

15.3.17

תרגול 1 - מספרים מרוכבים:

מספרים מרוכבים

בפתרון שלוש משימות כאילו שיש משימות שאין להן

שורשים ממשיים. לדוגמה: $x^2 + y = 0$
 $x^2 = -4$

$\Rightarrow x = \pm \sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$



$i = \sqrt{-1}$

לדוגמה "מספר חזל"

הגדרות: מספר מרוכב: מספר בצורת $a+bi$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$
 מספר מרוכב: מספר בצורת $a+bi$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$

סימון: $z = a+bi \Leftrightarrow$ הנקודה האמצעית.

* כעת המספרים המרוכבים לא קיים סדר! כלומר לא ניתן לקבוע אם
 מ"מ/מ"מ/שיתיים, מ"מ/שיתיים/קטן וכו'

פעולות בל"ס מרוכבים:

1) חיבור/חסר: $(a+bi) \pm (c+di) = a \pm c + (b \pm d)i$

2) כפל: $(a+bi)(c+di) = ac - bd + i(ad+bc)$

3) חילוק: הגדרה: $z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi$ לדוגמה: $\bar{z} = a-bi$

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-bd+ i(bc+ad)}{c^2+d^2}$

1) $(4-i) + (2-3i) = 6-4i$ לדוגמה

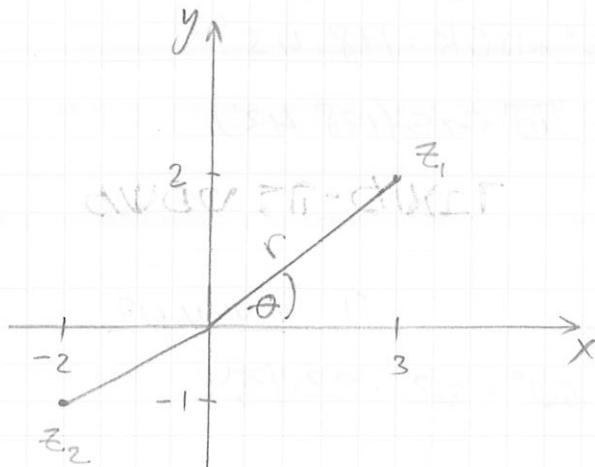
2) $(1+i)^4 \cdot (1-i)^6 = ((1+i)^2)^2 \cdot ((1-i)^2)^3 = (2i)^2 \cdot (-2i)^3 =$
 $= (-4) \cdot (-8) \cdot (-i) = -32i$

המושג של גודל: נניח את המספרים המרוכבים כמ"מ צירים.

$z = x+iy$, כל מספר על ציר ה-x, וכל מספר על ציר ה-y, וכל מספר מרוכב

ממלאה נקודה יחידה, וההפך.

$z_1 = 3+2i$ (3,2) ציר ה-x - ממשי
 $z_2 = -2-i$ (-2,-1) ציר ה-y - מרוכב



ההצגה הקטבית/סולארות:

- תהי נק' $A(x, y)$ במישור xy ונניח שהמרחק מהמקור O לנק' A הוא r וזווית הסיבוב θ היא זווית הסיבוב מהציר OX לרדיוס OA .
- לכן $x = r \cos \theta$ ו- $y = r \sin \theta$.
- הצורה $z = x + yi$ נקראת הצגה קרטזית של מספר מרוכב.
- הצגה קטבית:

1) הוסיף המרחק r מהמקור - המרחק r מהמקור O לנק' A הוא r וזווית הסיבוב θ היא זווית הסיבוב מהציר OX לרדיוס OA .

2) הוסיף המרחק r מהמקור - המרחק r מהמקור O לנק' A הוא r וזווית הסיבוב θ היא זווית הסיבוב מהציר OX לרדיוס OA .

הצורה $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ נקראת הצגה קטבית של מספר מרוכב.

לכן $r = |z|$ ו- $\theta = \arg z$.

הקשר בין הצגות: 1) נניח שהצגה קטבית (r, θ) היא הצגה קטבית של מספר מרוכב z .

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow z = x + yi = r \cos \theta + (r \sin \theta)i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

2) נניח שהצגה קטבית $z = x + yi$ היא הצגה קטבית של מספר מרוכב z .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) + 180k$$

הערה: למשוואה $\tan \theta = \frac{y}{x}$ יש פתרונות בתחום $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

את הצורה הקטבית נקרא r וזווית הסיבוב θ .

דוגמה: הצגה קטבית של $z = -3 - i$ היא:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}, \tan \theta = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = 18.43^\circ + 180^\circ k = 198.43^\circ$$

$$z = -3 - i = \sqrt{10} \operatorname{cis}(198.43^\circ)$$

משפט דה-מואבר: $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$ $n \in \mathbb{Z}$

$$(2 \operatorname{cis} 10^\circ)^6 = 2^6 \operatorname{cis} 60^\circ$$

$$2^6 \cos 60^\circ + i 2^6 \sin 60^\circ = 32 + 32\sqrt{3}i$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \quad : \text{נרמור לזה צלח קוסמי} \quad (1-2i)^8$$

$$\tan \theta = \frac{-2}{1}$$

$$K=2 \text{ ו} n$$

$$\theta = -63.43 + 180K = 296.56^\circ$$

$$1-2i = \sqrt{5} \text{cis}(-63.43) = \sqrt{5} \text{cis}(296.56^\circ)$$

אזכור

$$[\sqrt{5} \text{cis}(296.56^\circ)]^8 = \sqrt{5}^8 \text{cis}(296.56 \cdot 8)$$

הוצאת שורש:

$$\sqrt[n]{r} \text{cis} \theta = \sqrt[n]{r} \text{cis} \left(\frac{\theta + 2\pi K}{n} \right)$$

$$K=0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$z^5 - 32i = 0$$

צורה: $z^5 = 32i$

$$z^5 = 32i$$

$$z = \sqrt[5]{32i}$$

$$32i = 32 \text{cis} 90^\circ \Rightarrow z = \sqrt[5]{32} \text{cis} \left(\frac{90^\circ + 2\pi K}{5} \right)$$

$$K=0 \quad z_0 = 2 \text{cis} \frac{90^\circ}{5}$$

$$K=1 \quad z_1 = 2 \text{cis} \frac{450^\circ}{5}$$

$$K=2 \quad z_2 = 2 \text{cis} \frac{810^\circ}{5}$$

$$K=3 \quad z_3 = 2 \text{cis} \frac{1170^\circ}{5}$$

$$K=4 \quad z_4 = 2 \text{cis} \frac{1530^\circ}{5}$$

* אם נסרטי את 5 הקבוצים
המשורשים האלו נקראו
המשורשים המשווים

6/2/2012 view:

6/2/2012 view:

(2012) 2012-2012

6/2/2012 view:

6/2/2012 view:

6/2/2012 view:

6/2/2012 view:

6/2/2012 view:

mordeev@post.ac.il
יום ראשון בוקר, חמישי אולי 16

שיעור 1 - אנליזה

משוואה דיפרנציאלית
משוואה דיפרנציאלית
(א) $y = y(x)$, נמצאת של הפונקציה $y(x)$ או דיפרנציאלים שלה
הינה משוואה דיפרנציאלית רגילה.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y'' + 5x \cdot (y')^2 + 55x = 0$$

משוואה דיפרנציאלית
משוואה דיפרנציאלית
 $x dx + y^2 dy = 0$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

איזה קשר יש לך בין נגזרת לדיפרנציאל?

$$dy \approx \Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

סדר של משוואה דיפרנציאלית
סדר מקסימלי של נגזרת או דיפרנציאל
אשר מופיע בפונקציה.

(1) משוואה דיפרנציאלית מסדר 2

(2) משוואה דיפרנציאלית מסדר 1

פתרון של משוואה דיפרנציאלית - פונקציה כמעט הפוכה לבנין
אשר מקיימת את המשוואה.

לדוגמה: $y = e^x \cdot x - e^x + 1$ היא פתרון של המשוואה $y' = e^x \cdot x$

(בדוק: נמצא את הפונקציה שלנו)
 $y' = e^x \cdot x + e^x - e^x$

כפי שראינו $y' = e^x \cdot x$

לדוגמה: תהי $y(t)$ גודל אוכלוסיה של חיות מסויים בזמן t .
המשוואה הפשוטה ביותר הכוללת את אוכלוסיה היא
קצב שינוי של אוכלוסיה פרופורציונלית לזמן הנוכחי של y .

$$y'(t) = k \cdot y$$

(3) נניח $k=1 \Leftrightarrow y' = y$

זהם הפתרונות האפשריים
 $y = ce^x$
 $\left. \begin{array}{l} y_1 = e^x \\ y_2 = 2e^x \\ y_3 = 3e^x \end{array} \right\}$

משימה דיפרנציאלית מסדר ראשון

הצורה: $F(x, y, y') = 0$ (קטית משימה ציב מסדר ראשון, אם את y' ניתן לחלף ולקבל משימה $y' = f(x, y)$)

הצורה: פיתרון כללי של משימה $F(x, y, y') = 0$ היל פתק ציה גציה $y = y(x, c)$ אול, מניה קבות c , (נאופן כזה של פתרון למשימה, מלמד מקנים בולדים, ניתן לקבל זמור זכנים שונים של c .)

כל פתרון שטיק לפיתרון הכללי נקרא פיתרון פרטי.

הצורה: $y' = x$ פתרון כללי $y = \frac{x^2}{2} + C$ פתרון פרטי $y = \frac{x^2}{2} + 1$

הצורה: פיתרון מיוחד פתרון של משימה דיפרנציאלית לאילן מתקבל מפתרון כללי לשום דרך של קמור c .

קצית קושי: קציה מהצורה: $y' = f(x, y)$ $y(x) = y_0$ תנאי התחלה (= קצית התחלה)

* למצוא קושי/התחלה יל בדרך - כלל פיתרון אחד.

