Ludwig-Maximilian Universität

Bachelorarbeit

Ganze Oktonion

Tobias Plath

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Oktonionen sind nach den reellen Zahlen, den komplexen Zahlen und den Quaternionen die letzte mögliche Divisionsalgebra. Im Verlauf dieser Arbeit sollen die verschiedenen Ansätze für das Konzept der "Ganzzahligkeit"kurz vorgestellt und schließlich der Ring der "ganzen Oktonionen"definiert werden. Durch die Eigenschaften als Divisionsalgebra ist es möglich für diese ganzen Oktonionen sinnvoll eine Faktorisierung anzugeben, auch wenn durch die fehlende Kommutativität und Assoziativität sich die Frage nach der Eindeutigkeit deutlich schwerer gestaltet.

2. Oktonionen

2.1. Definition der Oktonionen.

Die Oktonionen lassen sich von den Quaternionen herleiten, sie lassen sich aber auch elementar mit Hilfe einer Multiplikationstabelle konstruieren. Letzterer Weg soll im folgenden gewählt werden.

Definition 1. *Die Oktonion sind eine achtdimensionale Algebra mit der Basis* $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ *und deren Multiplikation durch Tabelle 1 gegeben ist. Die Einträge geben das Ergebnis der Multiplikation der i-ten Reihe mit der j-ten Spalte an.*

Tabelle 1. Multiplikationstabelle

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	$-e_5$	e_4	$-e_2$	-1

2.2. **Ausgewählte Eigenschaften.**

2.2.1. *Eigenschaften der Indizes.*
Für die Indizes der gewählten Basisvektoren gilt (Betrachte dabei die Indizes als Teil von $\mathbb{Z}_7$):
(i)Die Indizes der Basisvektoren sind zyklisch:
Aus $e_i \cdot e_j = e_k$ folgt $e_{i+1} \cdot e_{j+1} = e_{k+1}$
(ii)Die Indizes der Basisvektoren haben eine Verdopplungseigenschaft:
Aus $e_i \cdot e_j = e_k$ folgt $e_{2i} \cdot e_{2j} = e_{2k}$

2.2.2. *Kommutativität.*
Rein reelle Oktonionen kommutieren, imaginäre Basisvektoren sind antikommutativ. Die Oktonionen sind im allgemeinen nicht kommutativ. Beispiel:

$$(1+e_2+e_3+e_5)\cdot(e_2+e_3+e_5+e_7) = -3+e_1+e_2+e_3+e_4+e_5-e_6+e_7$$
$$(e_2+e_3+e_5+e_7)\cdot(1+e_2+e_3+e_5) = -3-e_1+e_2+e_3-e_4+e_5+e_6+e_7$$

2.2.3. *Assoziativität.*
Die Oktonionen sind im allgemeinen nicht assoziativ. Beispiel:

$$((1+e_2+e_3+e_5)\cdot(e_2+e_3+e_5+e_7))\cdot(e_1+e_4+e_5+e_7) = -4-4e_4-4e_5-4e_7$$
$$(1+e_2+e_3+e_5)\cdot((e_2+e_3+e_5+e_7)\cdot(e_1+e_4+e_5+e_7)) =$$
$$= -4-2e_1-2e_3-4e_4-2e_5-2e_6-4e_7$$

Allerdings gilt:
$x.(y.x) = (x.y).x$ sowie $x.(x.y) = (x.x).y$ und $y.(x.x) = (y.x).x$

2.2.4. *Norm.*
Für die Norm zweier Oktonionen a,b gilt:

$$\|a \cdot b\| = \|a\| \cdot \|b\|$$

3. Konzept von Ganzzahligkeit

Bevor man Aussagen darüber treffen kann ob etwas ganzzahlig ist müssen wir uns zuerst überlegen, inwiefern wir Ganzzahligkeit verallgemeinert definieren wollen. Dazu nehmen wir uns Minimalpolynome zur Hilfe.
Das reelle Minimalpolynom eines Oktonions $a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_5e_6 + a_7e_7$ ist

$$x^2 - 2a_0x + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2) = 0$$

Definition 2. *Einen Ring, der nur ganzzahlige Koeffizienten im Minimalpolynom hat nennen wir **Ordnung** (auch wenn hier die Oktonionen nicht assoziativ sind). Hat eine Ordnung keinen größere Ordnung, die diese Ordnung enthält so nennen wir sie **maximale Ordnung**.*

