Temaøvelse 1

Taylor Approksimation

Temaøvelsen består af en række eksempler på anvendelse af taylor-approksimation. Somme tider arbejdes der eksakt, andre gange eksperimentelt via Maple.

Opgave 1 Bestemmelse af tallet e

Tallet e er et af de allervigtigste i den matematiske analyse. Det er et *trancendentalt* tal, så det er ikke enkelt at afgøre hvor stort det er. Men hvor stort er det, hvordan kan vi sammenligne det med andre tal? Vi må udvikle det som decimaltal! Det gør vi i denne opave ved hjælp af Taylor-approksimation.

Intro: Tallet e er grundtallet for den naturlige eksponentialfunktion exp. Exp indføres ofte som dén eksponentielt voksende funktion hvis hældningskoefficient i 0 er 1. Det er (relativt) nemt at vise, at en vilkårlig eksponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a > 0$ har den afledede $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$. Det følger heraf at

$$\exp'(x) = \exp'(0) \cdot \exp(x) = 1 \cdot \exp(x) = \exp(x)\,.$$

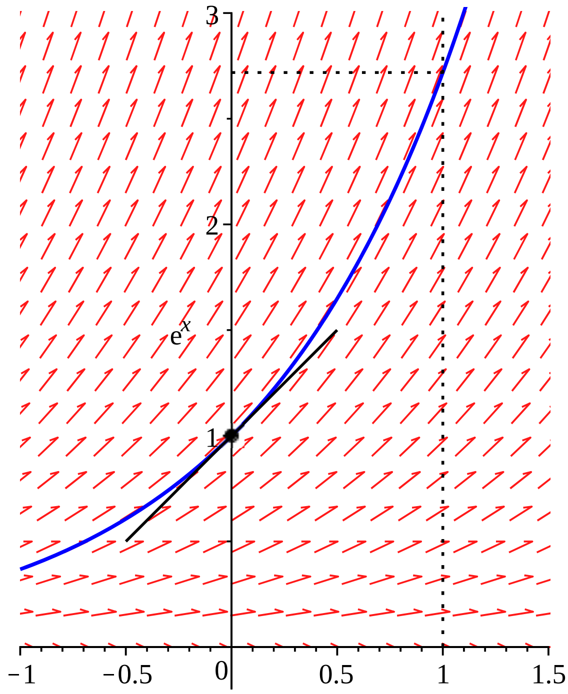
Kort sagt: Hældningskofficienten er altid den samme som funktionsværdien. Når grafen for $y = \exp(x)$ kommer op i højden $y = 2$, skal dens tangent have hældningen 2, osv. Det kan man bruge til at skitsere en graf for exp ud fra dens mulige tangenter, som det er vist på figuren nedenfor.

Videre: Tallet e er funktionsværdien for $\exp(x)$ i $x = 1$, da $\exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. Ud fra figuren tillader vi os at konkludere at

$$\mathrm{e} < 3\,.$$

Dette resultat må benyttes i det følgende hvor vi skal bestemme e nærmere.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼



Lad $P_n(x)$ betegne det approksimerende polynomium af grad n for $\exp(x)$ med udviklingspunktet $x_0 = 0$.

a) Opstil det approksimerende polynomium $P_3(x)$. Vis ved vurdering af den til $P_3(x)$ hørende restfunktion $R_3(x)$ at den fejl man højst risikerer at begå, hvis man benytter approksimationen $\mathrm{e} \approx P_3(1)$, er mindre end $\dfrac{1}{8} = 0.1250$.

b) Gør rede for at der generelt gælder at den fejl man højst risikerer at begå, hvis man benytter approksimationen $\mathrm{e} \approx P_n(1)$, er mindre end $\dfrac{3}{(n+1)!}$.

|||| Opgave 2 Grænser for approksimation

I denne opgave skal vi eksperimentere med det besynderlige fænomen, at hvis en almindelig reel funktion af en reel variabel har en *kompleks* rod i nævneren, så er der tilsyneladende grænser for approksimation.

Vi betragter funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Risikerer vi i forskriften for f at dividere med 0 hvis $x \in \mathbb{R}$?
Risikerer vi i forskriften for f at dividere med 0 hvis $x \in \mathbb{C}$?

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

b) Opstil med Maples mtaylor det approksimerende polynomium $P_5(x)$ og $P_6(x)$ af grad henholdsvis 5 og 6 for f med udviklingspunkt $x_0 = 0$.
Tegn $f(x)$, $P_5(x)$ og $P_6(x)$ i samme koordinatsystem.

Vink til Maple: Hvis du har brug for at begrænse den vertikale udstrækning af et plot, fx fra -1 til 2, kan du tilføje argumentet view=-1..2 .

c) Hvor langt ud til højre og venstre for $x_0 = 0$ kan man maksimalt få grafen for et approksimerende polynomium for f med udviklingspunktet $x_0 = 0$ til at følges med grafen for f? Eksperimentér ved at hæve polynomiets grad!

|||| Opgave 3 Kompleks funktion af reel variabel

Nu skal vi undersøge approksimationer af en kompleks funktion af en reel variabel og visualisere dem med Maple.