שיטות פתרון למשימות דיפרנציאליות

מסדר ראשון

1. משימות ציב הנחתה להפצת משתנים: משימה מהצורה

$$M(x) \cdot N(y) dx + p(x) \cdot Q(y) dy = 0 \quad \text{או} \quad y' = f(x) \cdot g(y)$$

① * $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad / : g(y) = 0 \quad / dx$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \quad / \int \text{אינטגרציה}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$$G(y) = F(x) + C$$

פתרון כללי $y = y(x, c)$ (מתחם שאפשר לטאטוז ניק)
 כחלק את c רק הצב אחד, כי בולדים היה קמור גב הצב הישן למחיל אל

המשך... פיתרון מיוחד:

$$g(y)=0 \Leftrightarrow y=y_1 \text{ (נקיים את המשוואה } g(y)=0 \text{)}$$

אם $y=y_1$ הוא פיתרון למשוואה הדיפרנציאלית המקורית $\Leftrightarrow$

א. אם $y=y_1$ נכלל בפיתרון הכללי (קיים קבוע C כך ש- $y=y_1$),

אז לא צריך להוסיפו הנפרד. (כי הוא נכלל בפיתרון הכללי)

ב. אם הוא לא נכלל בפיתרון הכללי, אז צריך להוסיף אותו כפיתרון מיוחד.

$$② * M(x) \cdot N(y) dx + P(x) \cdot Q(y) dy = 0 \quad / : N(y) \cdot P(x) \neq 0$$

$$\frac{M(x)}{P(x)} dx + \frac{Q(y)}{N(y)} dy = 0$$

$$\frac{M(x)}{P(x)} dx = - \frac{Q(y)}{N(y)} dy$$

$$* (1+y^2)(e^{2x} dx - e^y dy) - (1+y) dy = 0 \quad (1+y^2) \neq 0$$

$$\underbrace{(1+y^2)}_{N(y)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{M(x)} dx + \underbrace{((1+y^2) \cdot (-e^y) - (1+y))}_{P(x)=1 \quad Q(y)} dy = 0$$

לפי קריטריון
משוואת בפרט $\frac{dx}{dy}$
ומשוואת כלל $\frac{dy}{dx}$

$$e^{2x} dx + (-e^y - \frac{1+y}{1+y^2}) dy = 0$$

$$\text{הנקודות} \quad e^{2x} dx = (e^y + \frac{1+y}{1+y^2}) dy \quad / \int$$

$$\int e^{2x} dx = \int (e^y + \frac{1+y}{1+y^2}) dy$$

$$\int e^{2x} dx = \int (e^y + \frac{1}{1+y^2} + \frac{y}{1+y^2}) dy$$

$$\frac{1}{2} e^{2x} + C = e^y + \arctan y + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) \quad \text{פיתרון כללי}$$

לפי הפיתרון המיוחד: $1+y^2 > 0$ תמיד!
ואכן לא נקנס בפיתרון מיוחד.
(אנחנו חייזקנו והוספנו שיהיה $0 \neq$ ואכן כך)

$$y' = 2y$$

משוואה הניתנת להפרדת משתנים:

$$f(x) = 2$$

$$g(y) = y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y \quad / : y \neq 0 \quad / \cdot dx$$

הפרדת המשתנים

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2 dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{2x+C}$$

$$|y| = e^{2x} \cdot e^C$$

$$(e^C = C_1 > 0)$$

$$\pm y = e^{2x} \cdot C_1$$

$$y = e^{2x} (\pm C_1)$$

הזמנית את ה- $\pm$ ל- C_1

$$\Rightarrow y = \underbrace{C_2}_{\text{סימון}} e^{2x} \quad C_2 \neq 0 \quad (= e^0)$$

פיתרון מיוחד: $y=0 \Leftrightarrow y'=0$

$$0 = 2 \cdot 0$$

מכאן שאם $y=0$ הוא פיתרון למשוואה:

$$y = C_2 e^{2x} \xrightarrow{\text{א}} y = C_3 e^{2x} \quad C_3 = \begin{cases} C_2 \\ 0 \end{cases}$$

אפיתרון מיוחד: $y=0$

הערה: משוואה ציף הניתנת למעלה פרידה:

$$y' = f(ax + by + c) \quad \text{קבוצים } a, b, c$$

שיטת הפיתרון: אנו מוצים מחפשים לעדור משוואה מסוג זה
למשוואה הניתנת להפרדת משתנים:

$$* \quad z = ax + by + c \quad (\text{מסל})$$

$$z(x) = ax + by(x) + c$$

$$z'(x) = a + b \cdot y'(x)$$

$$y'(x) = \frac{z'(x) - a}{b}$$

עדינו נשאר
הצגים

לבוד את y'

(צ"ב במקום)

$$\Downarrow \quad \frac{z'(x) - a}{b} = f(z) \quad / \cdot b$$

$$z'(x) = b f(z) + a$$

$$\frac{dz}{dx} = b \cdot f(z) + a \quad / : b f(z) + a \quad / \cdot dx$$

$$\frac{dz}{b f(z) + a} = dx$$

213: מצאנו פתרון כללי של המשוואה

$$y' = \cos(y-x) \Rightarrow z = y-x$$

$$\Downarrow$$

$$(z)'_x = (y-x)'_x$$

$$z' = y' - 1$$

$$y' = z' + 1$$

$$\Downarrow$$

$$z' + 1 = \cos(z) \quad / -1$$

$$z' = \cos(z) - 1 \quad / : \cos(z) - 1 \neq 0 \quad / dx$$

$$\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{\cos(z)-1} = dx \quad / \int \Rightarrow \int \frac{dz}{\cos(z)-1} = \int dx$$

נחזק

$$\cos(z) - 1 = -2\sin^2 \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{-2\sin^2 \frac{z}{2}} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sin^2 \frac{z}{2}} = \int dx \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-\cot(\frac{z}{2})) + C_1 = x + C_2 \Rightarrow \cot(\frac{z}{2}) = x + C'$$

שימו לב

$$z = y-x \Rightarrow \boxed{\cot\left(\frac{y-x}{2}\right) = x + C'}$$

$$\Leftarrow z = 2\pi k, k \in \mathbb{R} \Leftarrow \cos(z) - 1 = 0 : \text{פתרון נוסף}$$

$$y' = 1 \Leftarrow y = x + 2\pi k \Leftarrow y - x = 2\pi k$$

כעת נבדוק האם זה פתרון של המשוואה המקורית

$$\left. \begin{array}{l} y' = \cos(y-x) \\ y' = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2\pi k + x$$

האם תמיד נכנס לפתרון הכללי? נבדוק:

$$\cot\left(\frac{y-x}{2}\right) = x + C \Rightarrow \cot\left(\frac{2\pi k + x - x}{2}\right) = x + C \Rightarrow \infty = x + C$$

$$\cot(2\pi k) = \infty$$

לכן ניתן להוסיף פתרון $y = 2\pi k + x$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cot\left(\frac{y-x}{2}\right) = x + C \\ y = 2\pi k + x \end{array}}$$

תשובה סופית

1. The first part of the proof is to show that the function $f(x)$ is continuous at x_0 . To do this, we need to show that for any $\epsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that if $|x - x_0| < \delta$, then $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Let $\epsilon > 0$ be given. We want to find $\delta > 0$ such that if $|x - x_0| < \delta$, then $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Since $f(x) = \frac{1}{x}$, we have $|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{xx_0} \right| = \frac{|x_0 - x|}{|xx_0|}$.

Since $x_0 \neq 0$, we can choose $\delta_1 > 0$ such that if $|x - x_0| < \delta_1$, then $|x| > \frac{|x_0|}{2}$. This is possible because $|x - x_0| < \delta_1$ implies $|x| \geq |x_0| - \delta_1$. If we choose $\delta_1 = \frac{|x_0|}{2}$, then $|x| \geq |x_0| - \frac{|x_0|}{2} = \frac{|x_0|}{2}$.

Now, we can choose $\delta_2 > 0$ such that if $|x - x_0| < \delta_2$, then $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. This is possible because $|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x_0 - x|}{|xx_0|} < \frac{\delta_2}{\frac{|x_0|}{2} |x_0|} = \frac{2\delta_2}{|x_0|^2}$. If we choose $\delta_2 = \frac{\epsilon |x_0|^2}{2}$, then $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Let $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Then, if $|x - x_0| < \delta$, we have $|x| > \frac{|x_0|}{2}$ and $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Therefore, $f(x)$ is continuous at x_0 .

2. The second part of the proof is to show that the function $f(x)$ is differentiable at x_0 . To do this, we need to show that the limit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ exists. We have $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{\frac{x_0 - (x_0 + h)}{(x_0 + h)x_0}}{h} = \frac{\frac{-h}{(x_0 + h)x_0}}{h} = \frac{-1}{(x_0 + h)x_0}$.

תרגול 2 - משוואות דיפרנציאליות

הערה 1: מצדד הוא משוואה שבה הנעלם הוא פונקציה, כאשר המשוואה מתארת תלות בין הפונקציות.

הערה 2: הסדר של מצדד הוא הסדר הגבוה ביותר של y הנמצאת במשוואה.

למשל: $y' + \sin y = \sin x$ (1) $\leftarrow$ סדר 1

(2) $y'' + y' + y = x$ $\leftarrow$ סדר 2

הערה 3: פיתרון כללי של מצדד הוא מלפחה של פונקציה y (מקסימום) (המקסימום את המשוואה).

פיתרון פרטי: אחת מהפונקציות.

צורה: $y' = f(x)$
 $f(x) = 3x^2 + e^x \Rightarrow y' = 3x^2 + e^x$
 $y = \int (3x^2 + e^x) dx = \frac{3x^3}{3} + e^x + C$

פיתרון כללי: $y = x^3 + e^x + C$

בהנחת תנאי התחלה, למשל $y(0) = 1$, נוכל למצוא פיתרון פרטי:
 $1 = 0 + e^0 + C \Rightarrow C = 0$

$\Leftarrow$ פיתרון פרטי: $y = x^3 + e^x$

משוואות דיפרנציאליות מסדר (1)

(1) משוואות פרידות: מצדד נקראת פונקציה אם ניתן לכתוב אותה בצורה הבאה:

$y' = f(x) \cdot g(y)$ / $M(x) + N(y)y' = 0$
 דרך פתרון:

$y' = f(x) \cdot g(y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ / $g(y) \neq 0$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$ / $\int$

$G(y) = F(x) + C \leftarrow C_1, C_2 \text{ ביחידות}$
 המבנה של C

$$* (1+x^2) dy = (xy+x) dx$$

$$(1+x^2) dy = (y+1)x dx \quad \because y+1 \neq 0$$

אם $1+x^2 \neq 0$
 כלומר, $x \neq \pm i$
 נכין!

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{x dx}{1+x^2} \quad \int$$

$$\ln|y+1| = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

$$\boxed{\ln|y+1| = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C} \quad \text{פירוק}$$

לכיוון זמור $y = -1$: הזכרה בפירוק הכללי נותן סתם $\leftarrow$ לא מוגדר!
 נזים $y = -1$ במשוואה המקורית!

$$(1+x^2) dy = (xy+x) dx \quad \because dx$$

$$(1+x^2) y' = xy+x$$

$$(y'=0) : y = -1 \quad \text{זמור}$$

$$\Rightarrow 0 = -x+x \Rightarrow 0=0 \quad \text{אין פירוק ולכן מיוחד}$$

$$* xy' + y = y^2$$

$$xy' = y^2 - y$$

$$x \frac{dy}{dx} = y^2 - y$$

$$\because y^2 - y \neq 0$$

$$y(y-1) \neq 0 \Rightarrow \boxed{y \neq 0}$$

$$\boxed{y \neq 1}$$

$$\frac{x dy}{y^2 - y} = dx$$

$$\because x \neq 0$$

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x} \quad \int$$

$$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} \Rightarrow A(y-1) + By = 1 \Rightarrow Ay - A + By = 1$$

$$1 = -A \Rightarrow \boxed{A = -1}$$

$$0 = A + B \Rightarrow \boxed{B = 1}$$

$$\int \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|y| + \ln|y-1| = \ln|x| + C$$

$$\boxed{\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln|x| + C} \quad \text{כנס}$$

(קצוק זכור $y=0$: $0=0$ ^{מכ} לא ניתן להציב בפנין (לח-ל) $y=0 \Leftarrow$ פנין מיוחד (הכללי כי זה מתק-ס-ל))

$y = 1$
 $y = y^2$
 $x = 0$

$$y = y^2$$

$$y - y^2 = 0$$

אילו כסר
פגמתי אלוהים $y=0,1 \Leftarrow y(y-1)=0$

$$y' = \cos^2(x) \cdot \cos^2(2y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2(x) \cdot \cos^2(2y)$$

$$1: \cos^2(24) \neq 0$$

$$\cos(2y) \neq 0$$

$$2y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow y \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$$

$$\frac{dy}{\cos^2(2y)} = \overbrace{\cos^2(x)}^* dx \quad / \int$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \tan(2y) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C}$$

11242
11550

$$* \int \cos^2(x) dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$$

$$y = \frac{\Pi}{4} + \frac{\Pi K}{2} \quad \text{מסר בקבוצה}$$

$$= \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

בפימיון הכלי לא ניתן להציב כי
 $\tan \frac{\pi}{2}$ (מתחסיס) $= \infty$!! השתה
 שה הסטובוסים

$$0 = \cos^2(x) \cdot \cos^2\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$$

ANK $0=0$

② יגיו
נ' נח 3

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

(2) משוואת הולומורפיות: מצב מהצורה $y' = f(x, y)$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{אם}$$

כאשר $M(x, y) - N(x, y)$ הן פונקציות הולומורפיות מאותו סדר.