Definition 3. *Die Elemente der maximalen Ordnung der Oktonionen nennen wir **ganze Oktonionen**. Unter Umständen müssen wir uns auf eine maximale Ordnung festlegen falls diese nicht eindeutig ist.*

Die Suche nach den ganzen Oktonionen ist also gleichbedeutend mit der Suche nach einer maximalen Ordnung

3.1. Graves'sche Zahlen.

Aus der Gleichung des Minimalpolynoms und der Forderung, dass die Koordinaten ganzzahlig sein müssen folgt dass $2a_0$ und $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2$ ganzzahlig sein müssen. Sind alle Koordinaten ganzzahlig, ist das offensichtlich erfüllt. Die Oktonionen mit ganzzahligen Koordinaten bezeichnen wir als Graves'sche Zahlen. Da die Addition der Graves'schen Zahlen und die Multiplikation wieder Oktonionen mit ganzzahligen Koordinaten ergeben, also Grave'sche Zahlen, bilden sie einen Ring und damit eine Ordnung. Die Frage bleibt, ob diese Ordnung maximal ist.

Dazu stellen wir zunächst fest:

Lemma 1. *Für alle Koordinaten a_i gilt $2a_i \in \mathbb{Z}$*

Beweis: Sei a Oktonion mit Koordinaten a_i. Betrachten wir nun für jedes i jeweils $b = a * e_i$ Es gilt $b_0 = a_i * e_i = -a_i$ und $2b_0$ ist genau dann ganzzahlig, falls $2a_i$ ganzzahlig ist.

Das bedeutet also, das nur Koordinaten aus $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ möglich sind.

Lemma 2. *Für die Anzahl der Koeffizienten m die keine ganzen Zahlen sind gilt m mod 4 = 0*

Beweis: Aus Lemma 1 folgt das für jeden Koordinaten a_i gilt $a_i \in \mathbb{Z}$ oder $a_i \in 2\mathbb{Z} + 1/2$. Damit ist $a_i^2 \in \mathbb{Z}^2$ oder $a_i^2 \in (4\mathbb{Z}^2 + 4\mathbb{Z} + 1)/4$ Es folgt

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \in \sum_{a_i ganzzahlig} \mathbb{Z}^2 + \sum_{a_i nichtganzzahlig} (4\mathbb{Z}^2 + 4\mathbb{Z} + 1)/4$$

$$= \sum_{a_i ganzzahlig} \mathbb{Z}^2 + \sum_{a_i nichtganzzahlig} (4\mathbb{Z}^2 + 4\mathbb{Z} + 1)/4 =$$

$$= \sum_{a_i ganzzahlig} \mathbb{Z}^2 + \sum_{a_i nichtganzzahlig} (\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}) + \sum_{ainichtganzzahlig} 1/4 \subseteq \mathbb{Z} + m * 1/4$$

$\mathbb{Z} + m * 1/4$ ist genau dann ein Element aus $\mathbb{Z}$ falls m/4 Element aus $\mathbb{Z}$ ist, d.h. m mod 4 = 0

Definition: Die Menge der Koordinaten die aus $\mathbb{Z}/2$ aber nicht aus $\mathbb{Z}$ sind bezeichnen wir als Halbmenge.

Definition: Wir definieren $e_{abcd} = \frac{e_a+e_b+e_c+e_d}{2}$ Definition: Die Halbmenge, die durch das addieren von e_{abcd} zu den Grave'schen Ganzzahlen entsteht bezeichnen wir einfach nur als die Halbmenge abcd. Dabei entspricht *emptyset* den Grave'schen Zahlen.

3.2. **Kirmsezahlen.**

Durch die beiden obigen Bedingungen liegt es Nahe die 4-Elementigen Unteralgebren der Quaternion sowie deren Komplemente zu wählen. Diese sind durch folgende Mengen erzeugt, die wir als 0-Mengen bezeichnen wollen.

