

پاسخنامه فیزیک

مکانیک کوانتومی پیشرفته

۱- گزینه ۲۰ می‌دانیم که عملگرهای $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ بصورت زیر هستند:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \quad (1)$$

که $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ماتریس‌های پاولی هستند. برای سادگی محاسبات، در طول محاسبه از ضریب $\frac{\hbar}{2}$ صرف‌نظر کرده و از ویژه‌مقادیر ± 1 برای ویژه حالات کوانتومی استفاده می‌کنیم. حال ابتدا $|S_y, +\rangle$ را می‌یابیم.

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \lambda I \right) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad (2)$$

که در (۲)، همان ماتریس $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ می‌باشد. برای بدست آوردن $|S_y, +\rangle$ کافی است ویژه‌بردار مربوط به $\lambda = +1$ را پیدا کنیم. بدین منظور فرض

کنید این ویژه‌بردار متناسب با بردار $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & -i \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

$$-a - ib = 0 \Rightarrow a + ib = 0 \quad (4)$$

رابطه (۴) نتیجه زیر را خواهد داد:

توجه کنید که بی‌نهایت دوتایی (a, b) در (۵) صدق خواهند کرد. بدین منظور قرار می‌دهیم $a = 1$ و آنگاه $b = i$. پس $|S_y, +\rangle \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ که با

$$|S_y, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (6)$$

به‌نجار کردن بردار حاصله داریم:

حال به سراغ S_n می‌رویم. طبق تعریف سوال $S_n = \hat{S}_n \cdot \hat{n}$ که $\hat{n}$ بردار یکه در جهت مشخص شده در شکل صورت سؤال است. در حالت کلی فرض

$$\hat{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \quad (7)$$

کنید:

$$S_n = n_x S_x + n_y S_y + n_z S_z = \sin\theta \cos\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \sin\phi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

حال ویژه‌مقادیر S_n را بدست می‌آوریم:

$$\det(S_n - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

پس:

$$-(\cos\theta + \lambda)(\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta = 0 \Rightarrow -\cos^2\theta + \lambda^2 - \sin^2\theta = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad (11)$$

برای بدست آوردن $|S_n, +\rangle$ کافی است ویژه‌بردار $\lambda = +1$ را بدست آوریم.

مشابه قبل فرض کنید این ویژه بردار $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه:

(۱۲)

پس:

(۱۳)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \cos\theta)a = be^{-i\phi}\sin\theta$$

حال در (۱۳) می نویسیم $\sin\theta = r\sin\frac{\theta}{r}\cos\frac{\theta}{r}$, $1 - \cos\theta = r\sin^2\frac{\theta}{r}$ پس:

(۱۴)

$$r\sin^2\frac{\theta}{r}a = rbe^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{r}\cos\frac{\theta}{r} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{r}a = be^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{r}$$

حال انتخاب می کنیم $b = \sin\frac{\theta}{r}$, $a = e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{r}$ (ضریب a به عنوان پاسخ b و بالعکس) پس:

(۱۵)

$$|S_{\alpha,+}\rangle \propto \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{r} \\ \sin\frac{\theta}{r} \end{pmatrix}$$

دیده می شود که (۱۵) خود به خود باز بهنجار هم شده است. حال برای بدست آوردن احتمال مورد نظر کافی است اندازه $\langle S_{\alpha,+} | S_{\beta,+} | S_{\alpha,+} \rangle$ را محاسبه کنیم:

(۱۶)

$$\langle S_{\alpha,+} | S_{\beta,+} \rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{r}, \sin\frac{\theta}{r} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{r} + i\sin\frac{\theta}{r} \right)$$

پس:

$$|\langle S_{\alpha,+} | S_{\beta,+} \rangle|^2 = \frac{1}{r} \left(e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{r} - i\sin\frac{\theta}{r} \right) \left(e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{r} + i\sin\frac{\theta}{r} \right)$$

(۱۷)

$$= \frac{1}{r} \left[\cos^2\frac{\theta}{r} + \sin^2\frac{\theta}{r} + i\sin\frac{\theta}{r}\cos\frac{\theta}{r}(-e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \right] = \frac{1}{r}(1 + \sin\theta\sin\phi)$$

حال کافی است قرار دهیم $\theta = 30^\circ$, $\phi = 60^\circ$ ، آنگاه داریم:

(۱۸)

$$\frac{1}{r} \left(1 + \frac{\sqrt{r}}{4} \right)$$

نکته: بهتر است قبل از عددگذاری، از ابتدا برحسب θ, ϕ حل کنید. چرا که هم احتمال اشتباه کمتر است و هم استفاده از اتحادهای لازم مثلثاتی در مواقع لازم روشن تر خواهد بود.

۲- گزینه «۴» تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم.

بررسی گزینه (۱): این گزینه را می توان به کمک اتحاد زیر ثابت کرد:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (۱)$$

حال قرار می دهیم $\hat{A} = -i\hat{p}\frac{a}{\hbar}$, $\hat{B} = f(\hat{x})$ پس:

$$e^{\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}} f(\hat{x}) e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} = f(\hat{x}) + \left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, f(\hat{x}) \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, \left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, f(\hat{x}) \right] \right] + \dots \quad (۲)$$

حال توجه کنید که اگر $f(\hat{x})$ یک تابع از عملگر مکان باشد، آنگاه رابطه زیر را داریم:

$$[f(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar \frac{df(\hat{x})}{d\hat{x}}$$

(۳)

$$\left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, f(\hat{x}) \right] = \frac{-ia}{\hbar} [\hat{p}, f(\hat{x})] = \frac{ia}{\hbar} [f(\hat{x}), \hat{p}] = -a \frac{df}{d\hat{x}}(x)$$

پس:

(۴)

برای محاسبه $\left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, \left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, f(\hat{x}) \right] \right]$ کافی است سمت راست (۴) را به جای $f(\hat{x})$ در سمت چپ (۴) قرار دهید و آنگاه:

$$\left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, \left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, f(\hat{x}) \right] \right] = \left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, -a \frac{df}{d\hat{x}} \right] = -a \frac{d}{dx} \left(-a \frac{df}{dx} \right) = a^2 \frac{d^2 f}{dx^2}$$

به همین ترتیب با کمی دقت برای سایر جملات در حالت کلی داریم:

$$\left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, \left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, \left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, \left[\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}, f(\hat{x}) \right] \right] \right] \dots \right] = (-1)^n a^n \frac{d^n f}{dx^n}$$

(۶)

$$e^{\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}} f(\hat{x}) e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} = f(\hat{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a^n \frac{d^n f}{dx^n} = f(\hat{x} - a)$$

پس:

(۷)

$$\text{Tr}(|x'\rangle\langle P'|) = \int dx \langle x | x' \rangle \langle P' | x \rangle$$

که در آخر از بسط تیلور استفاده کردیم.

بررسی گزینه (۲) (۸)

از طرفی

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x'); \langle P' | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i \frac{P'x}{\hbar}}$$

(۹)

با گذاشتن (۹) در (۸) خواهیم داشت:

$$\text{Tr}(|x'\rangle\langle P'|) = \int dx \delta(x - x') \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i \frac{P'x}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i \frac{P'x'}{\hbar}}$$

(۱۰)

بررسی گزینه (۳): عملگر $\hat{X}$ را روی $e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} |x'\rangle$ اثر دهید:

$$\hat{X} e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} |x'\rangle = \left([\hat{X}, e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}}] + e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} \hat{X} \right) |x'\rangle$$

(۱۱)

حال در حالت کلی داریم:

$$[\hat{X}, f(\hat{p})] = i\hbar \frac{df}{dP}(\hat{p}) \Rightarrow [\hat{X}, e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}}] = -ae^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}}$$

(۱۲)

از طرفی: (۱۳)

$$\hat{X} |x'\rangle = x' |x'\rangle$$

پس:

$$(۱۱) = (-ae^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} + e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} x') |x'\rangle = (x' - a) e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} |x'\rangle$$

(۱۴)

پس $e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} |x\rangle$ ویژه حالت $\hat{X}$ با ویژه مقدار $x' - a$ است. پس باید با $|x' - a\rangle$ متناسب باشد. برای به دست آوردن ضریب تناسب به طریق زیر عمل کنیم:

$$e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} |x\rangle = \alpha |x' - a\rangle \Rightarrow \langle x'' | e^{\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}} e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} |x\rangle = \alpha \alpha^* \delta(x' - x'')$$

پس:

$$\delta(x' - x'') = \alpha \alpha^* \delta(x' - x'') \Rightarrow \alpha \alpha^* = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1$$

که α را چون یک فاز است می توان یک فرض کرد و راه دیگر به طریق زیر است:

(۱۵)

$$\text{از طرفی } \hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \text{ پس:}$$

$$e^{\frac{i\hat{P}a}{\hbar}} |x\rangle = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hat{P}a}{\hbar}\right)^n |x\rangle$$

(۱۶)

$$e^{\frac{i\hat{P}a}{\hbar}} |x\rangle = \sum_n \frac{1}{n!} a^n (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} |x\rangle = |x' - a\rangle$$

که در (۱۶) از بسط تیلور استفاده شده است.

بررسی گزینه (۴)

$$\text{Tr}(\hat{X}\hat{P}) = \text{Tr}([\hat{X}, \hat{P}] + \hat{P}\hat{X}) = \text{Tr}(\hat{P}\hat{X}) + i\hbar \text{Tr}(1) \quad (۱۷)$$

اما $\text{Tr}(1) \neq 0$ همان عملگر همانی است. پس $\text{Tr}(\hat{X}\hat{P}) \neq \text{Tr}(\hat{P}\hat{X})$

این مساله از اینجا ناشی می شود که $\hat{P}, \hat{X}$ عملگرهایی با بعد نامتناهی هستند و در بعد متناهی همواره داریم: (۱۸)

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

۳- گزینه «۱» دو ترکیب متقارن و پاد متقارن از حالت های طبیعی این مولکول به قرار زیر هستند:

(۱)

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle)$$

(۲)

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle)$$

به وضوح چنانچه در (۱) تعویض $R \leftrightarrow L$ را انجام دهیم، $|S\rangle$ به $|S\rangle$ رفته و همین عمل در (۲)، $|A\rangle$ را به $-|A\rangle$ خواهد برد. حال می توان $|R\rangle$ و $|L\rangle$ را بر حسب $|A\rangle$ و $|S\rangle$ بصورت زیر نوشت:

(۳)

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle + |A\rangle)$$

(۴)

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle - |A\rangle)$$

طبق فرض سؤال در لحظه $t=0$ این مولکول در حالت راستگرد $|R\rangle$ قرار دارد. برای اینکه حالت این مولکول را در زمان های بعد به دست آوریم، کافی است عملگر e^{-iHt} را روی حالت اولیه آن اثر دهیم:

(۵)

$$|R, t\rangle = e^{-iHt} |R, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{-iE_S t}{\hbar}} |S\rangle + e^{\frac{-iE_A t}{\hbar}} |A\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-iE_S t}{\hbar}} \left(|S\rangle + e^{\frac{-i(E_A - E_S)t}{\hbar}} |A\rangle \right)$$

می خواهیم در یک لحظه مشخص برای اولین بار حالت ما به حالت چپگرد تبدیل شود. پس باید $-1 = e^{\frac{-i(E_A - E_S)t}{\hbar}}$ که مستلزم آن است که

$$\frac{(E_A - E_S)t}{\hbar} = (2n+1)\pi \quad \text{و در آن } n \text{ عضوی از اعداد صحیح نامنفی است برای محاسبه زمان اولین بار کافی است قرار دهیم } n=0. \text{ پس:}$$

$$t = \frac{\pi\hbar}{E_A - E_S} = \frac{h}{2(E_A - E_S)} \quad (۶)$$

بر حسب eVs، ثابت پلانک خواهد بود:

(۷)

$$h = 4/13 \times 10^{-15} \text{ eVs}$$

پس:

$$t = \frac{4/13 \times 10^{-15} \text{ eVs}}{2(10^{-2} \text{ eV})} = 2/07 \times 10^{-11} \text{ (s)}$$

(۸)

۳- گزینه مورد نظر ما یک خواهد بود.

در حالت کلی برای بدست آوردن $\hat{x}(t)$ می توان از رابطه $\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, H]$ استفاده کرد. اما در اینجا راحت تر است که از معادلات

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H]$$

در گزینه ۳۰ در حالت کلی برای بدست آوردن $\hat{x}(t)$ می توان از رابطه $\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, H]$ استفاده کرد. اما در اینجا راحت تر است که از معادلات حرکت هایزنبرگ برای $\hat{p}$ ، $\hat{x}$ استفاده کنیم:

(۱)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[x, \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 \right] = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m} \right] = \frac{1}{i\hbar} \left(\left[\hat{x}, \hat{p} \right] \frac{\hat{p}}{m} + \frac{\hat{p}}{m} \left[\hat{x}, \hat{p} \right] \right) = \frac{\hat{p}}{m}$$

(۲)

حال قرار می دهیم $A = X$, $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$ و داریم
توجه کنیم که در زمان t هم همچنان $[\hat{x}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$ برقرار است این موضوع با استفاده از
نوشتن $[\hat{X}, \hat{P}] = \hat{X}(t)\hat{P}(t) - \hat{P}(t)\hat{X}(t)$ به سادگی قابل اثبات است. هم چنین در به
 $\hat{p}(t) = e^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} \hat{p}(x) e^{-\frac{i\hbar t}{\hbar}}$, $\hat{x}(t) = e^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} \hat{x}(x) e^{-\frac{i\hbar t}{\hbar}}$

دست آوردن (۲) از رابطه زیر استفاده شده است

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-a + a^\dagger), \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$

حال چنانچه بنویسیم:

که $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ عملگرهای وابسته به زمان هستند خواهیم داشت:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{\hat{p}}{m} \Rightarrow i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}(-a(t) + a^\dagger(t)) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\frac{da}{dt} + \frac{da^\dagger}{dt} \right)$$

(۳)

که بدست می آید:

$$\frac{da}{dt} = -i\omega a(t); \frac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger$$

(۴)

از (۴) خواهیم داشت:

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t}; a^\dagger(t) = a^\dagger(0)e^{i\omega t}$$

(۵)

$$x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a(0)e^{-i\omega t} + a^\dagger(0)e^{i\omega t})$$

پس:

$$\langle n | x(t)x(0) | n \rangle = \langle n | (a(0)e^{-i\omega t} + a^\dagger(0)e^{i\omega t})(a(0) + a^\dagger(0)) | n \rangle \times \frac{\hbar}{2m\omega}$$

(۶)

$$= \langle n | (a(0)a^\dagger(0)e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}a^\dagger(0)a(0)) | n \rangle \frac{\hbar}{2m\omega}$$

از طرفی:

$$a^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle; a | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle$$

(۷)

پس:

$$(\epsilon) = \langle n | ((n+1)e^{-i\omega t} + ne^{i\omega t}) | n \rangle \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\hbar}{2m\omega} (n(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + e^{-i\omega t})$$

(۸)

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (2n \cos \omega t + \cos \omega t - i \sin \omega t) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \cos \omega t - \frac{1}{2} i \sin \omega t \right)$$

۵۰. گزینه ۴۰ در حالت کلی رابطه زیر بین کت دوران یافته و دوران نیافته برقرار است.

$$|\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle$$

که $D(R)$ به بعد فضای کت مورد بررسی بستگی دارد. یک دوران بی نهایت کوچک به اندازه $d\phi$ حول محور $\hat{n}$ بصورت زیر نمایش داده می شود.

$$D(\hat{n}, d\phi) = 1 - i \left(\frac{\mathbf{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} \right) d\phi$$

که $\mathbf{J}$ مولد دوران که همان عملگر تکانه زاویه ای می باشد. نام دارد. در مثال ما $\hat{n} = \hat{j}$ و $\vec{S} \rightarrow \mathbf{J}$ بنابراین:

$$D(\hat{j}, \phi) = e^{-\frac{iS_y\phi}{\hbar}}$$

قرار دهید $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ و آنگاه (۳) برابر خواهد بود با:

$$D(\hat{j}, \phi) = e^{-\frac{i\sigma_y\phi}{2}}$$

(۴)
از طرفی:

$$\sigma_y^r = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_y^{rn} = I$$

$$\sigma_y^{rn+1} = \sigma_y^{rn} \sigma_y = \sigma_y$$

بنابراین:

$$e^{-\frac{i\sigma_y\phi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\sigma_y\phi}{2} \right)^{rn} \times \frac{1}{(rn)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\sigma_y\phi}{2} \right)^{rn+1} \frac{1}{(rn+1)!}$$

(۵)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\phi}{2}\right)^{rn}}{(rn)!} + i\sigma_y \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\phi}{2}\right)^{rn+1}}{rn+1}$$

$$= \cos \frac{\phi}{2} - i\sigma_y \sin \frac{\phi}{2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

از طرفی:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(۶)

$$|\alpha\rangle_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

پس با قرار دادن $\phi = 30^\circ$ خواهیم داشت:

(۷)

$$|\alpha\rangle_R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 15^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 15^\circ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 15^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 15^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ \cos 15^\circ - \sin 45^\circ \sin 15^\circ \\ \cos 15^\circ \sin 15^\circ + \sin 45^\circ \cos 15^\circ \end{pmatrix}$$

حال در ادامه داریم:

$$= \begin{pmatrix} \cos(45^\circ + 15^\circ) \\ \sin(45^\circ + 15^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|+\rangle + \sqrt{3}|-\rangle)$$

(۸)

ع. گزینه «۲» مجموع تکانه‌های زاویه‌ای ممکن برای این دستگاه در رابطه $\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} \leq j_1 + j_2 \leq 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ صدق می‌کنند. برای بدست آوردن j_- می‌خواهیم از حالت $|j_1, j_2, j, m\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\rangle$ شروع می‌کنیم. سپس کافی است عملگر J_- را روی این حالت دو بار اثر داده تا بتوانیم $|j_1, j_2, j, m\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\rangle$ را بدست آوریم. J_- را بر حسب ترکیب خطی ضرب تانسوری حالات $|j_1, m_1\rangle, |j_2, m_2\rangle$ بسط می‌دهیم.