הצורה: פונקציות הולומורפיות מסדר α (אם α שלם) אם $t \neq 0$

$$f(tx, ty) = t^\alpha \cdot f(x, y) \quad \text{מתקיים ע"י}$$

* $f(x, y) = x^3 + y^3$ דוגמה 13

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3 x^3 + t^3 y^3 = t^3 (x^3 + y^3) = t^3 f(x, y)$$

משמע, $f(x, y)$ הולומורפית מסדר 3.

הערה: אם f מתחלק על המשוואה סכום המעריכים של המונחים x ו- y שווה, אז המשוואה הולומורפית. גם סדר ההסכום המעריכים של כל המונחים.

* $f(x, y) = x^3 + y^2 \Rightarrow f(tx, ty) = t^3 x^3 + t^2 y^2$

לא ניתן לסדר $\leq$ לא הולומורפית $f(x, y)$.

דרך פיתרון: הצבה: $y = V(x) \cdot x \Leftrightarrow V(x) = \frac{y}{x}$

$$y = V(x) \cdot x$$

$$y' = V'(x) \cdot x + V(x)$$

הכל מופר של y

נשום $V(x) \cdot x$

וכן מופר של y'

נשום: $V'(x)x + V(x)$

דוגמה 14

* $xy^2 dy - (x^3 + y^3) dx = 0$

אם סכום המעריכים של כל המונחים = 3, נלקח הולומורפית (סיפון)

$$xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$$

נראה כי $f(x, y)$ הולומורפית:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} = f(x, y)$$

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^3 + (ty)^3}{tx(ty)^2} = \frac{t^3(x^3 + y^3)}{t^3 xy^2} = t^0 \left(\frac{x^3 + y^3}{xy^2} \right) \Rightarrow \text{הולומורפית מסדר 0}$$

מתקיים הצורה
 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

כעת ננסה להפחית מהצדדים:

הצדדים
 $y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$

$xy^2 \neq 0$

$$V'X + V = \frac{x^3 + V^3 x^3}{xV^2 x^2} = \frac{x^3(1+V^3)}{x^3 V^2}$$

$$V'X + V = \frac{1+V^3}{V^2} \Rightarrow V'X = \frac{1+V^3}{V^2} - V$$

$$V'X = \frac{1}{V^2}$$

$$\frac{dV}{dx} \cdot X = \frac{1}{V^2} \quad /: X \neq 0$$

$$V^2 dV = \frac{dx}{x} \quad /s$$

$$\frac{V^3}{3} = \ln|x| + C$$

$$V = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{\frac{y^3}{3x^3} = \ln|x| + C}$$

כעת ננסה להפחית מהצדדים:

כי
הוא

1. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$
 $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

In the last step
 we

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

28.3.17

ינה לא חוצרתי! =
www.cs.bgu.ac.il/~mmad2

שיעור 3 - בדרך מסדר ראשון

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (**)$$

משוואה ליניארית

שיעור 1

ליניארית כיחס ל- y ונגזרתיה. במשוואה מסוג זה y ונגזרתיה מוזכרות רק ב-1 (כפול במקרה 2) חיסור

משוואה הומוגנית המתאימה:

$$y' + p(x)y = 0$$

אנחנו צ"י שימוש במשוואה הומוגנית מתאימה, בזמן קונקרים את סוג הקונקרים, ואם הפתרון של המשוואה הוא הומוגנית/התלוייה רק ב- x בזמן "נציב" את הקונקרים שצנו בהתאם.

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad | : y \quad [y \neq 0]$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -p(x) dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x) dx + c, c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-\int p(x) dx} \cdot e^c$$

(משוואה הומוגנית) $c_1 > 0, c_1$ בחזקת e משוואה הומוגנית

$$\Rightarrow |y| = c_1 e^{-\int p(x) dx}$$

$$\Rightarrow y = \pm c_1 e^{-\int p(x) dx}$$

$$c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0, c_2$$

$$\Rightarrow y = c_2 e^{-\int p(x) dx}, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(*) \quad y = c \cdot e^{-\int p(x) dx}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(כמה פתרונות סופי:

הפירוק הכללי של משוואה הומוגנית המתאימה משוואה

$$y' + p(x)y = g(x)$$

צריך בקיבוק של אינטגרל את $y=0$ (פיתרון). אכן $y=0$ (נש"א פיתרון) משוואה הומוגנית המתאימה אך לא משוואה המקורית שאותה אנחנו מחפשים דפתור.

2. וריאציה של קבוע: $-C \rightarrow C(x)$

(תכלית) הפיתרון הכללי של המשוואה נמצא: $y(x) = \underline{C(x)} e^{-\int p(x) dx}$ (כאן $C(x)$ נציב את $y(x)$ ב- $(*)$ = משוואה מקושרת. (3 קוברים):

$$y' + p(x)y = g(x)$$

$$\Rightarrow y' = C'(x) e^{-\int p(x) dx} + C(x) e^{-\int p(x) dx} \cdot (-p(x)) \quad (*)$$

נציב את y' שקיבלנו כזה ו- y שקיבלנו בקובץ המשוואה המקושרת:

$$\underbrace{C'(x) e^{-\int p(x) dx} + C(x) e^{-\int p(x) dx} \cdot (-p(x))}_{y'(*)} + \underbrace{p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}}_{p(x) \cdot y} = g(x)$$

$= 0$. תמיד יקרה כך. בהמשך נצטרף שם כזה.

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} = g(x) \quad / \cdot e^{\int p(x) dx} \quad (\text{ותירנו ע"ס})$$

$$C'(x) = g(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$\frac{dC}{dx} = g(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \quad / \cdot dx$$

$$dC = g(x) e^{\int p(x) dx} \cdot dx \quad / \int$$

$$(*) C(x) = \int g(x) e^{\int p(x) dx} dx + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (*) y(x) = \underbrace{\left(\int g(x) e^{\int p(x) dx} dx + C_3 \right)}_{C(x)} e^{-\int p(x) dx} \Rightarrow \text{פתרון כללי}$$

פיתרון כללי של המשוואה הנ"ל הוא תמידית.

$$y(x) = \underbrace{e^{-\int p(x) dx} \int g(x) e^{\int p(x) dx} dx}_{\text{פיתרון הפרטי של המשוואה הנ"ל - תמידית}} + \underbrace{C_3 e^{-\int p(x) dx}}_{(*)}$$

סיכום:

פתרון של משוואה ליניארית לא הומוגנית:

$$y' + p(x)y = g(x)$$

שיטה: אינטגרציה של קבוע (פרמטר)

שלב 1: פתרון של משוואה ליניארית הומוגנית (התאם):

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y = C \cdot e^{-\int p(x) dx}, C \in \mathbb{R} / \{0\}$$

שלב 2: אינטגרציה של קבוע: $C \rightarrow C(x)$

$$y = C(x) e^{-\int p(x) dx}$$

נציב את $C(x)$ במשוואה הנמנית.

$$C'(x) e^{-\int p(x) dx} = g(x)$$

$$C(x) = \int g(x) e^{\int p(x) dx} dx + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

אם נספיק של צמד נציבים את ה- $C(x)$ שקיבלנו ה- y של קיבלנו:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \int g(x) e^{\int p(x) dx} dx + C_1 e^{-\int p(x) dx}, C_1 \in \mathbb{R}$$

דוגמה:

1) $y' + 2xy = 4x$

$$y' + 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2x dx \quad (y \neq 0 \text{ לא נכנסו למקרה של מק"ל}) \quad / \int$$

$$\ln|y| = -x^2 + C, C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = C_1 e^{-x^2}, C_1 > 0 \Rightarrow y = C e^{-x^2}, C \in \mathbb{R} / \{0\}$$

(*)
הפתרון הכללי של מש' הומוגנית מתאימה

$$\downarrow y = C(x) e^{-x^2} \Rightarrow y' = C'(x) e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

שלב 2:

$$\underbrace{C'(x) e^{-x^2}}_{(*) y'} + \underbrace{C(x) e^{-x^2} (-2x)}_{P3 MC3N} + 2x \cdot \underbrace{C(x) e^{-x^2}}_{(*) y} = 4x$$

$$C'(x) e^{-x^2} = 4x \quad | \cdot e^{x^2} \Rightarrow C'(x) = 4x e^{x^2}$$

(3)

$$\Rightarrow \frac{dc}{dx} = 4xe^{x^2}$$

$$dc = 4xe^{x^2} dx \quad / \int$$

$$c = 2e^{x^2} + C_5, \quad C_5 \in \mathbb{R}$$

הכלל
פ37

$$y = ce^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = (2e^{x^2} + c)e^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

הפתרון הכללי של המשוואה
(הוא) הומוגנית

$$y = \boxed{2 + ce^{-x^2}}$$

הפתרון הפרטי של
המשוואה הוא הומוגנית

הפתרון הכללי של
משוואה הומוגנית אחידה

2) $y' = \frac{y}{3x-y^2} \quad / \cdot \frac{dx}{dy}$ משוואה זו אינה ליניארית ביחס ל- $y(x)$ (בדוק אם היא ליניארית ביחס ל- $x(y)$)

$$1 = \frac{y}{3x-y^2} \cdot x'$$

$$\frac{3x-y^2-yx'}{3x-y^2} = 0$$

הזמנו את x ו- x' ונבדוק
אם נקבל משוואה

$$(3x-y^2 \neq 0)$$

נבדוק במסל שונים (פירוק)

$$\Rightarrow 3x-y^2-yx' = 0$$

$$-yx' + 3x = y^2$$

$$/ : (-y) \quad (y \neq 0)$$

מקיים משוואה מקוהג'!

