 = r^2 + \Delta^2 - 2r\Delta cos\varphi \tag{2}$$

da lei dos cossenos. Logo:

$$cos\varphi = \frac{r^2+\Delta^2-R^2}{2r\Delta} \tag{3}$$

Portanto, evidenciam-se dois casos análogos para $\varphi > \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos\varphi < 0$ (Vênus próximo da Terra) e para $\varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos\varphi > 0$ onde Vênus está distante da Terra.

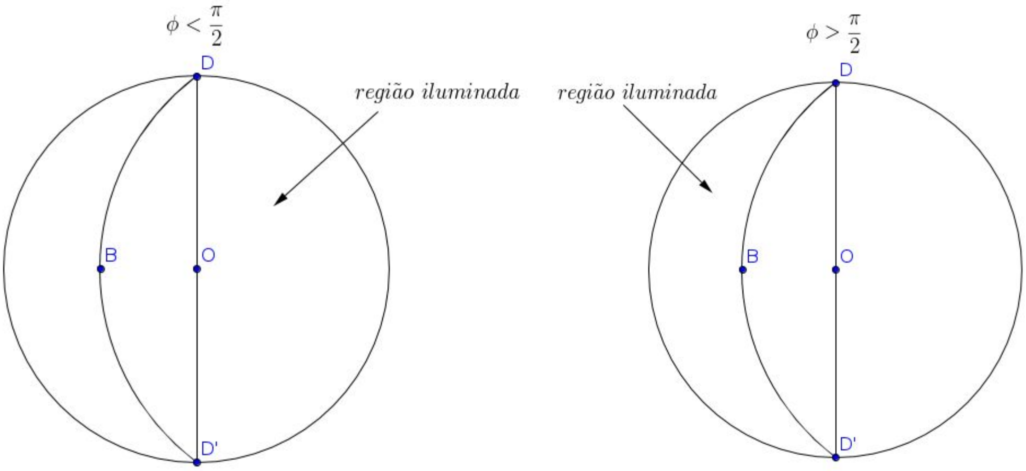

Figura 4a e 4b: regiões do disco de Vênus iluminada pelo Sol para cada caso.

Portanto, dadas as figuras 4a e 4b, podemos determinar qual a área do disco do planeta Vênus que estará iluminada pelo Sol. Para o caso (a), temos Vênus distante e:

$$\acute{A}rea\ iluminada\ maior = A_1 = \frac{1}{2}\pi(R_V)(\overline{BO}) + \frac{1}{2}\pi(R_V)^2 \tag{4}$$

onde $R_V = \overline{DO}$ é o raio de Vênus. Temos ainda:

$$\acute{A}rea\ iluminada\ menor = A_2 = \frac{1}{2}\pi(R_V)^2 - \frac{1}{2}\pi(R_V)(\overline{BO}) \tag{5}$$

Agora, apresentamos uma outra vista do problema:

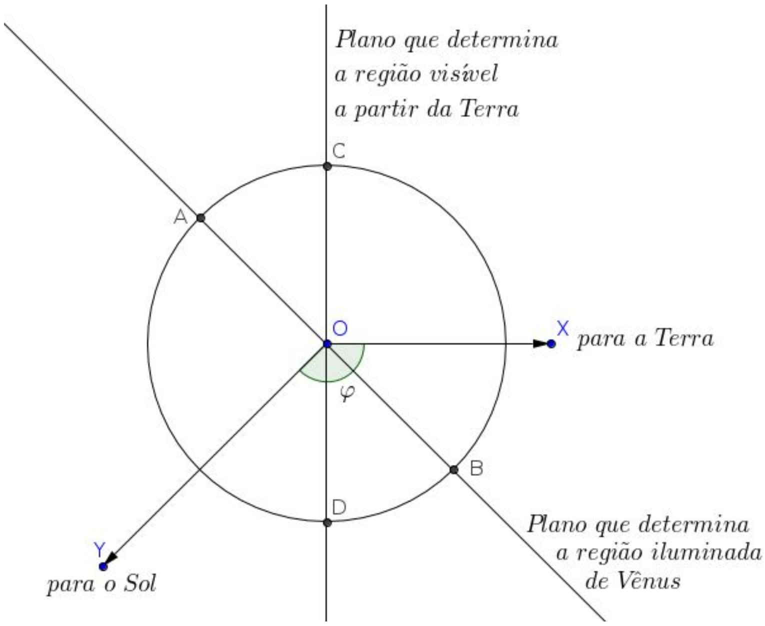

Figura 5: relação entre regiões iluminadas e visíveis a partir da Terra.

