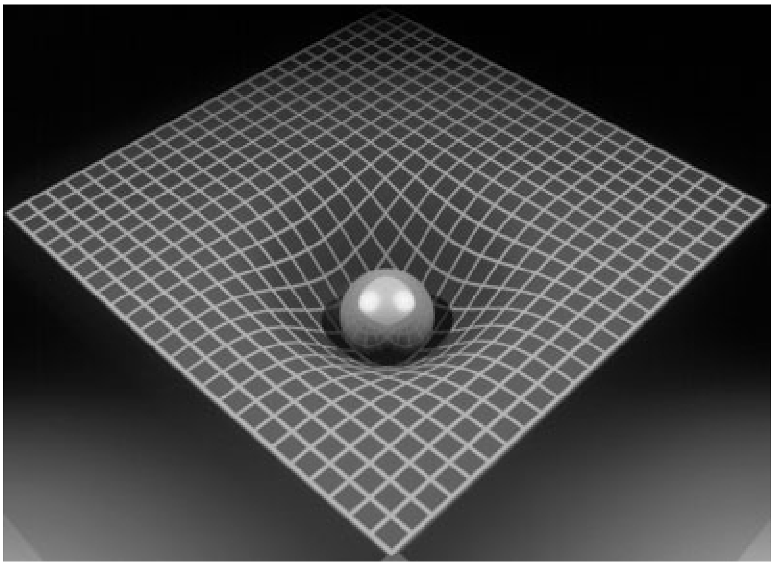
Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation

Albert Einstein (* 14. März 1879 in Ulm; † 18 April 1955 in Princeton)
Marcel Grossmann (* 9. April 1878 in Budapest; † 7. September 1936 in Zürich)

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
62. Band



Leipzig
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1913.

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalischer Teil

Von Albert Einstein.

1.1 Einleitung

Die im Folgenden dargelegte Theorie ist aus der Überzeugung hervorgegangen, dass die Proportionalität zwischen der trägen und der schweren Masse der Körper ein exakt gültiges Naturgesetz sei, das bereits in dem Fundament der theoretischen Physik einen Ausdruck finden müsse. Schon in einigen früheren Arbeiten [1] suchte ich dieser Überzeugung dadurch Ausdruck zu verleihen, dass ich die schwere auf die träge Masse zurückzuführen suchte; dieses Bestreben führte mich zu der Hypothese, dass ein (unendlich wenig ausgedehntes homogenes) Schwerefeld sich durch einen Beschleunigungszustand des Bezugssystems physikalisch vollkommen ersetzen lasse. Anschaulich lässt sich diese Hypothese so aussprechen: Ein in einem Kasten eingeschlossener Beobachter kann auf keine Weise entscheiden, ob der Kasten sich ruhend in einem statischen Gravitationsfeld befindet, oder ob sich der Kasten in einem von Gravitationsfeldern freien Raum in beschleunigter Bewegung befindet, die durch an dem Kasten angreifende Kräfte aufrechterhalten wird (Äquivalenz-Hypothese).
Dass das Gesetz der Proportionalität der trägen und der schweren Masse jedenfalls mit außerordentlicher Genauigkeit erfüllt ist, wissen wir aus einer fundamental wichtigen Untersuchung von Eötvös [2], die auf folgender Überlegung beruht. Auf einen an der Erdoberfläche ruhenden Körper wirkt sowohl die Schwere als auch die von der Drehung der Erde herrührende Zentrifugalkraft. Die erste dieser Kräfte ist proportional der schweren, die zweite der trägen Masse. Die Richtung der Resultierenden dieser beiden Kräfte, d. h. die Richtung der scheinbaren Schwerkraft (Lotrichtung) müsste also von der physikalischen Natur des ins Auge gefassten Körpers abhängen, falls die Proportionalität der trägen und schweren Masse nicht erfüllt wäre. Es ließen sich dann die scheinbaren Schwerkräfte, welche auf Teile eines heterogenen starren Systems wirken, im Allgemeinen nicht zu einer Resultierenden vereinigen; es bliebe vielmehr

[1] A. Einstein, Ann. d. Physik 4. 35. S. 898; 4. 38. S. 355; 4. 38. S. 443.

[2] B. Eötvös, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn VIII 1890. Wiedemann, Beiblätter XV. S. 688 (1891).

im Allgemeinen ein Drehmoment der scheinbaren Schwerkräfte übrig, dass sich beim Aufhängen des Systems an einem torsionsfreien Faden hätte bemerkbar machen müssen. Indem Eötvös die Abwesenheit solcher Drehmomente mit großer Sorgfalt feststellte, bewies er, dass das Verhältnis beider Massen für die von ihm untersuchten Körper mit solcher Genauigkeit von der Natur des Körpers unabhängig war, dass die relativen Unterschiede die dies Verhältnis von Stoff zu Stoff noch besitzen könnte, kleiner als ein Zwanzigmillionstel sein müsste.
Beim Zerfall radioaktiver Stoffe werden so bedeutende Energiemengen abgeben, dass die Änderung der trägen Masse des Systems, welche nach der Relativitätstheorie jener Energieabnahme entspricht, gegenüber der Gesamtmasse nicht sehr klein ist[3]. Beim Zerfall von Radium beträgt z. B. jene Abnahme $\frac{1}{10\,000}$ der Gesamtmasse. Würden jenen Änderungen der trägen Masse nicht Änderungen der schweren Masse entsprechen, so müssten Abweichungen der trägen von der schweren Masse bestehen, die weit größer sind, als es die Eötvös'schen Versuche zulassen. Es muss also als sehr wahrscheinlich betrachtet werden, dass die Identität der trägen und der schweren Masse exakt erfüllt ist. Aus diesen Gründen scheint mir auch die Äquivalenzhypothese, welche die physikalische Wesensgleichheit der schweren mit der trägen Masse ausspricht, einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zu besitzen[4].

1.2 Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im statischen Schwerefeld

Gemäß der gewöhnlichen Relativitätstheorie[5] bewegt sich ein kräftefrei bewegter Punkt nach der Gleichung

$$\delta\left\{\int \mathrm{d}s\right\} = \delta\left\{\int \sqrt{-\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 + c^2\mathrm{d}t^2}\right\} = 0\,. \tag{1.1}$$

Denn es besagt diese Gleichung nichts anderes, als dass sich der materielle Punkt geradlinig und gleichförmig bewegt. Es ist dies die Bewegungsgleichung in Form des Hamilton'schen Prinzips; denn wir können auch setzen

$$\delta\left\{\int H\mathrm{d}t\right\} = 0\,, \tag{1.1a}$$

3 Die Abnahme der trägen Masse, die der abgegebenen Energie $\mathscr{E}$ entspricht, ist bekanntlich $\frac{\mathscr{E}}{c^2}$, wenn mit c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet wird.
4 Vgl. auch Abschnitt 1.8 dieser Arbeit.
5 Vgl. M. Planck, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 1906. Seite 136.

wobei

$$H = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} m$$

gesetzt ist, falls m die Ruhemasse des materiellen Punktes bedeutet. Hieraus ergeben sich in bekannter Weise Impuls J_x, J_y, J_z und Energie $\mathscr{E}$ des bewegten Punktes:

$$\begin{aligned} J_x &= m\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = m\frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}\,; \text{ etc.} \\ E &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\dot{z} - H = m\frac{c^2}{\sqrt{c^2 - q^2}}\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Diese Darstellungsweise unterscheidet sich von der üblichen nur dadurch, dass in letzterer J_x, J_y, J_z und $\mathscr{E}$ noch einen Faktor c aufweisen. Da aber c in der gewöhnlichen Relativitätstheorie konstant ist, so ist das hier gegebene System dem gewöhnlich gegebenen äquivalent. Der einzige Unterschied ist der, dass J und $\mathscr{E}$ andere Dimensionen besitzen als in der üblichen Darstellungsweise.

In früheren Arbeiten habe ich gezeigt, dass die Äquivalenzhypothese zu der Folgerung führt, dass in einem statischen Gravitationsfeld die Lichtgeschwindigkeit c vom Gravitationspotential abhängt. Ich gelangte so zu der Meinung, dass die gewöhnliche Relativitätstheorie nur eine Annäherung an die Wirklichkeit gebe; sie sollte in dem Grenzfall gelten, dass in dem betrachteten Raum-Zeitgebiet keine zu große Verschiedenheiten des Gravitationspotentials auftreten. Außerdem fand ich als Gleichungen der Bewegung eines Massenpunktes in einem statischen Gravitationsfeld wieder die Gleichungen (1.1) bzw. (1.1*a*); es ist aber dabei c nicht als eine Konstante, sondern als eine Funktion der Raumkoordinaten aufzufassen, die ein Maß für das Gravitationspotential darstellt. Aus (1.1*a*) folgen in bekannter Weise die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{m\dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right\} = -\frac{mc\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}\,. \tag{1.3}$$

Man sieht, dass die Bewegungsgröße durch den nämlichen Ausdruck dargestellt wird wie oben. Überhaupt gelten für den im statischen Schwerefeld bewegten materiellen Punkt die Gleichungen (1.2). Die rechte Seite von (1.3) stellt die vom Gravitationsfeld auf den Massenpunkt ausgeübte Kraft $\mathfrak{R}_x$ dar. Für den Spezialfall der Ruhe ($q = 0$) ist

$$\mathfrak{R}_x = -m\frac{\partial c}{\partial x}\,.$$

Hieraus erkennt man, dass c die Rolle des Gravitationspotentials spielt. Aus (1.2) folgt für einen langsam bewegten Punkt

$$
\begin{aligned}
J_x &= \frac{m\dot{x}}{c}\,, \\
E - mc &= \frac{\frac{1}{2}mq^2}{c}\,.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Bei gegebener Geschwindigkeit sind also Impuls und kinetische Energie der Größe c umgekehrt proportional; anders ausgedrückt: Die träge Masse, so wie sie in Impuls und Energie eingeht, ist $\frac{m}{c}$, wobei m eine für den Massenpunkt charakteristische, vom Gravitationspotential unabhängige Konstante bedeutet. Es passt dies zu Mach's kühnem Gedanken, dass die Trägheit in einer Wechselwirkung des betrachteten Massenpunktes mit allen übrigen ihren Ursprung habe; denn häufen wir Massen in der Nähe des betrachteten Massenpunktes an, so verkleinern wir damit das Gravitationspotential c, erhöhen also die für die Trägheit maßgebende Größe $\frac{m}{c}$.

1.3 Gleichungen für die Bewegung des materiellen Punktes im beliebigen Schwerefeld. Charakterisierung des Letzteren

Mit der Einführung einer räumlichen Veränderlichkeit der Größe c haben wir den Rahmen der gegenwärtig als „Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie durchbrochen; denn es verhält sich nun der mit $\mathrm{d}s$ bezeichnete Ausdruck orthogonalen linearen Transformationen der Koordinaten gegenüber nicht mehr als Invariante. Soll also -woran nicht zu zweifeln ist- das Relativitätsprinzip aufrechterhalten werden, so müssen wir die Relativitätstheorie derart verallgemeinern, dass sie die im vorigen in ihren Elementen angedeutete Theorie des statischen Schwerefeldes als Spezialfall enthält.
Führen wir ein neues Raum-Zeitsystem $K'(x', y', z', t')$ ein durch irgendeine Substitution

$$
\begin{aligned}
x' &= x'(x, y, z, t) \\
y' &= y'(x, y, z, t) \\
z' &= z'(x, y, z, t) \\
t' &= t'(x, y, z, t)\,,
\end{aligned}
$$

und war das Schwerefeld im ursprünglichen System K ein statisches, so geht bei dieser Substitution die Gleichung (1.1) in eine Gleichung von der Form

$$
\delta \left\{ \int \mathrm{d}s' \right\} = 0
$$

über, wobei

$$ds'^2 = g_{11}\,dx'^2 + g_{22}\,dy'^2 + \cdots + 2g_{12}\,dx'dy' + \ldots$$

gesetzt ist, und die Größen $g_{\mu\nu}$ Funktionen von x', y', z', t' sind. Setzen wir x_1, x_2, x_3, x_4 statt x', y', z', t' und schreiben wir wieder ds statt ds', so erhalten die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes in Bezug auf K' die Gestalt

$$\begin{gathered}\delta\left\{\int ds\right\} = 0 \\ ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu\,.\end{gathered} \tag{1.1''}$$