ואכן זהו פתרון מיוחד/אולי

(*) $\boxed{x' + \frac{3}{y}x = -y}$

$-y$ בלי תנאי
על x ו- y
משוואה

$$x' - \frac{3}{y}x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3}{y}x$$

$$/ : x \quad (x \neq 0)$$

שם 1

לא מקיים משוואה מקוהג'

$$\frac{dx}{x} = \frac{3}{y} dy \quad / \int$$

$$\ln|x| = 3\ln|y| + \ln c, \quad c > 0$$

$$|x| = c|y|^3, \quad c > 0$$

$$\boxed{x = C_1 y^3, \quad C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \quad (*)$$

4)

2.25W: $\forall x \in A, \exists y \in B, x \rightarrow C(y)$ (כפי שתחזו)!

$$x = c(y) \cdot y^3$$

$$(*) X' = C'(y) \cdot y^3 + \underset{(*)}{C(y)} \cdot 3y^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{c'(y) \cdot y^3 + c(y) \cdot 3y^2}_{\text{Produkt}} - \underbrace{\frac{3}{y} c(y) y^3}_{\text{Produkt}} = -y \quad (*)$$

$$e'(y) \cdot y^3 = -y \quad | : y^3$$

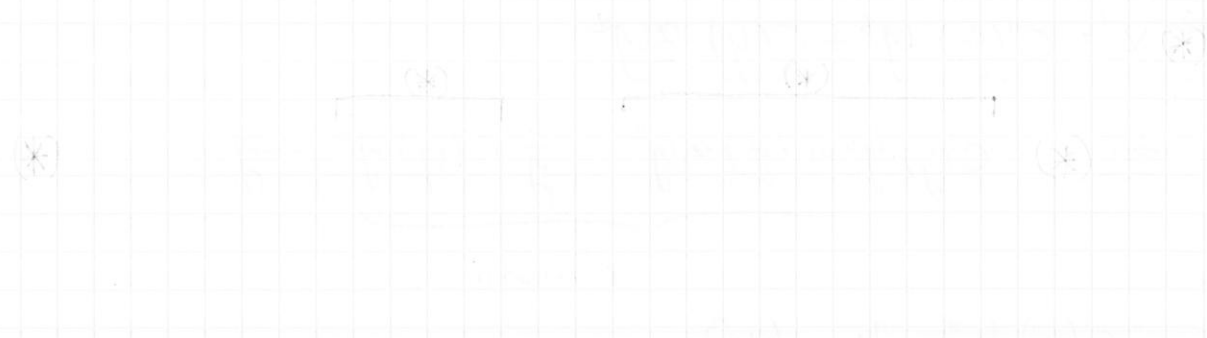
$$c'(y) = -\frac{1}{y^2} \quad | \int \Rightarrow \boxed{c(y) = \frac{1}{y} + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$x = cy^3 \Rightarrow X(y) = \left(\frac{1}{y} + c\right) y^3$$

$$\Rightarrow X(y) = y^2 + cy^3$$

$\downarrow$
הפיתרון הכללי של
המשוואה היא חזיתית

$\swarrow$
הפיתרון הכללי של
המשוואה החזיתית
הממיינת



1000 ft. (1000 ft. = 1000 ft.)

1000 ft. (1000 ft. = 1000 ft.)

1000 ft. (1000 ft. = 1000 ft.)

כלל סדר ראשון

שיטה 2

$$y' + p(x)y = g(x)$$

"גורם אינטגרציה": $\mu(x)$

$$y' \mu(x) + p(x)y \mu(x) = g(x) \mu(x)$$

$$\square' \Rightarrow p(x) \cdot y \cdot \mu(x) = y \mu'(x)$$

אינו אקדמי
 $\mu(x)$

כדי שיהיה זמן
נצטרך להחזיר

$$p(x) \mu(x) = \mu'(x)$$

(שינוי את המעבר, ההפך)

$$\frac{d\mu}{dx} = p \cdot \mu \quad / : \mu \neq 0$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = p \cdot dx \quad / \int$$

$$\ln|\mu| = \int p(x) dx + C$$

$$\mu = ce^{\int p(x) dx}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

אנו יכולים לבחור את c איברי המשוואה
כ-1, אז נקבל צמצום בצד K -י.
כמו כן, נבחר את c איברי המשוואה כ-2
אז נקבל

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

$$y' + p(x)y = g(x) \quad / \mu = e^{\int p(x) dx}$$

$$\underbrace{y' \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot y \cdot e^{\int p(x) dx}}_{\text{כפול (כפול) } (y \cdot e^{\int p(x) dx})'} = g(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$\frac{d(y \cdot e^{\int p(x) dx})}{dx} = g(x) e^{\int p(x) dx} \quad / \cdot dx, \int$$

$$\int d(y \cdot e^{\int p(x) dx}) = \int g(x) e^{\int p(x) dx} \cdot dx$$

$$y e^{\int p(x) dx} = \int g(x) e^{\int p(x) dx} \cdot dx + C$$

$$/ e^{-\int p(x) dx}$$

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int g(x) e^{\int p(x) dx} \cdot dx + C \right)$$

הפתרון
הכללי של
המשוואה
הראשונה

הפתרון הפרטי של
המשוואה הראשונה

הפתרון הכללי של
המשוואה השנייה

הכלל
למשוואה
y

$$y' + p(x)y = q(x)$$

חשוב! יש לסדר את המשוואה הנורמלית
לצורה $y' + p(x)y = q(x)$

$$2y' - xy = e^x \quad / : 2$$

$$y' - \frac{x}{2}y = \frac{1}{2}e^x \Rightarrow p(x) = \left(-\frac{x}{2}\right) \quad \text{כי הצורה הנורמלית היא } y' + p(x)y = q(x)$$

$$y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \left(\begin{array}{l} p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ q(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \right)$$

צורה נורמלית

$$\mu = e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx} = e^{2\sqrt{x} + c} = e^{2\sqrt{x}} \cdot e^c = ce^{2\sqrt{x}}, \quad c \in \mathbb{R}_+$$

$$\underbrace{y' e^{2\sqrt{x}} + \frac{y}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}}}_{(y \cdot \mu)'} = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad \text{(כפול משוואה מקושרת ב- μ אנו הצלנו! (בני-ה- c)}$$

מקבלים שה $\int \square = \square + c$

$$(y \cdot \mu)' = (y \cdot e^{2\sqrt{x}})'$$

$$\frac{d(y \cdot e^{2\sqrt{x}})}{dx} = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad / : dx$$

$$d(y \cdot e^{2\sqrt{x}}) = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad / \int$$

אינטגרל
אנחנו צריכים
d

$$y \cdot e^{2\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}} + c \quad / : e^{-2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y = 1 + ce^{-2\sqrt{x}}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

הפיתרון הפסי
של ה-1 הנורמלית

29.3.17

תמוצ 3 - חלופות העשך

משוואות להצורה $y' = f(ax+by+c)$, $C \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$

נניח למשוואה פרידה - היתרית להפסקת משתנים z' ההצורה:

$$z = ax + by + c$$

1) $y' = \sqrt{5x - \frac{1}{4}y + 3}$

הצורה:

2) $y' = \cos(\underbrace{y-x}_z)$

3) $\ln(\underbrace{x+y-1}_z)(y'+1) = x+y$

* $y' = \frac{1}{\sin(y-x)} + 1 \Rightarrow \begin{matrix} z = y-x \\ z' = y' - 1 \end{matrix} \Rightarrow y' = z' + 1$

$$z' + 1 = \frac{1}{\sin(z)} + 1$$

3) במשוואה המקורית:

$$z' = \frac{1}{\sin(z)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sin(z)}$$

$$\sin(z) dz = dx \quad / \int$$

$$-\cos(z) = x + C$$

$$\boxed{-\cos(y-x) = x + C} \quad \text{פיתרון}$$

$$z = x - y - \int$$

* $y' = \frac{1-x+y}{x-y} = \frac{1-(x-y)}{x-y}$

$$\begin{matrix} z = x-y \\ z' = 1-y' \end{matrix} \rightarrow y' = 1-z'$$

$$1-z' = \frac{1-z}{z}$$

$$1 - \frac{1-z}{z} = z'$$

$$\frac{2z-1}{z} = \frac{dz}{dx} \quad / \int \boxed{2z-1 \neq 0}$$

* $dx = \frac{z dz}{2z-1} \quad / \int$

$$x + C = \frac{z}{2} + \frac{1}{4} \ln |4z-2|$$

3) במשוואה המקורית

$$(*) \int \frac{z dz}{2z-1} = \int \left(\frac{z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2z-1} \right) dz = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2z-1)} \right) dz$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4z-2} \right) dz = \int \frac{1}{2} dz + \frac{1}{4} \int \frac{4 dz}{4z-2}$$

$$\frac{z}{2} + \frac{1}{4} \ln |4z-2|$$

נמצא את הצורה של $z = x - y$

$$\boxed{\frac{x-y}{2} + \frac{1}{4} \ln|x-y-\frac{1}{2}| = x + C}$$

פיתרון כללי

$$2z - 1 = 0$$

$$z = \frac{1}{2}$$

① נבדוק איזה צורה:

$$x - y = \frac{1}{2}$$

$$y = x - \frac{1}{2}$$

לא נמצא פתרון כללי

נבדוק במשוואה המקורית:

$$1 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

עומד במשוואה המקורית

$$\boxed{y = x - \frac{1}{2}}$$

פיתרון מיוחד

מנהל $\mathbb{R}^2$ של $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

במשוואות בהצורה:

של נק' חיתוך

זוהי הנקודה שבה הנגזרת איננה מוגדרת

נחלק 3-3 בקדמים:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

(1) נחתכים:

זוהי הנקודה שבה הנגזרת איננה מוגדרת

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

(2) מקבילים:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

(3) כמעט כדורים:

גורם משותף:

$$1) y' = \frac{x-y}{2(x-y)+5}$$

נקודות חיתוך

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{0}{5} \Rightarrow \text{ישנן נקודות חיתוך}$$

הצורה: $z = x - y$

$$z' = 1 - y' \rightarrow y' = 1 - z'$$

$$1 - z' = \frac{z}{2z+5}$$

$$z' = 1 - \frac{z}{2z+5}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z+5}{2z+5}$$

$$\boxed{2z+5 \neq 0}$$

$$(*) \left(\frac{2z+5}{z+5} \right) dz = dx$$

/5

$$2z - 5 \ln|z+5| = x + C$$

$$(*) \frac{2z+5}{z+5} = \frac{z+z+5}{z+5} = \frac{z}{z+5} + 1$$

$$= \frac{z+5-5}{z+5} + 1 = 1 - \frac{5}{z+5} + 1 =$$

$$= 2 - \frac{5}{z+5}$$

נחזור להצבה המקורית: $z = x - y$

$$\boxed{2(x-y) - 5 \ln |x-y+5| = x + c} \quad \text{פיתרון כללי}$$

בדור איננו צריכים: $x - y = -5 \Leftrightarrow z + 5 = 0$ לא ניתן להציב
 הפיתרון הכללי כי יוצא סתם (לא מוגדר)

נבדוק האם מקיימת את המשוואה המקורית:

$$y = x + 5 \quad y' = 1$$

$$1 = \frac{-5}{2(-5)+5} \Rightarrow 1 = \frac{-5}{-5} \Rightarrow 1 = 1$$

עומד במשוואה המקורית $\leftarrow$

פיתרון איננו: $\boxed{y = x + 5}$

2) $y' = \frac{2x+3y-5}{x+4y}$ (תרכיב)

א. נמצא את נק' החיתוך

$$\begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ x+4y=0 \end{cases}$$

נחשבים ויוצא $(4, -1)$ נק' החיתוך בין הישרים

ב. נציב את נק' החיתוך באישה הצירים:

מאפס $y = y_1 + 1$
 מאפס $x = x_1 + 4$

(כ"ע x ו y נקראים x_1 ו y_1 ונק' החיתוך $(4, -1)$)

ג. נציב במשוואה המקורית:

$$y' = y_1'$$

$$y_1' = \frac{2(x_1+4) + 3(y_1-1) - 5}{(x_1+4) + 4(y_1-1)}$$

⊗ $y_1' = \frac{2x_1+3y_1}{x_1+4y_1}$

והנה הבעיה למשוואה הנוכחית!