$\emptyset$	0124	0235	0346	0457	0561	0672	0713
01234567	3567	1467	1257	1236	2347	1345	2456

Ein Oktonion, dessen Halbmenge eine 0-Menge ist bezeichnen wir als 0-Ganzzahl oder Kirmsezahl. Diese erfüllen die Bedingungen aus Lemma 1 und Lemma 2. Allerdings sind die Kirmsezahlen nicht multiplikativ abgeschlossen und bilden deshalb keine Ordnung! Um das zu sehen, betrachten wir als Beispiel $e_{0457} \cdot e_{0137}$

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e_4 + \frac{1}{2}e_5 + \frac{1}{2}e_7) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_7) =$$
$$= \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_4 - \frac{1}{2}e_6 + \frac{1}{2}e_7$$

Das Ergebnis ist keine Kirmsezahl mehr. Multipliziert man das nochmals mit mit der Kirmsezahl e_{0235} erhält man als Ergebnis

$$(\frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_4 - \frac{1}{2}e_6 + \frac{1}{2}e_7) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_5) =$$
$$= -\frac{1}{4}(1 + e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + 3e_7)$$

Das zugehörige Minimalpolynom $x^2 + \frac{1}{2}x + 16$ ist jetzt auch nicht mehr ganzzahlig. Dieses Problem lässt sich allerdings lösen, was uns zu den Zahlen führt, die wir als ganze Oktonionen bezeichnen werden.

3.3. **Ganze Oktonionen.**

Definition 4. *Wir bezeichnen eine Menge, die durch vertauschen von der Koordinate 0 mit der Koordinate $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ aus den 0-Mengen hervorgeht als **n-Menge**. Die zugehörigen Zahlen sind die **n-Ganzzahlen**. Wir beobachten dass die verschiedenen Mengensysteme der n-Mengen isomorph zueinander sind. Sind also die n-Ganzzahlen abgeschlossen für ein $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ so sind sie es für alle n.*

Lemma 3. *Die n-Ganzzahlen sind für jedes $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ multiplikativ abgeschlossen.*

Beweis: Für die 1-Ganzzahlen sind die zugehörigen Halbmengen folgende:

$\emptyset$	0124	1235	1346	1457	0561	1672	0713
01234567	3567	0467	0257	0236	2347	0345	2456

Es folgt, dass die 1-Ganzzahlen durch e_{1235}, e_{1346}, e_{1457}, e_{0345} zusammen mit den Grave'schen Zahlen aufgespannt wird. Ist also die Multiplikation von e_{1235}, e_{1346}, e_{1457}, e_{0345} bis auf Addition mit Grave'schen Zahlen abgeschlossen, so sind es auch die 1-Ganzzahlen. Nachrechnen ergibt:

	e_{1235}	e_{1346}	e_{1457}	e_{0345}
e_{1235}	-1	$e_{\bar{0}1\overline{24}}$	$e_{\bar{0}1\overline{37}}$	$e_{\bar{0}156}$
e_{1346}	$e_{\overline{01}24}$	-1	$e_{\bar{0}2\bar{3}6}$	$e_{\bar{0}467}$
e_{1457}	$e_{\overline{01}37}$	$e_{\overline{023}\bar{6}}$	-1	$e_{\overline{02}57}$
e_{0345}	$e_{\bar{0}23\bar{6}}$	$e_{\bar{0}13\bar{7}}$	$e_{\bar{0}124}$	$e_{\bar{0}345}$

Die 1-Ganzzahlen sind also abgeschlossen und durch die Isomorphe folgt dies auch für $n \neq 1$- Also sind alle n-Ganzzahlen abgeschlossen und jede der sieben Mengen ist - anders als die Kirmsezahlen - eine Ordnung. Es ist noch unklar, ob diese Ordnung jeweils auch maximal ist. Dies zu untersuchen ist unsere nächste Aufgabe.

