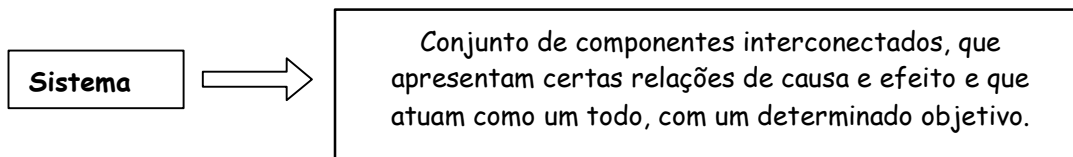


INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS

O estudo de sistemas dinâmicos envolve a modelagem matemática, a análise e a simulação de sistemas físicos de interesse da engenharia, tais como os sistemas mecânicos, elétricos, hidráulicos, pneumáticos e térmicos. Também são de particular importância os sistemas híbridos, resultantes da combinação de dois ou mais dos sistemas citados. Devemos, entretanto, ressaltar que a teoria dos sistemas dinâmicos pode ser aplicada a outros tipos de sistemas, tais como sistemas biológicos, econômicos, etc.

Iniciaremos nosso estudo com o conceito de sistema, diferenciando imediatamente um sistema dinâmico de um sistema estático. Após apresentarmos os vários sistemas dinâmicos físicos usados em engenharia, conceituaremos excitação e resposta de um sistema e, em seguida, ilustraremos o procedimento para a modelagem e a análise de um Sistema dinâmico. Em seguida, faremos uma classificação didática dos sistemas dinâmicos de acordo com vários critérios. Tal classificação é útil por estar muito vinculada matematicamente com a modelagem. Por fim, examinaremos alguns tipos de resposta (comportamento) que um sistema dinâmico pode apresentar.

1 O QUE É UM SISTEMA?



É importante diferenciar um sistema estático de um sistema dinâmico. O **sistema estático** é aquele em que as propriedades descritivas do sistema não variam com o tempo, podendo variar espacialmente. Já no **sistema dinâmico** tais propriedades variam no tempo, podendo também variar espacialmente.

Exemplo de sistema estático: viga carregada estaticamente, isto é, com cargas constantes, pois os deslocamentos de seus pontos variam espacialmente mas não com o tempo.

Exemplo de sistema dinâmico: a mesma viga carregada dinamicamente, ou seja, com cargas que mudam com o tempo, pois os deslocamentos de seus pontos variam também com o tempo. Neste curso estudaremos apenas os sistemas dinâmicos.

Os sistemas dinâmicos não são necessariamente de natureza física. Podemos ter sistemas econômicos, sistemas biológicos, sistemas de informação, sistemas ecológicos, sistemas de trânsito, etc. Neste texto, porém, serão tratados exclusivamente os sistemas que mais interessam à engenharia:

sistemas mecânicos	sistemas elétricos
sistemas hidráulicos	sistemas térmicos
sistemas pneumáticos	sistemas híbridos

Vamos tecer algumas considerações sobre esses tipos de sistemas.

sistemas mecânicos

São sistemas que possuem massas e/ou inércias, as quais armazenam energia cinética e potencial gravitacional, assim como elementos armazenadores de energia potencial elástica (molas) e dissipadores de energia mecânica (amortecedores). Normalmente, suas entradas são forças, torques ou deslocamentos. Também podem ser colocados em movimento através da imposição de condições iniciais, tais como deslocamentos iniciais e/ou velocidades iniciais.

Um **automóvel** é um exemplo bastante familiar de um sistema mecânico. Ele apresenta uma resposta dinâmica durante acelerações, frenagem, deslocamentos em curvas, passagens sobre irregularidades do terreno, etc. Uma **aeronave** em vôo também constitui um exemplo de sistema mecânico: ela tem uma resposta dinâmica às mudanças de velocidade, altitude e manobras. **Estruturas** de edifícios podem apresentar uma resposta dinâmica a carregamentos externos, tais como vento, tremores de terra, etc.

