## تذكير :

- **عملية الضرب قابله للتوزيع أي إن :** $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

**مثال :** $5 \cdot (6+7) = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 65 = 5 \cdot (13)$

- **عملية الضرب ابداليه أى ان :** $x \cdot y = y \cdot x$

**مثال :** $9 \cdot 7 = 63 = 7 \cdot 9$

- **الأسس**

**مثال :**

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$27 = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$$16 = 4^2 = 4 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

---

## تعريف النظريه :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

**السؤال :** أحسب التكامل بأستخدام تجميعيات ريمان.

$$\int_0^1 x^2\,dx = ?$$

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad f(x) = x^2$$

**بتطبيق النظريه**

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{k(1-0)}{n}\right)$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{f(x)=x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$$

- **نلاحظ؛** إن دليل (index) الـ summation هو $k$ مش $n$ و بالتالى ممكن أعتبر $\frac{1}{n}$ ثابت و أخرجه برة الـ summation.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

- بأستخدام خصائص الـ summation

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**إذن؛**

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

هنطير $n$ من البسط مع $n$ من المقام.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \frac{1}{n^2} (n+1)(2n+1)$$

**نظريه هامه فى النهايات ؛**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

**هنحاول نستخدم النظريه بإننا نظهر الشكل $\frac{1}{n}$ فى النهايه.**

- **الأستراتيجيه لكى نجعل الشكل $\frac{1}{n}$ يظهر فى النهايه :**

**أولاً؛ ممكن اعتبر $\frac{1}{n^2}$ هو عباره عن $\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)$ "فكيت المقام فقط".**

**ثانياً؛ هستفيد من خواص إن الضرب عمليه إبداليه و قابله للتوزيع .**

هامش ؛

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

**إذن؛**

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} (n+1)(2n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \left( \frac{1}{n}(n+1) \right) \left( \frac{1}{n}(2n+1) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$
$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

- بأستخدام خصائص الـ Limits

إذن؛

$$=\frac{1}{6}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{6}\left(\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$

- بأستخدام خصائص الـ Limits

$$\lim_{n\to\infty}c=c$$
$c$ ثابت.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$=\frac{1}{6}(1+0)(2+0)=\frac{1}{6}(1)(2)=\frac{1}{3}$$