Definition 5. *Eine n-Menge die den Index 0 enthält nennen wir eine* ***äußere n-Menge****.*
Eine n-Menge die den Index 0 nicht enthält nennen wir eine ***innere n-Menge****.*

Lemma 4. *Jedes ganze Oktonion a, dessen Halbmenge eine äußere n-Menge ist erzeugt zusammen mit den Grave'schen Zahlen alle n-Ganzzahlen.*

Beweis: Es ist wieder ausreichend, das Lemma nur für äußere 1-Mengen zu zeigen. Für ein ganzes Oktonion a definieren wir die Graves'sche Zahl $g = \lfloor a_0 \rfloor + \sum_{i=1}^{7} \lfloor a_i \rfloor e_i$. Damit gilt

$$a - g = \frac{e_a + e_b + e_c + e_d}{2} = e_{abcd}$$

wobei das Vorzeichen für jedes e_i durch Subtraktion, beziehungsweise Addition mit der Grave'schen Einheite_i immer beliebig gewechselt werden kann. Nun kann man a-g durch Multiplikation mit einer oder mehreren geeigneten Grave'schen Einheiten auf jede beliebige äußere 1-Menge zu überführen.

$$\begin{aligned}
e_{1235} \cdot e_1 &= e_{\overline{0467}} = e_{0467} - (1 + -e_4 + e_6 + e_7) \\
e_{0467} \cdot e_2 &= e_{\bar{1}26\bar{7}} = e_{1267} - (e_1 + e_7) \\
e_{1267} \cdot e_1 &= e_{\bar{0}3\bar{4}5} = e_{0345} - (1 + e_4) \\
e_{0345} \cdot e_3 &= e_{\overline{02}3\bar{6}} = e_{0236} - (1 + e_2 + e_6) \\
e_{0236} \cdot e_1 &= e_{1\bar{4}5\bar{7}} = e_{1457} - (e_4 + e_7) \\
e_{1457} \cdot e_2 &= e_{\bar{1}346} = e_{1346} - e_1 \\
e_{1346} \cdot e_1 &= e_{\bar{0}25\bar{7}} = e_{0257} - (1 + e_7) \\
e_{0257} \cdot e_3 &= e_{\overline{12}35} = e_{1235} - (e_1 + e_2)
\end{aligned}$$

Damit kann jede äußere 1-Menge erreicht werden. Jede innere 1-Mengen wird dabei von je zwei äußeren 1-Menge erzeugt. Zusammen kann man dann - wieder mit den Grave'schen Zahlen - jede beliebige n-Ganzzahl erzeugen.

Lemma 5. *Zwei komplementäre vierlementige ganze Oktonionen deren Halbmengen 0-Mengen sind erzeugen sich zusammen mit den Grave'schen Zahlen gegenseitig.*

Beweis: Durch ausrechnen erhalten wir

$$\begin{aligned}
e_7 \cdot e_{0124} &= e_{3567} \\
e_7 \cdot e_{0235} &= e_{\overline{14}67} = e_{1467} - (e_1 + e_4) \\
e_7 \cdot e_{0346} &= e_{\overline{12}57} = e_{1257} - (e_1 + e_2) \\
e_6 \cdot e_{0457} &= e_{\bar{1}2\bar{3}6} = e_{1236} - (e_1 + e_3) \\
e_4 \cdot e_{0156} &= e_{2347} \\
e_4 \cdot e_{0267} &= e_{\bar{1}34\bar{5}} = e_{1345} - (e_1 + e_5) \\
e_7 \cdot e_{0137} &= e_{24\overline{56}} = e_{2456} - (e_5 + e_6)
\end{aligned}$$

Multipliziert man die rechte Seite mit $-e_7$, bzw $-e_6$ oder $-e_4$ enthält man das umgekehrte Ergebnis entsprechend.

Lemma 6. *Zwei Oktonionen deren Halbmengen verschiedene, nicht komplementäre vierelementige 0-Mengen sind erzeugen die n-Ganzzahlen für ein n.*

Beweis: Falls der Index 0 nicht Teil einer Halbmenge ist, so kann man nach Lemma 5 die komplementäre Halbmenge erzeugen, bei der die 0 Teil des Indexes ist. Man kann also davon ausgehen das die 0 Teil des Indexes ist. Dann kann man die Halbmenge des einen Oktonions erhalten indem man die verbleibenden Indizes um 1,2 oder 4 erhöht. Da die Basisvektoren mit einer Symmetrie bezüglich Verdopplung der Indizes ausgewählt wurden kann man dies weiter auf eine Erhöhung der Indizes um 1 einschränken. Damit kann man sich zwei konkrete Halbmengen wählen und die Aussage verallgemeinert sich. Wir wählen e_{0137} und e_{0124}

$$e_{0137} \cdot e_{0124} = e_{12\bar{6}7}$$

Wir wissen bereits das e_{1267} eine äußere 1-Menge ist und damit die 1-Ganzzahlen erzeugen.