Da figura 5, o plano que corta o planeta Vênus através dos pontos A e B determina a parte do planeta que, a cada instante, está iluminada pelo Sol. O plano que corta a figura pelos pontos C e D determina a região do planeta que está visível, a cada instante, a partir da Terra. O ângulo de fase é $\varphi = X\widehat{O}Y$ e através de construções geométricas, o ângulo que representa o arco de intersecção entre a região iluminada e aquela visível da Terra é:

$$B\widehat{O}D = \pi - \varphi \tag{6}$$

e basta prolongar os vetores $\vec{OX}$ e $\vec{OY}$ para visualizar.

Outra relação importante da figura 5 é que o comprimento do segmento de reta $\overline{OB}$ pode ser escrito como uma projeção do comprimento do segmento $\overline{OD} = R_V$ de acordo com o ângulo $\pi - \varphi$:

$$\overline{OB} = R_V cos(\pi - \varphi) \tag{7}$$

e, substituindo em 4 e 5, ficamos com:

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\pi(R_V)^2 cos(\pi - \varphi) + \tfrac{1}{2}\pi(R_V)^2 = \tfrac{1}{2}\pi(R_V)^2(1 - cos\varphi) \tag{8}$$

sendo que $\overline{OB} = \overline{BO}$, e:

$$A_2 = \tfrac{1}{2}\pi(R_V)^2 - \tfrac{1}{2}\pi(R_V)^2 cos(\pi - \varphi) = \tfrac{1}{2}\pi(R_V)^2(1 + cos\varphi) \tag{9}$$

Portanto, agora, encontramos os candidatos e fase p do nosso problema. A fase será definida como a proporção do disco de Vênus que está visível para um observador na Terra:

$$p_1 = \tfrac{1}{2}(1 - cos\varphi) \tag{10}$$

para a área iluminada maior e, para a área menor:

$$p_2 = \tfrac{1}{2}(1 + cos\varphi) \tag{11}$$

Concluímos, nesta seção, que que o brilho de Vênus depende um fator $1 \pm cos\varphi$ já que a sua luminosidade é diretamente proporcional à fase (1).

3. Distância entre Terra e Vênus (Δ)

Das equações (1), (10) e (11), podemos escrever as relações:

$$L_1 = \frac{k}{\Delta^2}\frac{1}{2}(1 - cos\varphi) \qquad (12)$$

para a luminosidade de A_1 e:

$$L_2 = \frac{k}{\Delta^2}\frac{1}{2}(1 + cos\varphi) \qquad (13)$$

para a luminosidade de A_2.

Com $L_1 = -L_2$, continuamos a desenvolver de acordo com a equação (3):

$$L = \pm \frac{k}{2\Delta^2}(1 + \frac{r^2+\Delta^2-R^2}{2r\Delta}) \qquad (14)$$

equação na qual k, R e r são constantes. Portanto L_1 e L_2 são funções apenas de Δ.

$$L(\Delta) = \pm \frac{k}{4r}(\frac{2r}{\Delta^2} + \frac{r^2}{\Delta^3} + \frac{1}{\Delta} - \frac{R^2}{\Delta^3}) \qquad (15)$$

Dada a equação acima, podemos diferenciar e igualar a zero para encontrar máximos e mínimos das funções $L_1(\Delta)$ e $L_2(\Delta)$.

$$\frac{dL(\Delta)}{d\Delta} = \pm \frac{k}{4r}(\frac{-4r}{\Delta^3} - \frac{3r^2}{\Delta^4} - \frac{1}{\Delta^2} + \frac{3R^2}{\Delta^4}) \qquad (16)$$