Wir gelangen so zu der Auffassung, dass im allgemeinen Fall das Gravitationsfeld durch zehn Raum-Zeit-Funktionen

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{matrix} \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$$

charakterisiert ist, welche sich im Fall der gewöhnlichen Relativitätstheorie auf

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +c^2 \end{matrix}$$

reduzieren, wobei c eine Konstante bedeutet. Dieselbe Art der Degeneration zeigt sich bei dem statischen Schwerefeld der vorhin betrachteten Art, nur dass bei diesem $g_{44} = c^2$ eine Funktion von x_1, x_2, x_3 ist. Die Hamilton'sche Funktion H hat daher im allgemeinen Fall den Wert

$$\begin{aligned} H &= -\,m\frac{ds}{dt} \\ &= -\,m\sqrt{g_{11}\,\dot{x}_1^2 + \cdots + \cdots + 2g_{12}\,\dot{x}_1\dot{x}_2 + \cdots + \cdots +} \\ &\qquad\overline{2g_{14}\,\dot{x}_1 + \cdots + \cdots + g_{41}}\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Die zugehörigen Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{1.6}$$

ergeben sofort den Ausdruck für den Impuls J des Punktes und für die vom Schwerefeld auf ihn ausgeübte Kraft $\mathfrak{K}$:

$$\begin{aligned} J_x &= -m\,\frac{g_{11}\,\dot{x}_1 + g_{12}\,\dot{x}_2 + g_{13}\,\dot{x}_3 + g_{14}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} \\ &= -m\,\frac{g_{11}\,\mathrm{d}x_1 + g_{12}\,\mathrm{d}x_2 + g_{13}\,\mathrm{d}x_3 + g_{14}\,\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}s}\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{1}{2}m\frac{\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s\cdot\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}m\cdot\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\cdot\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.8}$$

Ferner ergibt sich für die Energie $\mathscr{E}$ des Punktes

$$\begin{aligned} -\mathscr{E} &= -\left(\dot{x}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} + \cdots + \ldots\right) + H \\ &= -m\left(g_{41}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} + g_{42}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} + g_{43}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s} + g_{44}\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}s}\right)\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Im Fall der gewöhnlichen Relativitätstheorie sind nur lineare orthogonale Substitutionen zulässig. Es wird sich zeigen, dass wir für die Einwirkung des Schwerefeldes auf die materiellen Vorgänge Gleichungen aufzustellen vermögen, die beliebigen Substitutionen gegenüber sich kovariant verhalten.
Zunächst können wir aus der Bedeutung, welche ds im Bewegungsgesetz des materiellen Punktes spielt, den Schluss ziehen, dass ds eine absolute Invariante (Skalar) sein muss; hieraus ergibt sich, dass die Größen $g_{\mu\nu}$ einen kovarianten Tensor zweiten Ranges bilden [6], den wir als den kovarianten Fundamentaltensor bezeichnen. Dieser bestimmt das Schwerefeld. Es ergibt sich ferner aus (1.7) und (1.9), dass Impuls und Energie des materiellen Punktes zusammen einen kovarianten Tensor ersten Ranges, d. h. einen kovarianten Vektor bilden [7].

[6] Vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.2
[7] Vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.2

1.4 Bedeutung des Fundamentaltensors der $g_{\mu\nu}$ für die Messung von Raum und Zeit

Aus dem Früheren kann man schon entnehmen, dass zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und den mittelst Maßstäben und Uhren zu erhaltenden Messergebnissen keine so einfachen Beziehungen bestehen können, wie in der alten Relativitätstheorie. Es ergab sich dies bezüglich der Zeit schon beim statischen Schwerefeld [8]. Es erhebt sich deshalb die Frage nach der physikalischen Bedeutung (prinzipiellen Messbarkeit) der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4.

Hierzu bemerken wir, dass $\mathrm{d}s$ als invariantes Maß für den Abstand zweier unendlich benachbarter Raumzeitpunkte aufzufassen ist. Es muss daher $\mathrm{d}s$ auch eine vom gewählten Bezugssystem unabhängige physikalische Bedeutung zukommen. Wir nehmen an, $\mathrm{d}s$ sei der „natürlich gemessene" Abstand beider Raumzeitpunkte und wollen darunter folgendes verstehen.

Die unmittelbare Nachbarschaft des Punktes (x_1, x_2, x_3, x_4) wird bezüglich des Koordinatensystems durch die infinitesimalen Variablen $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_4$ bestimmt. Wir denken uns statt dieser durch eine lineare Transformation neue Variable $\mathrm{d}\xi_1$, $\mathrm{d}\xi_2$, $\mathrm{d}\xi_3$, $\mathrm{d}\xi_4$ eingeführt, derart, dass

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\xi_1^2 + \mathrm{d}\xi_2^2 + \mathrm{d}\xi_3^2 - \mathrm{d}\xi_4^2$$

wird. Bei dieser Transformation sind die $g_{\mu\nu}$ als Konstanten zu betrachten; der reelle Kegel $\mathrm{d}s^2 = 0$ erscheint auf seine Hauptachsen bezogen. In diesem elementaren $\mathrm{d}\xi$-System gilt dann die gewöhnliche Relativitätstheorie, und es sei in diesem System die physikalische Bedeutung von Längen und Zeiten dieselbe wie in der gewöhnlichen Relativitätstheorie, d. h. $\mathrm{d}s^2$ ist das Quadrat des vierdimensionalen Abstandes beider unendlich benachbarter Raumzeitpunkte, gemessen mittels eines im $\mathrm{d}\xi$-System nicht beschleunigten starren Körpers und mittelst relativ zu diesem ruhend angeordneter Einheitsmaßstäbe und Uhren.

Man sieht hieraus, dass bei gegebenen $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_4$ der zu diesen Differentialen gehörige natürliche Abstand nur dann ermittelt werden kann, wenn die das Gravitationsfeld bestimmenden Größen $g_{\mu\nu}$ bekannt sind. Man kann dies auch so ausdrücken: Das Gravitationsfeld beeinflusst die Messkörper und Uhren in bestimmter Weise.

Aus der Fundamentalgleichung

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu$$

sieht man, dass es zur Festlegung der physikalischen Dimension der Größen $g_{\mu\nu}$ und x_ν noch einer Festsetzung bedarf. Der Größe $\mathrm{d}s$ kommt die Dimension einer Länge zu.

8 Vgl. z. B. A. Einstein, Ann. d. Phys. 4. 35. S. 903 ff.

Wir wollen die x_ν ebenfalls als Längen ansehen (auch x_4), den Größen $g_{\mu\nu}$ also keine physikalische Dimension zuschreiben.

1.5 Bewegung kontinuierlich verteilter inkohärenter Massen im beliebigen Schwerefeld

Zur Ableitung des Bewegungsgesetzes kontinuierlich verteilter inkohärenter Massen berechnen wir Impuls und ponderomotorische Kraft pro Volumeneinheit und wenden hierauf den Impulssatz an.
Dazu haben wir zunächst das dreidimensionale Volumen V unseres Massenpunktes zu berechnen. Wir betrachten ein unendlich kleines (vierdimensionales) Stück des Raumzeitfadens unseres materiellen Punktes. Sein Volumen ist

$$\int\int\int\int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4 = V\,\mathrm{d}t\,.$$

Führen wir statt der $\mathrm{d}x$ die natürlichen Differentiale $\mathrm{d}\xi$ ein, wobei der Messkörper als gegen den materiellen Punkt ruhend angenommen wird, so haben wir

$$\int\int\int \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3 = V_0$$

zu setzen, d. h. gleich dem „Ruhvolumen“ des materiellen Punktes. Ferner haben wir

$$\int \mathrm{d}\xi_4 = \mathrm{d}s\,,$$

wo $\mathrm{d}s$ dieselbe Bedeutung hat wie oben.
Sind die $\mathrm{d}x$ mit den $\mathrm{d}\xi$ verbunden durch die Substitution

$$\mathrm{d}x_\mu = \sum_\sigma \alpha_{\mu\sigma}\,\mathrm{d}\xi_\sigma\,,$$

so hat man

$$\int\int\int\int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4 = \int\int\int\int \frac{\partial\,(\mathrm{d}x_1,\,\mathrm{d}x_2,\,\mathrm{d}x_3,\,\mathrm{d}x_4)}{\partial\,(\mathrm{d}\xi_1,\,\mathrm{d}\xi_2,\,\mathrm{d}\xi_3,\,\mathrm{d}\xi_4)}\cdot \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3\,\mathrm{d}\xi_4$$

oder

$$V\,\mathrm{d}t = V_0\,\mathrm{d}s\cdot\left|\alpha_{\varrho\sigma}\right|\,.$$

Da aber

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu = \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} g_{\mu\nu}\,\alpha_{\mu\varrho}\,\alpha_{\nu\sigma}\,\mathrm{d}\xi_\varrho\,\mathrm{d}\xi_\sigma = \mathrm{d}\xi_1^2 + \mathrm{d}\xi_2^2 + \mathrm{d}\xi_3^2 + \mathrm{d}\xi_4^2$$

ist, so besteht zwischen der Determinante

$$g = \left|g_{\mu\nu}\right| ,$$

d. h. der Diskriminante der quadratischen Differentialform $\mathrm{d}s^2$ und der Substitutionsdeterminante $\left|\alpha_{\varrho\sigma}\right|$ die Beziehung

$$\begin{aligned} g \cdot \left(\left|\alpha_{\varrho\sigma}\right|\right)^2 &= -1\,, \\ \left|\alpha_{\varrho\sigma}\right| &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\,. \end{aligned}$$

Man erhält also für V die Beziehung

$$V\mathrm{d}t = V_0\,\mathrm{d}s \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}}\,.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (1.7), (1.8) und (1.9), wenn man $\frac{m}{V_0}$ durch ϱ_0 ersetzt,

$$\begin{aligned} \frac{J_x}{V} &= -\,\varrho_0\,\sqrt{-g}\cdot\sum_\nu g_{1\nu}\,\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}s}\,, \\ -\frac{\mathscr{E}}{V} &= -\,\varrho_0\,\sqrt{-g}\cdot\sum_\nu g_{4\nu}\,\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}s}\,, \\ \frac{\mathfrak{R}_x}{V} &= -\,\frac{1}{2}\,\varrho_0\,\sqrt{-g}\cdot\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\cdot\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}\,. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass

$$\Theta_{\mu\nu} = \varrho_0\,\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}$$

ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges bezüglich beliebiger Substitutionen ist. Man vermutet aus dem Vorhergehenden, dass der Impuls-Energiesatz die Form haben wird:

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}\,\Theta_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\,\Theta_{\mu\nu} = 0\,. \quad (\sigma = 1,2,3,4) \tag{1.10}$$

Die ersten drei dieser Gleichungen ($\sigma = 1, 2, 3$) drücken den Impulssatz, die letzte ($\sigma = 4$) den Energiesatz aus. Es erweist sich in der Tat, dass diese Gleichungen beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sind [9]. Ferner lassen sich die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes, von denen wir ausgegangen sind, aus diesen Gleichungen durch Integration über den Stromfaden wieder ableiten.
Den Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ nennen wir den (kontravarianten) Spannungs-Energietensor der materiellen Strömung. Der Gleichung (1.10) schreiben wir einen Gültigkeitsbereich zu, der über den speziellen Fall der Strömung inkohärenter Massen weit hinausgeht. Die Gleichung stellt allgemein die Energiebilanz zwischen dem Gravitationsfeld und einem beliebigen materiellen Vorgang dar; nur ist für $\Theta_{\mu\nu}$ der dem jeweiligen betrachteten materiellen System entsprechende Spannungs-Energietensor einzusetzen. Die erste Summe in der Gleichung enthält die örtlichen Ableitungen der Spannungen bzw. Energiestromdichte und die zeitlichen Ableitungen der Impuls- bzw. Energiedichte; die zweite Summe ist ein Ausdruck für die Wirkungen, welche vom Schwerefeld auf den materiellen Vorgang übertragen werden.