Satz 1. *Die durch die n-Mengen erzeugten n-Ganzzahlen sind jeweils von maximaler Ordnung*

Beweis: Die n-Ganzzahlen enthalten jeweils die Grave'schen Zahlen und Zahlen mit der ausschließlichen Halbmenge $e_{01234567}$. und bilden damit eine größere Ordnung als beide. Deshalb muss eine maximale Ordnung mindestens eine vierelementige Halbmenge enthalten. Jede Ordnung mit vierelementigen Halbmengen besteht aber entweder selbst aus n-Ganzzahlen oder aber wird durch den Schnitt von zwei n-Ganzzahlen erzeugt, ist also kleiner. Es gibt aber auch keine größere Ordnung als die n-Ganzzahlen, denn dadurch das eine äußere n-Menge oder zwei verschiedene nicht komplementäre innere n-Mengen alle n-Mengen - und damit auch n-Ganzzahlen - erzeugen muss eine größere Ordnung mindestens die n-Ganzzahlen von zwei verschiedenen Werten von n enthalten. Durch die Symmetrie der Indizes bezüglich Verdopplung und Verschiebung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen das die zwei Zahlen e_{0235} und e_{2357} enthalten sind.

$$e_{0235} \cdot e_{2357} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7)$$

Das zugehörige Minimalpolynom $x^2 + \frac{3}{2} + 1$ ist nicht mehr ganzzahlig. Damit kann es keine größere Ordnung als die ganzen Oktonionen geben und diese bilden eine maximale Ordnung.

4. Faktorisierung von ganzen Oktonionen

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, wie man mit Hilfe der Norm $\|a\| := \sum_{n=0}^{7} a_n^2$ eine Faktorisierung der ganzen Oktononionen auf Grundlage der Faktorisierung der entsprechenden ganzzahligen Normen angeben kann.

4.1. **Das Gitter E_8.**

Um das Gitter E_8 zu beschreiben benötigen wir erstmal die Bausteine, aus denen wir es aufbauen werden.

Definition 6. *Ein **n-dimensionales Simplex** ist die konvexe Hülle von n+1 Punkten die zueinander den gleichen Abstand haben. Das n-dimensionale Simplex-GitterA_n wird durch die Vektoren die entlang der Kanten eines solchen Simplexes laufen bestimmt. Falls nicht anders angegeben, wählen wir als einheitlichen Abstand 1.*

Definition 7. *Ein **Kreuzpolytop** ist das mehrdimensionale Äquivalent zu einem zweidimensionalem Quadrat oder einem dreidimensionalem Oktaeder. Die Eckpunkte eines Kreuzpolytopen werden durch die Einheitsvektoren eines orthnormalen Systems bestimmt. Das Gitter D_n ist das von den Vektoren entlang der Kanten eines n-dimensionalen Kreuzpoltyopen erzeugte Gitter.*

Definition 8. *Wir definieren das Gitter E_8 als das Gitter, das durch Kantenvektoren eines Simplexes S der Dimension 8 zusammen mit einem angrenzen Kreuzpolytop O erzeugt wird.*

Jetzt können wir direkt feststellen:

Lemma 7. *Für jedes a im 8-dimensionalen Raum existiert ein Punkt b des Gitters E_8 sodass $\|a - b\| \leq 1$*

Beweis:Da sich a immer entweder innerhalb eines Simplexes oder eines Kreuzpolytopen befindet, kann sich a nie weiter weg von einem Eckpunkt befinden als in der Mitte der beiden geometrischen Figuren. In der Mitte ist der Abstand aber in beiden Fällen kleiner gleich 1. Der Wert 1 ist allerdings in der Mitte des Kreuzpolytopens möglich. Die ganzen Oktonionen generieren das Gitter E_8 um den Faktor $\frac{1}{2}$ skaliert. Es folgt also äquivalent das für jedes Oktonion a ein ganzes Oktonion b existiert sodass $\|a - b\| \leq \frac{1}{2}$

4.2. **Teilen mit Rest.**

Die letzte Feststellung führt direkt zu dem Satz

Satz 2. *Seien a und $\delta \neq 0$ ganze Oktonionen. Dann können wir a als*

$$a = \delta \cdot b + r$$

schreiben, wobei b,r ganze Oktonionen sind und $\|r\| \leq \frac{1}{2}\|\delta\|$

Beweis: Folgt aus dem vorherigem Lemma.