$$J_- = J_{1-} + J_{2-}$$

$$J = J_1 + J_2 \Rightarrow J_z = J_{1z} + J_{2z}$$

(۱) همچنین دقت کنیم:

که J_- صرفاً روی حالت‌های $|j_1, m_1\rangle$ و J_{2-} صرفاً روی $|j_2, m_2\rangle$ اثر می‌کند. همچنین:

(۲) می‌خواهیم از حالت $|j_1, j_2, j, m\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\rangle$ شروع کنیم. پس باید تکانه زاویه‌ای در راستای J ذره (۱) و (۲) هر دو در جهت مثبت z بوده و بیشترین مقدار خود را داشته باشند. پس می‌نویسیم:

$$J_- |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |j_1, j_2, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\rangle = |j_1, 2\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle$$

(۳) $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ در طرفین (۳) خواهیم داشت:

$$J_- |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = J_{1-} |j_1, 2\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle + J_{2-} |j_1, 2\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle$$

$$J_- |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{5}{2}(\frac{5}{2}-1)} |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle = \sqrt{7} |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle$$

$$J_{1-} |j_1, 2\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle = \sqrt{2(2+1) - 2(2-1)} |2, 1\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle = 2 |2, 1\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle$$

از طرفی $j_1 = 2$ پس:

$$J_{2-} |j_1, 2\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{5}{2}(\frac{5}{2}-1)} |2, 2\rangle |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{3} |2, 2\rangle |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

همچنین $j_2 = \frac{3}{2}$ پس:

$$J_{1-} |j_1, 2\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle = \sqrt{2(2+1) - 2(2-1)} |2, 1\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle = 2 |2, 1\rangle |j_2, \frac{5}{2}\rangle$$

طبق (۴)، (۵) باید برابر مجموع (۶) و (۷) باشد، از این برابری بدست می‌آید:

$$|\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle = \frac{2}{\sqrt{7}} |2, 1\rangle |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} |2, 2\rangle |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

حال بار دیگر $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ را به طرفین (۸) اثر می‌دهیم.

$$J_- |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{5}{2}(\frac{5}{2}-1)} |\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\rangle = \sqrt{\frac{24}{4} + 6} |\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\rangle = 2\sqrt{3} |\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\rangle$$

ابتدا J_- را روی $|2, 1\rangle |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle$ اثر می‌دهیم.

$$J_{1-} |2, 1\rangle |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle = J_{1-} |2, 1\rangle |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle + J_{2-} |2, 1\rangle |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle$$

اما:

$$J_{1-} |2, 1\rangle |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle = \sqrt{2(2+1) - 1(1-1)} |2, 0\rangle |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle = \sqrt{6} |2, 0\rangle |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle$$

$$J_{2-} |2, 1\rangle |\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{5}{2}(\frac{5}{2}-1)} |2, 1\rangle |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{3} |2, 1\rangle |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$$

حال J_z را روی $\left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle$ اثر می دهیم.

$$J_z \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle = J_{z+} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle + J_{z-} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle \quad (13)$$

همچنین:

$$J_{z+} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle = \sqrt{r(r+1) - r(r-1)} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle = r \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle$$

$$J_{z-} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle = \sqrt{\frac{r}{r}(\frac{r}{r}+1) - \frac{1}{r}(\frac{1}{r}-1)} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle = \sqrt{r} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle \quad (14)$$

پس از (۸) و (۹) و (۱۱) و (۱۲) و (۱۳) داریم:

$$r\sqrt{r} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{r}} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle + \frac{r}{\sqrt{r}} \sqrt{r} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle + r\sqrt{\frac{r}{r}} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle + r\sqrt{\frac{r}{r}} \left| \frac{r}{r}, -\frac{1}{r} \right\rangle \quad (15)$$

با ساده سازی (۱۵) بدست می آید:

$$\left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle = \sqrt{\frac{r}{r}} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle + \sqrt{\frac{r}{r}} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle + \sqrt{\frac{r}{r}} \left| \frac{r}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle + \sqrt{\frac{r}{r}} \left| \frac{r}{r}, -\frac{1}{r} \right\rangle$$

۷- گزینه «۳» مؤلفه های گروه $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ یک عملگر برداری (تانسور رتبه یک) بر حسب مؤلفه های دستگاه دکارتی بصورت زیر مشخص می شوند:

$$\hat{A}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{A}_x \pm i\hat{A}_y), \hat{A}_0 = \hat{A}_z \quad (1)$$

حال داریم:

$$\hat{A}_{-1}\hat{B}_{+1} = -\frac{1}{2}(\hat{A}_x - i\hat{A}_y)(\hat{B}_x + i\hat{B}_y) = -\frac{1}{2}(\hat{A}_x\hat{B}_x + i\hat{A}_x\hat{B}_y - i\hat{A}_y\hat{B}_x + \hat{A}_y\hat{B}_y)$$

$$\hat{A}_{+1}\hat{B}_{-1} = -\frac{1}{2}(\hat{A}_x + i\hat{A}_y)(\hat{B}_x - i\hat{B}_y) = -\frac{1}{2}(\hat{A}_x\hat{B}_x - i\hat{A}_x\hat{B}_y + i\hat{A}_y\hat{B}_x + \hat{A}_y\hat{B}_y) \quad (2)$$

$$\hat{A}_0\hat{B}_0 = \hat{A}_z\hat{B}_z$$

حال:

$$(-1)\hat{A}_{-1}\hat{B}_{+1} + (-1)\hat{A}_{+1}\hat{B}_{-1} + (-1)^0\hat{A}_0\hat{B}_0 = \frac{1}{2}(r\hat{A}_x\hat{B}_x + r\hat{A}_y\hat{B}_y) + \hat{A}_z\hat{B}_z = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (3)$$

پس گزینه صحیح (۳) است.

بررسی سایر گزینه ها:

$$\hat{A}_{+1}\hat{B}_{+1} = \frac{1}{2}(\hat{A}_x + i\hat{A}_y)(\hat{B}_x + i\hat{B}_y) = \frac{1}{2}(\hat{A}_x\hat{B}_x + i\hat{A}_y\hat{B}_x + i\hat{A}_x\hat{B}_y - \hat{A}_y\hat{B}_y)$$

$$\hat{A}_{-1}\hat{B}_{-1} = \frac{1}{2}(\hat{A}_x - i\hat{A}_y)(\hat{B}_x - i\hat{B}_y) = \frac{1}{2}(\hat{A}_x\hat{B}_x - i\hat{A}_y\hat{B}_x - i\hat{A}_x\hat{B}_y - \hat{A}_y\hat{B}_y)$$

$$\hat{A}_0\hat{B}_0 = A_zB_z \Rightarrow \sum (-1)^q A_q^{(1)} B_q^{(1)} = -\hat{A}_x\hat{B}_x + \hat{A}_y\hat{B}_y + \hat{A}_z\hat{B}_z$$

$$\sum A_q^{(1)} B_q^{(1)} = \hat{A}_x\hat{B}_x + \hat{A}_z\hat{B}_z - \hat{A}_y\hat{B}_y \quad \text{گزینه (۲):} \quad (5)$$

$$\sum_{q=-1}^1 A_q^{(1)} B_{-q}^{(1)} = -\hat{A}_x\hat{B}_x - \hat{A}_y\hat{B}_y + \hat{A}_z\hat{B}_z \quad \text{گزینه (۴):} \quad (6)$$

پس تنها گزینه (۳) درست خواهد بود.

1000

(1)

02/5/2004: 05/05/04

208 (2/15/1914) 1914 1914 1914 1914 1914 1914

000 - 000 - 000

000-1-2

(2)

چون $\bar{X} = \theta \bar{X} \theta^{-1}$ پس همواره برای هر $\bar{X} = \bar{X}^n \theta^{-1}$ پس برای هر تابع دلتا $\delta(\bar{X})$ $\delta(\bar{X}) = \delta(\theta \bar{X} \theta^{-1}) = \delta(\bar{X})$ پس $\delta(\bar{X}) = \delta(\theta \bar{X} \theta^{-1})$

$$(ii) \rightarrow \lambda \left[\delta^T (X) \begin{pmatrix} \hat{P}_1 & \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 & \hat{P}_4 \end{pmatrix} \delta^T (X) \right] = \lambda \left[\delta^T (X) \bar{S} \bar{P} + \bar{S} \bar{P} \delta^T (X) \right]$$

(4)

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x\beta_y - y\beta_x) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta_x\beta_y - \beta_y\beta_x)$$
$$= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{p} \times \mathbf{p}) \cdot \nabla \psi = -\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \psi = -\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})$$

(F)

$$\frac{e^{\gamma}}{\Gamma_0 C^{\gamma}} \rightarrow \frac{e^{\delta}}{\Gamma_0 C^{\delta}}$$
$$= \frac{e^i}{r(\omega^i C)^{1/r}} \frac{1}{r^i} (T(A)^i)^{1/r} \frac{1}{r^i} \frac{1}{r^i} \frac{1}{r^i} = \frac{e^i}{r(\omega^i C)^{1/r}} \frac{1}{r^i} (\bar{L})(-\bar{S}) = \frac{e^i}{r(\omega^i C)^{1/r}} \frac{1}{r^i} \bar{L} \bar{S}$$

(Δ)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = ? \quad (7)$$

در حالت کلی برای تکانه زاویه‌ای $\vec{L}$ داریم:

در حالت کلی برای تکانه زاویه‌ای $\vec{L}$ داریم:

$$\theta j \theta^{-1} = -j$$

(IV)

$$\theta\lambda = \lambda'\theta$$

A7

$$e^{\frac{i}{\hbar} \hat{J} \cdot \hbar \phi} e^{-1} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \hat{J} \cdot \hbar \phi \right)^n e^{-1}$$

2

$$\frac{-i\hbar \nabla \phi}{\hbar} = \frac{-(-i)}{\hbar} (-i) \nabla \phi = 0 \left(\frac{-i}{\hbar} \nabla \phi \right)$$

192

$$\theta \left(\frac{-i}{\hbar} J \cdot \hat{n} \phi \right)^n \theta^{-1} = \left(\frac{-i}{\hbar} J \cdot \hat{n} \phi \right)^n$$

18-3

تالی است (۹) را n بار در خودش ضرب کنید تا به (۱۰) برسید. بنابراین همواره:

$$\theta e^{\frac{-i\hat{J}\hat{n}\phi}{\hbar}} \theta^{-1} = e^{\frac{-i\hat{J}\hat{n}\phi}{\hbar}}$$

(۱۱)
پس (۲) هم ناورداست.

۹- گزینه «۴» تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

۱- این گزینه همان تعریف تقارن یک سیستم است. می گوئیم یک سیستم تحت عملگر $\hat{T}$ تقارن دارد، اگر همواره داشته باشیم $H \text{ و } THT^{-1} = H$ هامیلتونی سیستم است.

۲- یک حالت کوانتومی تحت تأثیر عملگر دوران بصورت $|\psi\rangle_R = e^{\frac{-i\hat{J}\hat{n}\phi}{\hbar}} |\psi\rangle$ تبدیل می شود. همچنین:

$$\sqrt{R\langle\psi|\psi\rangle_R} = \sqrt{\langle\psi| e^{\frac{i\hat{J}\hat{n}\phi}{\hbar}} e^{\frac{-i\hat{J}\hat{n}\phi}{\hbar}} |\psi\rangle} = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} \quad (۱)$$

پس اندازه $|\psi\rangle$ تحت دوران تغییر نخواهد کرد.

۳- در سوال (۲) نشان دادیم $e^{\frac{-ipa}{\hbar}} f(\hat{x}) e^{\frac{+ipa}{\hbar}} = f(\hat{x} - \hat{a})$ و همچنین:

$$|x' - a\rangle = e^{\frac{iPa}{\hbar}} |x'\rangle$$

$$e^{\frac{-iPa}{\hbar}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} (1 - \frac{iPa}{\hbar N})^N$$

(۲)

پس $\hat{P}$ مولد انتقال های بی نهایت کوچک است. روش دیگر آن است که دقت کنیم:

$$\left(\hat{I} + \frac{i\varepsilon}{\hbar} \hat{P}_x \right) \psi(x) = \psi(x) + \left(\frac{i\varepsilon}{\hbar} \right) P_x \psi(x); P_x = \frac{-i\hbar \partial}{\partial x} \Rightarrow \psi(x + \varepsilon) = \left(\hat{I} + \frac{i\varepsilon}{\hbar} \hat{P}_x \right) \psi(x)$$

۴- عملگر پاریته یک عملگر هرمیتی و خطی است. دلیل هرمیتی بودن π همواره داریم:

$$\pi^\dagger \pi = -x$$

(۳)

مورد (۳) خاصیت عملگر پاریته است که از این انتظار که رابطه $\langle \alpha | \pi^\dagger \pi | \alpha \rangle = \langle \alpha | x | \alpha \rangle$ همواره برقرار باشد حاصل می شود. در این رابطه $|\alpha\rangle$ به $|\pi|\alpha\rangle$ تبدیل شده است. یکتائی بودن π از جمله خواص اولیه آن است که انتظار داریم و از یکتائی بودن نتیجه می شود:

$$x\pi = -\pi x$$

(۴)

از طرفی:

$$x\pi |x'\rangle = -\pi x |x'\rangle = -x' | \pi | x'\rangle$$

(۵)

پس: $\pi |x'\rangle = e^{i\delta} | -x'\rangle$ که $e^{i\delta}$ را به صورت قراردادی برابر یک می گیریم ($\delta \in \mathbb{R}$) بنابراین:

$$\pi |x'\rangle = | -x'\rangle \Rightarrow \pi^\dagger |x'\rangle = | -x'\rangle = |x'\rangle$$

(۶)

پس $\pi^\dagger = 1$ و نتیجه آنکه $\pi^\dagger = \pi = \pi^{-1}$ پس π هرمیتی است. خطی بودن نتیجه یکتائی بودن است.

چرا که پاد خطی بودن یک عملگر به معنای پاد یکتائی بودن آن است.

۱۰- گزینه «۱» از نظریه اختلال غیر تبهگن استفاده می کنیم. ابتدا دقت کنید که:

$$H_P = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \hbar\omega\lambda \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(۱)

که $H_0 = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ غیر تبهگن است. ویژه بردارهای H_0 عبارتند از:

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(۲)

برای سادگی محاسبات $\hbar\omega$ را در طول محاسبه وارد نمی‌کنیم و در نهایت آن را به عنوان یک ضریب وارد می‌کنیم. مقادیر انرژی همبستگی غیر مختل شده عبارتند از:

$$\begin{cases} E_1^{(0)} = 1 \\ E_2^{(0)} = 2 \\ E_3^{(0)} = 2 \end{cases}$$

(۳)

حال اختلال مرتبه اول انرژی را محاسبه می‌کنیم. چون $E_2^{(0)}$ بزرگترین ویژه مقدار است، پس تنها اختلال مربوطه $E_2^{(0)}$ محاسبه می‌شود.

$$E_2^{(1)} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\lambda$$

$$E_2^{(2)} = \sum_{m=1,2} \frac{\langle \psi_m | \hat{H}_P | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \hat{H}_P | \psi_m \rangle}{E_2^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

(۴)

از طرفی:

$$\langle \psi_1 | \hat{H}_P | \psi_2 \rangle = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \psi_2 | \hat{H}_P | \psi_2 \rangle = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\lambda$$

(۵)

$$E_2^{(2)} = \frac{4\lambda^2}{2-2} = 4\lambda^2$$

پس:

(۶)

پس بزرگترین ویژه مقدار انرژی تا مرتبه دوم اختلال بصورت زیر است:

$$E_{\max}^{(2)} = \hbar\omega(E_2^{(0)} + E_2^{(1)} + E_2^{(2)}) = \hbar\omega(2 + 2\lambda + 4\lambda^2)$$

(۷)

۱- گزینه «۳» مستلزم دو قطبی متناظری اسپین الکترون با $\vec{S} = \frac{-e}{m_e} \vec{S}$ داده می‌شود. از طرفی $\hat{H} = -\vec{\mu}_S \cdot \vec{B} = \frac{-e}{m_e} \vec{S} \cdot \vec{B}$ قرار می‌دهیم. $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\hat{H} = \frac{e}{2m} \cdot \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \frac{\hbar e}{2m_e} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \frac{\hbar e B_0}{2m_e} [\sigma_z + r \cos \omega_0 \sigma_x + r \sin \omega_0 \sigma_y] = \frac{\hbar \omega_0}{2} [\sigma_z + r \cos \omega_0 \sigma_x + r \sin \omega_0 \sigma_y] \quad (۱)$$

از طرفی چنانچه ویژه مقدارهای σ_z را با $|+\rangle, |-\rangle$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda = +1 \\ |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda = -1 \end{cases}$$

(۲)

که λ ویژه مقدار مربوط به $(\pm)$ برای σ_z هستند حال می‌توان σ_z را بصورت زیر نوشت:

(۳)

$$\sigma_z = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$$

در حالت کلی اگر $|\psi_i\rangle$ یک بردار ویژه A با ویژه مقدار λ_i باشد آنگاه می‌توان نوشت:

(۴)

$$A = \sum \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

با توجه به اینکه σ_x, σ_y و درایه‌های قطری ندارند، در حالت کلی می‌نویسیم:

$$\sigma_x = a_+ |+\rangle\langle-| + a_- |-\rangle\langle+| \quad (6)$$

$$\sigma_y = b_+ |+\rangle\langle-| + b_- |-\rangle\langle+|$$

$$a_+ = \langle+|\sigma_x|-\rangle = 1, \quad a_- = \langle-|\sigma_x|+\rangle = 1$$

$$b_+ = \langle+|\sigma_y|-\rangle = -i, \quad b_- = \langle-|\sigma_y|+\rangle = i$$

$$\sigma_x = |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|, \quad \sigma_y = -i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} [|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| + r\cos\omega_0 t |+\rangle\langle-| + r\cos\omega_0 t |-\rangle\langle+| - r\sin\omega_0 t i |+\rangle\langle-| + r\sin\omega_0 t i |-\rangle\langle+|]$$

$$= \frac{\hbar\omega_0}{2} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) + \hbar\omega_0 (e^{-i\omega_0 t} |+\rangle\langle-| + e^{i\omega_0 t} |-\rangle\langle+|)$$

این گزینه ۳۰ نکتاتگ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$A_I = e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} A_S e^{-iH_0 \frac{t}{\hbar}}$$

بررسی گزینه (۱): تعریف عملگرها در تصویر برهم کنش است.

$$|\alpha, t\rangle_I = e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} |\alpha, t\rangle_S$$

بررسی گزینه (۲): همان تعریف $|\alpha, t_0, t\rangle_I$ حرکت در تصویر برهم کنش است.