sistemas elétricos

Normalmente são constituídos por **circuitos elétricos** que possuem componentes passivos, tais como resistores (dissipadores de energia elétrica), capacitores e indutores (armazenadores de energia elétrica), os quais são excitados por geradores de voltagem ou corrente. Já os **circuitos eletrônicos** envolvem também o emprego de transistores e amplificadores. Devido à disponibilidade e ao controle que temos sobre a energia elétrica, os sistemas elétricos são os que mais estão presentes na nossa vida diária: **circuitos elétricos domésticos, motores elétricos, receptores de TV, rádios, aparelhos de som, computadores**, etc.

sistemas fluidos

Classificam-se em dois grandes grupos, conforme a natureza do fluido utilizado: **sistemas hidráulicos**, quando o fluido de trabalho é um líquido, tal como água ou óleo, e **sistemas pneumáticos**, quando o fluido de trabalho é um gás, tal como ar, nitrogênio, etc. São constituídos por orifícios, restrições, válvulas de controle (dissipadores de energia), reservatórios (armazenadores de energia), tubulações (indutores) e atuadores excitados por geradores de pressão ou escoamento de um fluido. O **sistema de abastecimento de água de um edifício** é um exemplo de um sistema fluido (mais especificamente, é um sistema hidráulico do tipo sistema de nível de líquido), no qual o nível da água do reservatório tem uma resposta dinâmica em função da quantidade de água que é bombeada para o reservatório e da quantidade de água que é consumida no prédio. O **escoamento de ar através de uma cavidade em um tubo** causará uma resposta dinâmica (um tom acústico). O **sistema de freio hidráulico** de um automóvel, o **sistema de distribuição de ar condicionado** de um escritório, o escoamento da mistura ar-combustível do **sistema de alimentação** de um motor de combustão interna, etc., constituem exemplos de sistemas fluidos.

sistemas térmicos

Possuem componentes que oferecem resistência térmica à transferência de calor (por condução, convecção e radiação) e componentes que apresentam a propriedade de capacitância térmica (armazenamento de energia térmica) quando excitados por uma diferença de temperatura ou um fluxo de calor. Um **sistema de aquecimento de uma casa** tem uma resposta dinâmica, conforme a temperatura ambiente aumente até alcançar a temperatura desejada.

sistemas híbridos

São sistemas que combinam dois ou mais dos tipos de sistemas citados anteriormente. A maioria dos sistemas dinâmicos aplicados em engenharia são sistemas híbridos. Conforme a combinação, podemos ter, dentre outros:

- **sistemas eletromecânicos:** empregam componentes eletromagnéticos que convertem energia elétrica em mecânica.
Exemplos: alto-falante, atuador solenóide, motor elétrico, etc.
- **sistemas fluidomecânicos:** empregam componentes que convertem energia hidráulica ou pneumática em energia mecânica.
Exemplos: macaco hidráulico, servo-hidráulico usado para controle do vôo de um avião, cilindro pneumático, etc.
- **sistemas termomecânicos:** empregam componentes que convertem energia térmica em energia mecânica.
Exemplos: motor de combustão interna, motor a jato, turbina a vapor, etc.
- **sistemas eletrotérmicos:** empregam componentes que convertem energia elétrica em térmica.
Exemplos: aquecedor elétrico doméstico, aquecedor elétrico de água, etc.

