

Математик загварчлалын хичээл №2

ШУГАМАН ЗАГВАРУУД

Бид x -ээс хамаарсан y шугаман функц гэдгээр график нь шулуун байх функцийг ойлгох бөгөөд уг функцийг шулууны налалт ба огтлол хэлбэрийн тэгшитгэлийг ашиглан бичвэл

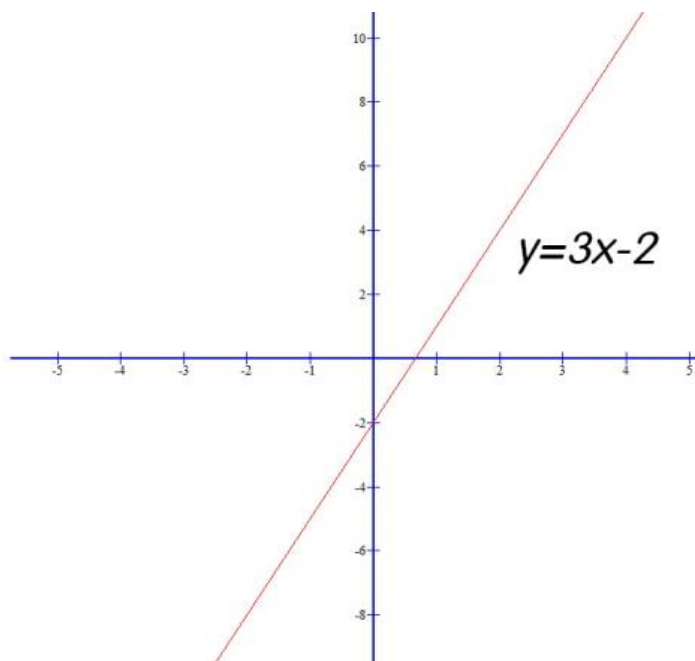
$$y = f(x) = mx + b$$

болох ба энд m нь шулууны налалт, b нь y -огтлол юм.

Шугаман функц тогтмол харьцаагаар өсдөг нь түүний онцлог чанар юм. (Зураг 1)

$f(x) = 3x - 2$ шугаман функцийн график ба түүвэр утгуудын хүснэгтийг харуулжээ. x -ийг 0.1-ээр нэмэгдүүлэх бүрт $f(x)$ функцийн утга 0.3-аар ихсэж байгааг харж болно. Тиймээс $f(x)$ нь x -ээс 3 дахин хурдан өсөж байна. Эндээс $y = 3x - 2$ функцийн графикийн налалт

x	$f(x)=3x-2$
1	1
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5



Хүснэгт1

Зураг 1

буюу 3 нь x -д харгалзах y -ийн өөрчлөлтийн харьцаа гэж хэлж болно.

ЖИШЭЭ 1

(а) хуурай агаар дээшээ хөөрөх тусмаа хөрдөг. Хэрэв гадаргуугийн температур 20°C ба 1км өндөрт температур T -г ($^{\circ}\text{C}$) өндөр h -аас (км) хамаарсан функцээр илэрхийл.

(б) (а) хэсгийн функцийн графикийг зур. Налалт нь юуг илэрхийлж байна вэ?

(в) 2.5км өндөрт температур ямар байх вэ?

(а) T -г шугаман гэж үзэж байгаа тул

$$T = mh + b$$

гэж бичиж болно. $h = 0$ үед $T = 20$ гэж өгсөн учир

$$20 = m * 0 + b = b$$

болно. Өөрөөр хэлбэл, y – огтлол нь $b = 20$ байна.

Мөн $h = 1$ үед $T = 10$ байх тул

$$10 = m * 1 + 20$$

болно. Иймд шулууны налалт $m = 10 - 20 = -10$ ба шугаман функц нь

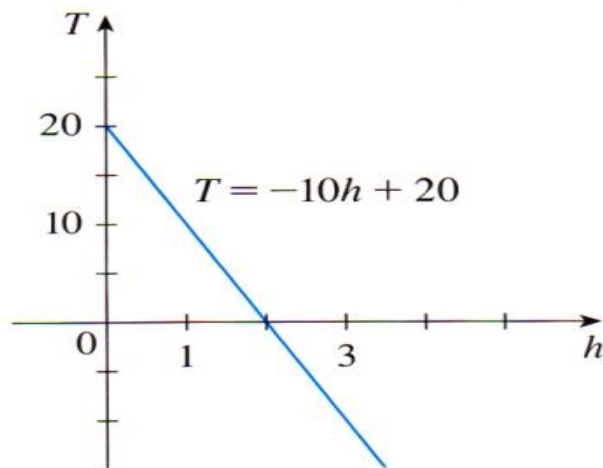
$$T = -10h + 20$$

гэж олдоно.

