

ЛЕКЦІЇ 1-2

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРИ

Вектором називається множина однаково напрямлених (співнаправлених) відрізків однакової довжини.

Довжиною (модулем) вектора називається довжина будь-якого представника класу співнаправлених відрізків, який визначає цей вектор.

Два вектори називаються **рівними**, якщо множини відповідних їм напрямлених відрізків збігаються.

Ознака рівності двох векторів

Для того, щоб два вектори були рівними, необхідно і достатньо, щоб вони були однаково напрямленими і мали рівні довжини.

Два вектора називаються **протилежними**, якщо вони протилежно напрямлені і мають рівні довжини.

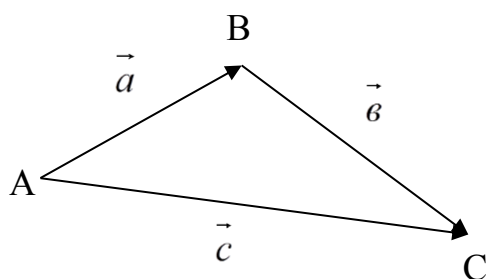


Рис. 1

Нехай дано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. З довільної точки A простору відкладемо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, з його кінця – точки B – відкладемо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (рис. 1).

Тоді вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, початком якого є

початок першого вектора ($\vec{a}$), а кінцем –

кінець другого вектора ($\vec{b}$), є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Властивості операції додавання векторів

1. Комутативна: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. Асоціативна: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. Сумою протилежних векторів є нуль-вектор: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
4. Нуль-вектор є нейтральним елементом операції додавання: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Правило паралелограма

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладені від спільного початку O : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ і на них побудовано паралелограм $OACB$, то сумою векторів $\vec{a} + \vec{b}$ є вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, який виходить з того ж початку і співпадає з діагоналлю OC паралелограма, позначається $\vec{a} + \vec{b}$.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називається такий вектор $\vec{x}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{x}$, якщо $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$.

Операцію віднімання векторів можна замінити додаванням: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Зауваження. Такий спосіб дуже зручний для побудови алгебраїчної суми векторів $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - \vec{a}_4 + \vec{a}_5 + \dots \vec{a}_n$

Для побудови різниці векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ з довільної точки O простору відкладемо обидва вектори: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$, що сполучає кінці побудованих векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і напрямлений в бік зменшуваного вектора $\overrightarrow{OA}$, є їх різницею: $\vec{a} - \vec{b}$.

Для будь-яких трьох точок простору A, B, C незалежно від їх розміщення справедлива рівність

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

Модуль суми і різниці векторів

Теорема 1. Для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Знак рівності має місце лише в тому випадку, якщо дані вектори співнаправлені, або якщо хоча б один з них є нуль-вектором.

Теорема 2. Для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Знак рівності має місце у випадку, якщо дані вектори протилежно напрямлені або хоча б один із векторів рівний нуль-вектору.

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ називається вектор $\vec{m} = \lambda \cdot \vec{a}$, який задовольняє такі умови:

1. $|\vec{m}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
2. $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $\lambda > 0$ і $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\lambda < 0$
3. $\vec{m} = \vec{0}$, якщо $\lambda = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$

Властивості операції множення вектора на число

1. Асоціативна властивість, для довільного $\vec{a}$ і будь-яких довільних чисел

$$\lambda, \beta : \lambda \cdot (\beta \vec{a}) = (\lambda \cdot \beta) \cdot \vec{a}$$

2. Дистрибутивна відносно додавання чисел:

$$(\lambda + \beta) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + \beta \vec{a}$$

3. Дистрибутивна відносно додавання векторів:

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **колінеарними** $\vec{a} \parallel \vec{b}$, якщо відповідні їм напрямлені відрізки паралельні або лежать на одній прямій.

Ознака колінеарності двох векторів

Лема. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує деяке число λ таке, що $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, тобто

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda : \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (2)$$

Ортом називається будь-який вектор одиничної довжини. Позначається одиничний вектор (орт) $\vec{e}$. **Ортом вектора** $\vec{a}$ називається вектор одиничної довжини і співнаправлений з вектором $\vec{a}$.

Будь-який вектор $\vec{a}$ виражається через його орт:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}. \quad (3)$$

Три ненульові вектори називаються **компланарними**, якщо відповідні їм напрямлені відрізки паралельні одній площині або лежать в одній площині.

Розклад вектора за двома неколінеарними векторами

Теорема 3. Якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарні вектори, а вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - не

колінеарні, то існують єдині числа λ і β такі, що $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{v}$.