Logo:

$$\frac{dL(\Delta)}{d\Delta} = 0 \Rightarrow \pm \frac{k}{4r}(\frac{-4r}{\Delta^3} - \frac{3r^2}{\Delta^4} - \frac{1}{\Delta^2} + \frac{3R^2}{\Delta^4}) = 0 \Rightarrow 4r\Delta + \Delta^2 = 3(R^2 - r^2) \qquad (17)$$

e, resolvendo a equação de segundo grau, teremos:

$$\Delta = \frac{-4r \pm \sqrt{4(3R^2+r^2)}}{2} = -2r \pm \sqrt{3R^2 + r^2} \qquad (18)$$

Evidentemente que o valor negativo desse resultado é desprezível. Portanto o valor de Δ, para o qual a função da luminosidade é máxima, será:

$$\Delta_{máx} = -2r + \sqrt{3R^2 + r^2} \qquad (19)$$

Para uma distância entre a Terra e Sol $R = 1AU = 1,486 \cdot 10^8\ km$ e a distância entre Vênus e Sol $r = 1,082 \cdot 10^8\ km$, teremos uma distância máxima entre Terra e Vênus da magnitude de:

$$\Delta_{máx} = 6,440 \cdot 10^7\ km$$

que é uma distância para a qual a posição de brilho máximo de Vênus deve estar muito próxima. Pode variar um pouco de acordo com a frequência de rotação do planeta e a variação de albedo ao longo de sua superfície conforme discutido na seção 1.

4. Ângulo do Sol entre Vênus e Terra (θ)

Das figuras 2 e 3 e utilizando lei dos cossenos, escrevemos o parâmetro Δ em função do ângulo θ entre os segmentos de retas que ligam a Terra ao Sol e Vênus ao Sol. Logo:

$$\Delta^2 = r^2 + R^2 - 2Rrcos\theta \tag{20}$$

analogamente à equação (2).

$$\Delta = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rrcos\theta} \tag{21}$$

Como já dito, considerando que R e r são constantes, ficamos com Δ em função de uma única variável na forma do parâmetro θ.

Da equação (15) que expressa a luminosidade do função de Δ, podemos substituir com o resultado de (20) para obter o brilho máximo como função, agora, do ângulo θ:

$$L(\theta) = \pm \frac{k}{4r}\left[\frac{2r}{r^2+R^2-2Rrcos\theta} + \frac{1}{\sqrt{r^2+R^2-2Rrcos\theta}}\left(\frac{r^2-R^2}{r^2+R^2-2Rrcos\theta} + 1\right)\right] \tag{22}$$

e reescrevendo:

$$L(\theta) = \pm \frac{k}{4r}\left(\frac{2r+R^2-4rRcos\theta+3r^2}{r^2+R^2-2rRcos\theta}\right) \tag{23}$$

Agora, derivamos a expressão acima:

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = \pm \frac{k}{4r}\left[\frac{sen\theta\ 2rR\ (R^2-2r-r^2)}{(r^2+R^2-2rRcos\theta)^2}\right] = 0 \tag{24}$$

e, analogamente ao processo realizado na seção 3 para encontrar o máximo valor da função luminosidade, iguala-se sua derivada a zero:

$$sen(\theta) = 0 \tag{25}$$

portanto, para:

$$\theta = n\pi,\ \forall n = \{0, 1, 2, 3...\} \in \mathbb{N} \tag{26}$$

é um candidato a máximo. Contudo, analisando esse candidato, observemos que para $\theta = n\pi$ tal que $n \in \{0, 1, 2...\}$ o planeta Vênus está em conjunção superior ou inferior e, conforme discutido na seção 1, esta com certeza não é uma posição candidata a ângulo de máximo brilho, mas sim de mínimo.

5. Elongação (ψ)

Já tendo atacado o problema com viés dos ângulos φ e θ nas seções 2, 3 e 4, dadas as figuras 2 e 3, realizamos agora a relação do ângulo de elongação ψ com o problema. Utilizando a lei dos cossenos, analogamente ao realizado anteriormente, obtemos:

$$r^2 = R^2 + \Delta^2 - 2R\Delta cos\psi \Rightarrow cos\psi = \frac{R^2+\Delta^2-r^2}{2R\Delta} \tag{27}$$

e, relacionando com ψ, de acordo com a figura 2 e 3 da seção 2, pela lei dos senos:

$$\frac{sen\psi}{r} = \frac{sen\varphi}{R} \Rightarrow sen\psi = \frac{r}{R}sen\varphi \tag{28}$$

e, assim, podemos utilizar a equação da fase (11) e (28)para relacionar os parâmetros ψ e φ , da forma:

$$cos\varphi = 2p - 1 \tag{29}$$

então:

$$\varphi = arccos(2p - 1) \tag{30}$$

e, de (28), ficamos com a expressão:

$$sen\psi = \frac{r}{R}sen(arccos(2p - 1)) \tag{31}$$

por fim:

$$\psi(p) = arcsen(\frac{r}{R}sen(arccos(2p - 1))) \tag{31}$$

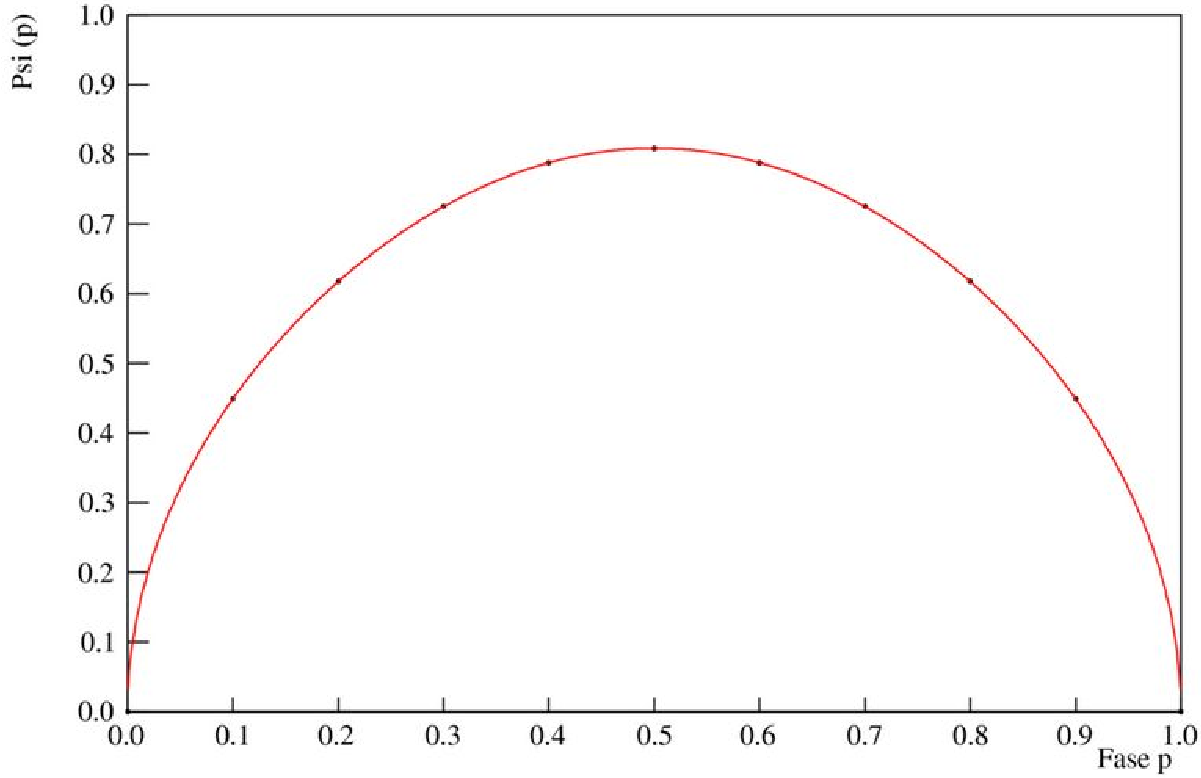

Figura 6: plotagem do gráfico da elongação pela fase.

Reconhecimentos

Reconhece-se os softwares de distribuição livre Geogebra, Pinta, LibreOffice e webROOT por fornecerem as ferramentas necessárias à documentação deste trabalho e o professor Amaury Augusto de Almeida da disciplina de Planetas e Sistemas Planetários, em 2017, pela oportunidade.

Referências

ALMEIDA, A. A.. *Planetas e Sistemas Planetários.* Universidade de São Paulo, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Departamento de Astronomia, 2017. 235 p..