

GRUNDLAGEN DER CHEMISCHEN TECHNIK

Verfahrenstechnik der chemischen und verwandter Industrien

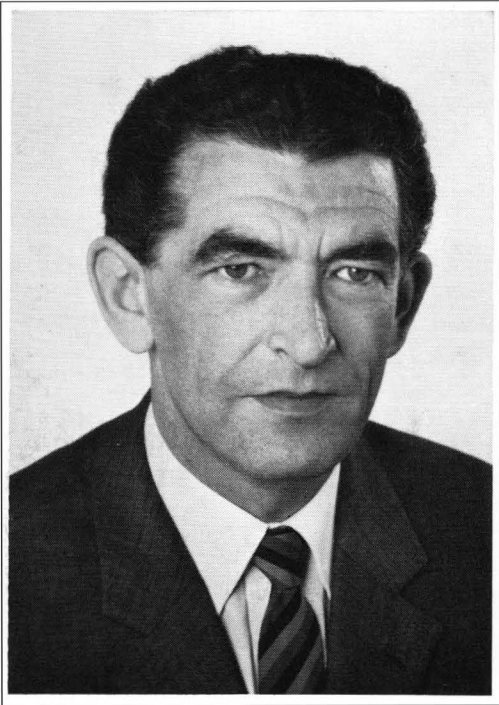
Herausgegeben von Prof. Dr. H. Mohler, Zürich, Prof. Dr.-Ing. O. Fuchs, Konstanz,
Dr.-Ing. H. Kraussold, Ingelheim am Rhein, und Prof. Dr. K. Dialer, München

Grundlagen der Einphasen- und Mehrphasenströmungen

von Dr.-Ing. Heinz Brauer

Professor an der Technischen Universität Berlin

Verlag Sauerländer Aarau und Frankfurt am Main



Heinz Brauer

geboren 1923 in Oldenburg, studierte von 1949 bis 1953 an der Technischen Hochschule Hannover Allgemeinen Maschinenbau. Bis 1960 Tätigkeit in der Forschungsgruppe für Wärme- und Kältetechnik des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung in Göttingen. Von hier aus erfolgte 1956 Promotion und 1959 Habilitation für das Fachgebiet Verfahrenstechnik an der Technischen Hochschule Hannover. Anschließend Tätigkeit in der Industrie als Leiter einer Abteilung für Strömungs- und Wärmetechnik der Mannesmann AG, Duisburg. Seit Wintersemester 1963 ordentlicher Professor an der Technischen Universität Berlin für das Fachgebiet Verfahrenstechnik. Seine besonderen Interessen liegen auf dem Gebiet der mehrphasigen Strömungen sowie der Stoffübertragung ohne und mit chemischen Reaktionen.

GRUNDLAGEN DER CHEMISCHEN TECHNIK

HEINZ BRAUER

GRUNDLAGEN DER EINPHASEN- UND

MEHRPHASENSTRÖMUNGEN

GRUNDLAGEN DER CHEMISCHEN TECHNIK
Verfahrenstechnik der chemischen und verwandter Industrien

Herausgegeben von Prof. Dr. Hermann Mohler, Zürich

Prof. Dr.-Ing. Otto Fuchs, Konstanz

Dr.-Ing. Hermann Kraussold, Ingelheim am Rhein

Prof. Dr. Kurt Dialer, München

**Grundlagen der Einphasen- und
Mehrphasenströmungen**

von Dr.-Ing. Heinz Brauer

Professor für Verfahrenstechnik
an der Technischen Universität Berlin

Mit 520 Abbildungen

Verlag Sauerländer, Aarau und Frankfurt am Main

Copyright © 1971 by Sauerländer AG, Aarau (Schweiz)

Printed in Switzerland. Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf in irgendeiner Form (durch Photokopie, Mikrofilm oder irgendein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlags reproduziert werden.

All rights reserved (including those of translations into foreign languages).

No part of this book may be reproduced in any form (by photostat, microfilm, or any other means) without written permission from the publishers.