Іншими словами: вектор $\vec{c}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{v}$ і до того ж єдиним способом.

Розклад вектора за трьома некопланарними векторами

Теорема 4. Якщо $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{c}$ не компланарні, то для будь-якого вектора $\vec{d}$ існують, і до того ж, єдині числа λ, β, γ такі, що $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{c}$

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ називається **лінійно залежною**, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Якщо ж ця рівність виконується, лише тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то дана система векторів називається **лінійно незалежною**.

Вираз

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n \quad (4)$$

називається **лінійною комбінацією векторів** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ з відповідними коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Властивості лінійної залежності векторів

1. Система векторів лінійно залежна тоді і лише тоді, коли хоча б один з векторів є лінійною комбінацією інших векторів цієї системи.
2. Якщо підсистема даної системи векторів лінійно залежна, то і вся система векторів лінійно залежна.
3. Якщо система векторів лінійно незалежна, то будь-яка її підсистема лінійно незалежна.
4. Будь-яка система векторів, що містить нуль-вектор, лінійно залежна.

Теорема 5. Два вектори лінійно залежні тоді і лише тоді, коли вони колінеарні.

Теорема 6. Система трьох векторів $\vec{a}, \vec{v}, \vec{c}$ лінійно залежна тоді і лише тоді, коли ці вектори компланарні.

Теорема 7. Будь-які чотири вектори тривимірного простору лінійно залежні.

Векторним простором називається непорожня множина вільних векторів із введеними на ній операціями додавання векторів, множення вектора на число, що задовольняють такі властивості:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$$

$$\exists \vec{0} : \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$$

$$\forall \vec{a} \exists (-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0};$$

$$\forall \vec{a} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a};$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall \vec{a} : \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a};$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall \vec{a} : (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a};$$

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} : \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}.$$

Позначимо його $\mathbf{V}_3$.

Базисом векторного простору називається впорядкована сукупність векторів, що задовольняють умови:

- а) ця система векторів лінійно незалежна;
- б) будь-який інший вектор із даного векторного простору є лінійною комбінацією даної системи векторів.

Іншими словами, базисом векторного простору називається максимальна система лінійно незалежних векторів даного векторного простору.

Для векторного простору $\mathbf{V}_3$ базис утворюють впорядковані трійки некомпланарних векторів, що виходять з однієї точки.

Базисом тривимірного простору називається впорядкована трійка не колінеарних векторів, що виходять з однієї точки. Будь-який вектор простору є лінійною комбінацією базисних векторів. Коефіцієнти розкладу

вектора за базисними векторами називаються **координатами вектора в даному базисі**.

Нехай $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ – базис простору, $\vec{a}$ – довільний вектор цього простору. Тоді, якщо

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad (5)$$

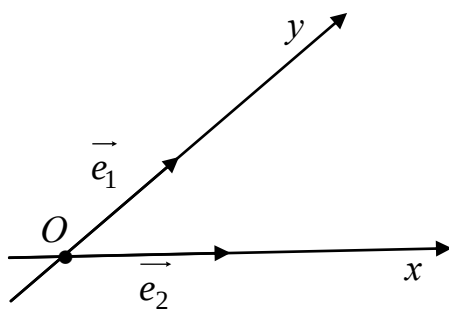
то x, y, z – координати вектора $\vec{a}$, тобто $\vec{a}(x;y;z)$.

Ортонормованим базисом простору називається такий, у якому всі базисні вектори одиничні і взаємно перпендикулярні. Позначають їх: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

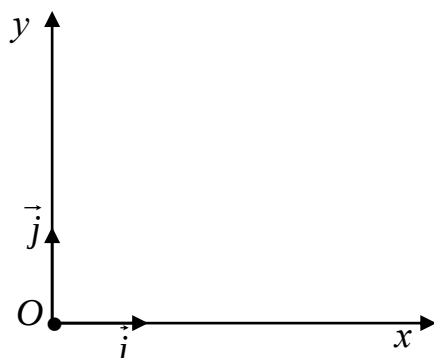
Координатами вектора в ортонормованому базисі є довжини (враховуючи знак) ортогональних проекцій відповідного напрямленого відрізка на напрямки базисних векторів, що виходять з однієї точки.

Якщо вектор $\vec{a}$, заданий на площині в базисі $B=(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ і має координати $(x;y)$, то його можна подати у вигляді $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

Якщо з деякої точки O площини побудувати базисні вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ і через неї провести відповідно дві осі, що визначаються цими векторами, то



отримаємо систему координат, яку позначають Ox або $O\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Точка O – початок системи координат, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – базисні або координатні вектори, осі Ox, Oy – координатні осі. Якщо базис ортонормований, то система координат називається прямокутною декартовою.