(б) графикийг (зураг2) үзүүлэв. Налалт нь $m = -10^\circ\text{C}/\text{км}$ ба энэ нь өндөрт харгалзах температурын өөрчлөлтийн харьцааг илэрхийлнэ.

(в) 2.5 км өндөрт температур

$$T = -10(2.5) + 20 = -5^\circ\text{C} \quad \text{байна.}$$



Зураг 2

Эхлээд өгөгдлүүдийг ашиглан шугаман математик загварыг боловсруулах жишээтэй танилцана (ЖИШЭЭ 2). Дараа нь (ЖИШЭЭ 3-т) тэрхүү шугаман загвараа ашиглан таамаглал /прогноз/ гаргахтай танилцана. Өөрөөр хэлбэл 1980-2012 оны өгөгдлүүдийг ашиглан 2020 оны таамаглалыг хэрхэн гаргаж байгааг үзүүлнэ.

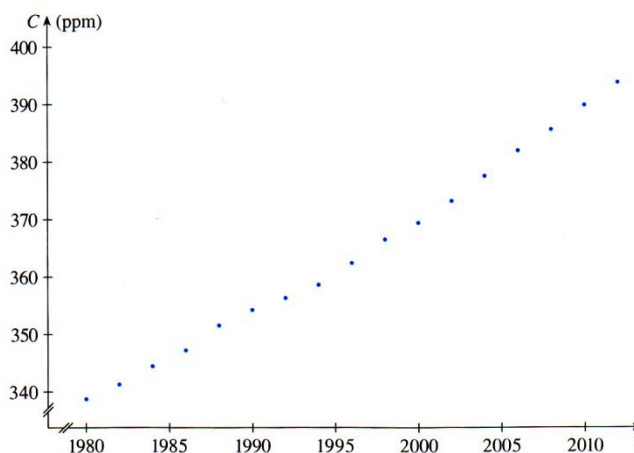
ЖИШЭЭ 2. Хүснэгтэд 1980-2012 оны хооронд Ус Цаг Уур Орчны Шинжилгээний Хүрээлэнгийн (УЦУОШХ) ажиглалтын төвд хийгдсэн агаарт байгаа нүүрсхүчлийн хийн агууламжийн түвшний дунджийг ppm буюу 10^{-6}г/м^3 нэгжээр хэмжиж харуулсан байна. Нүүрсхүчлийн хийн түвшний загварыг гаргахдаа хүснэгтийн өгөгдлийг ашигла.

БОДОЛТ: хүснэгтийн өгөгдлийг ашиглан Зураг 3-ийн цэгэн зураглалыг зуръя.

Энд t нь хугацаа (жилээр), C нь CO_2 -ын түвшин (ppm буюу 10^{-6}г/м^3) болно.

Он	CO_2 -ын түвшин (ppm-ээр)	Он	CO_2 -ын түвшин (ppm-ээр)
1980	338.7	1998	366.5
1982	341.2	2000	369.4
1984	344.4	2002	373.2
1986	347.2	2004	377.5
1988	351.5	2006	381.9
1990	354.2	2008	385.6
1992	356.3	2010	389.9
1994	358.6	2012	393.8
1996	362.4		

Хүснэгт 2



Зураг 3

Өгөгдсөн цэгүүд шулууны дагуу байрлаж байгаа мэт харагдаж байгаа тул энэ тохиолдолд шугаман загварыг сонгох нь зүйтэй юм. Гэхдээ өгөгдсөн цэгүүд рүү дөхөх боломжтой шулуун олон байгаа учраас алийг нь сонгох ёстой вэ? Нэг боломжит сонголт бол эхний болон эцсийн цэгийг дайруулсан шулуун юм. Энэ шулууны налалт нь