4.3. **Der Algorithmus von Rehm.**

Der Algorithmus von Rehm ist eine an den euklidischen Algorithmus angelehnte Methode mit der man Aussagen über die nach der Norm modellierten Faktorisierung der ganzen Oktonionen treffen kann.

Für ein ganzes Oktonion a_1 und zwei rationale ganz Zahlen $m_0, m_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\|a_1\| = m_0 \cdot m_1$ bestimmen wir weitere rationale ganz Zahlen m_i und ganze Oktonionen δ_i, a_i indem wir folgende Schritte durchführen:

$$a_1 = \delta_1 \cdot m_1 + \overline{a_2} \qquad \|a_1\| = m_0 \cdot m_1$$

Aus dem Satz zum teilen mit Rest existiert so eine Darstellung. Zusätzlich ist $\|\overline{a_2}\| \leq \frac{m_1}{2}$ und wegen $m_1 \cdot m_2 = \|a_2\| \leq \frac{m_1^2}{2}$ ist auch m2 ¡ m1 Wir führen den Algoritmus jetzt fort, solange es eine Darstellung für $\|a_n\| = m_{n-1} \cdot m_n$ gibt

$a_2 = \delta_2 \cdot m_2 + \overline{a_3}$ $\quad\|a_2\| = m_1 \cdot m_2$ $\quad m_1 > m_2$

$\vdots$

$a_{n-1} = \delta_{n-1} \cdot m_{m-1} + \overline{a_n}$ $\quad\|a_{n-1}\| = m_{n-2} \cdot m_{n-1}$ $\quad m_{n-2} > m_{n-1}$

$a_n = \delta_n \cdot m_n$ $\quad\|a_{n-1}\| = m_{n-1} \cdot m_n$ $\quad m_{n-1} > m_n > 0$

Es ist zu bemerken, das $\|a_n\|$ durch m_{n-1} teilbar ist, da $\|\overline{a_n}\| = \|a_{n-1} - \delta_{n-1} \cdot m_{n-1}\| = \|a_{n-1}\| + m_{n-1}^2 \|\delta_{n-1}\| - m_{n-1}(2|a_{n-1}, \delta_{n-1}|)$

Da die m_n immer kleiner werden, muss irgendwannm_{n+1} nach endlich vielen Schritten 0 sein und der Algorithmus terminieren.

Jetzt drehen wir den Algorithmus um. Wir wählen uns ein μ_n mit $\|\mu_n\| = m_n$ Es liest sich a_n nun folgendermaßen darstellen:

$$a_n = \delta_n \cdot m_n = \delta_n \cdot (\mu_n \cdot \overline{\mu_n}) = (\delta_n \cdot \mu_n) \cdot \overline{\mu_n}$$

Setze nun $\mu_{n-1} = \delta_n \cdot \mu_n$. Dann ist μ_{n-1} Linksteiler von a_n mit $\|\mu_{n-1}\| = m_{n-1}$ denn $\|a_n\| = m_{n-1} \cdot m_n$ Ebenso ist $\overline{\mu_{n-1}}$ Rechtsteiler von $\overline{a_n} = \overline{\mu_{n-1}} \cdot \overline{\mu_n} = \mu_n \cdot \overline{\mu_{n-1}}$ und auch Rechtsteiler von $m_{n-1} = \mu_{n-1} \cdot \overline{\mu_{n-1}}$. Damit ist $\overline{\mu_{n-1}}$ auch Rechtsteiler von $a_{n-1} = \delta_{n-1} \cdot m_{n-1} + \overline{a_n} = (\delta n - 1 \cdot \mu_{n-1} + \mu_n) \cdot \overline{\mu_{n-1}}$

Wir können dieses Durchlaufen des Algorithmus in umgekehrte Richtung nun Schrittweise fortsetzen, als nächstes in dem wir $\mu_{n-2} = \delta_{n-1} \cdot \mu_{n-1} + \mu_n$ setzen und so weit, bis wir schließlich bei einem Linksteiler μ_0 von $a = a_1$ mit Norm $m = m_0$ und einem entsprechendem Rechtsteiler $\overline{\mu_1}$ mit Norm $n = m_1$ ankommen.