در بررسی گزینه (۳): از تعریف $|\alpha, t\rangle_I$ استفاده می‌کنیم.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle_I = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} |\alpha, t\rangle_S) = -H_0 e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} |\alpha, t_0; t\rangle_S + ie^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle_S$$

(ظرفی)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_S\rangle = H |\alpha, t_S\rangle = (H_0 + V) |\alpha, t_S\rangle$$

(۱)

پایان

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle_I = i\hbar e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} V |\alpha, t_S\rangle_S = i\hbar e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} V e^{-iH_0 \frac{t}{\hbar}} e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} |\alpha, t\rangle_S$$

(۲)

طبق تعریف تصویر برهم کنشی یک عملگر و یک حالت داریم:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle_I = i\hbar V_I |\alpha, t\rangle_I$$

(۳)

$$H_I = e^{iH_0 t} (H_0 + V) e^{-iH_0 t} = H_0 + V_I$$

(۴)

در (۴) از جایگذاری H_0 با خودش استفاده کرده‌ایم. پس مشاهده می‌شود که این گزینه نادرست است.

بررسی گزینه (۴):

$$i\hbar \frac{dA_I}{dt} = i\hbar \frac{d}{dt} (e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} A_S e^{-iH_0 \frac{t}{\hbar}}) = \underbrace{-H_0 e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} A_S e^{-iH_0 \frac{t}{\hbar}}}_{A_I} + \underbrace{e^{iH_0 \frac{t}{\hbar}} A_S e^{-iH_0 \frac{t}{\hbar}}}_{A_I} H_0 \quad (5)$$

دقت کنیم که A_S در تصویر شرودینگر مستقل از زمان است. داریم:

$$i\hbar \frac{dA_I}{dt} = A_I H_0 - H_0 A_I = [A_I, H_0]$$

(۵)

۱۳. گزینه ۴۰۰ هامیلتونی یک الکترون در این چاه با توجه به اینکه الکترون‌ها با هم برهم‌کنش دارند بصورت زیر است:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

(۱)

$$\hat{H}\psi = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi; \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

که می‌توان نوشت

(۲)

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi \right) = E\psi$$

پس داریم

(۳)

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} \right) = E$$

چنانچه بنویسیم $\psi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$ داریم:

(۴)

چون سمت چپ (۴) مجموعی از توابع مجزا از x, y, z و سمت راست ثابت است، پس باید هر کدام برابر با یک ثابت باشند، چون می‌خواهیم $\psi(x, y, z)$ روی مرزها صفر باشد، پس باید $h(a) = h(0) = g(a) = g(0) = f(0) = f(a) = 0$ پس f, g, h باید توابعی متناوب باشند. چنانچه

بگیریم $\frac{h''}{h} = -k_z^2, \frac{g''}{g} = -k_y^2, \frac{f''}{f} = -k_x^2$ آنگاه $k_x^2, k_y^2, k_z^2 > 0$ و با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$f(x) = \sin k_x x \quad g(y) = \sin k_y y \quad h(z) = \sin k_z z$$

(۵)

از شرایط مرزی مشخص می‌شود که $k_{x,y,z} = \frac{n\pi}{a}$ که $n \in \mathbb{Z}$ پس از روی (۴) انرژی خواهد بود:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{n_x \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{a} \right)^2 \right) = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

(۶)

که در (۶) از $n = \frac{h}{2\pi}$ استفاده شده است. هیچ کدام از n_x, n_y, n_z نمی‌توانند صفر باشند. چون آن‌گاه تابع موج صفر خواهد شد. از کمترین مقادیر n

برای الکترون‌ها شروع می‌کنیم. طبق اصل طرد پاولی در هر ویژه‌حالت انرژی حداکثر دو الکترون قرار می‌دهیم.

حالات را با سه‌تایی (n_x, n_y, n_z) نشان می‌دهیم.

حالت انرژی	تبهگنی	تعداد الکترون‌های موجود	انرژی
(۱, ۱, ۱)	۱	$2 \times 1 = 2$	$3\epsilon_0$
(۱, ۲, ۱)	۳	$2 \times 3 = 6$	$6\epsilon_0$
(۱, ۲, ۲)	۳	$2 \times 3 = 6$	$9\epsilon_0$
(۱, ۱, ۳)	۳	$2 \times 3 = 6$	$11\epsilon_0$
(۲, ۲, ۲)	۱	$2 \times 1 = 2$	$12\epsilon_0$
(۱, ۲, ۳)	۶	$2 \times 6 = 12$	$14\epsilon_0$
(۲, ۲, ۳)	۳	۳	$17\epsilon_0$

$$\text{تعداد کل الکترون‌ها} = 2 + 6 + 6 + 6 + 2 + 12 + 3 = 37$$

نفت کنیم که تبهگنی هر حالت عبارت است از کل جایگشت‌های ممکن از یک سه‌تایی (n_1, n_2, n_3) همچنین تعداد الکترون‌های مربوط به هر سه‌تایی غیر از سه‌تایی آخر عبارت است از تعداد الکترون‌ها در هر کدام از تبهگنی‌ها که برابر است با ۲ ضربدر در تعداد تبهگنی‌ها.

در سه‌تایی آخر در یکی از تبهگنی‌ها ۲ الکترون قرار داده و در تبهگنی دیگر تنها یک الکترون قرار می‌دهیم. با این کار مجموع کل الکترون‌ها ۳۷ خواهد شد حال انرژی کل خواهد بود مجموع انرژی تمام الکترون‌ها که تعداد الکترون‌ها در هر حالت ضربدر انرژی حالت شده و در نهایت انرژی‌ها جمع می‌شوند:

$$E_{\text{کل}} = 3\epsilon_0 \times 2 + 6\epsilon_0 \times 6 + 9\epsilon_0 \times 6 + 11\epsilon_0 \times 6 + 12\epsilon_0 \times 2 + 14\epsilon_0 \times 12 + 17\epsilon_0 \times 3 = 405\epsilon_0$$

$$\frac{405\epsilon_0}{37} = 10.95\epsilon_0$$

حال انرژی کل سیستم را بر تعداد الکترون‌ها تقسیم می‌کنیم تا انرژی میانگین هر الکترون بدست آید:

۱۲- گزینه ۱۰ برای پتانسیل متقارن کروی می توان معادله شرودینگر در سه بُعد را با بررسی معادله یک بُعدی آن حل کرد.

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + (k^2 - \frac{r m}{\hbar^2} V - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}) U = 0$$

حال پراکندگی در انرژی های بسیار پایین ($k=0$) را در نظر می گیریم. برای $\ell=0, r>R$ داریم:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = 0$$

حل (۲) بصورت زیر است:

(۳) C یک ثابت است. کمیت a همان طول پراکندگی نام دارد. دقت کنید که برای a های بسیار بزرگ و بزرگتر از صفر در $r>R$ تابع موج چندان با e^{-kr} با k تقریباً صفر تفاوت ندارد (کافی است e^{-kr} را بسط تیلور تا مرتبه اول دهیم) e^{-kr} با k تقریباً صفر دقیقاً تابع موج یک حالت مقید برای $r>R$ با انرژی E بی نهایت کوچک و منفی است. تابع موج داخل ($r>R$) برای حالت $E=0^+$ (پراکندگی با انرژی جنبشی صفر) و حالت $E=0^-$ (حالت مقید با انرژی بستگی بی نهایت کوچک) اساساً مشابه هستند. برای دیدن این موضوع در (۱) قرار دهید $\ell=0$ و $V=V_0$ که ثابت است و آنکه از (۱) داریم:

$$U = \sin k'r; E = V_0 = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}$$

در هر دو حالت k' با (۴) داده می شود که E بسیار کوچک (مثبت یا منفی) است.

چون تابع موج داخل برای دو حالت ($E=0^+$ یا $E=0^-$) مشابه هستند. می توان مشتق لگاریتمی تابع موج حالت مقید را با آنچه که از حل پراکندگی با انرژی جنبشی صفر حاصل می شود برابر قرار داد.

$$\left. \frac{-ke^{-kr}}{e^{-kr}} \right|_{r=R} = \left. \frac{1}{r-a} \right|_{r=R}$$

چنانچه $R \ll a$ آنگاه $k = \frac{1}{a}$. همچنین انرژی بستگی در رابطه:

$$E_{BE} = -E \text{ مقید} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

صدق می کند. در مورد انرژی پیوندی نوترون و پروتون در حالت 2S_1 به جای m از جرم کاهش یافته $\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n}$ استفاده می کنیم.

$$E_{BE} = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} = \frac{\hbar^2}{2m_n a^2} = \frac{\hbar^2 C^2}{2\pi^2 m_n C^2 a^2} = \frac{\hbar^2 C^2}{4\pi^2 m_n C^2 a^2}$$

و از (۶) خواهیم داشت:

حال قرار می دهیم $m_n C^2 = 938 \text{ MeV}$, $\hbar c = 197.4 \text{ eV nm}$, $a = 5/4 \times 10^{-8} \text{ nm}$ پس:

$$\frac{(\hbar c)^2}{4\pi^2 m_n C^2 a^2} = \frac{(197.4 \text{ eV nm})^2}{4\pi^2 (938 \times 10^6 \text{ eV}) \times (5/4 \times 10^{-8} \text{ nm})^2} \approx 1/42 \text{ MeV}$$

۱۵- گزینه ۲ در حالت کلی سطح مقطع دیفرانسیلی با رابطه زیر داده می شود:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k', k)|^2$$

(۱)

که $\hbar k = p$, k, k' به ترتیب مربوط به موج ورودی و خروجی هستند. همچنین دامنه مرتبه اول بورن با رابطه زیر داده می شود:

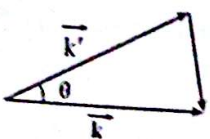
$$f^{(1)}(k', k) = \frac{-1}{4\pi} \frac{r m}{\hbar^2} \int d^3 x e^{i(k-k') \cdot x} V(x)$$

(۲)

برای پتانسیل با تقارن کروی $f^{(1)}(k', k)$ تابعی از $|k' - k|$ می باشد که:

$$|k' - k| = q = 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad (۳)$$

که θ زاویه بین تکانه موج ورودی و خروجی است.



همچنین با توجه به پایداری انرژی قرار می‌دهیم $|\mathbf{k}| = k$ چنانچه انتگرال (۲) را برای قسمت مربوط به زاویه‌ای در مختصات کروی محاسبه کنیم بدست خواهد آمد:

$$f^{(1)}(\theta) = \frac{-1}{r} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{iq} \int_0^\infty r' V(r') (e^{iqr} - e^{-iqr}) dr' = \frac{-2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty r' V(r') \sin q r' dr' \quad (2)$$

حال به جای $V(r)$ پتانسیل یو کلا $V(r) = V_0 \frac{e^{-k_1 r}}{k_1 r}$ را در (۲) قرار می‌دهیم و بدست خواهیم آورد:

$$f^{(1)}(\theta) = - \left(\frac{2m V_0}{\hbar^2 k_1} \right) \frac{1}{q^2 + k_1^2} \quad (3)$$

$$\text{Im} \left(\int_0^\infty e^{-k_1 r} e^{iqr} dr \right) = -\text{Im} \left(\frac{1}{-k_1 + iq} \right) = \frac{q}{\mu^2 + q^2} \quad (4)$$

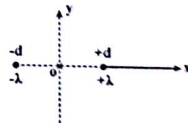
$$q^2 = k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = k^2 (1 - \cos \theta) \quad (5)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2m V_0}{\hbar^2 k_1} \right)^2 \frac{1}{(k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + k_1^2)^2} = \frac{1}{k_1^2} \left(\frac{2m V_0}{\hbar^2 k_1} \right)^2 \times \frac{1}{\left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{k_1^2}{k^2} \right)^2} \quad (6)$$

الکتروستاتیک

۱۶- گزینه «۳»

شکل زیر را در نظر بگیرید.



می‌خواهیم معادله سطوح هم‌پتانسیل در صفحه 'X-Y' را بیابیم. ابتدا با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی اطراف یک خط بار با چگالی بار خطی λ را بدست می‌آوریم. بدین منظور استوانه به طول l اطراف خط را در نظر بگیرید. از قانون گاوس داریم:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (1)$$

با استفاده از تقارن $|\vec{E}|$ بر روی سطح استوانه به شعاع R یکسان بوده و جهت آن بر سطح جانبی استوانه عمود است. پس:

$$E \times 2\pi R l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \hat{r} \quad (2)$$

از طرفی می‌دانیم که در حالت الکترواستاتیک رابطه زیر برقرار است:

$$-\nabla\phi = \vec{E} \quad (3)$$

که ϕ پتانسیل الکتریکی می‌باشد. همچنین در مختصات استوانه‌ای می‌دانیم که رابطه زیر برقرار است:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\phi} \hat{\phi} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{k} \quad (4)$$

از (۲) و (۳) واضح است که ϕ فقط به r بستگی دارد. پس:

$$\frac{-\partial\phi}{\partial r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \Rightarrow \phi = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln(r) + C \quad (5)$$



که C ثابتی است که به مختصات بستگی ندارد. حال از (۵) می توان پتانسیل در اطراف خط بار در $x = +d$ را به صورت زیر نوشت:

$$\phi = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x-d)^2 + y^2} + C \quad (6)$$

و مشابهاً پتانسیل در اطراف خط بار در $x = -d$ خواهد بود.

$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x+d)^2 + y^2} + C'$$

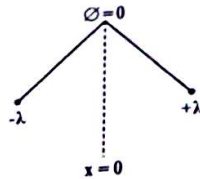
پس پتانسیل در شکل ۱ از مجموع (۶) و (۷) بدست می آید.

$$(\phi) + (\psi) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln \sqrt{(x+d)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-d)^2 + y^2}) + C + C'$$

(۸)

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} + C + C'$$

از تقارن انتظار داریم که پتانسیل روی خط $x = 0$ صفر باشد.



پس $C + C' = 0$ را مساوی صفر می گیریم. بنابراین داریم:

(معادله سطح هم پتانسیل V_0)

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = V_0$$

$$\Rightarrow \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda} = 2k \Rightarrow \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = e^{2k} \quad (9)$$

پس:

$$\Rightarrow x^2 + d^2 + 2xd + y^2 = e^{2k}(x^2 + d^2 - 2xd + y^2)$$

$$\Rightarrow (e^{2k} - 1)x^2 + (e^{2k} - 1)d^2 - 2xd(e^{2k} + 1) + (e^{2k} - 1)y^2 = 0 \quad (10)$$

با تقسیم (۱۰) بر $(e^{2k} - 1)$ بدست خواهد آمد: ($k \neq 0$)

$$x^2 + y^2 - 2xd \frac{e^{2k} + 1}{e^{2k} - 1} + d^2 = 0 \quad (11)$$

اما:

$$\frac{e^{2k} + 1}{e^{2k} - 1} = \frac{e^k(e^k + e^{-k})}{e^k(e^k - e^{-k})} = \frac{e^k + e^{-k}}{e^k - e^{-k}} = \frac{2 \cosh k}{2 \sinh k} = \coth k \quad (12)$$

پس:

$$(11) = x^2 + y^2 - 2xd \coth k + d^2 = 0 \quad (13)$$

(۱۳)

حال می توان نوشت:

$$x^2 - 2xd \coth k = (x - d \coth k)^2 - d^2 \coth^2 k \quad (14)$$

(۱۴)

پس خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{(12)} (13) = (x - d \coth k)^2 + y^2 + d^2(1 - \coth^2 k) = 0 \quad (15)$$

(۱۵)

اما

$$1 - \coth^2 k = 1 - \frac{\cosh^2 k}{\sinh^2 k} = \frac{-1}{\sinh^2 k}$$

(۱۶)

پس:

$$(۱۳) = (x - d \coth k)^2 + y^2 = \left(\frac{d}{\sinh k} \right)^2$$

(۱۷)

که همان گزینه (۳) است.

۱۷- گزینه ۴۰ قبل از حل می توان دو گزینه را سریعاً حذف کرد: (۱) و (۲). رابطه ظرفیت خازن تخت را به خاطر آورید: $C = \frac{k\epsilon_0 A}{d}$ چنانچه $d \rightarrow 0$

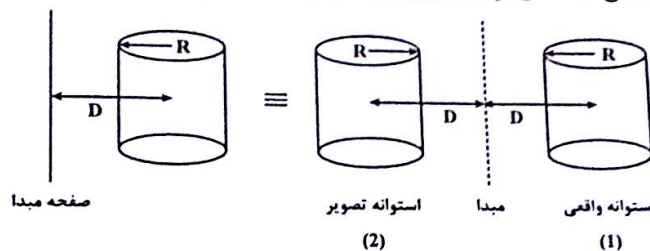
$$\lim_{d \rightarrow 0} C \Rightarrow +\infty$$

خواهیم داشت:

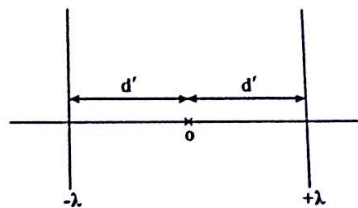
در این مسأله هم انتظار می رود که با نزدیک شدن استوانه به صفحه ظرفیت مشابهاً به بی نهایت میل کند.

$$\lim_{D \rightarrow R} C \Rightarrow +\infty$$

که این خاصیت را تنها گزینه (۳) یا (۴) ارضا می کنند. حال در ادامه از روش تصویر برای بدست آوردن ظرفیت معادل استوانه و صفحه استفاده می کنیم.