Аналогічно в просторі, побудувавши з деякої фіксованої точки O впорядковану трійку базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і провівши через неї три осі, що визначаються цими векторами, отримаємо систему координат в

просторі, яку позначають $Oxyz$ або $O\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, координатні осі якої Ox, Oy, Oz . Якщо базис ортонормований, тобто його вектори одиничної довжини і взаємноперпендикулярні, то їх позначають $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і вони визначають відповідну декартову систему координат в просторі.

Якщо M – довільна точка площини, то її координатами є координати її радіус-вектора $\vec{OM}$, де O – початок координат. Тобто, якщо $\vec{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$, то точка M має координати (x, y) у базисі $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Аналогічно у просторі: якщо $\vec{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$, то точка M має координати (x, y, z) у базисі $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Якщо вектор $\vec{a} = \vec{AB}$, де $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \quad (6)$$

тобто координати вектора обчислюємо, віднявши від координат його кінця відповідні координати початку.

Якщо вектор $\vec{a}(x; y; z)$ заданий координатами в ортонормованому базисі, то його довжину обчислюємо за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7)$$

Ознака рівності векторів

Теорема 8. Для того, щоб два вектори були рівні необхідно і достатньо, щоб були рівними їх відповідні координати.

Теорема 9. Координати лінійної комбінації векторів рівні лінійній комбінації відповідних координат.

Наслідки:

- координати суми векторів рівні сумі відповідних координат;
- координати різниці векторів рівні різниці відповідних координат;
- координати добутку вектора на число рівні добутку цього числа на відповідні координати.

Необхідна і достатня умови колінеарності та компланарності векторів

Теорема 10. Для того, щоб два вектори були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб їх відповідні координати були пропорційні.

Теорема 11. Для того, щоб три вектори $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{a}_3(x_3; y_3; z_3)$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Проекцією точки A в напрямку площини α **на пряму u** називається точка A' перетину прямої з площиною, проведеною через точку A паралельно площині α .

Проекцією вектора $\vec{AB}$ (вектор-проекцією) **на пряму u** називається вектор $\vec{A'B'}$, початком якого є проекція початку вектора, а кінцем – проекція кінця. Здебільшого цей вектор називається **компонентою вектора $\vec{AB}$ на пряму**.

Проекцією вектора $\vec{AB}$ на вісь $\vec{u}$ називається **число**, абсолютна величина якого дорівнює довжині компоненти цього вектора на відповідну пряму; це число додатне, якщо компонента співнаправлена з віссю і від'ємне, якщо компонента протилежно напрямлена з віссю.

Проекцією вектора $\vec{AB}$ на площину α , в напрямку прямої називається **вектор**, початком якого є проекція початку вектора, а кінцем – проекція кінця.

Зв'язок понять «проекція вектора на вісь» і «координати вектора»

Теорема 12. Проекція вектора на координатну вісь (ox , oy чи oz) рівна координаті цього вектора відносно цієї осі. Проектування на вісь

здійснюється в напрямку координатної площини, що визначається двома іншими координатними осями.

Тобто, якщо $\vec{a}(x; y; z)$, то

$$x = \text{Pr}_{ox}^- \vec{a}, \quad y = \text{Pr}_{oy}^- \vec{a}, \quad z = \text{Pr}_{oz}^- \vec{a} \quad (9)$$

Теорема 13. Проекція лінійної комбінації векторів на вісь рівна тій же лінійній комбінації проекцій на ту ж вісь:

$$\text{Pr}_u^-(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n) = \alpha_1 \text{Pr}_u^- \vec{a}_1 + \alpha_2 \text{Pr}_u^- \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \text{Pr}_u^- \vec{a}_n \quad (10)$$

Наслідки:

1. Проекція суми векторів на вісь рівна сумі проекцій цих векторів на вісь:

$$\text{Pr}_u^-(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = \text{Pr}_u^- \vec{a}_1 + \text{Pr}_u^- \vec{a}_2 + \dots + \text{Pr}_u^- \vec{a}_n \quad (11)$$

2. Проекція на вісь добутку числа на вектор рівна добутку цього числа на проекцію вектора на вісь:

$$\text{Pr}_u^- \lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \text{Pr}_u^- \vec{a} \quad (12)$$

Теорема 14. Ортогональна проекція вектора на вісь рівна довжині вектора, помноженій на косинус кута між вектором і віссю:

$$\text{Pr}_u^- \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{u}) \quad (13)$$

Враховуючи теорему 1.12 і формули (1.12) для довільного вектора $\vec{a}(x; y; z)$ запишемо, що $x = |\vec{a}| \cos \alpha$, $y = |\vec{a}| \cos \beta$, $z = |\vec{a}| \cos \gamma$. Звідси

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \quad (14)$$

За цими формулами обчислюємо **напрямні косинуси** вектора.