1.6 Die Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes

Nachdem wir die Impuls-Energiegleichung für die materiellen Vorgänge (mechanische, elektrische und andere Vorgänge) mit Bezug auf das Gravitationsfeld aufgestellt haben, bleibt uns noch folgende Aufgabe. Es sei der Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ für den materiellen Vorgang gegeben. Welches sind die Differentialgleichungen, welche die Größen g_{ik}, d. h. das Schwerefeld zu bestimmen gestatten? Wir suchen mit anderen Worten die Verallgemeinerung der Poisson'schen Gleichung

$$\Delta\varphi = 4\pi k \varrho \ .$$

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir keine so vollkommen zwangsläufige Methode gefunden, wie für die Lösung des vorhin behandelten Problems. Es war nötig, einige Annahmen einzuführen, deren Richtigkeit zwar plausibel erscheint, aber doch nicht evident ist.
Die gesuchte Verallgemeinerung wird wohl von der Form sein

$$\kappa \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu} \, , \tag{1.11}$$

wo κ eine Konstante, $\Gamma_{\mu\nu}$ ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges ist, der durch Differentialoperationen aus dem Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ hervorgeht. Dem Newton-Poisson'schen Gesetz entsprechend wird man geneigt sein zu fordern, dass diese Gleichungen (1.11) zweiter Ordnung sein sollen. Es muss aber hervorgehoben werden, dass

9 Vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.5, Unterabschnitt 2.5.1

es sich als unmöglich erweist, unter dieser Voraussetzung einen Differentialausdruck $\Gamma_{\mu\nu}$ zu finden, der eine Verallgemeinerung von $\Delta\varphi$ ist, und sich beliebigen Transformationen gegenüber als Tensor erweist [10]. A priori kann allerdings nicht in Abrede gestellt werden, dass die endgültigen, genauen Gleichungen der Gravitation von höherer als zweiter Ordnung sein könnten. Es besteht daher immer noch die Möglichkeit, dass die vollkommen exakten Differentialgleichungen der Gravitation beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sein könnten. Der Versuch einer Diskussion derartiger Möglichkeiten wäre aber beim gegenwärtigen Stand unserer Kenntnis der physikalischen Eigenschaften des Gravitationsfeldes verfrüht. Deshalb ist für uns die Beschränkung auf die zweite Ordnung geboten und wir müssen daher darauf verzichten, Gravitationsgleichungen aufzustellen, die sich beliebigen Transformationen gegenüber als kovariant erweisen. Es ist übrigens hervorzuheben, dass wir keinerlei Anhaltspunkte für eine allgemeine Kovarianz der Gravitationsgleichungen haben [11].
Der Laplace'sche Skalar $\Delta\varphi$ ergibt sich aus dem Skalar φ, indem man von diesem die Erweiterung (den Gradienten), und dann von diesem den inneren Operator (die Divergenz) bildet. Beide Operationen kann man derart verallgemeinern, dass sie an jedem Tensor von beliebig hohem Rang ausgeführt werden können, und zwar unter Zulassung beliebiger Substitutionen der Grundvariablen [12]. Aber es degenerieren diese Operationen, wenn sie an dem Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ ausgeführt werden [13]. Es scheint daraus hervorzugehen, dass die gesuchten Gleichungen nur bezüglich einer gewissen Gruppe von Transformationen kovariant sein werden, welche Gruppe uns aber vorläufig unbekannt ist. Bei dieser Sachlage erscheint es mit Rücksicht auf die alte Relativitätstheorie natürlich, anzunehmen, dass in der gesuchten Transformationsgruppe die linearen Transformationen enthalten seien. Wir fordern also, dass $\Gamma_{\mu\nu}$ ein Tensor bezüglich beliebiger linearer Transformationen sein soll.
Man beweist nun leicht (durch Ausführung der Transformation) die folgenden Sätze:

1. Ist $\Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ ein kontravarianter Tensor vom Rang n bezüglich linearer Transformationen, so ist

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}}{\partial x_{\mu}}$$

   ein kontravarianter Tensor vom Rang $n+1$ bezüglich linearer Transformationen (Erweiterung) [14].

[10] Vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.5, Unterabschnitt 2.5.2
[11] Vgl. hierzu noch die am Anfang des Abschnitt 1.7 gegebenen Überlegungen.
[12] Kapitel 2, Abschnitt 2.3
[13] Vgl. die Anm. auf Seite 32 im Kapitel 2, Abschnitt 2.3
[14] $\gamma_{\mu\nu}$ ist der zu $g_{\mu\nu}$ reziproke kontravariante Tensor (Kapitel 2, Abschnitt 2.2).

2. Ist $\Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ ein kontravarianter Tensor vom Rang n bezüglich linearer Transformationen, so ist

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}}{\partial x_{\lambda}}$$

ein kontravarianter Tensor vom Rang $n-1$ bezüglich linearer Transformationen (Divergenz).

Führt man an einem Tensor der Reihe nach diese beiden Operationen aus, so erhält man einen Tensor, der wiederum vom gleichen Rang ist, wie der ursprüngliche (Operation Δ, an einem Tensor vorgenommen). Für den Fundamental-Tensor $\gamma_{\mu\nu}$ erhält man

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \cdot \left(\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right) . \tag{a}$$

Dass dieser Operator mit dem Laplace'schen Operator verwandt ist, erkennt man ferner durch folgende Betrachtung. In der Relativitätstheorie (Fehlen des Gravitationsfeldes), wäre zu setzen

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = c^2, \quad g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{fü } \mu \neq \nu \, ;$$

also

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -1, \quad \gamma_{44} = \frac{1}{c^2}, \quad \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad \text{fü } \mu \neq \nu \, .$$

Ist ein Gravitationsfeld vorhanden, welches genügend schwach ist, d. h. unterscheiden sich die $g_{\mu\nu}$ und $\gamma_{\mu\nu}$ von den soeben angegebenen Werten nur unendlich wenig, so erhält man an Stelle des Ausdrucks (a) unter Vernachlässigung der Glieder vom zweiten Grad

$$-\left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_4^2} \right) .$$

Ist das Feld ein statisches und nur g_{44} variabel, so kommen wir also auf den Fall der Newton'schen Gravitationstheorie, falls wir den gebildeten Ausdruck bis auf eine Konstante für die Größe $\Gamma_{\mu\nu}$ setzen.
Man könnte demnach denken, es müsse der Ausdruck (a) bis auf einen konstanten Faktor bereits die gesuchte Verallgemeinerung von $\Delta\varphi$ sein. Dies wäre aber ein Irrtum; denn es könnten neben jenem Ausdruck noch solche Terme in einer derartigen Verallgemeinerung auftreten, die selbst Tensoren sind und bei Durchführung der eben angeführten Vernachlässigungen verschwinden. Es tritt dies immer dann ein, wenn zwei erste Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ bzw. $\gamma_{\mu\nu}$ miteinander multipliziert erscheinen. So ist z. B.

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}$$

ein kovarianter Tensor zweiten Ranges (gegenüber linearen Transformationen); derselbe wird unendlich klein zweiter Ordnung, wenn die Größen $g_{\alpha\beta}$ und $\gamma_{\alpha\beta}$ von Konstanten nur um Unendlich-Kleine erster Ordnung abweichen. Wir müssen daher zulassen, dass in $\Gamma_{\mu\nu}$ neben (a) noch andere Terme auftreten, die vorläufig nur die Bedingung erfüllen müssen, dass sie zusammen linearen Transformationen gegenüber Tensorcharakter besitzen müssen.

Zur Auffindung dieser Terme dient uns der Impulsenergiesatz. Damit die benutzte Methode klar hervortritt, will ich sie zunächst an einem allgemein bekannten Beispiel anwenden.

In der Elektrostatik ist $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\varrho$ die ν^{te} Komponente des pro Volumeneinheit auf die Materie übertragenen Impulses, falls φ das elektrostatische Potential, ϱ die elektrische Dichte bedeutet. Es ist eine Differentialgleichung für φ gesucht, derart, dass der Impulssatz stets erfüllt ist. Es ist wohlbekannt, dass die Gleichung

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu^2} = \varrho$$

die Aufgabe löst. Dass der Impulssatz erfüllt ist, geht hervor aus der Identität

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_\mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right)^2 \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \cdot \sum_\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2} \; \left(= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \cdot \varrho \right) .$$

Wenn also der Impulssatz erfüllt ist, muss für jedes ν eine identische Gleichung von folgendem Bau existieren: Auf der rechten Seite steht $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$ multipliziert mit der linken Seite der Differentialgleichung ,auf der linken Seite der Identität steht eine Summe von Differentialquotienten.

Wäre die Differentialgleichung für φ noch nicht bekannt, so ließe sich das Problem von deren Auffindung auf dasjenige der Auffindung jener identischen Gleichung zurückführen. Es ist nun für uns die Erkenntnis wesentlich, dass jene Identität sich ableiten lässt, wenn einer der in ihr auftretenden Terme bekannt ist. Man hat nichts weiteres zu tun, als die Regel von der Differentiation eines Produktes in den Formen

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_\nu} v + \frac{\partial v}{\partial x_\nu} u$$

und

$$u \frac{\partial v}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(uv) - \frac{\partial u}{\partial x_\nu} v$$

wiederholt anzuwenden und schließlich die Glieder, welche Differentialquotienten sind, auf die linke Seite, die übrigen auf die rechte Seite zu stellen. Geht man z. B. von dem ersten Glied der obigen Identität aus, so erhält man der Reihe nach

$$\begin{aligned}\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right) &= \sum_\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}+\sum_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\cdot\sum_\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\sum_\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right\},\end{aligned}$$

woraus durch Anordnen die obige Identität hervorgeht.
Wir wenden uns nun unserem Problem wieder zu. Aus Gleichung (1.10) geht hervor, dass

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Theta_{\mu\nu}\,,\qquad(\sigma=1,2,3,4)$$

der pro Volumeneinheit auf die Materie vom Gravitationsfeld übertragene Impuls (bzw. Energie) ist. Damit der Energie-Impulssatz erfüllt sei, müssen die Differentialausdrücke $\Gamma_{\mu\nu}$ der Fundamentalgrößen $\gamma_{\mu\nu}$, welche in die Gravitationsgleichungen

$$\kappa\cdot\Theta_{\mu\nu}=\Gamma_{\mu\nu}$$

eingehen, so gewählt werden, dass

$$\frac{1}{2\kappa}\cdot\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Gamma_{\mu\nu}$$

sich derart umformen lässt, dass er als Summe von Differentialquotienten erscheint. Es ist andererseits bekannt, dass in dem für $\Gamma_{\mu\nu}$ zu suchenden Ausdruck der Term (a) erscheint. Die gesuchte identische Gleichung ist also von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}&\text{Summe von Differentialquotienten}\\ =&\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)\right.\\ &\left.+\ \text{weitere Glieder, die bei Bildung der ersten Annäherung wegfallen.}\right\}\end{aligned}$$

Hierdurch ist die gesuchte Identität eindeutig bestimmt; bildet man sie nach dem angedeuteten Verfahren [15], so erhält man:

[15] Vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.5, Unterabschnitt 2.5.3

$$\sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sqrt{-g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\sigma} \right) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\sqrt{-g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right)$$
$$= \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \left\{ \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} g_{\tau\varrho} \frac{\partial \gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right\} . \tag{1.12}$$

Der in der geschweiften Klammer der rechten Seite stehende Ausdruck $\Gamma_{\mu\nu}$ ist demnach der von uns gesuchte Tensor, der in die Gravitationsgleichungen

$$\kappa \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$$

eintritt. Um diese Gleichungen besser überblicken zu können, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$-2\kappa \cdot \vartheta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \left(\gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right) . \tag{1.13}$$

$\vartheta_{\mu\nu}$ sei als „kontravarianter Spannungs-Energietensor des Gravitationsfeldes“ bezeichnet. Den zu ihm reziproken kovarianten Tensor bezeichnen wir mit $t_{\mu\nu}$; es ist also

$$-2\kappa \cdot t_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \left(\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right) . \tag{1.14}$$

Ebenfalls zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnungen ein für Differentialoperationen, ausgeführt an den Fundamentaltensoren γ bzw. g:

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma) = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} g_{\tau\varrho} \frac{\partial \gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta} , \tag{1.15}$$

bzw.

$$D_{\mu\nu}(g) = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\tau\varrho} \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta} . \tag{1.16}$$

Jeder dieser Operatoren liefert wieder einen Tensor der gleichen Art (bezüglich linearer Transformationen).
Bei Verwendung dieser Abkürzungen nimmt die Identität (1.12) die Form an:

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \kappa \vartheta_{\mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \left\{ -\Delta_{\mu\nu}(\gamma) + \kappa \vartheta_{\mu\nu} \right\} , \tag{1.12a}$$

oder auch

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} \cdot \kappa t_{\mu\sigma} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \left\{ -D_{\mu\nu}(g) - \kappa t_{\mu\nu} \right\} . \tag{1.12b}$$