فرض کنید چگالی بار در واحد طول استوانه سمت راست λ و استوانه چپ $-\lambda$ باشد. دو استوانه را با دو خط بار تعویض کنیم.



بنابر تقارن فاصله دو خط بار جایگزین، استوانه ها را تا مبدأ d' می گیریم که الزاماً D نیست. فرض می کنیم پتانسیل استوانه (۱) V_0 باشد. این دو استوانه سطوح هم پتانسیل شکل (۲) هستند. از مسأله (۱۶) معادله سطوح هم پتانسیل را بصورت زیر بدست آوردیم:

$$(x - d \coth k)^2 + y^2 = \left(\frac{d}{\sinh k} \right)^2$$

با توجه به اینکه استوانه های (۱) و (۲) سطوح هم پتانسیل شکل (۲) هستند، می توان نوشت:

$$d \coth k = D, \quad \frac{d}{\sinh k} = R \Rightarrow \frac{\sinh k}{d} \times d \coth k = \frac{D}{R}$$

$$\Rightarrow \cosh k = \frac{D}{R} \Rightarrow k = \cosh^{-1} \frac{D}{R} = \frac{\gamma \pi \epsilon_0 V_0}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\gamma \pi \epsilon_0} \cosh^{-1} \frac{D}{R} = V_0 = \text{پتانسیل (۱) در واحد طول}$$

اما از طرفی:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x + e^{-x} = 2y \Rightarrow e^{2x} + 1 - 2ye^x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2y + \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = e^x \Rightarrow \cosh^{-1} \frac{D}{R} = \ln \left(\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R} \right)^2 - 1} \right)$$

اما پتانسیل استوانه (۲) را باید همان پتانسیل صفحه قرار دهیم چرا که این استوانه مجازی است از آنچه که بدست آوردیم دیدیم که پتانسیل روی صفحه صفر خواهد بود پس:

$$C = \frac{\phi}{\Delta V} = \frac{\lambda}{\gamma \pi \epsilon_0 \cosh^{-1} \frac{D}{R}} = \frac{\gamma \pi \epsilon_0}{\cosh^{-1} \frac{D}{R}} = \frac{\gamma \pi \epsilon_0}{\ln \left(\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R} \right)^2 - 1} \right)}$$

پس پاسخ گزینه (۴) خواهد بود.

۱۸. گزینه ۲۵ با توجه به شرایط مرزی سؤال گزینه‌های (۱) و (۴) سریم حذف می‌شوند. چرا که الزاماً به ازای $x = 0$ یا $y = b$ نتیجه صفر نخواهند داشت. پس گزینه (۲) یا (۳) پاسخ صحیح هستند حال داریم:

$$\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi + \partial_z^2 \phi = 0$$

در همین جا می‌توان گزینه درست را یافت. کافی است از گزینه‌ها $\sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi x}{a}$ را در (۱) قرار دهیم و آنگاه خواهیم داشت:

$$\left(-\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right) \phi + k^2 \phi = 0$$

از گزینه‌ها فرض کردیم که $\partial_z^2 \phi = k^2 \phi$ پس $k = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$ و پاسخ گزینه (۲) می‌باشد. اما راه حلی تشریحی‌تر:

فرض کنیم $\phi = f(x)g(y)h(z)$ پس از (۱) داریم:

$$\frac{f''(x)}{f} + \frac{g''(y)}{g} + \frac{h''(z)}{h} = 0$$

چون سمت راست (۳) ثابت و جملات سمت چپ هر کدام تابعی از x ، y و z هستند باید هر کدام برابر یک ثابت باشند که مجموع این ثوابت صفر است. فرض کنیم:

$$\frac{f''}{f} = +k_1^2$$

$$\frac{g''}{g} = k_2^2$$

$$\frac{h''}{h} = k_3^2, k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$$

از طرفی:

$$\phi(x=0, y, z) = \phi(x=a, y, z) = 0 = f(a)g(y)h(z) = f(0)g(y)f(z) \Rightarrow f(a) = f(0) = 0$$

$$\text{مثلاً } g(b) = g(0) = 0$$

پس f و g تابعی متناوب هستند و بنابراین $k_1^2 < 0$ و $k_2^2 < 0$ قرار می‌دهیم $k_1^2 \rightarrow -k_1^2$ و $k_2^2 \rightarrow -k_2^2$ خواهیم داشت:

$$f(x) = a' \sin k_1 x + b' \cos k_1 x, f(0) = 0 \Rightarrow b' = 0$$

$$g(y) = a'' \sin k_2 y + b'' \cos k_2 y, g(0) = 0 \Rightarrow b'' = 0$$

از طرفی:

$$f(a) = 0 \Rightarrow k_1 a = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_1 = \frac{n\pi}{a}$$

$$g(b) = 0 \Rightarrow k_2 b = m\pi, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_2 = \frac{m\pi}{b}$$

پس:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0 \xrightarrow{k_1^2 \rightarrow -k_1^2, k_2^2 \rightarrow -k_2^2} k_3^2 = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2}$$

$$h(z) = C e^{-k_3 z} + d e^{k_3 z}$$

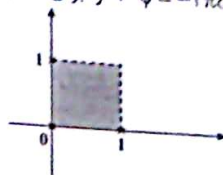
از طرفی چون $k_1^2, k_2^2 < 0$ پس $k_3^2 > 0$:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m,n} C_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} e^{-\pi z \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}$$

اما $\phi(x \rightarrow \infty) = 0$ پس $d = 0$:

که C_{mn} ها را صورت سوال به ما داده است پس گزینه (۲) پاسخ صحیح خواهد بود.

۹- گزینه «۴» تابع گرین معادله لاپلاس $\nabla^2 \phi = -4\pi\delta^2(x-x', y-y')$ را برای شکل زیر می خواهیم بدست آوریم:



$$\nabla^2 G = -4\pi\delta^2(x-x')\delta(y-y')$$

داریم:

(۱)

فرض کنیم $y' > y$ آنگاه (۱) خواهد شد:

$$\nabla^2 G(x, y, x', y') = 0 \quad y > y', \quad y \equiv y_>, \quad y' \equiv y_<$$

(۲)

قبل از ادامه حل دقت کنیم که فقط گزینه های (۲) یا (۴) شرایط مرزی دیرشیله (پتانسیل صفر روی مرزها) را ارضا می کنند. پس یا گزینه (۲) یا (۴) پاسخ درست خواهند بود. فرض کنیم:

$$G(x, y) = f(x)g(y)$$

(۳)

فقط به تابعیت x و y در G که قرار است در (۲) برقرار باشند، نگاه می کنیم.

$$\frac{\partial^2 f}{f \partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{g \partial y^2} = 0$$

(۴)

چون سمت چپ تابعی از x و y هستند و سمت راست ثابت است، پس هرکدام از جملات سمت چپ (۴) باید متحد با یک ثابت باشد.

$$\frac{\partial^2 f}{f \partial x^2} = -k^2; \quad \frac{g''(y)}{g(y)} = +k^2, \quad y > y'$$

(۵)

با توجه به اینکه $y > y'$ پس تنها شرط $g(1) = 0$ را خواهیم داشت و شرط $g(0) = 0$ برقرار نخواهد بود. اما شرایط $f(0) = 0$ و $f(1) = 0$ همچنان برقرار خواهند بود پس انتظار آن است که $f(x)$ تناوبی باشد.

$$f(x) = a \sin kx + b \cos kx \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ f(1) = 0 \Rightarrow \sin k = 0 \Rightarrow k = n\pi; \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(۶)

و

$$\frac{g''}{g} = (n\pi)^2 \Rightarrow g(y) = A \sinh n\pi y + B \cosh n\pi y = \cosh n\pi(y) + a$$

(۷)

همواره می توان مجموع $B \cosh x + A \sinh x$ را به صورت $\cosh(x+a)$ نوشت. از طرفی $g(1) = 0$ پس:

$$\cosh n\pi(1+a) = 0 \Rightarrow 1+a = 0 \Rightarrow a = -1$$

(۸)

پس از (۶) و (۸) می توان نوشت:

$$f(x)g(y) = A_n \sin n\pi x \sinh n\pi(1-y_>); \quad y = y_>; \quad y' = y_<$$

(۹)

حال فرض کنید $y < y'$ و قرار دهیم $y = y_<$, $y' = y_>$ در این حالت داریم:

$$\frac{f''}{f} = -k^2; \quad \frac{g''}{g} = k^2; \quad y < y'$$

(۱۰)

و مشابهاً شرایط مرزی (۶) همچنان برقرار خواهند بود؛ یعنی انتظار داریم $f(x) = a \sin n\pi x$. همچنین دوباره داریم:

(۱۱)

$$g(y) = A \sinh n\pi y + B \cosh n\pi y; \quad g(0) = 0$$



پس $B = 0$ و می توان نوشت:

$$(12)$$

تقارن روی $y > 0$ و $y < 0$ ایجاد می کند که $G(x, x', y, y')$ را بطور کلی بصورت زیر می نویسیم. (مشابه بحث ۹-۳ کتاب الکترودینامیک جکسون)

$$(13)$$

$$G(x, x', y, y') = \sum_n A_n(x') s \sin n\pi x \sin n\pi(1-y) s \sinh n\pi y$$

حال داریم:

$$(14)$$

$$\frac{d^2 G}{dx'^2} + \frac{d^2 G}{dy'^2} = -\pi \delta(x-x') \delta(y-y')$$

طرفین (۱۴) را در $\sin n\pi x$ ضرب کرده و از $0 \leq x \leq 1$ و $y' - \epsilon \leq y \leq y' + \epsilon$ انتگرال می گیریم.

$$\begin{aligned} & -\sum_n (n\pi)^2 A_n \int_0^1 s \sin n\pi x \sin n\pi x dx \int_{y'-\epsilon}^{y'+\epsilon} s \sinh n\pi y dy + s \sinh n\pi y' \int_{y'-\epsilon}^{y'+\epsilon} s \sinh n\pi(-y) dy \\ & + \sum_n A_n \int_0^1 s \sin n\pi x \sin n\pi x dx \frac{d}{dy} (s \sinh n\pi(1-y) s \sinh n\pi y) \Big|_{y'-\epsilon}^{y'+\epsilon} \\ & = -\pi \int_0^1 s \sin n\pi x \delta(x-x') dx \int_{y'-\epsilon}^{y'+\epsilon} \delta(y-y') dy = -\pi s \sin n\pi x' \end{aligned}$$

$$(15)$$

در (۱۵) از $\int_0^1 f(x) \delta(x) dx = f(0)$ استفاده شده است. حال داریم:

$$\int_0^1 s \sin n\pi x \sin n\pi x dx = \delta_{nn} \int_0^1 s \sin^2 n\pi x dx = \delta_{nn} \int_0^1 \frac{1 - \cos 2n\pi x}{2} dx = \frac{\sin n\pi}{2} \quad (16)$$

در (۱۵) حاصل انتگرال در جمله اول به دلیل پیوستگی $\sinh(x)$ صفر خواهد بود و تنها جمله دوم باقی می ماند همچنین:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} (s \sinh n\pi(1-y) s \sinh n\pi y) \Big|_{y'-\epsilon}^{y'+\epsilon} \\ & = +n\pi [-c \cosh n\pi(1-y') s \sinh n\pi y' - c \cosh n\pi y' s \sinh n\pi(1-y')] \\ & = -n\pi s \sinh n\pi \end{aligned}$$

که در آن از رابطه $s \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ استفاده شده است. پس:

$$-A_n \frac{\sinh n\pi}{2} n\pi = -\pi s \sin n\pi x' \Rightarrow A_n = \frac{\lambda}{ns \sinh n\pi} s \sin n\pi x' \quad (17)$$

از قراردادن (۱۷) در (۱۳) $G(x, x', y, y')$ بدست خواهد آمد که همان گزینه (۴) است.

۲۰. گزینه «۲» برای حل این مسأله از نتیجه سؤال (۱۹) استفاده می کنیم. می دانیم که در حالت کلی حل معادله $\nabla^2 \phi = \rho(x')$ با رابطه زیر داده می شود.

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') G(x, x') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[G(x, x') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi(x) \frac{\partial G}{\partial n'} \right] da' \quad (1)$$

در این جا $\phi(x')|_{\text{مرز}} = 0$ از طرفی $G(x, x')|_{\text{مرز}} = 0$ را هم صفر می گیریم.



استوانه مورد نظر

$$\phi(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\lambda}{ns \sinh n\pi} s \sin n\pi x \sin n\pi x' s \sinh n\pi y s \sinh n\pi(1-y) dx' dy = 0$$

بنابراین:

$$(2)$$

$$\int_0^1 s \sin n\pi x' dx' = \frac{\cos n\pi x'}{n\pi} \Big|_0^1 = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{فرد } n \end{cases}$$

از طرفی:

$$(3)$$

همچنین:

$$\int_0^1 s \sinh n\pi y \leq s \sinh n\pi(1-y) dy = \int_0^1 (s \sinh n\pi y' s \sinh n\pi(1-y) dy + \int_0^1 s \sinh n\pi y s \sinh n\pi(1-y') dy$$

$$= \frac{s \sinh n\pi y}{n\pi} (c \cosh n\pi(1-y) - 1) + \frac{s \sinh n\pi(1-y)}{n\pi} (c \cosh n\pi y - 1)$$

(۲)

$$c \cosh n\pi y' s \sinh n\pi(1-y') + s \sinh n\pi y' c \cosh n\pi(1-y') = s \sinh n$$

از طرفی:

$$(r) = \frac{1}{n\pi} (s \sinh n - s \sinh n\pi(1-y) - s \sinh n\pi y)$$

پس:

(۵)

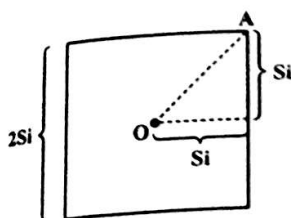
$$\phi(x, y) = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f}{(n\pi)^2 s \sinh n} f_n(x, y)$$

پس از گذاردن (۳) و (۵) در (۴) خواهیم داشت:

(۶)

که همان گزینه (۲) است

۲۱- گزینه ۱۰ می‌دانیم انرژی پتانسیل الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای در فاصله r از رابطه $V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ بدست می‌آید.



مربع‌ها را به ترتیب از داخل به خارج با شماره گذاری ۱ و ۲ و ... نشان می‌دهیم. فاصله بارها روی رئوس مربع A تا مبدأ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|OA| = \sqrt{(Si)^2 + (Si)^2} = Si\sqrt{2}$$

مقدار بار الکتریکی روی رئوس مربع A $e(-1)^{i+1}$ می‌باشد.

همچنین واضح است که فاصله بارها در وسط اضلاع مربع A تا مبدأ مختصات Si می‌باشد. و مشابهاً مقدار بار الکتریکی روی میان اضلاع مربع A هم $e(-1)^{i+1}$ می‌باشد. پس:

انرژی پتانسیل الکتریکی بین بار $-q$ در مبدأ و بارهای مربع A را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$V(-q, i) = \underbrace{\frac{(-1)^{i+1} e(-q)}{4\pi\epsilon_0 (is\sqrt{2})}}_{\substack{\text{تعداد بارها} \\ \text{در رئوس}}} + \underbrace{\frac{(-1)^{i+1} e(-q)}{4\pi\epsilon_0 (is)}}_{\substack{\text{تعداد بارها} \\ \text{در میانه اضلاع}}} \quad (۲)$$

$$V(-q, i) = \frac{\sqrt{2}eq(-1)^i}{2\pi\epsilon_0 Si} + \frac{qe(-1)^i}{\pi\epsilon_0 Si} \quad (۳)$$

حال کافی است برای بدست آوردن انرژی پتانسیل کل روی همه مربع‌ها جمع بزنیم:

$$V_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}eq(-1)^i}{2\pi\epsilon_0 is} + \frac{eq(-1)^i}{\pi\epsilon_0 is} \right) \quad (۴)$$

$$= \frac{qe}{\epsilon_0 \pi} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \quad (۵)$$

از طرفی طبق راهنمایی سؤال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ پس:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$$

(۷)

محسین می دانیم $\sqrt{2} = 1/4$ پس $\sqrt{2} = 0/7$ و در نتیجه $1/7 = \frac{\sqrt{2}}{7}$ پس خواهیم داشت:

$$V_{\text{فر}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln r$$



$$V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + p_{13}q_3$$

$$V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + p_{23}q_3$$

$$V_3 = p_{31}q_1 + p_{32}q_2 + p_{33}q_3$$

بنابر تقارن موجود در مسئله $p_{11} = q_{22} = p_{33}$ و همچنین $p_{ij} = p_{ji}$ (i ≠ j) خواهد بود. حال پله به پله همراه با مسأله از رابطه (۱) تا (۳) استفاده می کنیم. در ابتدا همه کره ها بدون بار هستند و کره (۱) به پتانسیل V_0 متصل شده و دارای بار q_1 می شود. پس در رابطه (۱) قرار می دهیم:

$$V_0 = p_{11}q_1 \Rightarrow p_{11} = \frac{V_0}{q_1} \xrightarrow{\text{بنابر تقارن}} p_{22} = p_{33} = \frac{V_0}{q_1}$$

در مرحله دوم باتری به کره دوم متصل می شود و کره سوم همچنان بدون بار خواهد ماند. چون پتانسیل باتری V_0 فرض شده است، بنابراین پتانسیل کره دوم هم همان V_0 خواهد بود.

$$V_0 = p_{11}q_1 + p_{22}q_2 = p_{11}q_1 + \frac{V_0 q_2}{q_1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_0(q_1 - q_2)}{q_1} = p_{11}q_1$$

در مرحله سوم باتری به کره سوم متصل شده و مشابه بالا دارای پتانسیل V_0 خواهد شد. بنابراین داریم:

$$V_0 = p_{11}q_1 + p_{22}q_2 + p_{33}q_3$$

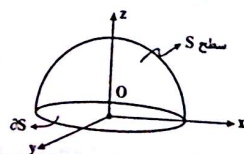
بنابر تقارن انتظار داریم $p_{11} = p_{22} = p_{33}$ چرا که موقعیت مکانی و همچنین وضع هندسی کره ها نسبت به هم تفاوتی ندارد. پس:

$$V_0 = \frac{V_0(q_1 - q_2)}{q_1} + \frac{V_0(q_1 - q_2)}{q_1} + \frac{V_0}{q_1} q_3$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{q_1 - q_2}{q_1} + \frac{q_1 - q_2}{q_1} + \frac{q_3}{q_1}$$

$$= \frac{q_1^2 - q_2 q_1 + q_2 q_1 - q_2^2}{q_1^2} + \frac{q_3}{q_1} = \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2} + \frac{q_3}{q_1}$$

رابطه (۸) به راحتی نتیجه می شود $q_3 = \frac{q_2^2}{q_1}$ که همان گزینه (۳) باشد.



