Dowody. Archiwum maturalne CKE

Michał Sroka

23 października 2017

1. (Czerwiec 2017) Udowodnij, że dla dowolnych x,y prawdziwa jest nierówność $5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0$
2. (Maj 2017) Udowodnij, że dla dowolnych x,y prawdziwa jest nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$
3. (Czerwiec 2016) Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich x,y,z,v prawdziwa jest nierówność $\sqrt{x+y}\sqrt{z+v} \geq \sqrt{xz} + \sqrt{yv}$
4. (Maj 2016) Udowodnij, że dla dowolnych x,y takich, że $x^2 + y^2 = 2$ prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$
5. (Czerwiec 2015) Niech $a = log_{12}2$. Wykaż, że $log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$
6. (Maj 2015) Wykaż, że dla dowolnego x prawdziwa jest nierówność $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$
7. (Czerwiec 2014) Udowodnij, że dla dowolnych x,y prawdziwa jest nierówność $x(x-1) + y(y-1) \geq xy - 1$
8. (Maj 2014) Udowodnij, że dla dowolnych x,y dodatnich prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$
9. (Czerwiec 2013) Wykaż, że jeżeli $2a + b \geq 0$ to $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$
10. (Maj 2013)Brak
11. (Czerwiec 2012) Wykaż, że dla dowolnych dodatnich a,b,c,d prawdziwa jest nierówność $ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$
12. (Maj 2012) Wykaż, że dla dowolnych nieujemnych a,b prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$
13. (Maj 2011) Wykaż, że liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36 dla dowolnej liczby całkowitej k
14. (Maj 2011) Wykaż, że dla dowolnych różnych a,b,c takich, że $a + b = 2c$ zachodzi równość: $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$
15. (Sierpień 2010) Wykaż, że dla dowolnych a,b spełniona jest nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
16. (Maj 2010) Brak
17. (Sierpień 2009) Wykaż, że jeśli α, β są kątami ostrymi trójkąta prostokątnego to $tg\alpha + tg\beta \geq 2$
18. (Maj 2009) Wykaż, że $3^{2\sqrt{2}+3} = 9\sqrt{3^{4\sqrt{2}+2}}$
19. (Maj 2008) Wykaż, że jeżeli ciąg jest jednocześnie arytmetycznym i geometrycznym to jest ciągiem stałym.
20. (Maj 2007) Przedstaw wielomian $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.
21. (Maj 2006) Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż że dla każdej liczby naturalnej prawdziwy jest wzór $1 \cdot 4 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \cdots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1$
22. (Maj 2005, Wrocław) Wykaż z definicji, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$
23. (Maj 2005, Warszawa) Wykaż, że dla dowolnych a,b,c funkcja $f(x) = (x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

24. (Maj 2005, Warszawa) Wykaż, że dla różnych a,b równanie $x^2+y^2+ax+by+\frac{ab}{2}=0$ jest równaniem okręgu. Wyznacz współrzędne środka i długość promienia.

25. (Maj 2005, Poznań) 14a) Wykaż, korzystajac z definicji monotoniczności ciągu że ciąg $a_n = 3n^2 - 3n + 2$ jest rosnący.

26. (Maj 2003) Udowodnij stosując zasadę indukcji matematycznej, że dla każdego całkowiego dodatniego n zachodzi równość $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

27. (Styczeń 2003) Suma n początkowych wyrazów ciągu a_n jest obliczana według wzoru $S_n = n^2 + 3n$ Wykaż, że ciąg a_n jest ciągiem arytmetycznym.