Schreiben wir die Erhaltungsgleichung (1.10) der Materie und die Erhaltungsgleichung (1.12*a*) für das Gravitationsfeld in der Form

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu} \right\} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu} = 0 \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \vartheta_{\mu\nu} \right\} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \cdot \vartheta_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Delta_{\mu\nu}(\gamma) , \end{aligned} \tag{1.12c}$$

so erkennt man, dass der Spannungs-Energie-Tensor $\vartheta_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes in den Erhaltungssatz für das Gravitationsfeld genau ebenso eintritt, wie der Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ des materiellen Vorganges in den Erhaltungssatz für diesen Vorgang, ein bemerkenswerter Umstand bei der Verschiedenheit der Ableitungen beider Sätze.
Aus der Gleichung (1.12*a*) folgt als Ausdruck für den Differentialtensor, der in die Gravitationsgleichungen eingeht

$$\Gamma_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}(\gamma) - \kappa \cdot \vartheta_{\mu\nu} . \tag{1.17}$$

Die Gravitationsgleichungen (1.11) lauten also

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma) = \kappa \cdot \left(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu} \right) . \tag{1.18}$$

Diese Gleichungen erfüllen eine Forderung, die unseres Erachtens an eine Relativitätstheorie der Gravitation notwendig gestellt werden muss; sie zeigen nämlich, dass der Tensor $\vartheta_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes in gleicher Weise felderregend auftritt, wie der Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ der materiellen Vorgänge. Eine Ausnahmestellung der Gravitationsenergie gegenüber allen anderen Energiearten würde ja zu unhaltbaren Konsequenzen führen.
Durch Addition der Gleichungen (1.10) und (1.12*a*) findet man mit Rücksicht auf die Gleichung (1.18)

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \cdot \left\{ \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \, \left(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu} \right) \right\} = 0 . \tag{1.19}$$

Hieraus ersieht man, dass für Materie und Gravitationsfeld zusammen die Erhaltungssätze gelten.
Bei der bisher gegebenen Darstellung haben wir die kontravarianten Tensoren bevorzugt, weil sich der kontravariante Spannungs-Energietensor der Strömung inkohärenter Massen in besonders einfacher Weise ausdrücken lässt. Indessen können wir die gewonnenen Fundamentalbeziehungen ebenso einfach unter Benutzung kovarianter Tensoren ausdrücken. Statt $\Theta_{\mu\nu}$ haben wir dann $T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \Theta_{\alpha\beta}$ als Spannungs-Energietensor des materiellen Vorganges zugrunde zu legen. Statt Gleichung (1.10) erhalten wir durch gliedweise Umformung

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \cdot \left\{ \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} T_{\mu\sigma} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot T_{\mu\nu} = 0 \,. \tag{1.20}$$

Aus dieser Gleichung und (1.16) folgt, dass die Gleichungen des Gravitationsfeldes auch in der Form

$$-D_{\mu\nu}(g) = \kappa \cdot \left(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} \right) \tag{1.21}$$

geschrieben werden können, welche Gleichungen auch direkt aus (1.18) abgeleitet werden können. Analog (1.19) besteht die Beziehung

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \cdot \left\{ \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} \left(T_{\sigma\nu} + t_{\sigma\nu} \right) \right\} = 0 \,. \tag{1.22}$$

1.7 Einfluss des Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge, speziell auf die elektromagnetischen Vorgänge

Weil bei jeglichem physikalischen Vorgang Impuls und Energie eine Rolle spielen, diese Letzteren aber ihrerseits das Gravitationsfeld bestimmen und von ihm beeinflusst werden, müssen die das Schwerefeld bestimmenden Größen $g_{\mu\nu}$ in allen physikalischen Gleichungssystemen auftreten. So haben wir gesehen, dass die Bewegung des materiellen Punktes durch die Gleichung

$$\delta \left\{ \int \mathrm{d}s \right\} = 0$$

bestimmt ist, wobei

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x_\nu \,.$$

ds ist eine Invariante beliebigen Substitutionen gegenüber. Die gesuchten Gleichungen, welche den Ablauf irgend eines physikalischen Vorganges bestimmen, müssen nun so gebaut sein, dass die Invarianz von ds die Kovarianz des betreffenden Gleichungssystems zur Folge hat. Bei der Verfolgung dieser allgemeinen Aufgaben stoßen wir aber zunächst auf eine prinzipielle Schwierigkeit. Wir wissen nicht, bezüglich welcher Gruppe von Transformationen die gesuchten Gleichungen kovariant sein müssen. Am natürlichsten erscheint es zunächst, zu verlangen, dass die Gleichungssysteme beliebigen Transformationen gegenüber kovariant sein sollen. Dem steht aber entgegen, dass die von uns aufgestellten Gleichungen des Gravitationsfeldes diese Eigenschaft nicht besitzen. Wir haben für die Gravitationsgleichungen nur beweisen können, dass sie beliebigen linearen Transformationen gegenüber kovariant sind; wir wissen aber nicht, ob es eine allgemeine Transformationsgruppe gibt, der gegenüber die Gleichungen kovariant sind. Die Frage nach der Existenz einer derartigen Gruppe für das Gleichungssystem (1.18) bzw. (1.21) ist die wichtigste, welche sich an die **hier** gegebenen Ausführungen anknüpft. Jedenfalls sind wir bei dem gegenwärtigen Stand der Theorie nicht berechtigt, die Kovarianz physikalischer Gleichungen beliebigen Substitutionen gegenüber zu fordern.

Anderseits aber haben wir gesehen, dass sich eine Energie-Impuls-Bilanzgleichung für materielle Vorgänge hat aufstellen lassen (Abschnitt 1.5, Gleichung (1.10)), welche beliebige Transformationen gestattet. Es scheint deshalb doch natürlich, wenn wir voraussetzen, dass alle physikalischen Gleichungssysteme mit Ausschluss der Gravitationsgleichungen so zu formulieren sind, dass sie beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sind. Die diesbezügliche Ausnahmestellung der Gravitationsgleichungen gegenüber allen anderen Systemen hängt nach meiner Meinung damit zusammen, dass nur erstere zweite Ableitungen der Komponenten des Fundamentaltensors enthalten dürften.

Die Aufstellung derartiger Gleichungssysteme erfordert die Hilfsmittel der verallgemeinerten Vektoranalysis, wie sie im Kapitel 2 dargestellt ist.

Wir beschränken uns hier darauf, anzugeben, wie man auf diesem Weg die elektromagnetischen Feldgleichungen für das Vakuum gewinnt [16]. Wir gehen davon aus, dass die elektrische Ladung als etwas Unveränderliches anzusehen ist. Ein unendlich kleiner, beliebig bewegter Körper habe die Ladung e und für einen mitbewegten Körper das Volumen $\mathrm{d}V_0$ (Ruhvolumen). Wir definieren $\frac{e}{\mathrm{d}V_0} = \varrho_0$ als die wahre Dichte der Elektrizität; diese ist ihrer Definition nach ein Skalar. Es ist daher

$$\varrho_0 \frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

ein kontravarianter Vierervektor, den wir umformen, indem wir die Dichte ϱ der Elektrizität, auf das Koordinatensystem bezogen, durch die Gleichung

$$\varrho_0 \,\mathrm{d}V_0 = \varrho \,\mathrm{d}V$$

[16] Vgl. hierzu auch die auf Seite 26 zitierte Abhandlung von Kottler, Abschnitt 1.4.

definieren. Unter Benutzung der Gleichung

$$\mathrm{d}V_0\,\mathrm{d}s = \sqrt{-g}\cdot \mathrm{d}V\cdot \mathrm{d}t$$

des Abschnitts 1.5 erhält man

$$\varrho_0\,\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varrho\,\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t}\,,$$

d. h. den kontravarianten Vektor der elektrischen Strömung.
Das elektromagnetische Feld führen wir zurück auf einen speziellen, kontravarianten Tensor zweiten Ranges $\varphi_{\mu\nu}$ (einen Sechservektor) und bilden den „dualen" kontravarianten Tensor zweiten Ranges $\varphi^{\star}_{\mu\nu}$ nach der Methode, die im Kapitel 2, Abschnitt 2.4, auseinandergesetzt ist (Formel (2.42)). Die Divergenz eines speziellen kontravarianten Tensors zweiten Ranges ist nach Formel (2.40) des Kapitels 2, Abschnitt 2.4

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\cdot\left(\sqrt{-g}\cdot\varphi_{\mu\nu}\right)\,.$$

Als Verallgemeinerung der Maxwell-Lorentz'schen Feldgleichungen setzen wir die Gleichungen an

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\cdot\left(\sqrt{-g}\cdot\varphi_{\mu\nu}\right) = \varrho\,\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1.23}$$

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\cdot\left(\sqrt{-g}\cdot\varphi^{\star}_{\mu\nu}\right) = 0\,, \tag{1.24}$$

deren Kovarianz demnach evident ist. Setzen wir

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-g}\cdot\varphi_{23} = \mathfrak{H}_x, \quad \sqrt{-g}\cdot\varphi_{31} = \mathfrak{H}_y, \quad \sqrt{-g}\cdot\varphi_{12} = \mathfrak{H}_z\,;\\
&\sqrt{-g}\cdot\varphi_{14} = -\mathfrak{E}_x, \quad \sqrt{-g}\cdot\varphi_{24} = -\mathfrak{E}_y, \quad \sqrt{-g}\cdot\varphi_{34} = -\mathfrak{E}_z\,,
\end{aligned}$$

und

$$\varrho\,\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} = u_\mu\,,$$

so nimmt das Gleichungssystem (1.23) in ausführlicher Schreibweise die Form an

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = u_x \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = \varrho\,,
\end{aligned}
$$

welche Gleichungen bis auf die Wahl der Einheiten mit dem ersten Maxwell'schen System übereinstimmen. Für die Bildung des zweiten Systems ist zunächst zu beachten, dass zu den Komponenten

$$\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z, -\mathfrak{E}_x, -\mathfrak{E}_y, -\mathfrak{E}_z$$

von

$$\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}$$

die Komponenten

$$-\mathfrak{E}_x, -\mathfrak{E}_y, -\mathfrak{E}_z, \mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$$

der Ergänzung $f_{\mu\nu}$ gehören (Kapitel 2, Abschnitt 1.4, Formeln (2.41*a*)). Für den Fall des Fehlens des Gravitationsfeldes ergibt sich hieraus das zweite System, d. h. Gleichung (1.24) in der Form

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0 \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist erwiesen, dass die aufgestellten Gleichungen wirklich eine Verallgemeinerung derjenigen der gewöhnlichen Relativitätstheorie bilden.

1.8 Kann das Gravitationsfeld auf einen Skalar zurückgeführt werden?

Bei der unleugbaren Kompliziertheit der hier vertretenen Theorie der Gravitation müssen wir uns ernstlich fragen, ob nicht die bisher ausschließlich vertretene Auffassung, nach welcher das Gravitationsfeld auf einen Skalar Φ zurückgeführt wird, die einzig nahe liegende und berechtigte sei. Ich will kurz darlegen, warum wir diese Frage verneinen zu müssen glauben.
Es bietet sich bei Charakterisierung des Gravitationsfeldes durch einen Skalar ein Weg dar, welcher dem im Vorhergehenden eingeschlagenen ganz analog ist. Man setzt als Bewegungsgleichung des materiellen Punktes in Hamilton'scher Form an

$$\delta\left\{\int \Phi \,\mathrm{d}s\right\} = 0\,,$$

wobei ds das vierdimensionale Linienelement der gewöhnlichen Relativitätstheorie und Φ ein Skalar ist, und geht dann ganz analog vor wie im Vorhergehenden, ohne die gewöhnliche Relativitätstheorie verlassen zu müssen.
Auch hier ist der materielle Vorgang beliebiger Art durch einen Spannungs-Energie-Tensor $T_{\mu\nu}$ charakterisiert. Aber es ist bei dieser Auffassung ein Skalar maßgebend für die Wechselwirkung zwischen Gravitationsfeld und materiellem Vorgang. Dieser Skalar kann, worauf mich Herr Laue aufmerksam machte, nur

$$\sum_{\mu} T_{\mu\mu} = P$$

sein, den ich als den „Laue'schen Skalar" bezeichnen will [17]. Dann kann man dem Satz von der Äquivalenz der trägen und der schweren Masse auch hier bis zu einem gewissen Grad gerecht werden. Herr Laue wies mich nämlich darauf hin, dass für ein abgeschlossenes System

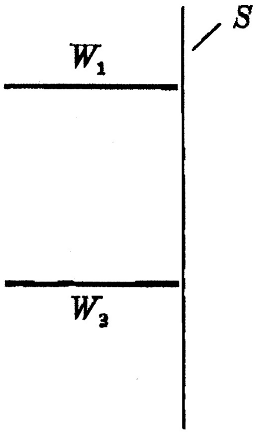
$$\int P \,\mathrm{d}V = \int T_{44}\,\mathrm{d}\tau$$

ist. Hieraus ersieht man, dass für die Schwere eines abgeschlossenen Systems auch nach dieser Auffassung seine Gesamtenergie maßgebend ist. Die Schwere nicht abgeschlossener Systeme würde aber von den orthogonalen Spannungen T_{11} usw. abhängen, denen das System unterworfen ist. Daraus entstehen Konsequenzen, die mir unannehmbar erscheinen, wie an dem Beispiel der Hohlraumstrahlung gezeigt werden soll.
Für die Strahlung im Vakuum verschwindet bekanntlich der Skalar P. Ist die Strahlung in einem masselosen spiegelnden Kasten eingeschlossen, so erfahren deren Wände Zugspannungen, die bewirken, dass dem System, -als Ganzes genommen- eine schwere

[17] Vgl. Kapitel 2, Abschnitt 1.2, letzte Formel.