۲۲- هیچ کدام از گزینه ها صحیح نیست. می توان $\nabla \times \vec{A}$ را محاسبه کرد و از روی آن $\vec{B}$ را بدست آورد و سپس شار $\vec{B}$ را مستقیماً محاسبه کرد ولی راحت تر است که از رابطه زیر استفاده کنیم (قضیه استوکس).

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \phi_B \quad (۱)$$

که در (۱) از $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ استفاده شده است.

$$\int_{\text{سطح دایره}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{+B_0 R_0^2}{r} \int_0^{2\pi} \phi \sin\left(\frac{\phi}{r}\right) d\phi \quad , \quad \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 16 \times \frac{B_0 R_0^2}{r} = 16 B_0 R_0^2$$



$d\vec{l}$ برای سطح نیم کره همان المان طول جهت دار محیط دایره سطح مقطع آن است. همچنین در قوسه استوایی $d\vec{l}$ باید در جهت پادساعتگرد باشد.

$$d\vec{l} = ?$$

$$\vec{l} = R_0 \hat{r} \Rightarrow d\vec{l} = R_0 d\hat{r}$$

در دایره به شعاع R_0 داریم:

(۲)

$$\hat{r} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$$

همچنین:

(۳)

$$d\hat{r} = (-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) d\phi = \hat{\phi} d\phi$$

پس:

$$\Rightarrow d\vec{l} = R_0 d\phi \hat{\phi}$$

(۴)

$$\vec{A} \cdot d\vec{l} = B_0 R_0^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{r} \right) \sin \frac{\phi}{r} (\hat{r} + 0\hat{\theta} + \phi \hat{\phi}) \cdot \hat{\phi} d\phi$$

پس:

(۵)

در (۵) از این موضوع استفاده شده است که روی محیط دایره که روی صفحه xy قرار دارد $\theta = \frac{\pi}{2}$ خواهد بود. پس:

$$\vec{A} \cdot d\vec{l} = R_0^2 B_0 \sin^2 \frac{\pi}{r} \sin \frac{\phi}{r} (\hat{\phi} \cdot \hat{r} + 0 \cdot \hat{\theta} + \phi \cdot \hat{\phi}) d\phi$$

روی محیط دایره

$$\text{اما } \hat{\phi} \cdot \hat{r} = \hat{\phi} \cdot \hat{\theta} = 0 \text{ پس:}$$

$$\int_{\text{سطح دایره}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{+B_0 R_0^2}{r} \int_0^{2\pi} \phi \sin\left(\frac{\phi}{r}\right) d\phi$$

حال باید $\int_0^{2\pi} \phi \sin \frac{\phi}{r} d\phi$ را محاسبه کنیم. بدین منظور تغییر متغیر $\phi = r \phi'$ را اعمال می‌کنیم.

$$\phi = r \phi' \Rightarrow d\phi = r d\phi';$$

و بازه انتگرال گیری هم خواهد شد:

$$0 < \phi < \frac{\pi}{r} \Leftrightarrow 0 < r \phi' < 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \phi \sin \frac{\phi}{r} d\phi = r \int_0^{\frac{\pi}{r}} \phi' \sin \phi' d\phi'$$

پس:

حال برای محاسبه $\int_0^{\frac{\pi}{r}} \phi' \sin \phi' d\phi'$ از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{r}} \phi \sin \phi d\phi = -\phi \cos \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{r}} + \int_0^{\frac{\pi}{r}} \cos \phi d\phi = +\sin \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{r}} = 1$$

پس:

$$\oint_{\text{ds}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 16 \times \frac{B_0 R_0^2}{r} = 16 B_0 R_0^2$$

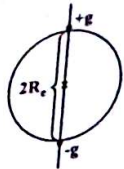
که پاسخ در هیچ کدام از گزینه‌ها موجود نیست. به نظر می‌رسد روی صفحه xy اشتباه $\sin^2 \frac{\theta}{r} = 1$ در نظر گرفته شده است که در این صورت به گزینه (۱) می‌رسیم.



۳۶. تجربه ۹۶ برای حل این سؤال ابتدا دقت می‌کنیم که رابطه $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_g$ و $e_g = h$ در دستگاه SI (weber conversion) نوشته شده‌اند. در این دستگاه $\mu_0 = 1$ در نظر گرفته می‌شود. بدین منظور بهتر است جهت جلوگیری از اشتباه μ_0 را در این روابط احیا کنیم.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_g \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_g$$

$$e_g = h \rightarrow e_g = \frac{h}{\mu_0}$$

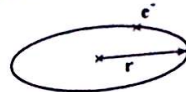


برای احیا کردن μ_0 در رابطه (۱) کافی است از تشابه $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ استفاده کرده و دقت کنیم که اگر در رابطه‌ای در میدان الکتریکی E_0 در مخرج ظاهر شود رابطه مشابه برای میدان مغناطیسی برقرار است و μ_0 در صورت قرار می‌گیرد (و بالعکس).
رابطه (۲) را نتیجه خواهیم گرفت.

حال طبق مفروضات سؤال دو بار $\pm g$ در قطب شمال و جنوب کره الکترون در نظر می‌گیریم و ممان مغناطیسی الکترون را در این حالت محاسبه می‌کنیم

$$|\vec{\mu}| = 2R_e g$$

برای نوشتن $|\vec{\mu}|$ از تشابه همین رابطه برای دوقطبی الکتریکی استفاده کرده‌ایم. به جای بار الکتریکی تنها g قرار دادیم. حال دقت کنیم که رابطه‌ای کلی برای ممان مغناطیسی ذاتی الکترون هم وجود دارد. بدین منظور الکترون زیر را در نظر بگیرید که در مداری به شعاع r در حال چرخش است.



و تعریف اولیه دوقطبی مغناطیسی یک مدار به سطح A که در آن جریان I برقرار است می‌دانیم که ممان مغناطیسی مدار بصورت زیر داده می‌شود:

$$\vec{m} = I A \hat{k}$$

حال m را برای الکترون در حال چرخش در شکل (۲) محاسبه می‌کنیم.

$$I = \frac{e}{T}; T = \text{دوره تناوب چرخش} \Rightarrow I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}; \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow m = \frac{e\omega \pi r^2}{2\pi} = \frac{e\omega r^2}{2}$$

حال از رابطه نکته زاویه‌ای می‌دانیم:

$$L = mV \times \vec{r} \xrightarrow{V=r\omega} \vec{L} = m_e r \omega \times \vec{r} = m_e r^2 \omega \hat{k}$$

پس می‌توان (۵) را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{m} = \frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

برای بدست آوردن ممان مغناطیسی ذاتی الکترون کافی است در (۶) $\vec{L}$ را با $\vec{S}$ تعویض کنید و ضریب زیرمغناطیسی 2 را وارد کنید. در این حالت خواهیم داشت:

$$m_{\text{ذاتی}} = 2 \times \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{S} \Rightarrow |m_{\text{ذاتی}}| = \frac{e}{m_e} |\vec{S}|$$

برای الکترون $|\vec{S}| = \frac{h}{2}$ پس می‌توان نوشت:

$$|m_{\text{ذاتی}}| = \frac{he}{2m_e} = (r) = 2R_e g = 2R_e \frac{h}{\mu_0 e}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = C^2 \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} = \epsilon_0 C^2$$

از طرفی می‌دانیم:



$$\frac{h e}{r m_e} = \frac{h e}{r \pi m_e} = \frac{r R_e h e_0 C^r}{e} \Rightarrow \frac{e^r}{r \pi e_0 R_e} = r m_e C^r$$

پس از (۷) خواهیم داشت $\left(h = \frac{h}{r \pi} \right)$

که همان گزینه ۴ است.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (J + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}); \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

۲۵- گزینه «۳» از معادلات ماکسول استفاده می‌کنیم.

(۱)

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r}$$

همچنین رابطه $\nabla \times \vec{A}$ که $\vec{A}$ یک بردار دلخواه است در دستگاه مختصات استوانه‌ای بصورت زیر است:

$$+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{k} \quad (۲)$$

با توجه به فرض سؤال $\vec{E}(r, t) = \frac{R}{r} E_0 \sin(kr - \omega t) \hat{k}$ پس میدان مغناطیسی الکتریکی فقط مؤلفه در راستای Z داشته و همچنین از φ هم مستقل است. پس خواهیم داشت.

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{-\partial E}{\partial r} \hat{\varphi} = \frac{-\partial B}{\partial t}$$

(۳)

از رابطه (۳) واضح می‌شود که $\vec{B}$ در مثال ما فقط در راستای $\hat{\varphi}$ مؤلفه خواهد داشت. همچنین طبق فرض سؤال و همان‌طور که از رابطه (۳) هم پیداست $\vec{B}$ تنها تابعی از r و t خواهد بود. چرا که E تابعی از r و t است. با توجه به توضیحات فوق از (۲) می‌توان رابطه (۱) را به صورت زیر نوشت:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} = \frac{\mu_0 R}{r} J_0 \sin(kr - \omega t) - \frac{E \mu_0 \epsilon_0 R \omega}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (۴)$$

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{C^2} \right)$$

که در (۴) از E نسبت به t مشتق گرفته شده است. حال از (۴) نسبت به r انتگرال گیری می‌کنیم.

$$r B_\varphi = -\mu_0 R J_0 \frac{\cos(kr - \omega t)}{k} - E_0 \frac{R \omega \sin(kr - \omega t)}{C^2 k} + f(t) \quad (۵)$$

که در (۴) از E نسبت به t مشتق گرفته شده است. حال از (۴) نسبت به r انتگرال گیری می‌کنیم.

$$B_\varphi = 0 \Rightarrow f(t) = \frac{\mu_0 R J_0}{k} \cos \omega t - \frac{E_0 R \omega \sin \omega t}{C^2 k} \quad (۶)$$

با گذاشتن (۶) و (۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} B_\varphi &= \frac{-\mu_0}{r} R J_0 \frac{\cos(kr - \omega t)}{k} - \frac{E_0 R \omega \sin(kr - \omega t)}{r C^2 k} + \frac{\mu_0 R J_0}{kr} \cos \omega t - \frac{E_0 R \omega \sin \omega t}{C^2 k_r} \\ &= \frac{R}{kr} (\mu_0 J_0 (\cos \omega t - \cos(kr - \omega t)) - \frac{E_0 \omega}{C^2} (\sin \omega t + \sin(kr - \omega t))) \\ &= \frac{R}{kr} (\mu_0 J_0 C(r, t) - \frac{E_0 \omega}{C^2} S(r, t)) \end{aligned} \quad (۷)$$

که در مرحله آخر از تعاریف سؤال استفاده کرده‌ایم.

۲۶- گزینه «۲»

رابطه بردار تکانه زاویه‌ای کل میدان الکترومغناطیسی با میدان الکتریکی و مغناطیسی بصورت زیر است (در مختصات استوانه‌ای هستیم):

$$J = \epsilon_0 \int \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) d^3 r \quad (۱)$$

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}) \times \vec{B}_{in}(\vec{r}) = \frac{(\rho r)^r}{r\epsilon_0(\gamma c\epsilon_0)} B\sqrt{1-B^r} \hat{r} \times \hat{\phi} = \frac{(\rho r)^r B\sqrt{1-B^r}}{r\epsilon_0^2 C} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\vec{r}}{r} + z\hat{k} \right) \times \frac{\rho^r r^r B\sqrt{1-B^r}}{r\epsilon_0^2 C} \hat{k} = \frac{\rho^r r^r B\sqrt{1-B^r}}{r\epsilon_0^2 C} \hat{r} \times \hat{\phi} \quad (3)$$

با فرض آنکه طول استوانه ۱ است:

$$J = \epsilon_0 \int \frac{\rho^r r^r B\sqrt{1-B^r}}{r\epsilon_0^2 C} dr d\phi dz (-\hat{\phi}) = \frac{\rho^r B\sqrt{1-B^r}}{r\epsilon_0 C} \times r\pi \int_0^R r^r dr = \frac{\pi^r \rho^r B\sqrt{1-B^r}}{r\pi\epsilon_0 C} \frac{R^{\Delta}}{\Delta} (-\hat{\phi}) \quad (4)$$

پس $\frac{d}{1}$ خواهد بود:

$$\text{تکانه زاویه‌ای کل در واحد طول} = \frac{r\pi^r}{\Delta C} B\sqrt{1-B^r} \frac{\rho^r R^{\Delta}}{r\pi\epsilon_0} (-\hat{\phi})$$

می‌توانستیم قبل از حل دقیق پاسخ درست را از روی (۱) حدس بزنیم. با توجه به (۱) و شکل ضرب میدان الکتریکی و مغناطیسی ضرب $B\sqrt{1-B^r}$ همواره در J حضور دارد؛ پس گزینه (۱) یا (۲) درست خواهد بود. از طرفی ضرب داخلی جهات بردارها در (۱) ما را به $-\hat{\phi}$ می‌رساند. پس گزینه (۲) درست است.

۲۷- گزینه «۳» از تقارن واضح است که پتانسیل الکتریکی باید در $\theta = \frac{\pi}{2}$ صفر باشد. پس گزینه (۲) یا (۳) درست است. حال از رابطه پتانسیل تأخیری استفاده می‌کنیم.

$$\left(d \equiv \frac{D}{r} \right)$$

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{P(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|} d^3r' \quad (1)$$

در (۱) $t_r = t - \frac{|r-r'|}{c}$ همان زمان تأخیری است چون در اینجا با تقریباً نقطه‌ای مواجه هستیم، رابطه (۱) به رابطه زیر تقلیل پیدا می‌کند:

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q \cos \omega(t - \frac{\sqrt{x^r + y^r + (z-d)^r}}{c})}{\sqrt{x^r + y^r + (z-d)^r}} - \frac{Q \cos \omega(t - \frac{\sqrt{x^r + y^r + (z+d)^r}}{c})}{\sqrt{x^r + y^r + (z+d)^r}} \right] \quad (2)$$

حال داریم:

$$\sqrt{x^r + y^r + (z-d)^r} = \sqrt{x^r + y^r + z^r - 2zd + d^r} = r \sqrt{1 - \frac{2zd}{r^r}} \approx r(1 - \frac{zd}{r^r}) \quad (3)$$

در (۳) $r = \sqrt{x^r + y^r + z^r}$ و از مرتبه $O\left(\frac{d^r}{r^r}\right)$ صرف‌نظر کرده‌ایم. با توجه به اینکه $\frac{z}{r} = \cos \theta$ می‌توان (۳) را بصورت زیر نوشت:

$$r\left(1 - \frac{zd}{r^r}\right) = r\left(1 - \frac{\cos \theta d}{r}\right) \quad (4)$$

$$\sqrt{x^r + y^r + (z+d)^r} = r\left(1 + \frac{\cos \theta d}{r}\right) \quad (5)$$

$$\cos \omega \left(t - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}}{c} \right) = \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \left(1 - \frac{\cos \theta d}{r} \right) \right)$$

$$= \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\cos \theta d}{c} \right) = \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega \cos \theta d}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

همچنین:

$$\cos \omega \left(t - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}{c} \right) = \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega \cos \theta d}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

در رابطه (۴) $\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\cos \theta d}{c} \right)$ را حول نقطه $\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$ بسط داده‌ایم. مشابه می‌توان نوشت:

$$\varphi(r, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega \cos \theta d}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\left(1 - \frac{\cos \theta d}{r} \right)} - \frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega \cos \theta d}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\left(1 + \frac{\cos \theta d}{r} \right)} \right]$$

با گذارن (۴) تا (۸) در (۹) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1 \mp \frac{\cos \theta d}{r}} = 1 \pm \frac{\cos \theta d}{r}$$

حال می‌توان از تقریب زیر استفاده کرد:

$$(10) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega \cos \theta d}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \left[1 + \frac{\cos \theta d}{r} \right] - \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega \cos \theta d}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \left[1 - \frac{\cos \theta d}{r} \right] \right]$$

در تقریب مرتبه اول داریم:

$$(11) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cos \theta d}{r} - \frac{r \omega \cos \theta d}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

از طرفی $P_0 = r Q d$ پس می‌توان (۱۲) را بصورت زیر نوشت:

$$(12) = \frac{P_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{P_0 \omega \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

طبق فرض سؤال $\frac{c}{\omega} \ll r$ پس $\left(\frac{cr}{\omega} \right)^{-1} \ll r^{-2}$ و در نتیجه از جمله اول در (۱۳) در مقابل جمله دوم صرف‌نظر می‌کنیم. پس می‌توان نوشت:

$$\varphi(r, t) = \frac{-P_0 \omega \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

۲۸- گزینه «۱» از پیمانه لورنتز استفاده می‌کنیم:

$$\vec{V} \cdot \vec{A} = \frac{-1}{C^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

از نتیجه سؤال (۲۷) داریم:

$$\frac{-1}{C^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{P_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 C^2} \frac{\cos \theta}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{C} \right)$$

با توجه به رابطه $\vec{A}_z = \frac{\mu_0 \vec{c}_z}{4\pi} \int_{-d}^d dz \frac{I(t_R, z)}{f(z)}$ و اینکه جریان الکتریکی ما در راستای محور z در حال تغییر است انتظار داریم $\vec{A}$ در راستای z باشد پس:

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{P_0 \omega^r}{4\pi \epsilon_0 C^r} \frac{\cos \theta}{r} \cos c(t - \frac{r}{C}) \quad (۳)$$

از طرفی چون $\frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta$ پس:

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{P_0 \omega^r}{4\pi \epsilon_0 C^r r} \cos \omega(t - \frac{r}{C}) \quad (۴)$$

پس:

$$A_z = \int \frac{P_0 \omega^r}{4\pi \epsilon_0 C^r r} \cos \omega(t - \frac{r}{C}) dr + D \quad (۵)$$

در (۵) ثابت انتگرال گیری است. میزان مشتق $\frac{1}{r}$ در فواصل بزرگ نسبت به $\cos \omega(t - \frac{r}{C})$ نسبت به متغیر r بسیار کم است. بنابراین در فواصل بزرگ r نسبت به $\cos \omega(t - \frac{r}{C})$ ثابت فرض کرده و (۵) را بصورت زیر می نویسیم:

$$A_z(r, t) = \left(\frac{P_0 \omega^r}{4\pi \epsilon_0 C^r r} \int \cos \omega(t - \frac{r}{C}) dr + D \right) \hat{k} \quad (۶)$$

$$= \left(-\frac{P_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 C^r r} \sin \omega(t - \frac{r}{C}) + D \right) \hat{k}$$

در $r \rightarrow \infty$ انتظار داریم $A_z \rightarrow 0$ پس $D = 0$ و بنابراین می توان نوشت:

$$A_z = -\frac{P_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 C^r r} \sin \omega(t - \frac{r}{C}) \hat{z} \quad (۷)$$

که همان گزینه (۱) است.