⊗ נשתמש בהצבה: $v = \frac{y_1}{x_1} \Leftrightarrow y_1 = vx_1$ (צ"ב ק)

$$v'x_1 + v = \frac{2x_1 + 3vx_1}{x_1 + 4vx_1} \Rightarrow v'x_1 + v = \frac{x_1(2+3v)}{x_1(1+4v)}$$

$$v'x_1 = \frac{2+3v}{1+4v} - v \Rightarrow v'x_1 = \frac{2+3v-v-4v^2}{1+4v} \Rightarrow \frac{dv}{dx_1} x_1 = \frac{(4v^2-2v-2)}{1+4v}$$

⊗ $\frac{1+4v}{4v^2-2v-2} dv = \frac{dx_1}{x_1} \quad \int$

⊗ $\frac{1+4v}{4(v+\frac{1}{2})(v-1)}$ פירוק לגורמים חלקיים:

אם נחלק "בא": $A = \frac{5}{6}, B = \frac{2}{3}$

$$= \frac{5}{6} \ln \left| \frac{y_1}{x_1} - 1 \right| + \frac{2}{12} \ln \left| \frac{4y_1}{x_1} + 2 \right| = -\ln |x_1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{y_1}{x_1} - 1 \right|^{\frac{5}{6}} + \ln \left| \frac{4y_1}{x_1} + 2 \right|^{\frac{1}{6}} = \ln \frac{1}{|x_1|} + C \quad / e^{(\cdot)}$$

$$\left| \frac{y_1}{x_1} - 1 \right|^{\frac{5}{6}} \cdot \left| \frac{4y_1}{x_1} + 2 \right|^{\frac{1}{6}} = \frac{e^C}{|x_1|}$$

$$C_1 = e^C \quad C_1 > 0$$

$$\left| \frac{y_1 - x_1}{x_1} \right|^{\frac{5}{6}} \cdot \left| \frac{4y_1 + 2x_1}{x_1} \right|^{\frac{1}{6}} = \frac{C_1}{|x_1|}$$

זכור: $z = \frac{y-x+5}{2}$

$$|y_1 - x_1|^{\frac{5}{6}} \cdot |4y_1 + 2x_1|^{\frac{1}{6}} = C_1 \quad \begin{matrix} \text{הצבה של } x_1 = x-4 \\ y_1 = y+1 \end{matrix}$$

$$\boxed{|y-x+5|^{\frac{5}{6}} \cdot |4y+2x-4|^{\frac{1}{6}} = C_1} \quad \text{פיתרון כללי}$$

$$4V^2 - 2V - 2 = 0 \quad \text{השלבו!}$$

① בדוק נא חברים:

$$V=1$$

$$\frac{y_1}{x_1} = 1$$

$$y_1 = x_1$$

$$y+1 = x-4$$

$$\boxed{y = x-5}$$

אנחנו רואים

$$C=0$$

$$V = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}x_1$$

$$y+1 = -\frac{x+4}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{x}{2} + 1}$$

אנחנו רואים $C=0$

לכן נשאר "נרש" את הפיתרון הכללי שלנו כך שיהיה $C \neq 0$

$$\boxed{|y-x+5|^{\frac{5}{6}} |4y+2x-4|^{\frac{1}{6}} = C_2} \quad C_2 \geq 0$$

פיתרון כללי

$$3) y' = \frac{x+y-2}{2x+2y-4} = \frac{x+y-2}{2(x+y-2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \quad / \int \Rightarrow y = \frac{x}{2} + C$$

$$z' - 1 = \frac{z}{2z}$$

$$z' = \frac{3}{2}$$

$$\begin{matrix} z = x+y-2 \\ z' = 1+y' \Rightarrow y' = z'-1 \end{matrix} \quad \text{ד' 3)$$

שיעור 4 - משוללת ברנלי

$$y' + p(x)y = g(x) \cdot y^m$$

1) $m=0$, $y' + p(x)y = g(x)$

פ'נארי

2) $m=1$, $y' + p(x)y = g(x)y$

$$y' + (p(x) - g(x))y = 0$$

יצירות המואנרים
ניתנה לרובצת אלמים

3) $m \neq 0, 1$ $y' + p(x)y = g(x)y^m$

$$(*) \frac{y'}{y^m} + p(x) \cdot \boxed{\frac{1}{y^{m-1}}} = g(x)$$

1. y-m

שאת הכריזתנו את
כל ה-עים לצד השטף
המחנק הציקרי של הממשלה

$$z'(x) = (y^{-(m-1)})'$$

$$= -(m-1) y^{-(m-1)-1} \cdot y^1$$

$$= -(m-1)y^{-m} \cdot y' = -(m-1) \cdot \frac{y'}{y^m} \Rightarrow \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m} \quad \begin{array}{l} z \text{ תלוי ב} x \\ \text{is a function of } x \end{array}$$

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x) \quad / (1-m) \quad (*) \rightarrow 2,3)$$

$$z' + (1-m)p(x)z = g(x)(1-m)$$

משוואה ליניארית
לסדר ראשון

$$\Rightarrow f(x) = z = \frac{1}{y^{m-1}} \Rightarrow y = \sqrt[m-1]{\frac{1}{z}}$$

$$xy' - 3y + x^4y^2 = 0$$

$$y' - \frac{3}{x}y = -x^3y^2$$

$$\therefore \boxed{x \neq 0}$$

$$y=0$$

$\text{פיתרון} \leftarrow \because y^2 \neq 0$

אם מ'חיל'ני
ס'י הנא
פיתרון!

$$(*) \quad \frac{y'}{y^2} - \frac{3}{x} \cdot \boxed{\frac{1}{y}} = -x^3$$

$$z'(x) = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z'$$

$$(*) -z' - \frac{3}{x} \cdot z = -x^3 \quad / \cdot (-1)$$

$$\downarrow z' + \frac{3}{x} z = x^3$$

$$1. \quad z' + \frac{3}{x} z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{3z}{x} \quad / \cdot \frac{dz}{z} \quad (z \neq 0)$$

3. במשורה: (*)

משנראה אינך איתך לא חומשית.
שיטה: וריאציה של פימטר.

משלוחה ליקרת המלכות מלכותה:

$$\int \frac{dz}{z} = \int -\frac{3}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln|z| = -3\ln|x| + \ln c \quad c > 0$$

$$|z| = \frac{c}{|x|^3}, \quad c > 0$$

$$z = \frac{c_1}{x^3} \quad c_1 \neq 0$$

2. אינצידנציה של משוואות:

$$c_1 \rightarrow C(x)$$

$$z = \frac{C(x)}{x^3}$$

$$z' = \frac{C'(x)}{x^3} + C(x) \cdot \frac{(-3)}{x^4} \quad \Rightarrow (*) - \text{ב} \cdot \text{ב} \cdot \text{ב}$$

$$\frac{C'(x)}{x^3} + C(x) \cdot \frac{(-3)}{x^4} + \frac{3C(x)}{x^4} = x^3$$

ב3 וצ3 וצ

$$\Rightarrow C'(x) = x^6 \quad \int$$

$$C(x) = \frac{x^7}{7} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z = \frac{C(x)}{x^3}$$

$$\text{ב} \cdot \text{ב} \cdot \text{ב} \quad z = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{x^7}{7} + C_2 \right) \frac{1}{x^3}$$

ב3 וצ3 וצ
y-ב3 וצ3 וצ
י, ה3 וצ3 וצ

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \left(\frac{x^7}{7} + C_2 \right) \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\left(\frac{x^7}{7} + C_2 \right) \cdot \frac{1}{x^3}}$$

$$y = \frac{7x^3}{x^7 + C_3}, \quad C_3 \in \mathbb{R}$$

7C2

ב3 וצ3 וצ

משוואות בד"ר קלות

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x)dx$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$y = f(x)$$

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

$$u = u(x,y) \quad du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy$$

אם
אם לא

אם נצליח להוכיח שקיימת פונקציה u ש- $M = u'_x$ ו- $N = u'_y$ (ההפך הוא הנכון) אז נמצא את המשוואה כך:

$$du = 0 \quad \int$$

$$u(x,y) = \text{const}$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} \quad \text{אם פונקציה קיימת ורציפה אז}$$

לכן שתי הצורות "ההפוכות" שוות:

$$u(x,y) = x^3y^2 - xy$$

$$u'_x = 3x^2y^2 - y$$

$$u'_y = 2x^3y - x$$

$$u''_{xy} = 6x^2y - 1 \quad \xleftrightarrow{\text{שווים}} \quad u''_{yx} = 6x^2y - 1$$

(הסוף הנהלי) נצטרך למצוא את u , נראה אינטגרציה של M לפי x או של N לפי y .

אם קיימת פונקציה רציפה $u = u(x,y)$ (הפוסנציות) המקיימת:

$$u'_x = M(x,y) \quad \text{או} \quad u'_y = N(x,y) \quad \text{אז המשוואה}$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \text{נקראת מצויקת ופתרון המשוואה הוא:}$$

$$C \in \mathbb{R}, \quad u(x,y) = C$$

הציוקת קיום של $u(x,y)$:

$$\text{אם:} \quad \left(u''_{xy} = u''_{yx} \right) \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{אז קיימת } u(x,y) \text{ המקיימת את הנהלי}$$

$$Mdx + Ndy = u'_x dx + u'_y dy$$

המשוואות המדורכות שוות רק אם $u(x,y)$ רציפה.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

דוגמה 13

$$\frac{\partial M}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$$

סביבה

המשוואה מסויקת $\Leftrightarrow M'_y = N'_x$ אם,

$$u'_y = N(x,y), \quad u'_x = M(x,y) \quad \text{אם קיימת } u(x,y) \text{ המקיימת}$$

$\Downarrow$

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y)$$

אנו רוצים אינטגרל
התקין!! לכן ה- C
החזרנו שזו היא
פונקציה של y בלבד
שלא תתחבט אלינו
באינטגרל.

כעת, נבדוק את התוצאה שקיבלנו, לפי y ונראה אותה להיות שווה

$$u'_y = N(x,y) - \phi'(y)$$

$$u'_y = \left[\int M(x,y)dx + \phi(y) \right]'_y = N(x,y) \Rightarrow \boxed{u'_y = f(y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(y) = F(y) + C_1} \Rightarrow u(x,y) = \int M(x,y)dx + F(y) + C_1 = C$$

קבוע שרירותי

נבחר C כלשהו
ונחזק את המשוואה

$$\int M(x,y)dx + F(y) = C, C \in \mathbb{R}$$

$$\overbrace{(x^2-y)}^M dx + \overbrace{(y^2-x)}^N dy = 0$$

דוגמה 14

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 = \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

המשוואה מסויקת $\Leftrightarrow$ (כלומר שניתן לבדוק שהמשוואה מסויקת)
הפונקציה שאנו מחפשים

$$u'_x = x^2 - y \quad \text{אם קיימת פונקציה } u(x,y) \text{ המקיימת:}$$

$$u'_y = y^2 - x$$

הפונקציה שאנו מחפשים

$$u(x,y) = \int (y^2 - x)dy + \phi(x) = \frac{y^3}{3} - xy + \phi(x) \quad (*)$$

כעת נבדוק את התוצאה שקיבלנו לפי x :

$$u'_x = \left[\frac{y^3}{3} - xy + \phi(x) \right]'_x = -y + \phi'(x) \stackrel{u'_x}{=} x^2 - y$$

$$\phi'(x) = x^2 \Rightarrow \phi(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{y^3}{3} - xy + \frac{x^3}{3} + C \quad (*)$$

$$\frac{y^3}{3} - xy + \frac{x^3}{3} + C = C_1 \quad (\text{הקבוע } C_1 = u(x,y)) \quad : 730$$

$$\boxed{\frac{y^3}{3} - xy + \frac{x^3}{3} = C, C \in \mathbb{R}} \quad : \text{לסדר ממשותף, נוח ציבים}$$