Masse $\int P \,\mathrm{d}\tau$ zukommt, die der Energie $\mathscr{E}$ der Strahlung entspricht.

Statt nun aber die Strahlung in einen Hohlkasten einzuschließen, denke ich mir dieselbe begrenzt



1. durch die spiegelnden Wände eines fest angeordneten Schachtes S,
2. durch zwei vertikal verschiebbare spiegelnde Wände W_1 und W_2, welche durch einen Stab fest miteinander verbunden sind.

In diesem Fall beträgt die schwere Masse $\int P\, d\tau$ des beweglichen Systems nur den dritten Teil des Wertes, der bei einem als Ganzes beweglichen Kasten auftritt. Man würde also zum Emporheben der Strahlung entgegen einem Schwerefeld nur den dritten Teil der Arbeit aufwenden müssen als in dem vorhin betrachteten Fall, dass die Strahlung in einem Kasten eingeschlossen ist. Dies erscheint mir unannehmbar. Ich muss freilich zugeben, dass für mich das wirksamste Argument dafür, dass eine derartige Theorie zu verwerfen sei, auf der Überzeugung beruht, dass die Relativität nicht nur orthogonalen linearen Substitutionen gegenüber besteht, sondern einer viel weiteren Substitutionsgruppe gegenüber. Aber wir sind schon deshalb nicht berechtigt, dieses Argument geltend zu machen, weil wir nicht imstande waren, die (allgemeinste) Substitutionsgruppe ausfindig zu machen, welche zu unseren Gravitationsgleichungen gehört.

2 Mathematischer Teil

Von Marcel Grossmann.

2.1 Einleitung

Die mathematischen Hilfsmittel für die Entwicklung der Vektoranalysis eines Gravitationsfeldes, das durch die Invarianz des Linienelementes

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$$

charakterisiert ist, gehen zurück auf die fundamentale Abhandlung von Christoffel [1] über die Transformation der quadratischen Differentialformen. Ricci und Levi-Cività [2] haben, ausgehend von den Christoffel'schen Resultaten, ihre Methoden der absoluten, d. h. vom Koordinatensystem unabhängigen Differentialrechnung entwickelt, die gestatten, den Differentialgleichungen der mathematischen Physik eine invariante Form zu geben. Da aber die Vektoranalysis des auf beliebige krummlinige Koordinaten bezogenen euklidischen Raumes formal identisch ist mit der Vektoranalysis einer beliebigen, durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit, so bietet es keine Schwierigkeiten, die vektoranalytischen Begriffsbildungen, wie sie in den letzten Jahren von Minkowski, Sommerfeld, Laue u. a. für die Relativitätstheorie entwickelt worden sind, auszudehnen auf die vorstehende allgemeine Theorie von Einstein.
Die allgemeine Vektoranalysis, die man so erhält, erweist sich bei einiger Übung als ebenso einfach zu handhaben, wie die spezielle des drei- oder vierdimensionalen euklidischen Raumes; ja die größere Allgemeinheit ihrer Begriffsbildungen verleiht ihr eine Übersichtlichkeit, die dem Spezialfall häufig genug abgeht.
Die Theorie der speziellen Tensoren (Abschnitt 1.4) ist in einer während des Entstehens dieser Arbeit erschienenen Abhandlung von Kottler [3] vollständig behandelt worden und zwar, was im allgemeinen Fall nicht möglich ist, auf Grund der Theorie der Inte-

[1] Christoffel, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, J. f. Math. 70 (1869), S. 46.
[2] Ricci et Levi-Cività, Méthodes de calcul difféerentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. 54 (1901), S. 125.
[3] Kottler, Über die Raumzeitlinien der Minkowskischen Welt, Wien. Ber. 121 (1912).

gralformen.
Da sich an die Gravitationstheorie von Einstein, insbesondere aber an das Problem der Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes, eingehendere mathematische Untersuchungen werden knüpfen müssen, mag eine systematische Darstellung der allgemeinen Vektoranalysis am Platze sein. Dabei habe ich mit Absicht geometrische Hilfsmittel beiseite gelassen, da sie meines Erachtens wenig zur Veranschaulichung der Begriffsbildungen der Vektoranalysis beitragen.

2.2 Allgemeine Tensoren

Es sei

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu \tag{2.1}$$

das Quadrat des Linienelementes, welches als invariantes Maß des Abstandes zweier unendlich-benachbarter Raum-Zeitpunkte betrachtet wird. Die folgenden Entwicklungen sind, soweit keine andere Bemerkung gemacht wird, von der Anzahl der Variablen unabhängig; diese möge mit n bezeichnet sein.
Bei einer Transformation

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, \dots x'_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{2.2}$$

der Variablen, oder einer Transformation

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_i &= \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\,\mathrm{d}x'_k = \sum_k p_{ik}\,\mathrm{d}x'_k \\ \mathrm{d}x'_i &= \sum_k \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_k = \sum_k \pi_{ki}\,\mathrm{d}x_k \end{aligned} \tag{2.3}$$

ihrer Differentiale, transformieren sich die Koeffizienten des Linienelementes gemäß der Formeln

$$g'_{rs} = \sum_{\mu\nu} p_{\mu r}\,p_{\nu s}\,g_{\mu\nu}\,. \tag{2.4}$$

Es sei g die Diskriminante der Differentialform (2.1), d. h. die Determinante

$$g = |g_{\mu\nu}|\ .$$

Ist $\gamma_{\mu\nu}$ die durch die Diskriminante dividierte („normierte“), dem Element $g_{\mu\nu}$ adjungierte Unterdeterminante von g, so transformieren sich diese Größen $\gamma_{\mu\nu}$ nach den Formeln

$$\gamma'_{rs} = \sum_{\mu\nu} \pi_{\mu r}\, \pi_{\nu s}\, \gamma_{\mu\nu}\,. \tag{2.5}$$

Wir definieren nun:

I Der Inbegriff eines Systems von Funktionen $T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}$ der Variablen x heiße ein kovarianter Tensor vom Rang λ, wenn diese Größen sich transformieren gemäß den Formeln

$$T'_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} p_{i_1 r_1}\, p_{i_2 r_2} \ldots p_{i_\lambda r_\lambda} \cdot T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}\,. \tag{2.6}$$

II Der Inbegriff eines Systems von Funktionen $\Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}$ der Variablen x heiße ein kontravarianter Tensor vom Rang λ, wenn diese Größen sich transformieren gemäß den Formeln

$$\Theta'_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \pi_{i_1 r_1}\, \pi_{i_2 r_2} \ldots \pi_{i_\lambda r_\lambda} \cdot \Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}\,.^4 \tag{2.7}$$

III Der Inbegriff eines Systems von Funktionen $\mathfrak{T}_{i_1 i_2 \ldots i_\mu / k_1 k_2 \ldots k_\nu}$ der Variablen x heiße ein gemischter Tensor, kovariant vom Rang μ, kontravariant vom Rang ν, wenn diese Größen sich transformieren nach den Formeln

$$\mathfrak{T}'_{r_1 r_2 \ldots r_\mu / s_1 s_2 \ldots s_\nu} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_\mu \\ k_1 k_2 \ldots k_\nu}} p_{i_1 r_1}\, p_{i_2 r_2} \ldots p_{i_\mu r_\mu} \cdot \pi_{k_1 s_1}\, \pi_{k_2 s_2} \ldots \pi_{k_\nu s_\nu} \cdot \mathfrak{T}_{i_1 i_2 \ldots i_\mu / k_1 k_2 \ldots k_\nu}\,. \tag{2.8}$$

Aus diesen Definitionen und den Gleichungen (2.4) und (2.5) folgt: Die Größen $g_{\mu\nu}$ bilden einen kovarianten, die Größen $\gamma_{\mu\nu}$ einen kontravarianten Tensor zweiten Ranges, die Fundamentaltensoren des Gravitationsfeldes im Fall $n = 4$.
Die Größen $\mathrm{d}x_i$ bilden nach Gleichung (2.3) einen kontravarianten Tensor ersten Ranges. Tensoren ersten Ranges nennt man auch Vektoren erster Art oder Vierervektoren bei

4 Unsere kovarianten (kontravarianten) Tensoren vom Rang λ sind also identisch mit den „kovarianten (kontravarianten) Systemen λ^{ter} Ordnung“ von Ricci und Levi-Cività und werden von diesen Autoren bezeichnet mit $X_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$ bzw. $X^{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$. So viele Vorteile diese letztere Bezeichnung auch bietet, so haben uns doch Komplikationen in zusammengesetzteren Gleichungen gezwungen, die obigen Bezeichnungen zu wählen, also kovariante Tensoren mit lateinischen, kontravariante mit griechischen, gemischte mit deutschen Buchstaben zu bezeichnen. Kovariante und kontravariante Tensoren sind besondere Fälle der gemischten Tensoren.

$n = 4$.
Unmittelbar aus der Definition der Tensoren ergeben sich die folgenden algebraischen Tensoroperationen:

1. Die Summe zweier gleichartiger Tensoren vom Rang λ ist wieder ein gleichartiger Tensor vom Rang λ, dessen Komponenten durch Addition der entsprechenden Komponenten beider Tensoren entstehen.

2. Das äußere Produkt zweier kovarianter (kontravarianter) Tensoren vom Rang λ bzw. μ ist ein kovarianter (kontravarianter) Tensor vom Rang $\lambda + \mu$ mit den Komponenten

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda k_1 k_2 \ldots k_\mu} = A_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \cdot B_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} , \tag{2.9}$$

bzw.

$$\Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda k_1 k_2 \ldots k_\mu} = \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \cdot \Psi_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} . \tag{2.9'}$$

3. Als inneres Produkt zweier Tensoren bezeichnen wir

   a) den kovarianten Tensor

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} \Phi_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} \cdot A_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda k_1 k_2 \ldots k_\mu} , \tag{2.10}$$

   b) den kontravarianten Tensor

$$\Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} A_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} \cdot \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda k_1 k_2 \ldots k_\mu} , \tag{2.11}$$

   c) den gemischten Tensor

$$\mathfrak{T}_{r_1 r_2 \ldots r_\mu / s_1 s_2 \ldots s_\nu} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} A_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda r_1 r_2 \ldots r_\mu} \cdot \Phi_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda s_1 s_2 \ldots s_\nu} , \tag{2.12}$$

   oder ganz allgemein, die drei Fälle a) bis c) mit enthaltend

$$\begin{aligned} &\mathfrak{T}_{r_1 r_2 \ldots r_\mu u_1 u_2 \ldots u_\alpha / s_1 s_2 \ldots s_\nu v_1 v_2 \ldots v_\beta} \\ &= \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} \mathfrak{A}_{r_1 r_2 \ldots r_\mu / k_1 k_2 \ldots k_\lambda v_1 v_2 \ldots v_\beta} \cdot \mathfrak{B}_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda u_1 u_2 \ldots u_\alpha / s_1 s_2 \ldots s_\nu} . \end{aligned}$$

   Die der gewöhnlichen Vektoranalysis entnommenen Bezeichnungen „äußeres und inneres Produkt“ rechtfertigen sich, weil jene Operationen sich letzten Endes als

besondere Fälle der hier betrachteten ergeben.
Ist in den Fällen a) oder b) der Rang λ gleich Null, so ist das innere Produkt ein Skalar.