۲۱- گزینه «۲» با توجه به اینکه رسانش دیواره های موج بر برابر با بی نهایت است انتظار داریم که در مرزها $E_z = 0$ باشد که این شرط تنها توسط گزینه های (۲) و (۴) ارضا می شود. پس پاسخ صحیح یا گزینه (۲) یا گزینه (۴) است. از معادله موج زیر استفاده می کنیم.

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (۱)$$

پس برای مولفه z می توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (۲)$$

فرض می کنیم $E_z = f(x)g(y)h(z)I(t)$ باشد که f و g و h و I توابعی کلی هستند که فقط به x و y و z و t بستگی دارند. با گذاردن E_z پیشنهادی در (۲) و کمی ساده سازی داریم:

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} - \frac{1}{C^2} \frac{I''}{I} = 0 \quad (۳)$$

چون سمت راست (۳) ثابت و سمت چپ توابعی مجزا از هم نسبت به متغیر هستند، هر کدام از جملات سمت چپ باید برابر یک ثابت باشند.

$$\frac{f''}{f} = +k_x^2 \frac{g''}{g} = +k_y^2 \quad \frac{h''}{h} = +k_z^2 \quad \frac{1}{C^2} \frac{I''}{I} = +\frac{w^2}{C^2} \quad (۴)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = -\frac{\omega^2}{C^2} \quad (۵)$$

در ادامه دقت کنید که $k_{x,y,z}^2$ می توانند منفی یا مثبت باشند. اما همان طور که از شکل سؤال هم پیداست به یک تقارن مهم توجه کنید.

چنانچه موجبر مثلثی شکل ما نسبت به خط $y = x$ بازتاب داده شود انتظار نداریم که صورت کلی جواب‌های ما تغییر کند. پس می‌توان تصور کرد که جواب ما بنابر تقارن هم باید در نیمه بالایی مربع نمایش داده شده در شکل و هم در نیمه پایین آن صدق کند که همان پاسخ معمول موجبر مربعی با شرایط مرزی متناوب را خواهیم داشت. تنها شرطی که به مسأله اضافه شده است آن است که $E_z(x=y) = 0$ هم باید برقرار باشد. در پاسخ کلی که از موج بر مربعی داریم $k_x^2, k_y^2 < 0$. همچنین به دلیل اینکه موج در حال انتشار است پس $k_z^2 < 0$. پس خواهیم داشت:

$$f(x) = A \sin k_x x + B \cos k_x x$$

$$g(y) = C \sin k_y y + D \cos k_y y$$

(۶)

بسته به جهت انتشار علامت + یا - انتخاب می‌شود

(۷)

حال با شرایط مرزی مربع داریم:

(۸)

(۹)

پس جواب اولیه ما در راستای محورهای x و y صورت زیر را دارد:

(۱۰)

اما شرط مرزی $x = y$ ایجاب می‌کند که جواب ما نسبت به جابجایی x, y پادمتقارن باشد. پس کلی‌ترین جواب ممکن در راستای yx به صورت زیر خواهد بود

(۱۱)

که به‌وضوح $k(x, x) = 0$ خواهد بود. در ادامه باید $h(z)$ را در $k(x, y)$ ضرب کنیم و جواب نهایی زیر را برای قسمت فضایی خواهیم داشت:

(۱۲)

و از شرط (۵) داریم:

(۱۳)

$$k_z = \pm \sqrt{-\frac{\omega^2}{C^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

۳۰. گزینه «۱» فرکانس قطع عبارت است از کمترین فرکانسی که چنانچه فرکانس موج ما از این مقدار حدی کمتر شود میدان در راستای z انتشار نخواهد داشت. به عبارتی چنانچه $w < w_{\text{cut off}}$ ، آنگاه K_z^2 در پاسخ سؤال قبل مثبت خواهد بود و جواب به صورت نمایی افت خواهد کرد. در این حالت هیچ انتشاری نداریم. بدین منظور از رابطه (۱۲) سؤال (۲۹) استفاده می‌کنیم.

$$k_z = \sqrt{-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

می‌خواهیم $K_z^2 \leq 0$ پس باید داشته باشیم، $\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \leq \frac{\omega}{c} = \frac{\gamma \pi v}{c}$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{\gamma \pi v_{mn}}{c} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{m^2 + n^2} \Rightarrow v_{mn} = \frac{C}{\gamma a} \sqrt{m^2 + n^2}$$

که همان گزینه (۱) می‌باشد.

مقایسه آماری پیشرفته ۱

۱- فرضیه ۲۳۰ برای بدست آوردن دمای نهایی از وابستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

۲- $U_f = U_1 + U_2$
که منظور از U_1 و U_2 انرژی اولیه گاز درون ظرف‌ها و U_f انرژی نهایی آن‌هاست. می‌دانیم که انرژی درونی یک گاز تک‌اتمی با رابطه $U = \frac{r}{2} NK_B T$ قابل محاسبه است که N تعداد ذرات گاز K_B ثابت بولتزمن و T دمای گاز است.

$$\frac{r}{2} (rN + N) K_B T_f = \frac{r}{2} \times r N K_B T + \frac{r}{2} N K_B (rT) \quad (1)$$

$$\Rightarrow r N K_B T_f = r N K_B T \Rightarrow T_f = T \quad (2)$$

پس تا این مرحله یا گزینه (۲) یا گزینه (۳) پاسخ خواهد بود. در مرحله بعدی در داخل ظرف rN ذره داریم و انرژی داخلی ظرف بر حسب دما خواهد بود.

$$U_f(T') = \frac{r}{2} (rN + N) K_B T' = \frac{r N K_B}{2} T' \quad (3)$$

$$\text{از طرفی } C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \text{ پس}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U_f(T')}{\partial T'} \right)_V = \frac{r N K_B}{2} \quad (4)$$

پس گزینه (۳) پاسخ خواهد بود.

۳- گزینه «ا» می‌دانیم که همواره رابطه‌ی مقابل برقرار است.

$$dU = -PdV + \mu dN + TdS$$

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V}$$

و (۱) می‌توان نوشت:

(۲)

پس از U و رابطه (۲) که در صورت سؤال داده شده بدست می‌آوریم:

(۳)

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\frac{5}{2} h^r N^{\frac{r}{2}}}{f \pi m V^{\frac{r}{2}}} \exp \left(\frac{rS}{r N K_B} - \frac{5}{r} \right) - \frac{rS}{r N^r K_B} U \\ &= U \left[\frac{5}{r N} - \frac{rS}{r N^r K_B} \right] \end{aligned}$$

از طرفی از رابطه سؤال S را بر حسب U بازنویسی می‌کنیم.

(۴)

$$\exp \left(\frac{rS}{r N K_B} - \frac{5}{r} \right) = \frac{f \pi m V^{\frac{r}{2}} U}{r h^r N^{\frac{r}{2}}}$$

$$\frac{rS}{r N K_B} - \frac{5}{r} = \ln \frac{f \pi m V^{\frac{r}{2}} U}{r h^r N^{\frac{r}{2}}} = \ln \left[V \left(\frac{f \pi m U}{r h^r N^{\frac{r}{2}}} \right)^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{r}{2}}$$

(۵)

$$= \frac{r}{2} \ln \frac{V}{N h^r} \left(\frac{f \pi m U}{r N} \right)^{\frac{r}{2}} \Rightarrow$$

$$S = Nk_B \ln \frac{V}{N} + \frac{\Delta}{r} Nk_B + \frac{r}{r} \ln \frac{r \pi m U}{r N h^r}$$

(۷)

چنانچه قرار دهیم $U = \frac{r}{2} Nk_B T$ در از (۷) داریم:

(۸)

حال (۸) را در (۴) قرار می‌دهیم و آنگاه داریم:

(۹)

با قرار دادن $U = \frac{r}{2} Nk_B T$ در (۹) داریم:

(۱۰)

حال از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

پس:

$$\begin{aligned} \mu_f &= \frac{r}{r} K_B T \ln \left[\frac{rN}{rV} \left(\frac{h^r}{r \pi m K_B T} \right)^{\frac{r}{r}} \right] = \frac{r}{r} K_B T \ln \left[\frac{rN}{V} \times \frac{r}{r} \left(\frac{h^r}{r \pi m K_B T} \right)^{\frac{r}{r}} \left(\frac{r}{r} \right)^{\frac{r}{r}} \right] \\ &= \frac{r}{r} K_B T \ln \left[\frac{rN}{V} \left(\frac{h^r}{r \pi m K_B T} \right)^{\frac{r}{r}} \left(\frac{r}{r} \right)^{\frac{\Delta}{r}} \right] \end{aligned}$$

که همان گزینه (۱) است.

۳۳- گزینه «۴» از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

(۱)

$$S = Nk_B \ln \frac{V}{N} + \frac{r}{r} Nk_B \left[\frac{\Delta}{r} + \ln \frac{r \pi m K_B T}{h^r} \right]$$

ابتدا S را برای هر یک از ظروف گاز و حالت اولیه محاسبه می‌کنیم.

الف) ظرف با N ذره و دمای T_f و حجم V

(۲)

$$S_f = Nk_B \ln \frac{V}{N} + \frac{r}{r} Nk_B \left[\frac{\Delta}{r} + \ln \frac{r \pi m K_B T}{h^r} \right]$$

ب) ظرف با ۲N ذره و دمای T و حجم V

(۳)

$$S_r = r Nk_B \ln \frac{V}{N} + r Nk_B \left[\frac{\Delta}{r} + \ln \frac{r \pi m K_B T}{h^r} \right]$$

حال S را برای ظرف در حالتی که دو گاز مخلوط شده‌اند بدست می‌آوریم:

ج) ظرف با ۲N ذره و دمای $\frac{r}{2} T$ و حجم ۲V

(۴)

$$S_f = r Nk_B \ln \frac{2V}{2N} + \frac{r}{r} Nk_B \left[\frac{\Delta}{r} + \ln \frac{r \pi m K_B T}{h^r} \right]$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S_f - (S_1 + S_2) \\ &= \tau N k_B \left[\ln \frac{\tau}{\tau'} + \ln \frac{V}{N} \right] + \frac{\gamma}{\tau} N k_B \left[\ln \frac{\Lambda}{\tau} + \ln \frac{\pi m k T}{h^2} \right] \\ &\quad - \tau N k_B \left[\ln \frac{1}{\tau'} + \ln \frac{V}{N} \right] - N k_B \ln \frac{V}{N} - \tau N k_B \left[\ln \tau + \ln \frac{\pi m k T}{h^2} \right] - \frac{\gamma}{\tau} N k_B \left[\ln \tau + \ln \frac{\pi m k T}{h^2} \right] \\ &= \tau N k_B (\ln \tau - \ln \tau') + \frac{\gamma}{\tau} N k_B [\tau \ln \tau - \ln \tau] \\ &\quad + \tau N k_B \ln \tau - \tau N k_B \ln \tau\end{aligned}$$

حل شراب $\ln \tau$ و $\ln \tau'$ را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\ln \tau : \tau N k_B + \frac{\gamma \tau}{\tau} N k_B + \tau N k_B - \tau N k_B &= k_B T \frac{\gamma \Delta}{\tau} \\ \ln \tau' : -\tau N k_B - \frac{\gamma}{\tau} N k_B &= \frac{-\gamma \Delta}{\tau} N k_B\end{aligned}$$

$$\Delta S = \frac{1}{\tau} N k_B (\tau \Delta \ln \tau - \gamma \Delta \ln \tau')$$

که همان نتیجه (۹) می‌باشد.

همان‌گونه که با توجه به نامگذاری واضح است که $P_0 = \tau$ و بنابراین مختصات مکانی چرخنده در یک فضای دوبعدی φ و θ تغییر می‌کند. می‌دانیم که تعداد دیگر حالات برای مجموعه‌ای از N ذره که در فضای سه بعدی در حال حرکت هستند با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\Sigma(E) = \frac{1}{h^3} \int \dots \int_{P \leq E} d^3 P d^3 Q$$

که با حد ولایی برای انرژی ذرات است. در اینجا فضا دو بعدی بوده و $N=1$ پس:

$$\Sigma = \frac{1}{h^2} \int d\varphi d\theta dP_\varphi dP_\theta$$

حال تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} \varphi \rightarrow \varphi \\ \theta \rightarrow \theta \\ P_\varphi \rightarrow \frac{P_\varphi}{\sin \theta} \\ P_\theta \rightarrow P_\theta \end{cases}$$

ماتریس ژاکوبی حاصل از این تغییر متغیر را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که اگر متغیرهای x_1 تا x_n به x'_1 تا x'_n تغییر پیدا کنند، ماتریس ژاکوبی بصورت زیر داده می‌شود.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial x'_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial x'_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} \end{bmatrix}$$

و نکته ای که تبدیل عنصر حجم $\delta = 1$ با عنصر حجم $\prod_{i=1}^n dx_i$ بصورت زیر داده می‌شود:

$$\prod_{i=1}^n dx_i = \det J \prod_{i=1}^n dx'_i$$

حال ماتریس را یکی تغییر متغیر (۳) بصورت زیر خواهد بود:

$$(4) \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \cos \phi & -\rho \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi & \rho \cos \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \phi & \rho \cos \phi & \rho \sin \phi \end{bmatrix}$$

چون J یک ماتریس بالامتلائی است و دترمینان آن با حاصل ضرب عناصر روی قطر داده می شود:

$$(5) \quad \det J = 1 \times 1 \times \frac{\partial P_0}{\partial \left(\frac{P_0}{s \sin \theta} \right)} \times 1 = s \sin \theta$$

$$(6) \quad \frac{1}{h} \int d\rho d\theta d\phi \frac{\partial P_0}{\partial \left(\frac{P_0}{s \sin \theta} \right)} = \frac{1}{h} \int d\rho d\theta d\phi \sin \theta \left(\frac{P_0}{s \sin \theta} \right) dP_0 =$$

دقت کنیم که $\frac{P_0}{s \sin \theta}$ به عنوان یک متغیر مستقل در (۶) در داخل دیفرانسیل حضور دارد و صرفاً با یک ضرب و تقسیم ساده $s \sin \theta$ در داخل انتگرال اولیه به (۶) نمی رسیم.

انتگرال (۶) را روی θ و ϕ می گیریم:

$$(7) \quad \frac{1}{h} \int d\rho d\theta d\phi \sin \theta \left(\frac{P_0}{s \sin \theta} \right) dP_0 = \frac{4\pi}{h} \int d \left(\frac{P_0}{s \sin \theta} \right) dP_0$$

حال (۱۰) را می خواهیم در فضای زیر بنست آوریم:

$$(8) \quad L = \sqrt{P_0^2 + \frac{P_0^2}{s^2 \sin^2 \theta}}$$

واضح است که (۱۰) همان مساحت بین دو دایره به شعاع های L و τL در شکل فوق است پس:

$$(9) \quad (10) = \frac{4\pi}{h} \times \pi ((\tau L)^2 - L^2) = \frac{12\pi^2 L^2}{h}$$

که همان گزینه (۳) است.