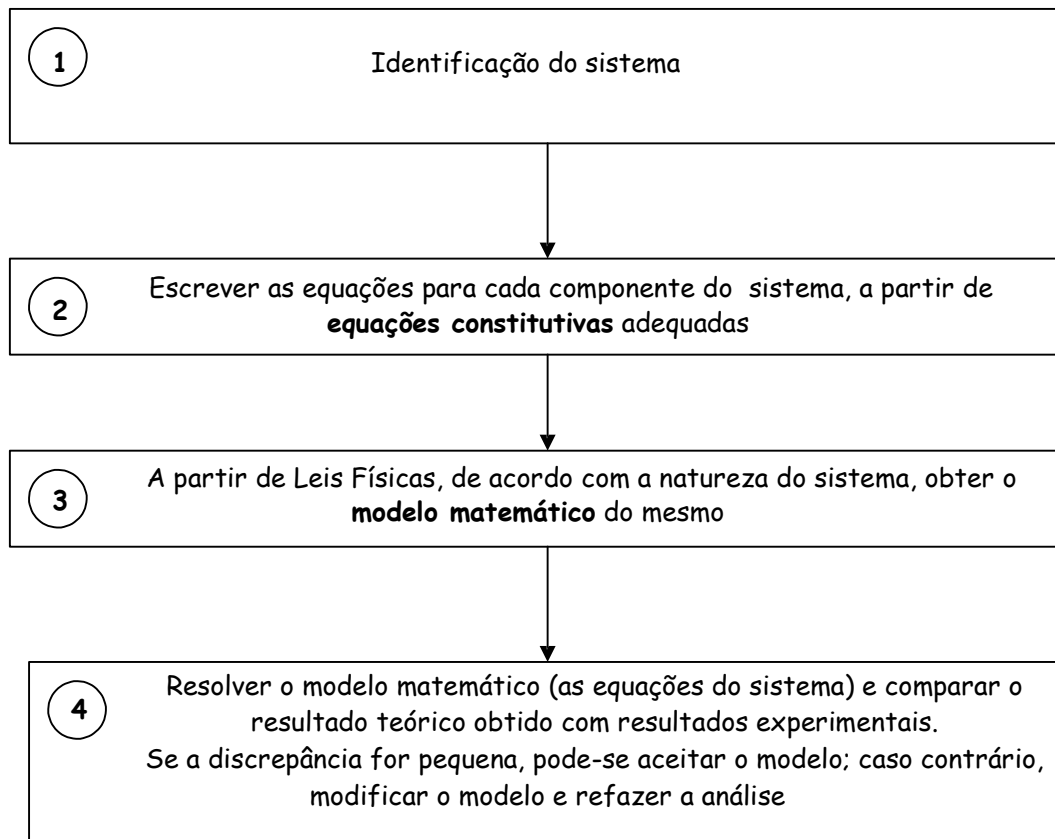
2 EXCITAÇÃO E RESPOSTA

Quando solicitado por uma dada **excitação**, o sistema exhibe um certo comportamento, chamado de **resposta**. Outros termos muito empregados:

sistema	=	processo	=	planta
excitação	=	entrada	=	input
resposta	=	saída	=	output

3 ANÁLISE DINÂMICA

A **Análise Dinâmica** é o estudo da relação de causa e efeito entre excitação e resposta de um sistema. Ela se processa nas seguintes etapas:



Na etapa 1, são definidos os parâmetros do sistema e a variável. Também são adotadas hipóteses **simplificadoras**. A adoção de hipóteses simplificadoras é imperativa na análise dinâmica, pois facilita o lado matemático. Entretanto, devemos ter muito cuidado ao estabelecer tais hipóteses, pois deve haver um **compromisso entre simplicidade e precisão**: o modelo deve ser o mais simples possível mas deve reter as características essenciais do sistema real. Normalmente, quando fazemos a verificação do modelo e constatamos que existe uma discrepância muito grande entre os resultados teóricos e experimentais, a causa do problema reside na adoção de simplificações inadequadas.

A seguir (etapas 2 e 3), devemos escrever as equações para os componentes do sistema e para o sistema como um todo. Para os componentes devemos usar **equações constitutivas**. Uma equação constitutiva é uma relação de causa e efeito, muitas vezes estabelecida experimentalmente, entre duas ou mais variáveis descritivas. Exemplos: Lei de Ohm ($e = Ri$), Lei de Hooke ($\sigma = E \epsilon$), Lei dos Gases Perfeitos ($p = RT$), etc. Aplicando **leis físicas** adequadas, como as Leis de Newton, de Kirchhoff, de Fourier, etc., chegamos normalmente a equações diferenciais que relacionam matematicamente as variáveis do modelo com as propriedades do modelo e com o tempo.

Encontramos para modelo matemático a **equação diferencial linear ou não linear**.