$$\frac{393.8 - 338.7}{2012 - 1980} = \frac{55.1}{32} = 1.721875 \approx 1.722$$

болно. Харин тэгшитгэл нь

$$C - 338.7 = 1.722(t - 1980)$$

буюу

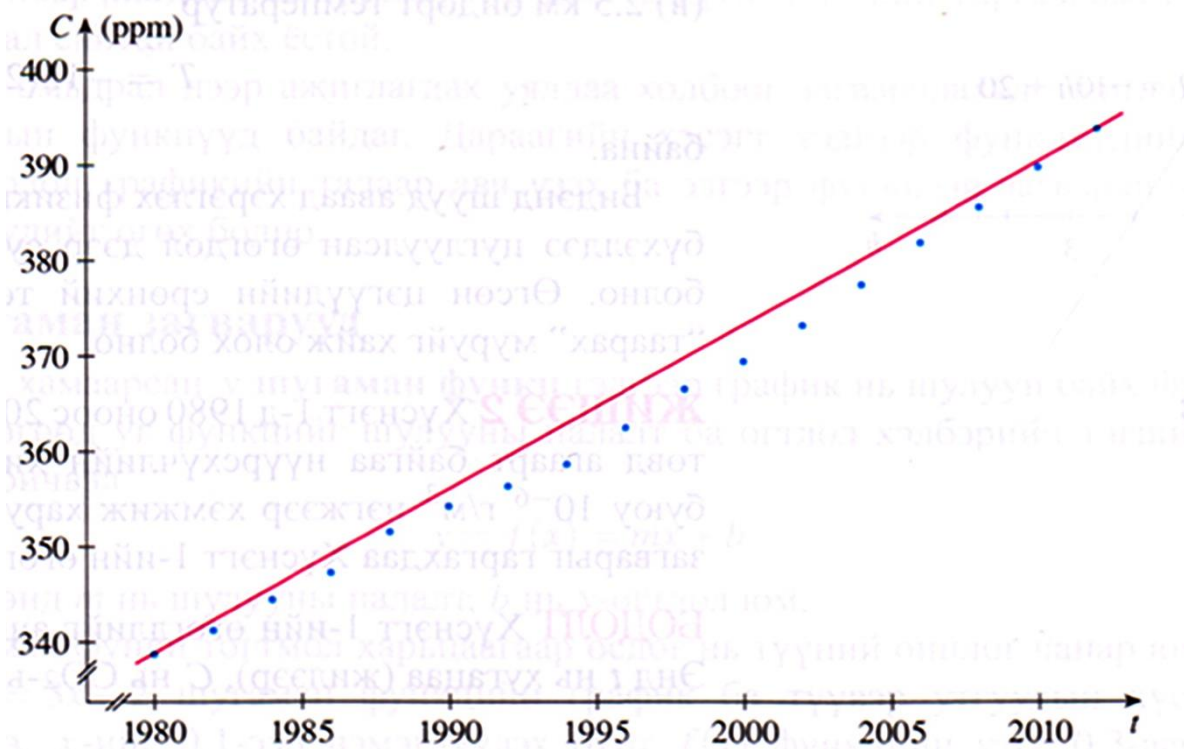
[Тэгшитгэл 1]

$$C = 1.722t - 3070.86$$

хэлбэртэй болно.

Функц ба загвар

Тэгшитгэл 1-ээр нүүрсхүчлийн хийн түвшний нэгэн боломжит шугаман загварыг өгсөн ба доорх зурагт үзүүлэв.



Зураг 4

Манай загвар нүүрсхүчлийн хийн бодит түвшний ихэнхээс нь өндөр утга өгч байна. Илүү сайн шугаман загварыг статистик шугаман регресс гэж нэрлэгдэх аргаар олж болно. График байгуулдаг тооны машин ашиглан өгөгдлийг өгөгдөл боловсруулах (data editor) хэсэгт оруулж, шугаман регрессийн командыг сонгоно. (Maple програм дээр stat package-ийн fit[leastsquare] командыг ашиглах, харин Mathematica програм дээр Fit командыг ашиглах). Тэгвэл регрессийн шулууны налалт ба у-огтлолыг

$$m = 1.71262 \quad b = -3054.14$$

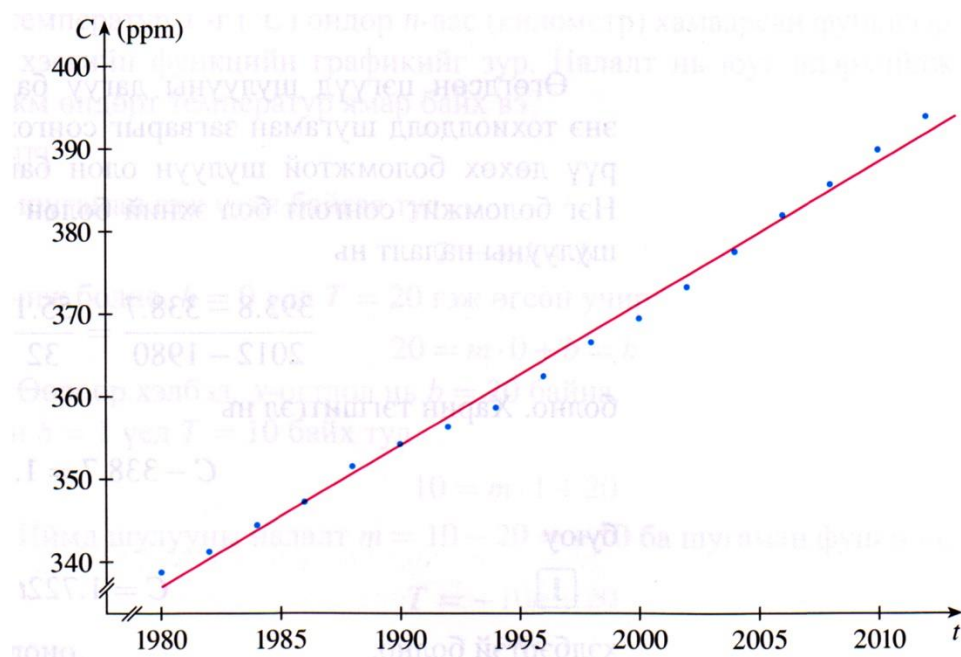
гэж өгнө.