משוואות שניתן להביא אותן להצגה כדלית

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad / \cdot \mu \quad (\mu \neq 0)$$

שיטה: גורם אינטגרציה

צרכים להיות
צדו

$$\Rightarrow \underbrace{M(x,y)\mu}_{(y)} dx + \underbrace{N(x,y)\mu}_{(x)} dy = 0$$

אם קיים גורם אינטגרציה μ

$$[M\mu]'_y = [N\mu]'_x$$

$$(*) \quad M'_y \mu + M \mu'_y = N'_x \mu + N \mu'_x$$

תלוי ב- x ו- y

אם $\mu(x,y)$ לא תלוי ב- y (כלומר $\mu = \mu(x)$)

$$M'_y \mu = N'_x \mu + N \mu'_x \quad : \mu = \mu(x) \quad (2)$$

$$\left(\frac{d\mu}{dx} \right) \mu'_x = \frac{M'_y - N'_x}{N} \cdot \mu \quad / \cdot \frac{1}{\mu} \quad \text{הוצר}$$

$$\boxed{\frac{d\mu}{\mu}} = \boxed{\frac{M'_y - N'_x}{N}} \cdot dx \quad / \int$$

$$\mu = e^{\int f(x) dx + C_1} = e^{\int f(x) dx} \cdot e^{C_1} = e^{\int f(x) dx} \cdot C_2$$

$$\ln|\mu| = \int f(x) dx + C_1$$

$$\mu = C_2 e^{\int f(x) dx}, \quad C_2 \neq 0$$

(יתכן ש) $C_2 = 0$

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int f(x) dx}}$$

$$M'_y \mu + M \mu'_y = N'_x \mu$$

$$M \mu'_y = (N'_x - M'_y) \mu$$

$$/ : \mu \quad (\mu \neq 0) \quad \text{פרט } M/N = 0$$

אם $\mu = \mu(y)$ (3)

$$\frac{d\mu}{dy} \mu = \left(\mu'_y = \frac{d\mu}{dy} \right) \frac{\mu'_y}{\mu} = \frac{N'_x - M'_y}{M}$$

$/ \cdot dy$

$$\boxed{\frac{d\mu}{\mu}} = \boxed{\frac{N'_x - M'_y}{M}} \cdot dy \quad \text{הוצר}$$

$$\boxed{\mu(y) = e^{\int g(y) dy}}$$

$$\mu = \mu(x)$$

$$f(x) = \frac{My - Nx}{N}$$

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

$$\left(= \frac{dy}{dx} \right) y' = - \frac{y \ln y + y e^x}{x + y \cos y}$$

$$(*) \underbrace{(y \ln y + y e^x)}_M dx + \underbrace{(x + y \cos y)}_N dy = 0$$

$$\frac{DM}{dy} = \ln y + 1 + e^x \neq \frac{DN}{dx} = 1$$

ניתן לבדוק כי ע"פ החיסור בין הנגזרות / חלוקה N/M -ם נצטרך
הבדל שזהות הוא לחלק ב- M שיש יהיה $\mu(y)$

$$\textcircled{2} g(y) = \frac{-\ln y - e^x}{y \ln y + y e^x} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int g(y) dy} = e^{-\ln |y|} = e^{\ln \frac{1}{|y|}}$$

(כאן $C=0$)

$$\int -\frac{1}{y} dy = -\ln |y| + C$$

$$\Rightarrow \mu(y) = \frac{1}{|y|} \Rightarrow \mu(x) = \pm \frac{1}{y}$$

(כפול את כל (*) ב- $\mu = \frac{1}{y}$ (הסמן לא משנה כי ניתן לחלק את כל המשוואה ב- μ)

$$\underbrace{(\ln y + e^x)}_{\bar{M}} dx + \underbrace{\left(\frac{x}{y} + \cos y \right)}_{\bar{N}} dy = 0$$

$$\frac{D\bar{M}}{dy} = \frac{1}{y} \stackrel{\text{כאן שווה!}}{=} \frac{D\bar{N}}{dx} = \frac{1}{y}$$

כעת המשוואה מצויקת. קיימת פונקציה $u(x,y)$ המקיימת:

$$u'_x = \ln y + e^x \quad u'_y = \frac{x}{y} + \cos y$$

$$u(x,y) = \int (\ln y + e^x) dx + \phi(y) = x \ln y + e^x + \phi(y)$$

$$u'_y = \frac{x}{y} + \phi'(y)$$

שווה u'_y - ש
קיימת שוויון

$$\frac{x}{y} + \phi'(y) = \frac{x}{y} + \cos y \Rightarrow \phi(y) = \sin y + C$$

כעת נציב את התוצאה לפי y :

$$x \ln y + e^x + \sin y = C, C \in \mathbb{R}$$

אנחנו C ב- C

5.4.17

תרגול 4 - משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

$$y' + p(x)y = q(x)$$

פתרון הכללי: כופלים את המשוואה במכפיל אינטגרלי (ללא קבוצ (כאן את $C=0$))
 $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$

$$y = \frac{\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + C}{e^{\int p(x) dx}}$$

מכפילים אינטגרל $\int$ של האיברים, אם קבוצ. ניתן למצוא נוסחה לשינוי המשוואה:

הוכחה:

$$y' + p(x)y = q(x) \quad | \cdot \mu$$

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x) \cdot q(x) \quad (*)$$

נסביר: (*)

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = (\mu(x)y)' = \mu'(x)y + \mu(x)y' = \mu(x)p(x)y + \mu(x)y'$$

$$\mu'(x)y = \mu(x)p(x)y$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x) \quad \int$$

$$\ln |\mu(x)| = \int p(x) dx + C \quad (C=0) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

כעת משתמשים את μ המצוי - (*) ונשווה את שני המכפילים
 (למה באמת נעשה זאת? כי $e^{\int p(x) dx} = \mu(x)$)

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)q(x) \quad \int$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x) \cdot q(x) dx$$

(כאן את y : נציב $\mu(x)$ שבמצוי)

$$y = \frac{\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + C}{e^{\int p(x) dx}}$$

או לחילופין $\int$ המצוי למטה

$$y = e^{-\int p(x) dx} \cdot \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + C \right]$$

$$y' - \tan x \cdot y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

$$p(x) = -\tan x$$

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\int -\tan x dx = \ln |\cos x|$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{e^{-\ln |\cos x|}}_{\substack{\text{הפוך מהמקרה} \\ \text{לפי ד"ר'ל סטנדרט (-)}}} \cdot \left[\int \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot e^{\ln |\cos x|} dx + C \right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{|\cos x|} \cdot \left[\int \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx + C \right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\pm \cos x} \cdot \int \frac{\pm \cos x}{\sqrt{\sin x}} dx + \frac{C}{\pm \cos x}$$

לפי $\pm$ - הקוסינוס הוא אותו קוסינוס אבל בסימן הפוך לפי $\pm$ הוא $(-)$ או $(+)$ המכפלה המשותפת תהיה $+$, ואם הוא $(+)$ אז שניה המכפלה תהיה $+$, לפי $\pm \cos x$, נכלול את הסימן $C = \pm C$ חזרה: C וכך:

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx + \frac{C_1}{\cos x}$$

$$(*) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{\sin x} \\ \frac{dt}{dx} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \\ 2t dt = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{2t dt}{t} = \int 2 dt = 2t + \tilde{C} = 2\sqrt{\sin x} + \tilde{C}$$

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \left[2\sqrt{\sin x} + \tilde{C} \right]$$

חומר C יש שונים, $\frac{1}{\cos x}$ יבוא החוצה

פ. תהיה
כפי:

3) יב:

5.4.17

תרגול 4 - משוואות דיפרנציאליות בסדר ראשון

$$y' + p(x)y = q(x)$$

פתרון הכללי: כופלים את המשוואה במכפיל אינטגרלי (ללא קבוע) (כאשר $C=0$)
 $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$

$$y = \frac{\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + C}{e^{\int p(x) dx}}$$

מכפילים אינטגרל על שני האגפים, ואז קבוע.
 ניתן למצוא נוסחה לפתרון המשוואה:

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \text{ל } \mu$$

הוכחה:

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \quad (*)$$

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = (\mu(x)y)' = \mu'(x)y + \mu(x)y' = \mu(x)p(x)y + \mu(x)q(x) \quad (*)$$

$$\mu'(x)y = \mu(x)p(x)y$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x) \quad \int$$

$$\ln |\mu(x)| = \int p(x) dx + C \quad (C=0) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

כעת משתמשים באת μ המצוינו - (*) ונשווה את שני האגפים
 (למה באמת נעשה זאת? כי $e^{\int p(x) dx} = \mu(x)$)

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)q(x) \quad \int$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x) \cdot q(x) dx$$

(מוציא את y : נציב $\mu(x)$ שמצאנו)

$$y = \frac{\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + C}{e^{\int p(x) dx}}$$

או לחילופין: $y = e^{-\int p(x) dx} \cdot \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + C \right]$

$$y' - \tan x \cdot y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

הצגות:

$$p(x) = -\tan x$$

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\int -\tan x dx = \ln |\cos x|$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{e^{-\ln |\cos x|}}_{\substack{\text{הפוך מהמספר} \\ \text{לפני עיני הסדרה (-)}}} \cdot \left[\int \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot e^{\ln |\cos x|} dx + C \right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{|\cos x|} \cdot \left[\int \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx + C \right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\pm \cos x} \cdot \int \frac{\pm \cos x}{\sqrt{\sin x}} dx + \frac{C}{\pm \cos x}$$

לפי $\pm$ - הקוסינוס הוא אותו קוסינוס לזוהר ב הדרך לכן אם הוא

(-) אם המכפלה היא חיובית, ואם הוא (+) אם שיהיה המכפלה

חיובית, לפי $\pm \cos x$, נכלול את הסימן C חזרה: $C = \pm C$ אכזרי:

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx + \frac{C_1}{\cos x}$$

$$(*) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{\sin x} \\ \frac{dt}{dx} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \\ 2t dt = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{2t dt}{t} = \int 2 dt = 2t + \tilde{C} = 2\sqrt{\sin x} + \tilde{C}$$

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \left[2\sqrt{\sin x} + \tilde{C} \right]$$

פיתרון כללי

3/3

חומר C ים שונים, $\frac{1}{\cos x}$ יבא החזרה

773
מסלול 1) $y' - \tan x y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$
 $q(x)$

דרך שנייה:

$$y' - \tan x \cdot y = 0$$

משוואה הומוגנית
0 = q(x) קרה

$$y' = \tan x y \quad / : |y \neq 0| \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = \tan x dx \quad / \int$$

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C \quad / ()^e$$

$$|y| = e^{(\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C)} = \left|\frac{1}{\cos x}\right| \cdot e^C$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$|y| = \frac{e^C}{|\cos x|} \quad C \neq 0$$

$$y = \frac{C_1}{\cos x}$$

$q(x)=0$
(עזומה במשוואה ההומוגנית!)