Um den umgekehrt durchlaufenen Algorithmus zusammenzufassen:
$\|\mu_n\| = m_n$

$a_n = \mu_{n-1} \cdot \overline{\mu_n}$ $\quad\mu_{n-1} = \delta_n \cdot \overline{\mu_n}$ $\quad\|\mu_{n-1}\| = m_{n-1}$

$a_{n-1} = \mu_{n-2} \cdot \overline{\mu_{n-1}}$ $\quad\mu_{n-2} = \delta_{n-1} \cdot \overline{\mu_{n-1}} + \mu_n$ $\quad\|\mu_{n-2}\| = m_{n-2}$

$a_{n-2} = \mu_{n-3} \cdot \overline{\mu_{n-2}}$ $\quad\mu_{n-3} = \delta_{n-2} \cdot \overline{\mu_{n-2}} + \mu_{n-1}$ $\quad\|\mu_{n-3}\| = m_{n-3}$

$\vdots$ $\quad\vdots$ $\quad\vdots$

$a_2 = \mu_1 \cdot \overline{\mu 2}$ $\quad\mu_1 = \delta_2 \cdot \mu_2 + \mu_3$ $\quad\|\mu_1\| = m_1$

$a_1 = \mu_0 \cdot \overline{\mu 1}$ $\quad\mu_0 = \delta_1 \cdot \mu_1 + \mu_2$ $\quad\|\mu_0\| = m_0$

4.4. **Folgerungen.**

Durch Betrachtung des Algorithmus von Rehm stellen wir fest, dass dadurch das wir μ_n bis auf die Bedingung $\|mu_n\| = m_n$ frei gewählt haben die Menge aller möglichen $\mu_n := \{\mu_n\}$ im Algorithmus offensichtlich genau gleich viele Elemente hat wie es μ_n mit $\|\mu_n\| = m_n$ gibt. Das führt zu dem abschließenden Satz.

Definition 9. *Wir schreiben für die größte rationale ganze Zahl die alle Zahlen $\{\gamma_1, ..., \gamma_k\}$ in den Oktonionen teilt ggT(γ_1,...,γ_k)*

Satz 3. *Sei a ein ganzes Oktonion mit norm $m \cdot n$ wobei m und n natürliche Zahlen sind. Sei nun d der größte gemeinsame Teiler von a,m und n. Dann ist die Menge der Linksteiler $\{\mu_0\}$ mit Norm m gemäß des Algorithmus von Rehm und die Menge der Rechtsteiler $\{\overline{\mu_0}\}$ mit Norm n geometrisch ähnlich zu der Menge aller ganzen Oktonionen mit Norm $d(= m_n)$*

Beweis: Es ist nur noch die Norm zu bestimmen. Sei $d_i = ggT(a_i, m_{i-1}, m_i)$ Dann gilt das d_i $\overline{a_{i+1}} = a_i - \delta_i m_i$ teilt, da d_i jeweils a_i und m_i teilt. Also teilt d_i auch a_{i+1}. Betrachtet man nun

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & m_{i+1} = \frac{\overline{a_{n+1}}}{m_i} = \frac{1}{m_i} \cdot (\|a_i\| + m_i^2 \|\delta_i\| - m_i \cdot (2|\delta_i, a_i) = \\
& = m_{i-1} + m_i\|\delta_i\| - 2|\delta_i, a_i|
\end{aligned}
$$

so stellt man fest, dass d_i jeden Summanden der rechten Seite teilt und damit auch m_{i+1}. Damit teilt d_i auch $d_{i+1} = ggT(a_{i+1}, m_i, m_{i+1}$

Betrachten wir nun d_{i+1}. d_{i+1} teilt nach Definition m_i und damit auch $a_i = \delta_i m_i + \overline{a_{i+1}}$ weil es jedes Element der rechten Seite teilt. Durch umstellen der Gleichung (1) erhalten wir $m_{i+1} - m_i\|\delta_i\| + 2|\delta_i, a_i| = m_{i-1}$. Hier teilt d_{i+1} alle Summanden auf der linken Seite und damit auch m_{i-1}.