Herstellung: Sauerländer AG, Aarau

Vorwort der Herausgeber

Die Buchreihe «Grundlagen der chemischen Technik» geht auf eine Anregung von Prof. Dr. H. MOHLER, Zürich, aus dem Jahre 1949/50 zurück; die ersten Bände erschienen nach längerer Planung und Vorbereitung durch Prof. Dr. H. MOHLER und Prof. Dr.-Ing. O. FUCHS, Konstanz, zwischen 1955 und 1960. Die stürmische Entwicklung der chemischen Industrie und das Eindringen der Chemie und der chemischen Technik in zahlreiche weitere Verbrauchsgüterindustrien verlangten eine Bearbeitung der gemeinsamen Grundlagen physikalischer, chemischer und technischer Art. Daneben sollte aber auch, wie wir das bereits im Vorwort zum Erscheinen der ersten Bände herausgestellt hatten, Werkstofffragen, die Meßtechnik und das große Gebiet der Betriebstechnik behandelt werden, das sich in physikalische und chemische Grundverfahren gliedern läßt.

Für die Buchreihe liegt ein umfangreiches Gesamtkonzept vor. Es ist allerdings nicht vorgesehen, die Reihe streng systematisch nach diesem Konzept aufzubauen. Je nach Aktualität des Themas und wie uns Autoren zur Verfügung stehen, lassen sich einzelne Bausteine an den verschiedenen Stellen in das Mosaik einfügen. Leider sind die meisten, die einen solchen Beitrag liefern können, durch ihre Berufsarbeit, durch Forschung und Lehre so in Anspruch genommen, daß es ihnen schwer wird, die Zeit für eine Übersicht und Zusammenfassung eines größeren Gebietes und die Niederschrift eines Buches zu finden.

Die Tatsache aber, daß einige Bände bereits in zweiter Auflage erscheinen und daß mehrere in zwei oder drei Fremdsprachen übersetzt wurden, bestätigt uns, daß wir auf dem rechten Weg sind und daß unsere Buchreihe allen im weiten Bereich der Verfahrenstechnik und des Apparatebaus tätigen Ingenieuren, Chemikern und Physikern bereits während ihres Studiums und weiterhin in der Berufsarbeit helfen können. Wir sind dankbar für jede Unterstützung, aber auch für jede Kritik, die zur Verwirklichung unserer Pläne beitragen kann.

Zur Zeit umfaßt die Reihe folgende Titel:

- Peter Grassmann, *Physikalische Grundlagen der Verfahrenstechnik* (englisch: *Physical Principles of Chemical Engineering*, Pergamon Press, Oxford 1971; spanische Ausgabe im Verlag URMO, Bilbao, in Vorbereitung)
- Otto Fuchs, *Physikalische Chemie als Einführung in die chemische Technik* (spanische Ausgabe im Verlag URMO, Bilbao, in Vorbereitung)
- Luigi Piatti, *Werkstoffe der chemischen Technik* (spanische Ausgabe im Verlag URMO in Vorbereitung)
- Romano Gregorig, *Wärmeaustauscher* (französisch: *Echangeurs de Chaleur*, Editions Eyrolles, Paris; spanisch: *Cambiadores de Calor*, Verlag URMO, Bilbao)
- Friedrich Kneule, *Das Trocknen* (französisch: *Le Séchage*, Librairie Polytechnique Béranger, Paris; spanisch: *El Secado*, Verlag URMO, Bilbao; polnisch: *Suszenie*, Verlag Arkady, Warschau)
- Marcel Loncin, *Die Grundlagen der Verfahrenstechnik in der Lebensmittelindustrie* (französisch: *Les opérations unitaires du génie chimique*, Dunod, Editeur, Paris; spanisch: *Tecnica de la Ingenieria Alimentaria*, Editorial Dossat S. A., Madrid)