O modelo matemático assim obtido deve ser agora resolvido (etapa 4), para que obtenhamos o comportamento (a resposta) do sistema. Tal solução pode ser feita analiticamente ou numericamente. Se o modelo matemático for relativamente simples, como no caso de uma equação diferencial ordinária linear (EDOL), devemos preferir uma solução analítica, a qual é exata. Entretanto, se o modelo for mais complicado, como no caso de uma equação diferencial não-linear, podemos apelar para uma solução numérica, a qual é aproximada. Felizmente, hoje em dia dispomos de muitos programas de computador que permitem essa última solução, como o MatLab, o Simulink e o VisSim. Tais softwares permitem, também, simular o comportamento através de gráficos nos quais podemos visualizar, por exemplo, o deslocamento e a velocidade em função do tempo. Uma outra opção da qual podemos dispor é a chamada **linearização** do sistema em torno de um **ponto de operação**.

Uma vez obtido o comportamento do sistema, através da solução do modelo matemático, devemos compará-lo com o comportamento obtido experimentalmente. Se tal comparação for satisfatória, podemos aceitar o modelo. Caso contrário, devemos refinar o modelo e repetir o procedimento, até encontrarmos um modelo satisfatório.

4 CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS DINÂMICOS

Apresentamos, a seguir, uma classificação dos sistemas dinâmicos de acordo com vários critérios. Apesar de didática, ela é importante porque revela uma ligação matemática com a modelagem.

4.1 SISTEMAS COM PARÂMETROS CONCENTRADOS E COM PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS

No desenvolvimento do modelo matemático é necessário identificar os componentes do sistema e determinar as suas características individuais. Tais características são governadas por leis físicas (Leis de Newton, de Kirchhoff, de Fourier, etc., conforme a natureza do sistema) e são descritas em termos dos chamados **parâmetros** (ou propriedades) do sistema. Os sistemas podem ser divididos em duas grandes classes, conforme a natureza de seus parâmetros: aqueles cujos parâmetros não dependem das coordenadas espaciais, chamados **sistemas com parâmetros concentrados**, e aqueles cujos parâmetros dependem das coordenadas espaciais, denominados **sistemas com parâmetros distribuídos**. No primeiro caso, a excitação e a resposta dependem apenas do tempo, logo são descritos por **equações diferenciais ordinárias**; já no caso de parâmetros distribuídos, a excitação e a resposta dependem do tempo e das coordenadas espaciais, logo são descritos por **equações diferenciais parciais** (mais de uma variável independente). Como exemplo do primeiro caso, citamos um conjunto de discos montados em um eixo cuja massa é pequena em comparação com as massas dos discos, logo podemos concentrar nos discos as massas dos eixos. Já uma laje constitui um exemplo de segundo caso, pois vemos nitidamente que o parâmetro massa está distribuído ao longo das coordenadas espaciais.

4.2 SISTEMAS VARIANTES NO TEMPO E INVARIANTES NO TEMPO

No modelo matemático, i.é., nas equações diferenciais, os parâmetros do sistema aparecem sob forma de coeficientes. Se os coeficientes são constantes, dizemos que o sistema é **invariante no tempo**; se não, o sistema é considerado **variante no tempo**. O pêndulo simples analisado anteriormente constitui um exemplo de sistema invariante no tempo. Já um foguete na sua fase propulsada é um sistema variante no tempo, pois o mesmo perde massa durante a queima de combustível.

4.3 SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES

Uma propriedade do sistema que tem profundas implicações na análise é a **linearidade**. Consideremos a fig. 1, na qual está expressa a relação entre a entrada $r(t)$ e a saída $c(t)$ sob forma de diagrama de blocos:

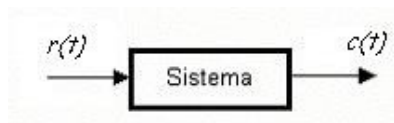


Fig. 1 Entrada e Saída de um Sistema

Consideremos, também, dois pares de entrada e saída, $r_1(t)$, $c_1(t)$ e $r_2(t)$, $c_2(t)$, conforme fig. 2 (a) e (b). Então, para o mesmo sistema, seja a entrada $r_3(t)$, fig. 2 (c), uma combinação linear de $r_1(t)$ e $r_2(t)$:

$$(1) \quad r_3(t) = {}_1r_1(t) + {}_2r_2(t)$$

onde ${}_1$ e ${}_2$ são constantes.