Иймээс CO₂-ын түвшний хамгийн бага квадрат загвар дараах тэгшитгэлээр өгөгдөнө.

[Тэгшитгэл 2]

$$C = 1.71262t - 3054.14$$

Доорх зурагт өгөгдлийн цэгийг болон регрессийн шулууныг зурж харууллаа. Энэ загвар нь доорх зурагтай харьцуулж харвал өмнөх загвараас илүү тохирч байна.



Зураг 5

ЖИШЭЭ 3. Таамаглал гаргах.

Жишээ 2-ийн тэгшитгэл 2-ыг ашиглан 1987 оны дундаж CO_2 түвшинг тогтоож, 2020 оны түвшинг таамагла. Энэ загвараар CO_2 түвшин хэзээ 420ppm (сая хуваасны нэг)-ийг давах вэ?

БОДОЛТ

$t = 1987$ үед өмнөх тэгшитгэл 2-оос 1987 оны CO_2 -ын түвшин дундаж

$$C(1987) = (1.71262)(1987) - 3054.14 \approx 348.84$$

байсан гэж олдоно. Хэмжилтийн утгуудын хоорондох утгыг тооцож байгаа учраас энэ нь интерполяцын жишээ юм. (Үнэндээ УЦУОШХ-гээс 1987 оны CO_2 -ын түвшиний дундаж 384.93 байсан гэж мэдээлсэн нь бидний үнэлгээ сайн болсныг илтгэж байна.) Харин $t = 2020$ үед

$$C(2020) = (1.71262)(2020) - 3054.14 \approx 405.35$$

гэж олдоно. Иймээс бид 2020 оны CO_2 -ын түвшиний дундаж 405.4 байх нь гэж таамаглаж байна. Цаг хугацааны хувьд хэмжилтийн гаднах утгыг таамаглаж байгаа тул энэ нь

экстраполяцын жишээ юм. Тиймээс таамаглалын алдааны талаар тийм ч итгэлтэй бус байна.

Тэгшитгэл 2 ашиглавал

$$1.71262t - 3054.14 > 420$$

үед CO_2 -ын түвшин 420-иос илүү болох нь. Тэгвэл үүнийг бодвол

$$t > \frac{3474.14}{1.71262} \approx 2028.55$$

болно. 2029 онд CO_2 -ын түвшин 420-ийг давна гэж таамаглаж байна. Энэ таамаглал нь хэмжилтээс нилээд хол цаг хугацааг авч үзэж байгаа тул эрсдэл өндөртэй юм. Үнэндээ Дээрх зурагнаас харахад сүүлийн жилүүдэд CO_2 -ын түвшин илүү хурдацтай өсөж байгаа хандлага ажиглагдаж байгаа тул 2029 оноос ч өмнө 420 давж магадгүй юм.

Нэмэлт: Жишээ 2-т 1980-2012 оны статистик өгөгдлүүдийг (хүснэгтэн мэдээллийг) ашиглан нэгэн шугаман математик загвар боловсруулсан. Өөрөөр хэлбэл 1980-2012 оны CO_2 -ын түвшинийг илэрхийлж чадах загвар боловсруулсан. Дараа нь Жишээ 3-т тэрхүү загвартаа үндэслэн 2020 оны CO_2 -ын хэмжээг таамагласан. Анх өгөгдсөн статистик мэдээллийг математик загварт оруулан улмаар прогноз хийж чадлаа.

Энэ удаад бид шугаман загвар ашигласан. Учир нь анх өгөгдсөн хүснэгтэн мэдээлэл нь шугаман загварт тохирч байв. Шугаман загвараас гадна олон гишүүнтийн, зэрэгт функцийн, рационал функцийн, алгебрийн функцийн, илтгэгч функцийн гэх мэт олон төрлийн загварууд байдаг. Тухайн статистик өгөгдөл, зорилгоосоо хамаарч тохирох загвараа сонгоорой.