4. Reziprozität eines kovarianten und eines kontravarianten Tensors. Aus einem kovarianten Tensor vom Rang λ bildet man den reziproken kontravarianten Tensor vom Rang λ durch λ-fache innere Multiplikation mit dem kontravarianten Fundamentaltensor:

$$\Theta_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_\lambda} \gamma_{i_1 k_1} \gamma_{i_2 k_2} \cdots \gamma_{i_\lambda k_\lambda} \cdot T_{k_1 k_2 \dots k_\lambda} , \tag{2.13}$$

woraus durch Auflösung

$$T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_\lambda} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \cdots g_{i_\lambda k_\lambda} \cdot \Theta_{k_1 k_2 \dots k_\lambda} \tag{2.14}$$

wird. Man findet daher aus einem Tensor einen Skalar, in dem man ihn mit seinem reziproken Tensor multipliziert nach der Formel

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \cdot \Theta_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} . \tag{2.15}$$

Ein kovarianter (kontravarianter) Tensor ersten Ranges (Vierervektor bei $n = 4$) hat die Invariante

$$\sum_{ik} \gamma_{ik} T_i T_k$$

beziehungsweise

$$\sum_{ik} g_{ik} \Theta_i \Theta_k .$$

In der gewöhnlichen Relativitätstheorie ist die Kontravarianz identisch der Kovarianz und obige Invariante wird zum Quadrat des Betrages des Vierervektors

$$T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + T_l^2 .$$

Ein kovarianter (kontravarianter) Tensor zweiten Ranges hat die Invariante

$$\sum_{ik} \gamma_{ik} T_{ik}$$

beziehungsweise

$$\sum_{ik} g_{ik}\Theta_{ik}\,,$$

die im Fall der bisherigen Relativitätstheorie zu

$$T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}+T_{ll}$$

wird.[5]

2.3 Differentialoperationen an Tensoren

Wir führen folgende allgemeine Definitionen ein:

I. Als Erweiterung eines kovarianten (kontravarianten) Tensors vom Rang λ bezeichnen wir den kovarianten (kontravarianten) Tensor vom Rang $\lambda+1$, der durch „kovariante (kontravariante) Differentiation“ aus jenem hervorgeht.
Nach Christoffel (l.c.) ist

$$\begin{aligned} T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda s} &= \frac{\partial T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}}{\partial x_s} \\ &- \sum_k \left(\begin{Bmatrix} r_1\, s \\ k \end{Bmatrix} T_{k r_2 \ldots r_\lambda} + \begin{Bmatrix} r_2\, s \\ k \end{Bmatrix} T_{r_1 k \ldots r_\lambda} + \cdots + \begin{Bmatrix} r_\lambda\, s \\ k \end{Bmatrix} T_{r_1 r_2 \ldots k} \right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

ein kovarianter Tensor vom Rang $\lambda+1$, der aus dem kovarianten Tensor vom Rang λ hervorgeht. Ricci und Levi-Cività nennen die Differentialoperation der rechten Seite dieser Gleichung die „kovariante Differentiation“ des Tensors $T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$.
Hierbei bedeutet

$$\begin{Bmatrix} r\, s \\ u \end{Bmatrix} = \sum_t \gamma_{ut} \begin{bmatrix} r\, s \\ t \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

5 Wir verzichten im Folgenden darauf, jeweils die besondere Form anzugeben, welche unsere Formeln im Fall der gewöhnlichen Relativitätstheorie annehmen, begnügen uns vielmehr damit, hinzuweisen auf die nachstehenden Darstellungen:

a) Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Göttinger Nachrichten 1908.

b) Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie I und II, Ann. d. Physik, vierte Folge, 32 (1910) und 33 (1910).

c) Laue, Das Relativitätsprinzip. Die Wissenschaft, Heft 38, 2. A. (1913).

$$\begin{bmatrix} r\,s \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_t} \right) . \tag{2.18}$$

$\left[{r\,s \atop t}\right]$ und $\left\{{r\,s \atop u}\right\}$ sind die Christoffel'schen Drei-Indizes-Symbole erster bzw. zweiter Art; durch Auflösung der Gleichungen (2.17) findet man

$$\begin{bmatrix} r\,s \\ u \end{bmatrix} = \sum_t g_{ut} \begin{Bmatrix} r\,s \\ t \end{Bmatrix} .\text{[6]} \tag{2.19}$$

Führt man in die Gleichung (2.16) an Stelle der kovarianten Tensoren die zu ihnen reziproken kontravarianten Tensoren ein, so erhält man als „kontravariante Erweiterung"

$$\begin{aligned} \Theta_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda s} = \sum_{ik} \gamma_{si} \Bigg(& \frac{\partial \Theta_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}}{\partial x_i} + \begin{Bmatrix} i\,k \\ r_1 \end{Bmatrix} \Theta_{k r_2 \ldots r_\lambda} + \begin{Bmatrix} i\,k \\ r_2 \end{Bmatrix} \Theta_{r_1 k \ldots r_\lambda} + \ldots \\ & + \begin{Bmatrix} i\,k \\ r_\lambda \end{Bmatrix} \Theta_{r_1 r_2 \ldots k} \Bigg) . \end{aligned} \tag{2.20}$$

[6] Aufgrund dieser Formeln beweist man leicht, dass die Erweiterung des Fundamentaltensors identisch verschwindet.

II. Als Divergenz eines kovarianten (kontravarianten) Tensors vom Rang λ bezeichnen wir den kovarianten (kontravarianten) Tensor vom Rang $\lambda - 1$, der durch innere Multiplikation der Erweiterung mit dem kontravarianten (kovarianten) Fundamentaltensor entsteht.
Somit ist die Divergenz des kovarianten Tensors $T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$ der Tensor

$$T_{r_2 r_3 \ldots r_\lambda} = \sum_{s r_1} \gamma_{s r_1} T_{r_1 \ldots r_\lambda s}\,, \tag{2.21}$$

und die Divergenz des kontravarianten Tensors $\Theta_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$ ist der Tensor

$$\Theta_{r_2 r_3 \ldots r_\lambda} = \sum_{s r_1} g_{s r_1} \Theta_{r_1 \ldots r_\lambda s}\,. \tag{2.22}$$

Die Divergenz eines Tensors geht nicht eindeutig aus diesem hervor; das Resultat ändert sich im Allgemeinen, wenn man in den Gleichungen (2.21) und (2.22) r_1 durch einen der Indizes $r_2, r_3 \ldots r_\lambda$ ersetzt.

III. Als verallgemeinerte Laplace'sche Operation an einem Tensor bezeichnen wir die Aufeinanderfolge der Erweiterung und der Divergenz. Die verallgemeinerte Laplace'sche Operation lässt daher aus einem Tensor einen gleichartigen gleichen Ranges hervorgehen.
Von besonderem Interesse sind die Fälle $\lambda = 0, 1, 2$.

a) $\lambda = 0$.
Der Ausgangstensor ist ein Skalar T, den wir als ko- oder kontravarianten Tensor vom Rang 0 betrachten können.

$$T_r = \frac{\partial T}{\partial x_r} \tag{2.23}$$

ist die kovariante Erweiterung des Skalars T, d. i. ein kovarianter Tensor ersten Ranges (kovarianter Vierervektor für $n = 4$), den man den Gradienten des Skalars nennt. Die Invariante

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial T}{\partial x_r} \frac{\partial T}{\partial x_s} \tag{2.24}$$

ist der erste Beltramische Differentialparameter des Skalars T.
Um die Divergenz des Gradienten zu bilden, hat man aus seiner Erweiterung

$$T_{rs} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_k \begin{Bmatrix} r\,s \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

den Skalar

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs}$$

zu bilden, dem man die Form

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{rs} \frac{\partial T}{\partial x_r} \right) \tag{2.25}$$

geben kann[7]. Die Divergenz des Gradienten ist das Resultat der verallgemeinerten Laplace'schen Operation ausgeführt am Skalar T und ist identisch mit dem zweiten Beltramischen Differentialparameter des Skalars T.

b) $\lambda = 1$.
Der Ausgangstensor sei ein kovarianter Vierervektor, könnte aber ebenso gut ein kontravarianter Vierervektor sein.
Die kovariante Erweiterung ist nach (2.16)

$$T_{rs} = \frac{\partial T_r}{\partial x_s} - \sum_k \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ k \end{matrix} \right\} T_k \,. \tag{2.26}$$

Die Divergenz ist

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \sum_{rsk} \gamma_{rs} \left(\frac{\partial T_r}{\partial x_s} - \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ k \end{matrix} \right\} T_k \right) , \tag{2.27}$$

der wir nach (2.17) die Form geben:

$$\begin{aligned} \sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \sum_{rskl} \Bigg(& \frac{\partial}{\partial x_s} (\gamma_{rs} T_r) - \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_s} T_r \\ & - \frac{1}{2} \gamma_{rs} \gamma_{kl} \left(\frac{\partial g_{rl}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_l} \right) T_k \Bigg) \,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

[7] Siehe z. B. Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie, erste Auflage, S. 47; oder auch die Umrechnung der Divergenz eines Vierervektors im nachstehenden Fall b).

Eliminiert man $\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_s}$ vermöge der Formel[8]

$$\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_t} = -\sum_{\varrho\sigma} \gamma_{r\varrho}\, \gamma_{s\sigma}\, \frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x_t}\,, \tag{2.29}$$

so heben sich in Gleichung (2.28) die drei mittleren Glieder unter dem Summenzeichen auf und es bleibt neben dem ersten Glied

$$\sum_{rskl} \frac{1}{2}\, \gamma_{rs}\, \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_l}\, \gamma_{kl}\, T_k = \sum_{kl} \gamma_{kl}\, T_k\, \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_l}\,,$$

so dass man für die Divergenz des kovarianten Vierervektors[9] findet

$$\sum_{rs} \gamma_{rs}\, T_{rs} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{rs}\, T_r \right)\,. \tag{2.30}$$

c) $\lambda = 2$.
Der Ausgangstensor sei ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges Θ_{rs} dessen Erweiterung nach Formel (2.20) lautet

$$\Theta_{rst} = \sum_{ik} \gamma_{ti} \left(\frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_i} + \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} \Theta_{ks} + \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} \Theta_{rk} \right)\,. \tag{2.31}$$

Hieraus ergibt sich als Divergenz des kontravarianten Tensors Θ_{rs} entweder die Zeilendivergenz

$$\Theta_r = \sum_{st} g_{st}\, \Theta_{rst} = \sum_{sk} \left(\frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_s} + \begin{Bmatrix} s\,k \\ r \end{Bmatrix} \Theta_{ks} + \begin{Bmatrix} s\,k \\ s \end{Bmatrix} \Theta_{rk} \right)\,, \tag{2.32}$$

oder die Kolonnendivergenz

8 Diese Formel, die wir auch in Abschnitt 1.5 bei der Aufstellung der Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes verwenden, beweisen wir folgendermaßen:
Es ist

$$\sum_l g_{il}\, \gamma_{kl} = \delta_{ik} \quad (0 \,\text{oder}\, 1)\,,$$

also

$$\sum_l g_{il}\, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_t} = -\sum_l \gamma_{kl}\, \frac{\partial g_{il}}{\partial x_t}\,,$$

wo t irgendeine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ ist.
Für ein bestimmtes k erhält man so n Gleichungen $(i = 1, 2, \ldots n)$ mit den n Unbekannten $\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_t}$, $(l = 1, 2, \ldots n)$, deren Auflösung die Formel des Textes liefert.