Also teilt d_{i+1} auch $ggT(a_i, m_{i-1}, m_i)$ und damit folglicherweise d_i.

Da d_{i+1} d_i teilt und umgekehrt gilt $d_i = d_{i+1}$

Es folgt:

$m_n = ggT(a_n, m_{n-1}, m_n) = d_n = d_1 = ggT(a_1, m_0, m_1) = ggT(a, m, n) = d$

5. Beispiele

Die Faktorisierung von ganzen Oktonionen ist leider nicht eindeutig in dem Sinne das man von einer Faktorisierung leicht auf eine andere schließen kann. Zwar sind sowohl $2 \cdot 3$ als auch $-3 \cdot -2$ jeweils möglich Faktorisierungen in den ganzen Zahlen von 6, diese beiden Faktorisierungen hängen aber durch die Kommutativität und den Vorzeichenwechsel miteinander zusammen. Ähnliche Zusammenhänge gibt es auch in der Quaternionen und komplexen Zahlen [Vergleiche Conway]. In den Oktonionen sind diese aber, da sie wieder kommutativ noch assoziativ sind nicht unbedingt leicht zu finden. Das soll hier mit einigen Beispiel illustriert werden.

5.1. **Kommutativität.**

Das ganze Oktonionen $a := -1 - e_4 - e_5 + e_7$ hat die Norm 4 und rationale Faktoren 2*2.
$l := \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3 + \frac{1}{2}e_4 + \frac{1}{2}e_7$ ist Linksteiler und
$r := \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_5 + e_6 + \frac{1}{2}e_7$ ist Rechtsteiler von a. $l \cdot r = a$
Allerdings gilt
$r \cdot l = -1 + e_4 + e_5 - e_7 \neq a$

Aber nicht immer ist eine Vertauschung unmöglich. Die Grave'sche Zahl 2 hat als Norm $2^2 = 4$ und die mögliche Faktoren
$l : 1 + \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_4 + e_7)$
$r : 1 - \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_4 + e_7)$
mit $l \cdot r = r \cdot l = 2$
Das ist auch klar, da ein Oktonionen mit seinem Konjugiertem kommutiert.

5.2. **Assoziativität.**

Auch die Assoziativität ist im allgemeinen ein Problem:
$a := 1 + 2e_1 + e_2 + e_3 - e_4$ hat die Norm 8 und die rationale Zerlegung $2 \cdot 2 \cdot 2$
mit
$b := 1 + e_1 + e_2 + e_4 + e_7$, $c := -\frac{1}{2}(e_1 + e_2 - 2e_3 + e_4 + e_7)$ und $d := \frac{1}{2}(e_1 + 2e_2 + e_5 + e_6 + e_7)$

ist (bc)d eine Faktorisierung (jeder Faktor hat Norm 2) von a, aber $b(cd) = 1 + e_1 + 2e_2 + e_3 - e_7 \neq a$
Auch hier gibt es wiederBeispiele in denen durch die Auswertungsreihenfolge nichts geändert wird. Drei mögliche Faktoren des ganzen Oktonions $a := e_1 + 2_e 2 + e_5 + e_6 + e_7$
sind
$b := 1 + \frac{(}{e1} + e_2 + e_4 + e_7)$, $c := -\frac{1}{2}(e_1 + e_2 - 2e_3 + e_4 + e_7)$ und $d := \frac{1}{2}(e_1 + 2e_2 + e_5 + e_6 + e_7)$ und es gilt
$(bc)d = a = b(cd)$

6. Literaturverzeichnis

John H. Conway, Derek A. Smith, „On Quaternions and Octonions - Their Geometry, Arithmetic and Symmetry“, A K Peters (2003) ISBN 978-1-56881-134-5

Tevian Dray, Corinne A. Manogue, The Geometry of the Octonions”, World Scientific Publishing Co Pte Ltd (2015) ISBN 978-9814401814