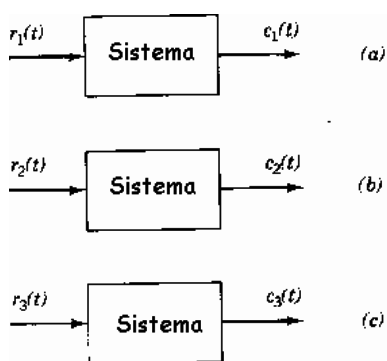


Fig. 2 Sistema Linear

Se a saída $c_3(t)$ representa uma combinação linear de mesma forma, i.é., se

$$(2) \quad c_3(t) = {}_1c_1(t) + {}_2c_2(t)$$

então dizemos que o sistema é um **sistema linear**. Caso contrário, i.é., se

$$(3) \quad c_3(t) \neq {}_1c_1(t) + {}_2c_2(t)$$

então dizemos que se trata de um **sistema não-linear**. Em outras palavras, para um sistema linear, respostas a diferentes excitações podem ser obtidas separadamente e depois combinadas linearmente, o que constitui o **Princípio da Superposição**, que é o princípio fundamental da Teoria dos Sistemas Lineares.

A grande vantagem de trabalhar com sistemas lineares é que o modelo matemático dos mesmos é descrito por um sistema de Equações Diferenciais Lineares, que são de fácil solução analítica. Já o modelo de sistemas não lineares é descrito por Equações Diferenciais Não Lineares, as quais são de difícil solução analítica (ou mesmo impossível). Nesse caso, temos duas opções: ou impomos certas hipóteses simplificadoras (se forem exequíveis) que conduzam à linearização do sistema, ou apelamos para métodos numéricos aproximados, como os métodos de Euler, Runge-Kutta, etc., os quais, felizmente, já estão implantados em muitos softwares de simulação, tais como MatLab, VisSim, etc.

4.4 SISTEMAS CONTÍNUOS E SISTEMAS DISCRETOS

Se um sistema submetido a uma entrada contínua no tempo, $r(t)$, apresentar uma saída também contínua, $c(t)$, ele é chamado de **sistema contínuo** e o seu modelo matemático será constituído por equações diferenciais. Por outro lado, se um sistema submetido a uma entrada discreta no tempo, $\{r_k\}$ (uma seqüência de números), apresentar uma saída também discreta, $\{c_k\}$ (outra seqüência de números), ele é chamado de **sistema discreto** e o seu modelo matemático será constituído por equações a diferenças finitas.

5 RESPOSTA DO SISTEMA

Para obter a resposta do sistema, ou seja, o seu comportamento quando submetido a uma excitação ou a condições iniciais (tais como deslocamento inicial e/ou velocidade inicial), basta resolver a equação diferencial do modelo matemático. Para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo, a equação diferencial é linear com coeficientes constantes, os quais representam os parâmetros do sistema.

A solução de uma equação diferencial consiste de duas partes: a solução homogênea e a solução particular.

A **solução homogênea** corresponde ao caso em que a excitação externa é nula, podendo o sistema entrar em movimento somente quando lhe forem impostas condições iniciais. Se não existirem condições iniciais e nem excitações externas, o sistema permanece em repouso. Em Engenharia, é costume chamar a solução homogênea de **resposta livre** ou **resposta natural**.

Por outro lado, a **solução particular** é a parte da resposta devida inteiramente à excitação externa, considerando as condições iniciais nulas. Em Engenharia, é costume chamar a solução particular de **resposta forçada**.

No caso de sistemas lineares, podemos invocar o Princípio da Superposição dos Efeitos para combinar a resposta livre com a resposta forçada, obtendo a resposta total:

$$\text{Resposta Total} = \text{Resposta Livre} + \text{Resposta Forçada}$$

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- <https://www.dca.ufrn.br/~meneghet/FTP/Modelagem/Modelagem%20-%20Aulas%20da%201a%20Unidade.pdf>
- <http://www.mudancasabruptas.com.br/SistemasDin.html>
- ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/ea932_03/aulas/topico3_03.pdf
- https://def.fe.up.pt/dinamica/sistemas_dinamicos.html