۳۵- گزینه ۲۰ فرض کنیم N_1 ذره دارای انرژی ϵ_1 و N_2 ذره دارای انرژی ϵ_2 هستند آنگاه طبق فرض سوال روابط زیر برقرارند:

$$(1) \quad N_1 \epsilon_1 + N_2 \epsilon_2 = E$$

$$(2) \quad N_1 + N_2 = N$$

پس با حل (۱) و (۲) می توان N_1 و N_2 را بصورت زیر بنست آورد:

$$(3) \quad N_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) = E - N \epsilon_1 \Rightarrow N_2 = \frac{-N \epsilon_1 + E}{-\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$(4) \quad N_1 (\epsilon_1 - \epsilon_2) = E - N \epsilon_2 \Rightarrow N_1 = \frac{E - N \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$$

می دانیم که $T = \frac{1}{\frac{\partial S}{\partial E}}$ و $S = K_B \ln \Omega$ که S آنترپی، K_B ثابت بولتزمن و Ω تعداد حالت های سیستم است به منظور محاسبه دمای تعادلی ابتدا باید آنترپی را بر حسب انرژی محاسبه کرده و به منظور محاسبه آنترپی به تعداد حالت های سیستم نیاز داریم. تعداد حالت های سیستم عبارتند از N_1 ذره از N ذره می توانند انرژی ϵ_1 و N_2 ذره از N ذره انرژی ϵ_2 را داشته باشند.

$$\Omega = \binom{N}{N_1} \binom{N-N_1}{N_2} = \binom{N}{N_1} \binom{N}{N_2} = \frac{N!}{N_1! N_2!} \quad (5)$$

تعداد حالت های N_1 ذره
تعداد حالت های N_2 ذره
تعداد حالت های N ذره

$$S = K_B \ln \Omega = K_B \ln \frac{N!}{N_1! N_2!} = K_B [\ln N! - \ln N_1! - \ln N_2!] \quad (6)$$

حال از تقریب استرلینگ استفاده می کنیم برای N های بزرگ تقریب زیر برقرار است.

$$\ln N! = N \ln N - N \quad (7)$$

$$S = K_B [N \ln N - N - N_1 \ln N_1 + N_1 - N_2 \ln N_2 + N_2] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial E} &= K_B \left[\frac{\partial N_1}{\partial E} \ln N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial E} - \frac{\partial N_2}{\partial E} \ln N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial E} + \frac{\partial N}{\partial E} \right] \\ &= -K_B \left[\frac{\partial N_1}{\partial E} \ln N_1 + \frac{\partial N_2}{\partial E} \ln N_2 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial E} = \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}, \quad \frac{\partial N_1}{\partial E} = \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{-K_B}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{N_2}{N_1} = \frac{-K_B}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{N_2 - E}{N_1 - E} = \frac{-K_B}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{N_2 - E}{N_1 - E} \\ &= \frac{K_B}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \ln \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1} = \frac{-K_B}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} = \frac{K_B}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \end{aligned} \quad (11)$$

پس از گذاردن (11) در رابطه دمای تعادلی بر حسب انرژی و آنترپی خواهیم داشت:

$$T_{\text{تعادلی}} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{K_B \ln \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2}} \quad (12)$$

که همان گرینه (2) است.

22- گرینه 1) تابع بارش سیستم با رابطه زیر داده می شود:

$$Z = \left(g_1 e^{\frac{-\epsilon_1}{K_B T}} + g_2 e^{\frac{-\epsilon_2}{K_B T}} \right)^N \quad (1)$$

$$= \left(g_1 + g_2 e^{\frac{-\epsilon_2}{K_B T}} \right)^N \quad (2)$$

$$E = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(g_1 + g_2 e^{-\beta \epsilon})^N = \frac{N g_2 \epsilon e^{-\beta \epsilon}}{g_1 + g_2 e^{-\beta \epsilon}}$$

حال انرژی متوسط سیستم از رابطه زیر بدست می آید: $\langle \beta \rangle = \frac{1}{K_B T}$

$$C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{N g_r \varepsilon^r \left(-\frac{\partial \beta}{\partial T} \right) e^{-\beta \varepsilon_r} (g_r + g_r e^{-\beta \varepsilon_r}) + \varepsilon^r N g_r^r \frac{\partial \beta}{\partial T} e^{-\beta \varepsilon_r}}{(g_r + g_r e^{-\beta \varepsilon_r})^r}$$

حال برای بدست آوردن ظرفیت گرمایی از رابطه $C_v = \frac{\partial E}{\partial T}$ استفاده می کنیم.

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\frac{N - \varepsilon^r}{K_B T^r} (g_1 g_r e^{-\beta \varepsilon} + g_r^r e^{-r \beta \varepsilon}) - \frac{\varepsilon^r}{K_B T^r} N g_r^r e^{-r \beta \varepsilon}}{(g_1 + g_r e^{-\beta \varepsilon})^r}$$

$$\therefore \frac{\partial \beta}{\partial T} = \frac{-1}{K_B T^2}$$

$$= \frac{Ng_1 g_r e^{\epsilon} e^{-\beta \epsilon}}{K_B T^r (g_1 + g_r e^{-\beta \epsilon})^r} = \frac{Ng_1 g_r e^{\epsilon}}{K_B T^r e^{\beta \epsilon} (g_1 + g_r e^{-\beta \epsilon})^r}$$

$$= \frac{Ng_1 g_1 e^{\tau}}{k_B T^{\tau} (g_1 e^{\tau} + g_2 e^{\tau})^{\tau}}$$

که گزینه (۱) می باشد. دیده می شود که فرض تمیزپذیری با نایزیری تفاوتی در نتیجه نهایی ندارد.

۳۷- گزینه ۲۰ اگر سوزن در حالت رو به بالا باشد به سیستم انرژی mgL_0 و اگر رو به پایین باشد. نسبت می‌دهیم. اگر N سوزن داشت باشیم تابع

بارش بصورت زیر است (سوزن‌ها جایگزین و تغییرپذیری‌ند. پس از $\frac{1}{N!}$ صرف‌نظر می‌کنیم)

$$z = \left(1 + e^{\frac{-mg l_0}{K_B T}} \right)^N$$

تعریف می کنیم $A = \frac{mg}{K_B T}$ ، آنگاه:

$$\begin{aligned} \frac{-\partial \ln z}{\partial A} &= -N \frac{\partial}{\partial A} \ln(1 + e^{-A l_0}) = \frac{N l_0 e^{-A l_0}}{1 + e^{-A l_0}} \\ &= \frac{N l_0}{1 + e^{A l_0}} = \frac{N l_0}{1 + e^{\frac{m g l_0}{k_B T}}} \end{aligned}$$

اگر $T \gg \frac{mgl_0}{k_B T}$ می توان $e^{\frac{mgl_0}{k_B T}}$ را بصورت زیر تقریب زد:

$$e^{\frac{mg l_0}{K_B T}} = 1 + \frac{mg l_0}{K_B T}$$

$$\frac{-\partial \ln z}{\partial A} = \frac{N\ell_0}{1 + e^{\frac{mg\ell_0}{K_B T}}} = \frac{N\ell_0}{r + \frac{mg\ell_0}{K_B T}} = \frac{N\ell_0}{r} \left(1 - \frac{mg\ell_0}{rK_B T}\right)$$

فراوانی کم: $mg\ell_0$ و به حالت پایین انرژی صفر نسبت دادیم. پس در واقع در (۴) ما میانگین اختلاف طول زنجیر نسبت به حالتی که زنجیر

ما به حالت بالا انرژی $mg\ell_0$ را محاسبه کردیم پس:

$$\langle \ell \rangle = N\ell_0 - \frac{N\ell_0}{2} \left(1 - \frac{mg\ell_0}{2K_B T}\right) = \frac{N\ell_0}{2} \left(1 + \frac{mg\ell_0}{2K_B T}\right)$$

(۵) از رابطه تکانه زاویه کل برای مجموع $\vec{L}$ و $\vec{S}$ داریم:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

(۱) اگر $S = \frac{1}{2}$ و $\ell = 1$ باشد مقادیر ممکن برای $\vec{J}$ در رابطه بازه زیر قرار دارند:

$$|\ell - S| \leq j \leq |\ell + S| \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq j \leq 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq j \leq \frac{3}{2}$$

(۲) مقادیر ممکن برای J بصورت زیر هستند:

$$\begin{cases} j = \frac{3}{2} \\ j = \frac{1}{2} \end{cases}$$

دل می کنید $j = \frac{3}{2}$ مقادیر ممکن برای m_z (مؤلفه تکانه زاویه در راستای Z) به صورت زیر هستند:

$$j = \frac{3}{2} \Rightarrow m_z = -\frac{3}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar, \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar$$

$$j = \frac{1}{2} \Rightarrow m_z = -\frac{1}{2}\hbar, \frac{1}{2}\hbar$$

دل بداند یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور دوقطبی $\vec{\mu}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار گیرد، می دانیم که انرژی آن بصورت زیر است:

$$\vec{E} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B_z$$

که در تساوی دوم در (۵) فرض کرده ایم که $\vec{B}$ در راستای Z است. همچنین مقادیر ممکن برای μ_z هم از روی m_z ها و رابطه سؤال بصورت زیر است:

$$\vec{\mu} = g_N \mu_N \frac{\vec{J}}{\hbar} \Rightarrow \mu_z = g_N \mu_N \frac{J_z}{\hbar} = g_N \mu_N \frac{m_z}{\hbar} \times \hbar = g_N \mu_N m_z$$

پس $E = -g_N \mu_N \frac{m_z B_0}{\hbar}$ حال E را برای مقادیر مختلف m_z محاسبه می کنیم (تبهگنی ها از رابطه ۴ محاسبه شده اند).

$$m_z = -\frac{3}{2} \Rightarrow E = \frac{3}{2} g_N \mu_N B_0$$

تعداد تبهگنی ۱

$$m_z = -\frac{1}{2} \Rightarrow E = \frac{1}{2} g_N \mu_N B_0$$

تعداد تبهگنی ۲

$$m_z = +\frac{1}{2} \Rightarrow E = -\frac{1}{2} g_N \mu_N B_0$$

تعداد تبهگنی ۲

$$m_z = \frac{3}{2} \Rightarrow E = -\frac{3}{2} g_N \mu_N B_0$$

تعداد تبهگنی ۱

پس تابع با پلزش مربوط به یک ذره خواهد بود: $\left(\frac{g\mu_B B_0}{K_B T}\right) \equiv x$

$$Z = 1 \times e^{\frac{3}{2}x} + 2 \times e^{\frac{1}{2}x} + 2 \times e^{-\frac{1}{2}x} + 1 \times e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$= 2 \times \left[\frac{e^{\frac{3}{2}x} + e^{-\frac{3}{2}x}}{2} \right] + 2 \times \left[\frac{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{2} \right] = 2 \cosh \frac{3x}{2} + 2 \cosh \frac{x}{2}$$

حال تابع پارش کلی ضربه تابع پارش تک ذرات در هم خواهد بود:

$$Z_{کل} = \left[r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r} \right]^N$$

(۷)

نکته: چون ذرات تمییز پذیرند ضریب $\frac{1}{N!}$ در (۷) ظاهر نمی شود.

۳۹- گزینه «ا» تابع پارش را از سوال قبل بصورت زیر بدست آوردیم:

$$z = \left(r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r} \right)^N$$

(۱)

مغناطش یک ذره یا گشتاور ذوقطبی $\vec{\mu} = g_N \mu_N \frac{J}{h}$ است. بصورت $g_N J_N \mu_N$ تعریف می شود. حال مغناطش متوسط

دستگاه را با تعریف $\frac{B_0}{k_B T} = A$ می توان از روی (۱) بصورت زیر بدست آورد:

$$\langle \mu \rangle = + \frac{\partial \ln z}{\partial A} = N \frac{\partial}{\partial A} \ln \left(r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r} \right)$$

(۲)

$$= \frac{N \frac{\partial}{\partial A} \left(r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r} \right)}{r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r}} = \frac{N (r g_N \mu_N \sinh \frac{rx}{r} + f g_N \mu_N \sinh \frac{x}{r})}{r (\cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r})}$$

(۳)

$$= \frac{N g_N \mu_N}{r} \frac{r \sinh \frac{rx}{r} + f \sinh \frac{x}{r}}{\cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r}} = M_0 \frac{r \sinh \frac{rx}{r} + f \sinh \frac{x}{r}}{\cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r}}$$

(۴)

که در خط آخر از تعریف M_0 سوال استفاده کردیم.

۴۰- گزینه «۲» با یک آنسامبل grand canonic مواجه هستیم. تابع پارش این آنسامبل با رابطه زیر داده می شود:

$$Z = 1 e^{\frac{\mu_{x0}}{K_B T}} + 2 e^{\frac{\mu_{x1}}{K_B T}} + 1 e^{\frac{\mu_{x2}}{K_B T}}$$

(۱)

در (۱) از فرض تبهگنی هر حالت انرژی استفاده کردیم. همچنین رابطه کلی تر (۱) بصورت زیر است:

$$Z = \sum_i g_i e^{\frac{\mu N_i}{K_B T} - \frac{\epsilon_i}{K_B T}}$$

(۲)

که در (۲) N_i تعداد ذرات موجود در حالت انرژی ϵ_i و ϵ_i انرژی حالت و g_i تبهگنی حالت انرژی است. حال برای آوردن متوسط انرژی سیستم

کافی است از $\ln z$ نسبت به $-\beta = \frac{1}{K_B T}$ مشتق بگیریم:

(۳)

$$\langle E \rangle = - \frac{\partial \ln z}{\partial \beta} = \frac{r(\epsilon - \mu) e^{\beta(\mu - \epsilon)} + r(\epsilon - \mu) e^{2\beta(\mu - \epsilon)}}{1 + r e^{\beta(\mu - \epsilon)} + e^{2\beta(\mu - \epsilon)}}$$

حال داریم:

(۴)

$$1 + r e^{\beta(\mu - \epsilon)} + e^{2\beta(\mu - \epsilon)} = (1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)})^2$$

پس:

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \frac{r(\epsilon - \mu) e^{\beta(\mu - \epsilon)} (1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)})}{(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)})^2} = \frac{r(\epsilon - \mu) e^{\beta(\mu - \epsilon)}}{1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)}} \\ &= \frac{r(\epsilon - \mu)}{(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)}) e^{+\beta(\mu - \epsilon)}} = \frac{r(\epsilon - \mu)}{1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)}} \end{aligned}$$

(۵)

$$Z_{کل} = \left[r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r} \right]^N$$

حال تابع پارش کل ضرب تابع پارش تک تک ذرات در هم خواهد بود:

(۷)

نکته: چون ذرات تمییز پذیرند ضریب $\frac{1}{N!}$ در (۷) ظاهر نمی شود.

$$z = (r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r})^N$$

۳۹- گزینه ۱۰: تابع پارش را از سؤال قبل بصورت زیر بدست آوردیم:

(۱)

مغناطش یک ذره با گشتاور دوقطبی $\vec{\mu} = g_N \mu_N \frac{J}{\hbar}$ که در میدان مغناطیسی $B_0 \hat{k}$ است، بصورت $g_N \mu_N m_J$ تعریف می شود. حال مغناطش متوسط

دستگاه را با تعریف $\frac{B_0}{k_B T} = A$ می توان از روی (۱) بصورت زیر بدست آورد:

(۲)

$$\langle \mu \rangle = + \frac{\partial \ln z}{\partial A} = N \frac{\partial}{\partial A} \ln \left(r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r} \right)$$

$$= \frac{N \frac{\partial}{\partial A} (r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r})}{r \cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r}} = \frac{N (r g_N \mu_N \sin h \frac{rx}{r} + f g_N \mu_N \sin h \frac{x}{r})}{r (\cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r})}$$

(۳)

$$= \frac{N g_N \mu_N}{r} \frac{r \sin h \frac{rx}{r} + f \sin h \frac{x}{r}}{\cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r}} = M_0 \frac{r \sin h \frac{rx}{r} + f \sin h \frac{x}{r}}{\cosh \frac{rx}{r} + f \cosh \frac{x}{r}}$$

(۴)

که در خط آخر از تعریف M_0 سؤال استفاده کردیم.