Зауваження. Будь-який орт в ортонормованому базисі має координати:

$x = \cos \alpha$, $y = \cos \beta$, $z = \cos \gamma$, тобто

$$\vec{e}(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma) \quad (15)$$

Так як $|\vec{e}| = 1$, то

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (16)$$

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.

Якщо вектори задані в прямокутній декартовій системі координат, то означення скалярного добутку можна сформулювати ще й так: **скалярним добутком** двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжини одного з векторів на проекцію другого вектора в напрямку першого.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. Комутативна: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. Асоціативна: $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. Дистрибутивна: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Геометричні властивості скалярного добутку

1. Скалярний добуток двох векторів рівний нулю тоді і лише тоді, коли вектори перпендикулярні:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad (17)$$

2. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \quad (18)$$

3. Кут між векторами знаходимо з означення скалярного добутку:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (19)$$

Обчислення скалярного добутку

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (20)$$

або

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{Пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \text{Пр}_b \vec{a} \quad (21)$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані координатами відносно ортонормованого базису $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, то:

- скалярний добуток векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (22)$$

- кут між двома векторами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (23)$$

Необхідна і достатня умови перпендикулярності двох векторів:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ або } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (24)$$

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор, довжина якого дорівнює добутку довжин перемножуваних векторів на синус кута між ними; він перпендикулярний до площини перемножуваних векторів; множене, множник і векторний добуток утворюють правий репер.

Позначається векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$. Отже, $\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}]$:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$
2. $|\vec{c}| \perp$ площині $(\vec{a}, \vec{b})$
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правий базис

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють **правий базис** або (додатно орієнтований), якщо рух від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ по меншому куту відбувається проти руху годинникової стрілки, дивлячись з кінця третього вектора $\vec{c}$ (правило правої руки). В протилежному випадку (рух відбувається за рухом годинникової стрілки) – **лівий** (від'ємно орієнтований) **репер**.

Геометричні властивості векторного добутку

1. Довжина вектора векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на перемножуваних векторах.

$$S_{\text{паралелограма}} = \text{mod}[\vec{a} \cdot \vec{b}] \quad (25)$$

2. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли вектори колінеарні:

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \quad (26)$$

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. Антикомутативна: $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = -[\vec{b} \cdot \vec{a}]$.
2. Асоціативна: $[(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b}] = \alpha [\vec{a} \cdot \vec{b}]$.
3. Дистрибутивна: $[\vec{a}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n)] = [\vec{a} \cdot \vec{a}_1] + [\vec{a} \cdot \vec{a}_2] + \dots + [\vec{a} \cdot \vec{a}_n]$

Векторний добуток двох векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ у координатах відносно ортонормованого базису:

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (27)$$

або
$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

тобто вектор $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ має координати

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \quad (28)$$

Зауважимо, що цей вектор $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ перпендикулярний до площини перемножуваних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Цей факт часто є корисним при розв'язанні задач.

Необхідна і достатня умова **колінеарності** двох векторів (через векторний добуток):

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad (29)$$

Мішаним добутком трьох векторів називається число, що дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій.

Позначається

$$\mu = [\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c} \quad \text{або} \quad \mu = (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \quad (30)$$

Властивості мішаного добутку

1. При циклічній перестановці векторів їх мішаний добуток не змінюється :

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b})$$

2. При перестановці двох сусідніх векторів мішаний добуток змінює знак

$$\text{на протилежний: } (\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{b}\vec{c}), (\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{a}\vec{b}\vec{c}), (\vec{c}\vec{b}\vec{a}) = -(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

Теорема 15. (геометричний зміст мішаного добутку): Абсолютна величина мішаного добутку трьох векторів чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах:

$$\text{mod}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = V_{\text{паралелепіпед}}, \quad (31)$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) > 0, \text{ якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правий репер.}$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) < 0, \text{ якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — лівий репер.}$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0, \text{ якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — компланарні.}$$

Мішаний добуток в координатах відносно ортонормованого базису

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}; \quad (32)$$

Умова компланарності трьох векторів:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = 0 \quad (33)$$

або в координатах відносно ортонормованого базису

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$