9 Zu dem nämlichen Ergebnis gelangt Kottler (l.c.) ausgehend von einem speziellen Tensor dritten Ranges (vgl. Abschnitt 1.4 dieser Abhandlung) mit Hilfe der Theorie der Integralformen.

$$\Theta_s = \sum_{rt} g_{rt}\,\Theta_{rst} = \sum_{rk}\left(\frac{\partial\,\Theta_{rs}}{\partial\,x_r} + \left\{\begin{matrix} r\,k \\ r \end{matrix}\right\}\Theta_{ks} + \left\{\begin{matrix} r\,k \\ s \end{matrix}\right\}\Theta_{rk}\right)\,, \tag{2.33}$$

zwei Differentialoperationen, die für symmetrische Tensoren zusammenfallen. Weil

$$\sum_r \left\{\begin{matrix} r\,k \\ r \end{matrix}\right\} = \sum_{rs}\gamma_{rs}\begin{bmatrix} r\,k \\ s \end{bmatrix} = \sum_{rs}\frac{1}{2}\gamma_{rs}\frac{\partial\,g_{rs}}{\partial\,x_k} = \frac{\partial\,\log\sqrt{g}}{\partial\,x_k} \tag{2.34}$$

ist, so lässt sich die Formel (2.33) auch zusammenfassen in

$$\Theta_s = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_r \frac{\partial}{\partial\,x_r}\left(\sqrt{g}\cdot\Theta_{rs}\right) + \sum_{rk}\left\{\begin{matrix} r\,k \\ s \end{matrix}\right\}\Theta_{rk}\,. \tag{2.35}$$

2.4 Spezielle Tensoren (Vektoren)

Ein kovarianter (kontravarianter) Tensor heiße speziell, wenn seine Komponenten ein System von alternierenden Funktionen der Grundvariablen bilden.
Die Komponenten eines speziellen Tensors sind demnach den folgenden Bedingungen unterworfen:

1. Es ist $T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = 0$, wenn zwei der Indizes $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ einander gleich sind.
2. unterscheiden sich $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ und $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ nur durch die Reihenfolge der Indizes, so ist $T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = \pm T_{s_1 s_2 \ldots s_\lambda}$, je nachdem $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ und $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ Permutationen derselben Klasse sind oder nicht. Zwei Permutationen gehören bekanntlich zu der gleichen Klasse, wenn beide durch eine gerade bezw. ungerade Anzahl von bloßen Vertauschungen zweier Indizes aus der Grundpermutation $1, 2, \ldots n$ hervorgehen.
   Die Anzahl der linear unabhängigen Komponenten eines speziellen Tensors vom Rang λ ist demnach $\binom{n}{\lambda}$.

Die Theorie der speziellen Tensoren gestaltet sich vermöge dieser Eigenschaften einfacher, aber auch reichhaltiger als die der allgemeinen Tensoren; sie ist von besonderer Bedeutung für die mathematische Physik, weil die Theorie der Vektoren λ^{ter} Art (Vierer-, Sechservektoren bei $n = 4$) sich zurückführen lässt auf die speziellen Tensoren vom Rang λ. Vom Standpunkt der allgemeinen Theorie aus ist es zweckmäßiger von den Tensoren auszugehen und die Vektoren lediglich als spezielle Tensoren zu behandeln.
Wichtig für die Vektoranalysis der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu$$

ist ein spezieller Tensor n^{ten} Ranges, der mit der Diskriminante g des Linienelementes verknüpft ist [10]. Diese Diskriminante transformiert sich ja gemäß der Gleichung

$$g' = p^2 \cdot g\,, \tag{2.36}$$

wo

$$p = |p_{ik}| = \left|\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\right|$$

die Funktionaldeterminante der Substitution ist. Gibt man $\sqrt{g}$ für das ursprüngliche Bezugssystem ein bestimmtes Vorzeichen, und setzt man fest, dass sich dieses Vorzeichen bei einer Transformation ändern soll oder nicht, je nachdem die Substitutionsdeterminante p negativ oder positiv ist, so hat die Gleichung

$$\sqrt{g'} = p \cdot \sqrt{g} \tag{2.37}$$

exakte Bedeutung mit Einschluss der Vorzeichen.
Es sei nun $\delta_{r_1 r_2 \dots r_n}$ gleich Null, wenn zwei der Indizes einander gleich sind, dagegen ± 1, wenn dies nicht der Fall ist und die Permutation $r_1, r_2, \dots r_n$ durch eine gerade bezw. ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indizes aus der Grundpermutation 1, 2, $\dots n$ hervorgeht.
Dann sind

$$e_{r_1 r_2 \dots r_n} = \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \sqrt{g} \tag{2.38}$$

die Komponenten eines speziellen kovarianten Tensors n-ten Ranges, den wir den kovarianten Diskriminantentensor nennen wollen. Denn eine Transformation liefert zunächst

$$e'_{r_1 r_2 \dots r_n} = \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \sqrt{g'} = \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot p\,\sqrt{g}\,;$$

da aber

$$p = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot p_{i_1 1}\, p_{i_2 2} \cdots p_{i_n n} = \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot p_{i_1 r_1}\, p_{i_2 r_2} \cdots p_{i_n r_n}$$

ist, so folgt

$$e'_{r_1 r_2 \dots r_n} = \sqrt{g} \cdot \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot p_{i_1 r_1}\, p_{i_2 r_2} \cdots p_{i_n r_n}\,,$$

[10] Das „System ε“ von Ricci und Levi-Cività, l. c., pag. 135.

also wegen der Definition (2.38)

$$e'_{r_1 r_2 \dots r_n} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \cdots p_{i_n r_n} .$$

Für den reziproken kontravarianten Tensor findet man nach (1.13)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} &= \sum_{r_1 r_2 \dots r_n} \gamma_{i_1 r_1} \gamma_{i_2 r_2} \cdots \gamma_{i_n r_n} \cdot e_{r_1 r_2 \dots r_n} , \\
\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} &= \sqrt{g} \cdot \sum_{r_1 r_2 \dots r_n} \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \gamma_{i_1 r_1} \gamma_{i_2 r_2} \cdots \gamma_{i_n r_n} , \\
\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} &= \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot \sqrt{g} \cdot \sum_{r_1 r_2 \dots r_n} \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \gamma_{1 r_1} \gamma_{2 r_2} \cdots \gamma_{n r_n} .
\end{aligned}$$

Da aber die Determinante der normierten Unterdeterminanten γ_{ik}

$$|\gamma_{ik}| = \frac{1}{g}$$

ist, so folgt

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}}{\sqrt{g}} . \tag{2.39}$$

Die Bedeutung des kovarianten (kontravarianten) Diskriminantentensors liegt darin, dass seine innere Multiplikation mit einem kontravarianten (kovarianten) Tensor vom Rang λ einen gleichartigen Tensor vom Rang $\lambda - n$ liefert, wobei der Tensor von entgegengesetzter Art wird, wenn $\lambda - n$ negativ ist. (Ergänzung des Tensors.)
Wenn

$$n = 4$$

ist, so gibt es spezielle Tensoren bis zum vierten Rang, da alle speziellen Tensoren höheren Ranges identisch verschwinden.
Die nichtverschwindenden Komponenten eines speziellen kovarianten Tensors vierten Ranges sind alle einander gleich oder entgegengesetzt gleich. Die Ergänzung (innere Multiplikation mit dem kontravarianten Diskriminantentensor) ergibt einen Skalar, so dass die Differentialoperationen, die an einem speziellen Tensor vierten Ranges ausgeführt werden können, damit zurückgeführt sind auf die Differentialoperationen an einem Skalar.
Die Ergänzung eines speziellen kovarianten Tensors dritten Ranges ist ein kontravarianter Vektor erster Art.
Die Ergänzung eines speziellen kovarianten Tensors zweiten Ranges ist ein kontravari-

anter, spezieller Tensor zweiten Ranges.
Endlich führt die Ergänzung eines speziellen kovarianten Vektors erster Art auf einen kontravarianten Tensor dritten Ranges.
Die Untersuchung des Einflusses des Gravitationsfeldes auf die physikalischen Vorgänge (Kapitel 1, Abschnitt 1.7) erfordert die eingehendere Behandlung der speziellen Tensoren zweiten Ranges (Sechservektoren).
Ist $\Theta_{\mu\nu}$ ein spezieller Tensor zweiten Ranges, so reduziert sich seine Divergenz (Formel (2.35))

$$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{g} \cdot \Theta_{\mu\nu}\right) + \sum_{\nu\kappa} \left\{ \begin{matrix} \nu\,\kappa \\ \mu \end{matrix} \right\} \Theta_{\nu\kappa}$$

wegen

$$\Theta_{\nu\kappa} = -\Theta_{\kappa\nu}\,, \qquad \Theta_{\nu\nu} = 0$$

auf

$$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{g} : \Theta_{\mu\nu}\right) \,. \tag{2.40}$$

Wir leiten ferner aus einem kontravarianten Tensor zweiten Ranges $\Theta_{\mu\nu}$ folgendermaßen den dualen kontravarianten Tensor zweiten Ranges $\Theta^\star_{rs}$ ab.
Wir bilden zuerst die Ergänzung [11]

$$T_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} e_{ik\mu\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu}\,, \tag{2.41}$$

oder also

$$\begin{aligned} T_{12} &= \sqrt{g} \cdot \Theta_{34}\,, \quad T_{13} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{42}\,, \quad T_{14} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{23}\,; \\ T_{23} &= \sqrt{g} \cdot \Theta_{14}\,, \quad T_{24} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{31}\,, \quad T_{34} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{12}\,. \end{aligned} \tag{2.41a}$$

Der gesuchte duale Tensor ist nun reziprok zu dieser Ergänzung, lautet daher

$$\Theta^\star_{rs} = \sum_{ik} \gamma_{ir}\gamma_{ks} \cdot T_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{ik\mu\nu} \gamma_{ir}\gamma_{ks} e_{ik\mu\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu}\,. \tag{2.42}$$

Die Reihenfolge der beiden Operationen -Ergänzung und Bildung des reziproken Tensors- ist wegen der Reziprozität der beiden Diskriminantentensoren vertauschbar.

[11] Der Faktor $\frac{1}{2}$ dient zur Vereinfachung des Resultates, ohne invariantentheoretisch von Belang zu sein.

2.5 Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Teil

2.5.1 Beweis der Kovarianz der Impuls-Energiegleichungen

Es ist zu beweisen, dass sich die Gleichungen (1.10) des Kapitel 1, die vom Faktor $\sqrt{-1}$ abgesehen lauten

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{g} \cdot \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu} = 0\,, \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

beliebigen Transformationen gegenüber kovariant verhalten.
Nach Formel (2.35) ist die Divergenz des kontravarianten Tensors $\Theta_{\mu\nu}$

$$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{g} \cdot \Theta_{\mu\nu}\right) + \sum_{\nu k} \begin{Bmatrix} \nu\, k \\ \mu \end{Bmatrix} \Theta_{\nu k}\,.$$

Der zu diesem kontravarianten Vektor Θ_μ reziproke kovariante Vektor T_σ ist also

$$\begin{aligned} T_\sigma = \sum_\mu g_{\sigma\mu} \Theta_\mu = \sum_{\mu\nu k} \Bigg(& \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu}\right) \\ & - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu} + g_{\sigma\mu} \begin{Bmatrix} \nu\, k \\ \mu \end{Bmatrix} \cdot \Theta_{\nu k} \Bigg)\,. \end{aligned}$$

Das letzte Glied dieser Summe ist aber gleich

$$\sum_{\nu k} \begin{bmatrix} \nu\, k \\ \sigma \end{bmatrix} \Theta_{\nu k} = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) \cdot \Theta_{\mu\nu}\,.$$

Also bleibt

$$T_\sigma = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu}\,,$$

d. h. bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{g}}$ die linke Seite der untersuchten Gleichung.
Dividiert man also jene Gleichung durch $\sqrt{g}$, so stellt ihre linke Seite die σ-Komponente eines kovarianten Vektors dar, ist also in der Tat kovariant. Man kann daher den Inhalt jener vier Gleichungen auch so aussprechen:
Die Divergenz des (kontravarianten) Spannungs-Energie-Tensors der materiellen Strömung bzw. des physikalischen Vorganges verschwindet.