Vi betragter i det følgende en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$f(x) = 2\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(2x)\,,\ x \in [\,-\pi\,,\,\pi\,]\,.$$

Der er endvidere givet tre reelle tal: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$ og $x_3 = \dfrac{3\pi}{4}$.

a) Plot f med Maplekommandoen complexplot, og fremhæv i samme plot punkterne $f(x_1)$, $f(x_2)$ og $f(x_3)$.

Vink til Maple:

1. Ved mere raffinerede illustrationer skal man i starten af Maple-arket tilføje with(plots).
2. Hvis du ønsker help til en kommando i Maple, lader du cursoren stå på den indskrevne kommando og trykker F2.
3. De tre nævnte punkter kan også plottes med complexplot, se hvordan med help. For at gøre punkterne tydeligere kan man evt. tilføje argumenterne
style=point,symbol=solidcircle,symbolsize=15
eller lignende.
4. Man kan samle flere plots i samme illustration med display. Prøv for eksempel:
```
>graf1:=plot(cos(x),x=-Pi..Pi,color=blue,linestyle=dash):
>graf2:=plot(sin(x),x=-Pi..Pi,color=red,linestyle=dot):
>display(graf1,graf2,scaling=constrained);
```

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

b) Opstil de tre approksimerende førstegradspolynomier for f som har udviklingspunkterne $x = x_1$ henholdvis $x = x_2$ og $x = x_3$.
Plot hver af de tre polynomier i et passende interval omkring deres respektive udviklingspunkter. Og saml dem i ét plot sammen med plottet af f.
Beskriv hvad du ser ...

c) Opstil med udviklingspunktet $x = 0$ det approksimerende andengradspolynomium $P_2(x)$ og det approksimerende tredjegradspolynomium $P_3(x)$ for f.
Plot de to polynomier sammen med plottet for f og punkterne $f(1)$, $P_2(1)$ og $P_3(1)$.

d) Bestem ved Maple-udregning afstanden fra $f(1)$ til $P_2(1)$ og afstanden fra $f(1)$ til $P_3(1)$.

Vink: Hvis du ønsker afstandene angivet som decimatal med fire betydende cifre, benytter du evalf[4](...).

e) Hvilken grad n skal et approksimerende polynomium $P_n(x)$ for f med udviklingspunktet $x_0 = 0$ mindst have, for at afstanden fra $f(1)$ til $P_n(1)$ er mindre end $\frac{1}{10}$.

|||| Opgave 4 Klassisk fysik som approksimation til relativitetsteori

Hvis man forstår kunsten at *vurdere* fejlen ved brug af restfunktionen, kan vi her udvikle en interessant approksimation til relativitetsteorien.

a) Lad $x \in [0;1[$. Vis ved hjælp af Taylors formel, at

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}(1-\xi)^{-\frac{5}{2}}x^2$$

for et ξ mellem 0 og x.

Ifølge Albert Einstein er en partikels kinetiske energi givet ved

$$E_{kin}(v) = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - 1 \right), \quad 0 \le v < c$$

hvor m_0 er partiklens hvilemasse, c er lysets hastighed $(3 \cdot 10^5 \frac{km}{s})$ og v er partiklens hastighed. Den klassiske kinetiske energi er som bekendt

$$T(v) = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2.$$

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Den relative fejl ved at erstatte $E_{kin}(v)$ med $T(v)$ defineres som

$$F = \frac{E_{kin}(v) - T(v)}{E_{kin}(v)}.$$

b) Vis ved hjælp af det approksimerende polynomium ud fra $x_0 = 0$ af $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, at

$$F < \frac{3\left(\frac{v}{c}\right)^2}{4\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\ .$$

Vink: Erstat x med $(\frac{v}{c})^2$. Da bliver

$$E_{kin}(v) = \frac{1}{2}m_0 \cdot v^2 + \frac{3}{8}\frac{m_0 \cdot v^4}{c^2(1-\xi)^{\frac{5}{2}}}$$

hvor $0 < \xi < (\frac{v}{c})^2$.

Vink: Hvilke konsekvenser får det for den relative fejl F? Indsæt i uligheden og forkort! Når du videre skal vurdere brøken på højresiden af uligheden, så husk de grundlæggende regler: Somme tider forenkler man tælleren ved at gøre den lidt større. Andre gange forenkler man nævneren ved at gøre den lidt mindre. Begge dele er tilladte fordi de gør brøken større. Fejlvurderingen bliver derved grovere, men det er en pris man gerne betaler for at opnå enkle udtryk der kan arbejdes videre med.

c) Vis, via den nu beviste vurdering at F at for $v \leq 3 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ er $F < 10^{-2}$.

Temaøvelsesopgaven er slut