(בדוק קצור $y=0$, מתקבל קצור קטור שווה 0-)

$$y = \frac{C_2}{\cos x}, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

הפונקציה C_2 יכולה להיות כללי
משוואה הומוגנית

$$y' = \frac{C_2'(x) \cos x + \sin x C_2(x)}{\cos^2 x}$$

$$y = \frac{C_2(x)}{\cos x} \quad / \text{פסל}$$

2 (רמזיה של קצור)

$$y' = \frac{C_2'(x)}{\cos x} + \frac{\sin x C_2(x)}{\cos^2 x}$$

3) במשוואה המקורה: $(y' - y) :$

$$\underbrace{\frac{C_2'(x)}{\cos x} + \frac{\sin x C_2(x)}{\cos^2 x}}_{y'} - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{C_2(x)}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \quad / \cdot \cos x$$

$$C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \quad / \int$$

$$C_2(x) = 2\sqrt{\sin x} + \tilde{C}$$

$$y = \frac{1}{\cos x} [2\sqrt{\sin x} + \tilde{C}]$$

3) בפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

פיתרון כללי של המשוואה המקורה.

שלב 1: אינצ'יה של קבוצה

1. $q(x)=0 \leftarrow y'+p(x)y=0$ (פיתרון הומוג'ני)

2. C פיתרון ה-1 "הוסף" $-f(x)$

3. גורמים את y (ל-1 אחרי 2)

4. קצבה משוואה המקורית (לגורמים $y-1$)

5. מצאת $C(x)$

6. קצבה פיתרון כללי הומוג'ני $\Leftarrow$ פיתרון כללי מקורי

3) $y' - \frac{y}{x} = xe^x$

$y' - \frac{y}{x} = 0$

1. הומוג'ני ממויינת

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad | : y \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad | \int$

$\ln|y| = \ln|x| + C$

$|y| = |x| \cdot e^C$

$y = x \cdot C_1 \quad C_1 \neq 0$

למקור $y=0$ (אנחנו משוואה הומוג'ני, ניתן לקבל עבור $C_1=0$ את הפתרון C_2 שבו אלה הם)

$y = x \cdot C_2 \quad C_2 \in \mathbb{R}$ פיתרון כללי הומוג'ני

2. אינצ'יה של קבוצה: $y = xC_2(x)$ (לדאור)

$y' = C_2(x) + xC_2'(x)$

$C_2(x) + xC_2'(x) - \frac{x(C_2(x))}{x} = xe^x \quad | : x \neq 0$
 (3) בנות מקורית: מסווג נכון במשוואה מקורי של $\frac{y}{x}$ מתנה

$C_2'(x) = e^x \quad | \int$

$C_2(x) = e^x + \tilde{C}$

$y = x(e^x + \tilde{C})$

(3) פיתרון כללי הומוג'ני: פיתרון כללי משוואה מקורי

שיעור 5 - הצבות פונקציות

$$y' = f(ax+by+c)$$

1

$$* y' = \sqrt{2x+y-1}$$

צונחנות:

$$* y' \sin(x+y) + 1 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin(x+y)}$$

$$* y'(2x+7y) + \tan(2x+7y) = 5$$

$$(x \text{ תלוי } t) \quad t = t(x) \quad t = ax+by+c$$

הצבה:

$$\Rightarrow y = \frac{t-ax-c}{b} = \frac{1}{b}t - \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$y' = \frac{1}{b}t' - \frac{a}{b}$$

$$* y' = (x+y) \ln(x+y) - 1$$

צונחנות:

$$y = t - x$$

$$y' = t' - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=t \\ t=t(x) \\ x+y>0 \end{cases} \quad \text{הצבה:}$$

$$t' - 1 = t \ln t - 1$$

$$t' = t \ln t$$

$$/: \ln t \neq 0$$

$$/: t \neq 0$$

(3 נקודות המעבר):

(מעבר נקודת הפרדה)

$$\frac{dt}{t \ln t} = dx$$

$$\boxed{t \neq 1}$$

פיתרון, פתרון
ממש במעבר

$$\int \frac{dt}{t \ln t} = \int dx$$

$$\ln|\ln t| = x + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad |e^{\cdot}$$

$$\ln t = e^{x+C}$$

$$\ln t = e^x \cdot e^C \Rightarrow \ln t = e^x \cdot C_1, \quad C_1 \neq 0 \quad (\text{באמצעות } C_1)$$

$$\boxed{\ln(x+y) = e^x \cdot C_1, \quad C_1 \neq 0, \quad C_1 \in \mathbb{R}}$$

(3 נקודות המעבר): $t = x+y$

אם פיתרון נוסף: $x+y=1 \Leftrightarrow t=1$ (כאשר $\ln(x+y)=0$)
 במקרה $C_1=0$ (כאשר $\ln(x+y)=0$)
 אז $C_1=0$ (כאשר $\ln(x+y)=0$)

$$\boxed{\ln(x+y) = e^x \cdot C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}}$$

פיתרון נוסף:

3.1.1.1

$$(1) (x^2 y^2 + 1) dx + 2x^2 dy = 0$$

$$xy = t \quad /d$$

$$(x^2 y^2 + 1) x dy + y dx = dt \quad /: x \neq 0$$

$x=0$
פירוק
המשוואה

ההצבה:

$$\Rightarrow dy = -dx \cdot \frac{y}{x} + \frac{1}{x} dt$$

$$(t^2 + 1) dx + 2x^2 \left(-dx \cdot \frac{y}{x} + \frac{1}{x} dt \right) = 0$$

3.1.2. המשוואה מקוורת:

$$(t^2 + 1) dx + 2x^2 \left(-dx \cdot \frac{t}{x^2} + \frac{1}{x} dt \right) = 0$$

המקום y נציב $\frac{t}{x}$:

$$(t^2 + 1 - 2t) dx + 2x dt = 0$$

משוואה של הפרגה מלחמים.

$$2) (y + \sqrt{xy}) dx = x dy$$

הוא שישלש שיהיה נאמן מחזניים להפטר ממנו...

$$\sqrt{xy} = t \Rightarrow xy = t^2 \quad /d$$

ההצבה:

$$x dy + y dx = 2t dt$$

$$dy = -\frac{y dx}{x} + \frac{2t dt}{x}$$

$$dy = -\frac{t^2}{x^2} dx + \frac{2t}{x} dt$$

$$y = \frac{t^2}{x} \quad 3.1.3. המקום$$

3.1.4. המשוואה המקוורת את ה- dy למצאנו סתם ה- t (ההצבה של y)

$$\left(\frac{t^2}{x} + t \right) dx = x \left(-\frac{t^2}{x^2} dx + \frac{2t}{x} dt \right)$$

$$\left(\frac{t^2}{x} + t + \frac{t^2}{x} \right) dx - 2t dt = 0$$

(כנס איברים!)

$$\left(\frac{2t^2}{x} + t \right) dx = 2t dt$$

$$\left(\frac{2t^2 + tx}{x} \right) dx = 2t dt \quad /: x$$

בעיית קושי, משפט קיום ויחידות

בעיית קושי:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

משוואה עם תנאי התחלה

האזנה לאני אקדמיים
יותר מפתרון אחד
נמצא זה של המלך
המשפטי קושי כפי
לרסביי אמה לא
בסדר, תקין.

1. משפט קיום ויחידות עבור בעיית קושי אינרית:

אם $p(x)$ ו- $q(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$ המכיל את הנקודה $x = x_0$, אז למערכת קושי (*) קיים פיתרון יחיד.

$$(*) \begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

פיתרון אחד -
לא צריך הסבר.

אם אחת הפונקציות $p(x)$ או $q(x)$ לא רציפות בנקודה $x = x_0$, אז לא יבוא
כמה פתרונות של בעיית קושי י.ש. (המשפט לא תקף)

2. משפט קיום ויחידות עבור בעיית קושי לא לינירית:

אם $f(x, y)$ רציפה בסביבה מלבנית $I: \{[a, b] \times [c, d]\}$, $y_0 \in [c, d]$, $x_0 \in [a, b]$

!- $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפה גם היא בסביבה I , אז למערכת קושי (**) קיים פיתרון יחיד.

$$(**) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(הזכירה: לשם רציפה, קצב
שני רציף, המשיקים קיימים
כל נקודה)

אם $f(x, y)$ או $\frac{\partial f}{\partial y}$ לא רציפות בנקודה (x_0, y_0) (אם המשפט לא תקף), אז
לא יבוא כמה פתרונות לקראת בעיית קושי.

פונקציות:

1) $\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = -x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow$

ניתן ממש לבדוק שהמשפט לא
תקף כי הפונקציה $p(x) = \frac{1}{x}$ לא
מוגדרת עבור $x=0$. משפט אני לא
יודעת כמה פתרונות אקראי.

(תנאים של משפט
קיום ויחידות
לא מתקיימים)

2) $\begin{cases} y' + x^2y = e^x \\ y(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow$

פיתרון יחיד מובטח.
תנאי המשפט קיום ויחידות מתקיימים.

3) $\begin{cases} y' = \frac{xy}{y+1} \\ y(2) = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$y = -1$ בעיית (מאפס מנה),
($y=2$) לא שייכת לתחום ההצבה של המשוואה.
לא מתקיימים תנאים של משפט קיום ויחידות.
לא ניתן לבדוק כמה פתרונות לקראת, אם בכלל.

תמוז אבדוק מביא.

$y' = \sqrt[3]{y}$, $y(0) = 0$ סתיון נולד $y=0$

$\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = dx$ $y \neq 0$

$\int y^{-\frac{1}{3}} dy = \int dx$

$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = x + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ $/: (\frac{2}{3})$

$y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x + C_2$ $/ ()^3$

$y^2 = (\frac{2}{3}x + C_2)^3$ $/ \sqrt{}$

לא כל $\pm$ כלשהו
היחס

$y = \pm \sqrt{(\frac{2}{3}x + C_2)^3}$, $C_2 \in \mathbb{R}$

$0 = \pm \sqrt{(0 + C_2)^3} \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

(צ'ב תע' התח' $y(0) = 0$)

$y = \sqrt{(\frac{2}{3}x)^3}$

$y = -\sqrt{(\frac{2}{3}x)^3}$

$y = 0$ סתיון נולד שמח'ו

(צ'ב הסתיון שמח'ו)

כח צ'ב' אוס'ר א'ן צ'ב
ש'ח'ו'ן אוס'ר פ'ת'ו'ת

1) $y' = f(x, y) = \sqrt[3]{y}$
צ'ב'ה $(0, 0)$

(בצוק תע' אוס'ר ק'ום או'ח'צ'ו'ת)

2) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{y^2}} \Rightarrow$ ה'צ'ר'ת לא רצ'י'ה ב'נק'ו'צ'ה (ס'ק) ! ל'ת תע'ו'
אוס'ר ק'ום או'ח'צ'ו'ת לא או'ת'ק'י'ת'ם ל'ן ק'ב'ל'ו'ן יו'ת'ר או'פ'ת'ו'ן א'ח'צ' ה'ב'ח'י'ת ק'א'ס'

ח'י'ם ל'ת'ע'ו'.