2.5.2 Differentialtensoren einer durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit

Das Problem der Aufstellung der Differentialgleichungen eines Gravitationsfeldes (Kapitel 1, Abschnitt 1.6) lenkt die Aufmerksamkeit auf die Differentialinvarianten und Differentialkovarianten der quadratischen Differentialform

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x_\mu\, \mathrm{d}x_\nu\,.$$

Die Theorie dieser Differentialkovarianten führt im Sinne unserer allgemeinen Vektoranalysis auf die Differentialtensoren, die mit einem Gravitationsfeld gegeben sind. Das vollständige System dieser Differentialtensoren (beliebigen Transformationen gegenüber) geht zurück auf eine von Riemann [12] und unabhängig von diesem von Christoffel [13] gefundenen kovarianten Differentialtensor vierten Ranges, den wir den Riemann'schen Differentialtensor nennen wollen und der folgendermaßen lautet

$$\begin{aligned} R_{iklm} = (ik,lm) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l \partial x_i}\right) \\ + \sum_{\varrho\sigma} \gamma_{\varrho\sigma}\left(\begin{bmatrix} i\,m \\ \varrho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\,l \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,l \\ \varrho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\,m \\ \sigma \end{bmatrix}\right)\,. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Durch kovariante algebraische und differentielle Operationen erhält man aus dem Riemann'schen Differentialtensor und dem Diskriminantentensor (Abschnitt 1.4, Formel (2.38)) das vollständige System der Differentialtensoren (also auch der Differentialinvarianten) der Mannigfaltigkeit.
(ik,lm) heißen auch die Christoffel'schen Vier-Indizes-Symbole erster Art. Von Bedeutung sind neben diesen die Vier-Indizes-Symbole zweiter Art

$$\{ik,lm\} = \frac{\partial \left\{ {i\,l \atop k} \right\}}{\partial x_m} - \frac{\partial \left\{ {i\,m \atop k} \right\}}{\partial x_l} + \sum_{\varrho}\left(\begin{Bmatrix} i\,l \\ \varrho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \varrho\,m \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,m \\ \varrho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \varrho\,l \\ k \end{Bmatrix}\right)\,, \tag{2.44}$$

die mit jenen in der Beziehung stehen

$$\begin{aligned} &\{i\varrho,lm\} \sum_k \gamma_{\varrho k}\,(ik,lm)\,, \qquad \text{oder aufgelöst} \\ &(ik,lm) \sum_\varrho g_{k\varrho}\,\{i\varrho,lm\}\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

12 Riemann, Ges. Werke, S. 270.
13 Christoffel, l. c., S. 26.

Den Vier-Indizes-Symbolen zweiter Art kommt in der allgemeinen Vektoranalysis die Bedeutung der Komponenten eines gemischten Tensors, kovariant vom dritten, kontravariant vom ersten Rang zu [14].
Die hervorragende Bedeutung dieser Begriffsbildungen für die Differentialgeometrie [15] einer durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit macht es a priori wahrscheinlich, dass diese allgemeinen Differentialtensoren auch für das Problem der Differentialgleichungen eines Gravitationsfeldes von Bedeutung sein dürften. Es gelingt in der Tat zunächst, einen kovarianten Differentialtensor zweiten Ranges und zweiter Ordnung G_{im} anzugeben, der in jene Gleichungen eintreten könnte, nämlich

$$G_{im} = \sum_{kl} \gamma_{kl} (ik, lm) = \sum_{k} \{ik, km\} \ . \tag{2.46}$$

Allein es zeigt sich, dass sich dieser Tensor im Spezialfall des unendlich schwachen statischen Schwerefeldes nicht auf den Ausdruck $\Delta\varphi$ reduziert. Wir müssen daher die Frage offen lassen, inwiefern die allgemeine Theorie der mit einem Gravitationsfeld verknüpften Differentialtensoren mit dem Problem der Gravitationsgleichungen zusammenhängt. Ein solcher Zusammenhang müsste vorhanden sein, sofern die Gravitationsgleichungen beliebige Substitutionen zuzulassen hätten; allein in diesem Fall scheint es ausgeschlossen zu sein, Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufzufinden. Würde dagegen feststehen, dass die Gravitationsgleichungen nur eine gewisse Gruppe von Transformationen gestatten, so wäre es verständlich, wenn man mit den von der allgemeinen Theorie gelieferten Differentialtensoren nicht auskommt. Wie im physikalischen Teil ausgeführt ist, sind wir nicht imstande, zu diesen Fragen Stellung zu nehmen.

2.5.3 Zur Ableitung der Gravitationsgleichungen

Die von Einstein beschriebene Herleitung der Gravitationsgleichungen (Kapitel 1, Abschnitt 1.6), wird im Einzelnen folgendermaßen durchgeführt.
Wir gehen aus von dem in der Energiebilanz mit Gewissheit zu erwartenden Glied

$$U = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) \tag{2.47}$$

[14] Es folgt dies aus der Ersten der Gleichungen (2.45)

[15] Das identische Verschwinden des Tensors R_{iklm} stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass die Differentialform auf die Form $\sum_i \mathrm{d}x_i^2$ transformiert werden kann.

und formen durch partielle Integration um [16]. Es wird so

$$U = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sqrt{g}\,\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) - \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{g}\,\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\alpha} .$$

Die erste der auf der rechten Seite stehenden Summen hat die gewünschte Form einer Summe von Differentialquotienten und sei bezeichnet mit A, so dass

$$A = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sqrt{g}\,\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) . \tag{2.48}$$

In der zweiten der rechts stehenden Summen führen wir wieder partielle Integration aus. Dann lautet die Identität

$$U = A - \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) + \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) .$$

Die erste der rechts entstandenen Summen kann als eine Summe von Differentialen geschrieben werden und möge mit

$$B = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\sqrt{g}\,\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) \tag{2.49}$$

bezeichnet sein. In der zweiten Summe differenzieren wir aus. Dann wird

$$U = A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\sigma} + \sqrt{g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} \right) ,$$

oder wenn man im zweiten Summanden die Formel (2.29) des Abschnitts 2.3 anwendet und im dritten Summanden partiell integriert

$$\begin{aligned} U = A - B &+ \sum_{\alpha\beta\mu\nu i k} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\sqrt{g}}{2} \gamma_{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} - \sum_{\alpha\beta\mu\nu i k} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \gamma_{\alpha i} \gamma_{\beta k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \\ &+ \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g}\,\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) - \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g}\,\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) . \end{aligned}$$

Die beiden ersten Summen haben die Form von Gliedern, wie wir sie auf die linke Seite unserer Identität setzen. Wir bezeichnen sie mit

16 Die Herleitung der gesuchten Identität vereinfacht sich, wenn wir den Faktor $\sqrt{g}$ unter das Differentiationszeichen setzen, ohne dass das Resultat hiervon abhängig wäre.

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{ik} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \tag{2.50}$$

$$W = \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha i} \gamma_{\beta k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} . \tag{2.51}$$

Die dritte der rechts stehenden Summen hat die Form einer Summe von Differentialquotienten; eliminiert man in ihr $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ vermöge jener Formel (2.29), so erweist sie sich als die schon eingeführte Größe A. In der letzten Summe endlich ersetzen wir nach der gleichen Formel $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$. Wir finden so

$$U - V + W = 2A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) ,$$

oder

$$\begin{aligned} U - V + W = 2A - B &+ \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) \\ &- \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k} \right) . \end{aligned}$$

Die erste dieser Summen wird wegen (2.29), d. h. wegen

$$\sum_{\mu\nu} \gamma_{i\mu} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha}$$

zu

$$- \sum_{\alpha\beta ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha} \right) = -U .$$

Die zweite können wir, wegen der Vertauschbarkeit von i und k, μ und ν, schreiben als

$$\begin{aligned} 2X = \; & 2 \cdot \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\mu i} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\nu k}}{\partial x_\beta} \\ = & - 2 \cdot \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{i\mu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{k\nu}}{\partial x_\beta} . \end{aligned}$$

Die gesuchte Identität lautet also

$$2U - V + W + 2X = 2A - B\,,$$

ist also identisch der im Kapitel 1, Abschnitt 1.6 gegebenen.

2.6 Bemerkungen

Zu Abschnitt 1.6 und 1.7. Beim Niederschreiben der Arbeit haben wir es als einen Mangel der Theorie empfunden, dass es nicht gelungen ist, Gleichungen für das Gravitationsfeld aufzustellen, welche allgemein, d.h. beliebigen Substitutionen gegenüber, kovariant sind. Nachträglich fand ich aber, dass Gleichungen, welche die $\gamma_{\mu\nu}$ eindeutig aus den $\Theta_{\mu\nu}$ bestimmen, und welche allgemein kovariant sind, überhaupt nicht existieren können; der Beweis hierfür ergibt sich wie folgt.
Es gebe in unserer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit einen Teil L, in welchem ein „materieller Vorgang" nicht stattfinde, in welchem also die $\Theta_{\mu\nu}$ verschwinden. Durch die außerhalb L gegebenen $\Theta_{\mu\nu}$ sind gemäß unserer Annahme überall, also auch im Innern von L die $\gamma_{\mu\nu}$ vollkommen bestimmt. Wir denken uns nun statt der ursprünglichen Koordinaten x_ν neue Koordinaten x'_ν eingeführt von folgender Art. Außerhalb L sei überall $x_\nu = x'_\nu$; innerhalb L aber sei wenigstens für einen Teil von L und wenigstens für einen Index ν $x_\nu \neq x'_\nu$. Es ist klar, dass durch eine derartige Substitution erreicht werden kann, dass wenigstens für einen Teil von L $\gamma'_{\mu\nu} \neq \gamma_{\mu\nu}$ ist. Andererseits ist überall $\Theta'_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}$, nämlich außerhalb L, weil für dieses Gebiet $x'_\nu = x_\nu$ ist, innerhalb L aber, weil für dies Gebiet $\Theta_{\mu\nu} = 0 = \Theta'_{\mu\nu}$ ist. Hieraus folgt, dass in dem betrachteten Fall, wenn alle Substitutionen als berechtigte zugelassen werden, zu dem nämlichen System der $\Theta_{\mu\nu}$ mehr als ein System der $\gamma_{\mu\nu}$ gehört.
Wenn also -wie dies in der Arbeit geschehen ist- an der Forderung festgehalten wird, dass durch die $\Theta_{\mu\nu}$ die $\gamma_{\mu\nu}$ vollständig bestimmt sein sollen, so ist man genötigt, die Wahl des Bezugssystems einzuschränken. Diese Einschränkung wird in unserer Arbeit dadurch erzielt, dass für den materiellen Vorgang und das Gravitationsfeld zusammen die Gültigkeit der Erhaltungssätze, d. h. die Gültigkeit von vier Gleichungen von der Gestalt der Gleichungen (1.19) postuliert wird. Aus diesem Postulat sind ja in Abschnitt 1.6 die Gleichungen (1.18) des Gravitationsfeldes abgeleitet.
Die Gleichungen (1.19) sind nur linearen Transformationen gegenüber kovariant, so dass also in der entwickelten Theorie nur lineare Transformationen als berechtigte Transformationen anzusehen sind. Wir können also die Achsen solcher Systeme als „gerade Linien", die Koordinatenflächen als „Ebenen" bezeichnen. Es ist sehr bemerkenswert, dass die Erhaltungssätze uns in den Stand setzen, die gerade Linie physikalisch zu definieren, trotzdem es nach unserer Theorie keinen Gegenstand oder Vorgang gibt, der unmittelbar als Modell der geraden Linie dienen könnte, wie etwa der Lichtstrahl in der gewöhnlichen Relativitätstheorie.

Zu Abschnitt 1.5 und 1.6. Die Grundgleichungen der Theorie nehmen eine besonders übersichtliche Gestalt an, wenn man gemischte Tensoren einführt. Setzt man

$$\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu}\, \Theta_{\mu\nu}\,, \qquad \mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu}\, \vartheta_{\mu\nu}\,,$$

so erhält man anstelle von (1.10)

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}\, \gamma_{\mu\tau}\, \mathfrak{T}_{\tau\nu}\,.$$

Anstelle von (1.19) hat man

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}\right) = 0\,,$$

anstelle der Gleichungen (1.18) für das Gravitationsfeld

$$\sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\sqrt{-g}\, \gamma_{\alpha\beta}\, g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right) = \kappa\, \left(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}\right)\,.$$

Zu Abschnitt 1.8. Der in Abschnitt 1.8 gegen die Skalartheorie der Gravitation (Nordströmsche Theorie) erhobene Einwand hat sich nicht als stichhaltig erwiesen. Man entgeht ihm, indem man die Ausdehnung der Körper in passender Weise vom Gravitationspotential abhängen lässt. Genaueres hierüber findet man in einem Vortrage des Verfassers über den Gegenstand (Naturforscherversammlung zu Wien), der in der Phys. Zeitschrift Ende 1913 erscheint.

ALBERT EINSTEIN