۴۰- گزینه «۲» با یک آنسامبل grand canonic مواجه هستیم. تابع پارش این آنسامبل با رابطه زیر داده می شود:

$$Z = \underbrace{1e^{\frac{\mu_{x0}}{K_B T}}}_{\text{چندگانگی}} + \underbrace{re^{\frac{\mu_{x1}}{K_B T}}}_{\text{چندگانگی}} + \underbrace{1 \times e^{\frac{\mu_{x2}}{K_B T}}}_{\text{چندگانگی}}$$

(۱)

در (۱) از فرض تبهگنی هر حالت انرژی استفاده کردیم. همچنین رابطه کلی تر (۱) بصورت زیر است:

$$Z = \sum_i g_i e^{\frac{\mu N_i}{K_B T} - \frac{\epsilon_i}{K_B T}}$$

(۲)

که در (۲) N_i تعداد ذرات موجود در حالت انرژی ϵ_i و g_i تبهگنی حالت انرژی است. حال برای بدست آوردن متوسط انرژی سیستم

کافی است از $\ln z$ نسبت به $\beta = -\frac{1}{K_B T}$ مشتق بگیریم:

$$\langle E \rangle = - \frac{\partial \ln z}{\partial \beta} = \frac{r(\epsilon - \mu) e^{\beta \mu - \beta \epsilon} + r(\epsilon - \mu) e^{r \beta \mu - r \beta \epsilon}}{1 + r e^{\beta(\mu - \epsilon)} + e^{r \beta(\mu - \epsilon)}}$$

(۳)

حال داریم:

(۴)

$$1 + r e^{\beta(\mu - \epsilon)} + e^{r \beta(\mu - \epsilon)} = (1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)})^r$$

پس:

$$\langle r \rangle = \frac{r(\epsilon - \mu) e^{\beta(\mu - \epsilon)} (1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)})}{(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)})^r} = \frac{r(\epsilon - \mu) e^{\beta(\mu - \epsilon)}}{1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)}}$$

(۵)

$$= \frac{r(\epsilon - \mu)}{(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)}) e^{\beta(\mu - \epsilon)}} = \frac{r(\epsilon - \mu)}{1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)}}$$

در ادامه به تابع انرژی آزاد هلمهولتز استفاده می‌کنیم. در حالت کلی می‌دانیم که رابطه زیر بین رابطه انرژی آزاد و هلمهولتز و تابع پارش برقرار است.

$$A(N, V, T) = -K_B T \ln Q_N(V, T)$$

حال می‌دانیم که $Q_N(V, T)$ تابع پارش یک سیستم با حجم V و دمای T و تعداد ذره N است. در حالت تعادل شیمیایی در دما و حجم ثابت $dA = 0$ می‌باشد.

$$dA = -SdT - PdV + \sum \mu_i dN_i = 0$$

در (۲) همان فرض تعادل برقرار رفته است. در حجم و دمای ثابت $dT = dV = 0$ پس:

$$\sum \mu_i dN_i = 0$$

در (۳) فرض کنید با واکنش $A + B \rightleftharpoons AB$ روبرو هستیم. واضح است که $dN_A = dN_B = -dN_{AB}$

$$(\mu_A + \mu_B)dN_A = -\mu_{AB}dN_{AB} \Rightarrow \mu_A + \mu_B = \mu_{AB}$$

$$\mu_i = \frac{\partial A}{\partial N_i} = -K_B T \frac{\partial \ln Q_N}{\partial N_i}$$

$$-K_B T \frac{\partial \ln Q_N}{\partial N_A} + -K_B T \frac{\partial \ln Q_N}{\partial N_B} = -K_B T \frac{\partial \ln Q_N}{\partial N_{AB}}$$

حال تابع پارش سیستم تعادلی از ضرب تابع پارش تک تک ذرات بدست می‌آید. فرض کنید f_A تابع پارش یک ذره A باشد و مشابه f_B و f_{AB} برای AB و B آنگاه چون ذرات A با یکدیگر فرقی ندارند (همین‌طور ذرات B با هم و ذرات AB با هم)، آنگاه:

$$Q_N = \frac{(f_A)^{N_A}}{N_A!} \frac{(f_B)^{N_B}}{N_B!} \frac{(f_{AB})^{N_{AB}}}{N_{AB}!}$$

$$\frac{\partial \ln Q_N}{\partial N_i} = \frac{\partial \ln \left(\frac{f_i^{N_i}}{N_i!} \right)}{\partial N_i} = \frac{\partial}{\partial N_i} (N_i \ln f_i - N_i \ln N_i + N_i)$$

$$= \ln \frac{f_i}{N_i}$$

$$-K_B T \ln \frac{f_A}{N_A} - K_B T \ln \frac{f_B}{N_B} = -K_B T \ln \frac{f_{AB}}{N_{AB}}$$

$$\ln \frac{f_A}{N_A} + \ln \frac{f_B}{N_B} = \ln \frac{f_{AB}}{N_{AB}} \Rightarrow \frac{f_A f_B}{N_A N_B} = \frac{f_{AB}}{N_{AB}}$$

حال به محاسبه f_A و f_B و f_{AB} برای واکنش $H_2 \rightleftharpoons 2H$ می‌پردازیم. در این جا $AB = H_2$ و $B = H$ و A برای یک ذره آزاد با طیف پیوسته انرژی می‌دانیم که تابع پارش از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$f_A = f_B = \frac{1}{h^3} \int e^{\frac{-p^2}{2mKT}} d^3p d^3x = \frac{\pi^3 V}{h^3} \int_0^\infty e^{\frac{-p^2}{2mKT}} p^2 dp$$

$$dp = \sqrt{2mKT} dx; p^2 = 2mKT x^2$$

$$\text{حال تغییر متغیر } \frac{p}{\sqrt{2mKT}} \equiv x \text{ را می‌دهیم و آنگاه:}$$

پس

$$\int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{2mkT}} p^2 dp = (2mkT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-x^2} x^2 dx \quad (13)$$

از طرفی با انتگرال گیری جزء به جزء

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^\infty x (2xe^{-x^2}) dx = -\frac{x}{2} e^{-x^2} \Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad (14)$$

با گذاردن (۱۴) و (۱۳) و سپس (۱۳) در (۱۱) داریم

$$f_A = f_B = \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} = V \left(\frac{2\pi mK T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (15)$$

با تعریف $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m}}$ خواهیم داشت: (قرار می دهیم $m = m_H$)

$$f_A = f_B = V \left(\frac{m_H K T}{2\pi h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (16)$$

حال باید f_{H_r} را محاسبه کنیم. f_{H_r} تفاوت چندانی با f_H ندارد و تنها آنکه باید در محاسبه تابع پارس برای آن، انرژی آزاد داخلی مولکول هیدروژن، F_m را به حساب آوریم.

$$f_{H_r} = \frac{1}{h^3} \int e^{-\frac{p^2}{2m_{H_r} kT}} d^3p d^3x e^{-\frac{F_m}{K_B T}} = V \left(\frac{m_{H_r} K T}{2\pi h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{F_m}{K_B T}} \quad (17)$$

حال طبق تعریف سوال داریم $n_Q(m, T) = \left(\frac{m K_B T}{2\pi h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ با گذاردن f_H و f_{H_r} در وارون (۱۰) داریم:

$$\frac{V n_Q(m_{H_r}, T) e^{-\frac{F_m}{K_B T}}}{V^2 n_Q^2(m_H, T)} = \frac{N_{H_r}}{N_H^2} = \frac{1}{V} \times \frac{N_{H_r}}{\frac{N_H^2}{V}} = \frac{n_{H_r}}{n_H^2} \times \frac{1}{V} \quad (18)$$

پس

$$n_Q(m_{H_r}, T) n_Q^2(m_H, T) e^{-\frac{F_m}{K_B T}} = \frac{n_{H_r}}{n_H^2} = K(T) \quad (19)$$

دقت کنیم که در (۱۹) از تعریف ثابت تعادل شیمیایی استفاده شده است. به طور کلی در یک واکنش $A + B \rightleftharpoons AB$ ثابت تعادل بصورت زیر تعریف می شود:

(۲۰)

$$K(T) = \frac{n_{AB}}{n_A n_B}$$

که n_A و n_B و n_{AB} غلظت تعادلی هستند. $\left(n_A = \frac{N_A}{V} \right)$

۲۲- گزینه «۳» ابتدا به طیف انرژی یک ذره آزاد توجه می کنیم.

(۱)

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

که $\hat{p}^2 = \frac{h^2}{2m} \nabla^2$ پس (۱) بصورت زیر نوشته می شود:

(۲)

$$-\frac{h^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z)$$

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad \psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

در تابع (۲) در حالت کلی بصورت ضرب بهنجارش می‌باشد و انرژی خواهد بود. حال k_x و k_y و k_z را باید با توجه به شرایط مرزی تعیین کرد. این شرایط مرزی و طبقاً به k_x و k_y و k_z به هندسه سیستم کاملاً بستگی دارند. همچنین شرایط مرزی را تناوبی در نظر می‌گیرند. مثلاً برای یک مکعب به اضلاع l داریم:

$$\psi(x+l, y, z) = \psi(x, y+l, z) = \psi(x, y, z+l) = \psi(x, y, z)$$

$$n_i \in \mathbb{Z} \text{ و } k = \frac{2\pi n_i}{l}$$

به نتیجه می‌شود که $\psi_E(r)$ در (۴) و اینکه $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ داریم:

$$\langle r | e^{-\beta \hat{H}} | r' \rangle = \sum_E \langle r | E \rangle e^{-\beta E} \langle E | r' \rangle = \sum_E e^{-\beta E} \psi_E(r) \psi_E(r')$$

$$\langle r | e^{-\beta \hat{H}} | r' \rangle = \frac{1}{V} \sum_{n_1, n_2, n_3} \exp \left[\frac{-\beta \hbar^2 (k_{n_1}^2 + k_{n_2}^2 + k_{n_3}^2)}{2m} + i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right]$$

در حالتی که انرژی ویژه حالت‌ها خیلی به هم نزدیک شوند، داریم:

$$\sum_{n_1, n_2, n_3} \rightarrow \int dn_1 dn_2 dn_3 \rightarrow \frac{(r^3 - V)}{(2\pi)^3} \int d^3 k$$

$$(d) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp \left(\frac{-\beta \hbar^2 k^2}{2m} + i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right) d^3 k$$

$$(v) = \left(\frac{m}{2\pi \beta \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{-m}{2\beta \hbar^2} |\vec{r} - \vec{r}'|^2 \right)$$

یک انتگرال گاوسی است با مربع کامل کردن داخل آن داریم:

$$\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}) = \int \langle r | e^{-\beta \hat{H}} | r \rangle d^3 r = V \left(\frac{m}{2\pi \beta \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} = V \left(\frac{2\pi \beta \hbar^2}{m} \right)^{\frac{3}{2}} = (2\pi)^{\frac{-3}{2}} \left(\frac{\beta \hbar^2}{2m V^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{-3}{2}}$$

که با توجه به گزینه‌ها تنها گزینه (۳) می‌تواند پاسخ باشد. در اینجا $f(V) = (2\pi)^{\frac{-3}{2}}$. چنانچه به دنبال این موضوع باشیم که ضریب $f(V)$ که یک تابع کلی است از کجا وارد می‌شود، باید به (۶) دقت کنیم. در (۶) در حالت خاص مکعب زاکوبی تبدیل از (n_1, n_2, n_3) به (k_1, k_2, k_3) بود که از

$$\text{رابطه } k_{n_i} = \frac{2\pi n_i}{l} \text{ بدست آمد.}$$

در حالت کلی برای پیدا کردن $\bar{k}$ باید به مختصات مناسب برای توصیف حجم برویم. مثلاً برای گره مختصات کروی و ... در این مختصات مناسب (q_1, q_2, q_3) از شرط تناوبی در یک یا چند مؤلفه خاص رابطه $k_{q_i} = \frac{n_i}{\ell_i}$ که l_i به هندسه محیط بستگی دارد، بدست می‌آید. چنانچه dn_1, dn_2, dn_3 را در دستگاه مختصات (q_1, q_2, q_3) بازنویسی کنیم و بین n_i و k_{q_i} زاکوبی مورد نظر را وارد کنیم، در نهایت زاکوبی حاصل تابعی خواهد بود به صورت $g(V)$ که همان ضریب کلی خواهد بود.

برای نوشتن جواب بصورت گزینه (۳) می‌نویسیم.

$$g(V) = \frac{g(v)}{V} = v, f(v) = \frac{g(v)}{V}$$

که f صرفاً به هندسه وابسته است.

۴۳- گزینه «۳» فرض کنید N ذره داریم. در این صورت $N_{ex}(T) = N - N_{ex}(T)$ شرط شروع چگالش لوز - اینشتین آن است که:

(۱)

$$N > N_{ex}(T)$$

پس باید:

$$N > VT^{\frac{3}{2}} \frac{(\pi mk)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \times \frac{2}{\pi} \quad (2)$$

اگر N و V را ثابت نگه داریم آنگاه:

$$T < T_C = \frac{h^3}{\pi mk} \left(\frac{N}{V \times \frac{2}{\pi}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

پس:

$$N = \frac{2}{\pi} V \left(\frac{\pi mk T_C}{h^3} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

برای بدست آوردن درصد اتم‌ها در حالت پایه داریم:

$$\text{درصد حالت پایه} = \frac{N - N_{ex}(T)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

حال قرار می‌دهیم $T = 1(k)$ و $T_C = 2(k)$ آنگاه:

$$1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = \%81 \quad (6)$$

$$1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = \%52$$

ممکن است در هنگام محاسبه (۶) اشتباهاً به جای $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{2}$ قرار دهیم که آنگاه داریم:

که به گزینه (۳) می‌رسیم.

۴۴- گزینه «۱» می‌دانیم که تابع پارش ذرات فرمیونی بصورت زیر بدست می‌آید.

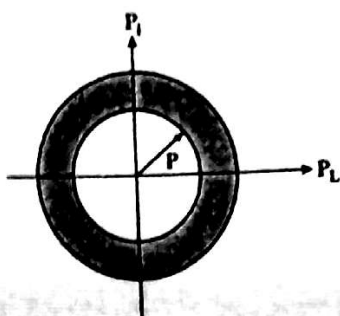
(۱)

$$Q = \prod_{\epsilon} (1 + e^{\beta\mu} e^{-\beta\epsilon}) \Rightarrow \ln Q = \sum_{\epsilon} \ln(1 + e^{\beta\mu} e^{-\beta\epsilon})$$

حال

$$\langle N \rangle = \frac{\partial \ln Q}{\partial (\beta\mu)} = \sum_{\epsilon} \frac{e^{\beta\mu} e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{\beta\mu} e^{-\beta\epsilon}} = \sum_{\epsilon} \frac{1}{e^{\beta\epsilon} e^{-\beta\mu} + 1} = \sum_{\epsilon} \frac{g(\epsilon)}{e^{B(\epsilon-\mu)} + 1} \quad (2)$$

در (۲) $g(\epsilon)$ تعداد تبهگنی حالات انرژی است. در حالتی که حالات انرژی به یکدیگر خیلی نزدیک می‌شوند (حالت پیوسته)، (۲) را به انتگرال تبدیل می‌کنیم. در حالتی که ذرات آزاد هستند. $g(\epsilon)$ همان تعداد میکرو حالات در حجم دیفرانسیلی شکل در فضای فاز است.



$$g(\epsilon) = \frac{V}{h^3} \int d^3x d^3p = \frac{V}{h^3} \int d^3p = \frac{4\pi V P^2 dP}{h^3} \quad (3)$$

$$N = \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1}$$

$$N = \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1}$$

$$(2) = \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} = \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1}$$

$$dU = Tds + \mu_e H dM$$

$$G = U - Ts - \mu_e H M$$

$$dG = -SdT - \mu_e H dM$$

حال توجه کنید که سرب یک ماده دیامغناطیسی می باشد ($\chi < 0$) همچنین در $T < T_c$ ماده دیامغناطیسی ایده آل بوده ($B = 0, T < T_c$) و بنابراین

$$dG = -SdT + \mu_e H dM$$

$$G_s(T) = G_s(0) + \frac{\mu_e H_c^2}{2}$$

که اندیس s به معنای آن است که در فاز ابررسانایی هستیم. همچنین در طول سطحی H_c که حالت عادی با ابررسانا در تعادل هستند، توابع انرژی

$$G_s = G_n(0) + \frac{\mu_e H_c^2}{2}$$

$$\frac{G}{T} = -S$$

$$(G_N - G_S) = \mu_e H_c \frac{dH_c}{dT} = -S_N + S_S$$

که اندیس n به معنای فاز نرمال است. از طرفی دیگر:

(6) و (7) داریم:

در دماهای بالا (H > H_c) و در دماهای پایین (H < H_c)

$$N(V) = \frac{g(V)}{V} = \frac{g(V)}{V}$$

$$N = N_{ex}(T)$$

$$N = V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2}$$

$$T < T_c = \frac{h^2}{2\pi m k}$$

$$N = \frac{2}{\pi} V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2}$$

در دماهای بالا

$$v = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$$v = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$$Q = \prod_i$$

$$\langle N \rangle =$$

$$\langle N \rangle = \gamma \times \frac{\pi V}{h^3} \int \frac{p^3 dp}{e^{\beta \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)} + 1}$$

$$\gamma \times \frac{\pi V m}{h^3} \times \sqrt{2m} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)} + 1}$$

$$(\delta) = \gamma \times \frac{\pi V m}{h^3} \times \sqrt{2m} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{\beta(x^2 - \mu)} + 1} = \gamma \times \frac{\pi V (\gamma m)^{\frac{3}{2}}}{(\gamma \pi)^{\frac{3}{2}} h^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{\beta(x^2 - \mu)} + 1} = \frac{V (\gamma m)^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}} h^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + e^{\beta(x^2 - \mu)}}$$

به همان گونه است

$$du = Tds + \mu_0 HdM$$

$$G = U - Ts - \mu_0 HM$$

$$dG = -SdT - \mu_0 MdH$$

حال توجه کنید که سرب یک ماده دیامغناطیسی می باشد ($X < 0$). همچنین در $T < T_c$ ماده دیامغناطیس ایده آل بوده ($B = 0, T < T_c$) و بنابراین داریم: $M = -H$

$$dG = -SdT + \mu_0 HdH$$

$$G_s(T) = G_s(0) + \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

که لندیس S به معنای آن است که در فاز ابررسانایی هستیم. همچنین در طول منحنی H_c که حالت عادی با ابررسانا در تعادل هستند، توابع انرژی گیس برابر هستند.

$$G_s = G_n(0) + \frac{\mu_0 H_c^2}{2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} = -S$$

$$\frac{\partial}{\partial T}(G_N - G_s) = \mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT} = -S_N + S_s$$

که لندیس n به معنای فاز نرمال است. از طرفی دیگر:

از طرفی $T \frac{\partial S}{\partial T} = C_v$ پس:

$$G_s - G_n = \mu_o T \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^r + \mu_o H_c \frac{\partial^r H_c}{\partial T^r} \quad (۹)$$

در دمای بحرانی $H_c = 0$ پس:

$$C_s - C_n \Big|_{T=T_c} = \mu_o T_c \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^r \quad (۱۰)$$

حال می‌دانیم که $H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^r \right)$ پس:

$$\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^r \Big|_{T=T_c} = \frac{r(H_c(0))^r}{T_c^r} \quad (۱۱)$$

حال $C_n = \gamma_o T$ و $C_s = \alpha_o T^r$ پس:

$$\alpha_o T_c^r - \gamma_o T_c = r \mu_o \frac{H_c^r(0)}{T_c} \Rightarrow \alpha_o T_c^r = \gamma_o + r \mu_o \frac{H_c^r(0)}{T_c} \quad (۱۲)$$