1) $y' + \frac{2}{x}y = x^5 \Rightarrow x \neq 0$ (0, ∞) או (−∞, 0) קי-רסיתרון מוצבר

א) $y(2) = 7 \Rightarrow$ מנתן זה ניתן לצדית להפסוק ציה מוצברת ב- (0, ∞)

ב) $y(0) = 7$
 ג) $y(0) = 0$

צורה נכונה לכתוב
 $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0/7$

כאן ניתן לזהר
 $x=0$ מסוכן!
 לא מוצברתו

(*) $x^2y = \frac{x}{8} + C$

⊕ נוסחה נכונה

$y = \frac{x^6}{8} + \frac{C}{x^2}$

$C \in \mathbb{R}$

הפיתרון הכללי של
 המשוואה:

א) $y(2) = 7 \rightarrow$ (צייסות ב- (2,7) $(p(x), q(x))$ פיתרון יחיד למציית קושי
 $y = \frac{x^6}{8} - \frac{4}{x^2}$ ($C = -4$)

ב) $y(0) = 7 \rightarrow$ חסר (הצגנו $C=0$ $x=0$ ב- (*)
 אפוא $7 \neq 0$, למציית קושי אין פיתרון

ג) $y(0) = 0$
 $y = \frac{x^6}{8}, C = 0$

2) $y' - \frac{2}{x}y = x^5$

א) $y(2) = 8 \rightarrow$ פיתרון קיים בתחום (0, ∞)

ב) $y(0) = 8 \rightarrow$ $0 \neq 8$, הפונקציה לא עוברת ציך לקצה, למציית קושי אין פיתרון

ג) $y(0) = 0$

$y = \frac{x^6}{4} + Cx^2, C \in \mathbb{R}$

הפיתרון הכללי

לפונקציה C ממשי $y = \frac{x^6}{4} + Cx^2$ היא פיתרון למציית קושי (אינסוף בתחומה)

החזרה חסומה $\Leftrightarrow$ תנאי התחלה ציך להיות נתון בהצגה עצמית

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} y' = -\frac{x}{y} \\ y(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y \neq 0 \left(\begin{array}{l} \text{הפונקציה} \\ \text{לא חותכת} \\ \text{ב-} x \end{array} \right) x \in (-\infty, \infty) \quad \text{אין פגיעה ב-} x$$

אנחנו לפונקציה חסר/מגמת לצייר x (כי $y \neq 0$) אנחנו צריכים להחליט (לחלוק) בגודל חלק מהמסוקים. מלשם נבטן $y(1) = 2$, מכאן כי $y > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y dy = -x dx \quad // \int$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C, \quad / \cdot 2$$

$$y^2 + x^2 = C_2$$

$$C_2 > 0 \Leftrightarrow (\text{כי הפונקציה חיובית})$$

$$1^2 + 2^2 = 5$$

$$C = 5$$

$$y = \pm \sqrt{5 - x^2} \quad \begin{array}{l} \text{מלשם להפונקציה} \\ \text{חיובית, נבחר את ה-} \end{array}$$

$$\boxed{y = \sqrt{5 - x^2}}$$

כיחצית, תלמידה סופית.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{אנחנו נבחר/נמצא את תחום ההגדרה של } x: \\ \boxed{-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}} \end{array} \right.$$

$$4) \quad y' = y^2, \quad y(2) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$/ \because \boxed{y \neq 0}$$

$y = 0$ הוא נק' סינגולר במשוואה

אך לא סינגולר בקו"ט קושי

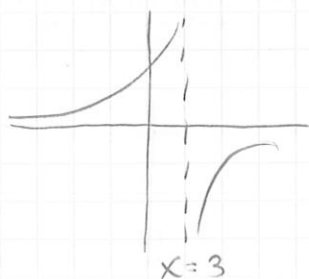
$$\frac{dy}{y^2} = dx \quad // \int$$

$$-\frac{1}{y} = x + C$$

(3) תנאי ההתחלה $y(2) = 1$

$$-1 = 2 + C \Rightarrow \boxed{C = -3} \Rightarrow -\frac{1}{y} = x - 3 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3-x}, \Rightarrow x \neq 3}$$

אנחנו מבינים להתחום של x מכאן $x < 3$ כי תנאי ההתחלה $y(2) = 1$ הוא



19.4.17

תרגול 5 - משוואות ברנולי

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

I. נספר נפרד $\Leftrightarrow y' + p(x)y = q(x)$ $\alpha = 0$

$y' + p(x)y = q(x)y$ $\alpha = 1$

משוואה סטנדרטית $\Leftrightarrow y' = y(q(x) - p(x))$

$z = y^{1-\alpha}$ למשל בהצבה: $\alpha \neq 0, 1$

נקבל משוואה ליניארית:

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$$

$$z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$$

הנחה:

① $y' = \frac{z'}{(1-\alpha)y^\alpha}$

$z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z = \frac{y}{y^\alpha}$

② $y = z \cdot y^\alpha$

צבים במשוואה המקורית את ① ו-②:

$$\frac{z'}{(1-\alpha)y^\alpha} + p(x) \cdot z \cdot y^\alpha = q(x)y^\alpha \quad / : y^\alpha$$

$$\frac{z}{1-\alpha} + p(x)z = q(x) \quad / : (1-\alpha)$$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = q(x)(1-\alpha)$$

* $y' + 2y = y^2 \cdot e^x$ (משוואה ברנולי: $p(x)=2$ מכניי $q(x)=e^x$ $\alpha=2$)

$$z = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow z = \frac{1}{y}$$

$$z' - 2z = -e^x$$

(צבים בתכנית להוכחה (צריך להכיל ציור)

I. משוואה ליניארית סטנדרטית

$p(x) = -2 \quad q(x) = -e^x$

$$y = e^{-\int p(x) dx} \cdot \left[\int q(x) e^{\int p(x) dx} + c \right]$$

השיטה זרם
- מ
- גורם אינטגרציה
// סתם

(תלם את האינטגרל)

$$\int p(x) dx = \int -2 dx = -2x + c \quad c=0 \text{ במחיר}$$

$$z = e^{2x} \cdot \left[\int -e^x \cdot e^{-2x} dx + c \right]$$

$$z = e^{2x} \cdot \left[\int -e^{-x} dx + c \right]$$

$$e^x \cdot e^{-2x} = e^{-x} \text{ חוקי חזקות}$$

$$z = e^{2x} [e^{-x} + c]$$

$$z = \frac{1}{y} \text{ (כלום במקום)}$$

$$\boxed{\frac{1}{y} = e^{2x} [e^{-x} + c]}$$

סתיון כללי

קבוע $c > 0$ יש לבדוק $y=0$

$$y \Leftarrow \begin{cases} \text{בפתרון הכללי: לא מוגדר} \\ \text{במקומות: } 0=0 \end{cases}$$

$$* (3x - y^2) y' = y$$

$$3x - y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = y \quad / \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$3x - y^2 = y \cdot \frac{dx}{dy} \quad / : \boxed{y \neq 0}$$

$$\frac{3x}{y} - y = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{3x}{y} - y = x'$$

$$x' - \frac{3x}{y} = -y \Rightarrow \text{קבועי משוואה למעלה מסדר ראשון}$$

$$x' + p(y)x = q(y)$$

$$x(y) = e^{-\int p(y) dy} \cdot \left[\int q(y) e^{\int p(y) dy} + c \right]$$

המשוואה בהיחם
לא קיימת

$$\int p(y) dy = \int -\frac{3}{y} dy = -3 \ln|y| + c \quad c=0 \text{ במחיר}$$

$$x = e^{3 \ln|y|} \left[\int -y \cdot e^{-3 \ln|y|} + c \right]$$

$$x = |y|^3 \cdot \left[-y \cdot \frac{1}{|y|^3} dy + C \right]$$

ניסתי מהצד מוחלט של ציור ד"י (הצפית C כך ליכול להיות (+) או (-) :

$$x = y^3 \left[\int -\frac{1}{y^2} dy + C_1 \right]$$

$$C_1 = \pm C$$

$$\boxed{x = y^3 \cdot \left[\frac{1}{y} + C \right]} \Rightarrow \boxed{x = y^2 + y^3 C}$$

אולי
צמו

פיתרון כללי

בבדיקת צמוד $y=0$: פיתרון כללי : לא מוגדר / לא קיים C.
קטגוריה מקוויית : $0=0$

$\Leftarrow y=0$ פיתרון מיוחד.

$$* xy' + y = x^3$$

מכפלה
משוואה

$$\Rightarrow (xy)' = y + xy'$$

$$(xy)' = x^3 \quad || \int$$

$$xy = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\because \boxed{x \neq 0} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}}$$

פיתרון כללי

משוואות מדויקות

$$M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$$

בדרך: משוואה מסדר ראשון

(נקודות מדויקות) $w(x,y)$ פונקציה קיימת כך ש-

$$N = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{אם} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = M$$

המקרה זה פתרון המשוואה : $w(x,y) = C$ (קבוע)
($w(x,y)$ - נקודות אינפיניטסימליות)

$$\left[\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \right]$$

$$* x > 0 \quad \frac{1}{x} + 6x + (\ln x - 2)y' = 0$$

פונקציות:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

שם K : הפונקציות מדויקות :

$$w(x,y) = \int M(x,y) dx + \underbrace{h(y)}_{\text{הוספה}}$$

$$= \int N(x,y) dy + \underbrace{h(x)}_{\text{הוספה}}$$

שם K : $w(x,y)$ מיוחד

ה. $h(x)$ ו- $h(y)$ להוספתם הם הקבוצה של (הפונקציות x ו- y אחד) לשם 0 - 1 .

$$w(x, y) = \int \left(\frac{y}{x} + 6x \right) dx + h(y)$$

$$= y \ln x + \frac{6x^2}{2} + h(y)$$

על שם ϵ : את ה- $w(x, y)$ עקבותי $\sqrt{\text{אנו מאזנים לפי } y}$ ומשווים ל- N שכן N עולה כ- y $\leftarrow$
 מציבים את ה- $h(y)$ שם

$$y \ln x + h'(y) = \underbrace{y \ln x - 2}_N \quad : \quad \frac{\partial w}{\partial y} = N$$

$$h'(y) = -2/y \Rightarrow h(y) = -2y + C$$

$$\Rightarrow w(x, y) = y \ln x + \frac{6x^2}{2} - 2y + C$$

כמוקדם יכולת לראות הסבר
 הפשוט... נחילת אסמיה
 פיתוח קל מזהות לו
 אינטגרל (M/N)

$$w(x, y) = y \ln x + 3x^2 - 2y + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y \ln x + 3x^2 - 2y = C_1}$$

סיבירי
 $w(x, y)$ קבוע...

מצייאת דורס אינטגרציה

אפשרים למנה משוואה לא מדויקת אך ניתן למצוא את אינטגרציה ($\epsilon = 0$) $\mu(x, y)$
 כך שאחרי שכתב את המשוואה בארבעה, נקבל משוואה מדויקת.

$$\underbrace{\mu(x, y) + N(x, y)}_{\text{לצד } M} \cdot y' = 0$$

$$\underbrace{\mu(x, y) \cdot M(x, y)}_{\text{לצד } M} + \underbrace{\mu(x, y) N(x, y)}_{\text{לצד } N} \cdot y' = 0$$

כדי להמשיך
 תהיה מדויקת

$$\text{חשב } M'y = N'x$$

דורס - ע

$$\mu \cdot M + M'y \cdot \mu = \mu'x \cdot N + N'x \cdot \mu$$

$$\mu'y \cdot M - \mu'x \cdot N + \mu(M'y - N'x) = 0$$

$$\mu'x = \mu \left(\frac{M'y - N'x}{N} \right)$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \mu = \mu(x) & \text{אם} \\ \mu'y = 0 & \text{אם} \end{cases}$$

תלוי רק ב- x , אם לא
 האינטגרציה $\frac{M'y - N'x}{N}$
 $\mu(x)$

① מקרה: אם הביטוי