Vorwort

Die fortschreitende wissenschaftliche Durchdringung verfahrenstechnischer Prozesse ließ es immer deutlicher werden, daß die Fluidodynamik so ausgebaut werden muß, damit sie neben den herkömmlichen einphasigen auch die mehrphasigen Strömungen umfaßt. Die Arbeiten auf diesem neuen Sektor der Fluidodynamik haben vor allem in den letzten zwei Jahrzehnten zu so großen Erfolgen geführt, daß eine zusammenfassende Darstellung angebracht zu sein scheint. Im deutschsprachigen Schrifttum hat GRASSMANN den mehrphasigen Strömungen in der ersten Auflage seines bekannten Buches *Physikalische Grundlagen der Chemie-Ingenieur-Technik* bereits 1960 ein eigenes umfangreiches Kapitel gewidmet. Heute, gut ein Jahrzehnt später, wird dieser für den weiteren Ausbau der Fluidodynamik bestimmende Bereich hier in einem eigenen Buch dargestellt.

Voraussetzung für die Behandlung mehrphasiger Strömungen ist eine ausreichende Kenntnis von den einphasigen Strömungen. Davon sind für den Verfahreningenieur insbesondere die Strömungen durch Rohre, Kanäle und Rohrbündel von Bedeutung. Sie werden in einem einführenden Kapitel erörtert. Dabei werden gleichrangig mit den Newtonschen auch die nicht-Newtonschen Fluide in den Kreis der Betrachtungen eingeschlossen. Dieser für die Verfahrenstechnik wichtige Schritt ließ sich bei der Behandlung mehrphasiger Strömungen leider noch nicht machen. Er bleibt den kommenden Jahren vorbehalten.

Unberücksichtigt blieb bei der Behandlung einphasiger Strömungen das große Gebiet der Grenzschichtströmungen. Hierüber liegen zahlreiche hervorragende Buchpublikationen vor. Darüber hinaus haben Grenzschichtströmungen in der Verfahrenstechnik noch keine größere Bedeutung bei der Behandlung mehrphasiger Systeme erlangt. Sobald sich diese Situation ändert, wird sich das auf den Problembereich auswirken, der in diesem Buch behandelt wird.

Das Buch setzt sich aus sechs Teilen zusammen. Im ersten Teil, der die Kapitel 1 bis 4 umfaßt, werden die bereits erwähnten einphasigen Strömungen Newtonscher und nicht-Newtonscher Fluide sowie einige Hinweise auf die Bedeutung und Herleitung von Kennzahlen gebracht.

Im zweiten Teil des Buches, der die Kapitel 5 bis 7 umfaßt, wird die Bewegung von Einzelpartikeln und von Partikelschwärmen behandelt. Partikeln können sowohl feste Körper als auch fluide Körper wie Blasen und Tropfen sein. Mit eingeschlossen in die Betrachtung sind die Methoden zur Erzeugung von Blasen und Tropfen, insbesondere die Zerstäubung von Flüssigkeiten.

Der dritte Teil des Buches setzt sich aus den Kapiteln 8 bis 11 zusammen, in dem die Durchströmung von Füllkörperschichten und Wirbelschichten, der pneumatische und hydraulische Transport körniger Feststoffe und die Fließbewegung von Kornmassen erörtert werden.

Die Abscheidung von Partikeln aus einer fluiden Phase wird im vierten Teil des Buches behandelt, der aus den Kapiteln 12 und 13 besteht. Im einzelnen wird dabei auf die Filtration und die Sedimentation sowie auf Gas- und Hydrozyklone eingegangen.

Der fünfte und umfangreichste Teil des Buches wird von den Kapiteln 14 bis 18 gebildet. In ihm werden die Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Rohren, in Füllkörperschichten, auf Kolonnenböden und in Blasensäulen beschrieben. Eingeleitet wird dieser Buchteil durch ein Kapitel über die Strömung von Rieselfilmen.

Abgeschlossen wird das Buch durch den sechsten Teil, in dem auf die mit dem Rühren und Mischen verbundenen Strömungsprobleme eingegangen wird. Die Behandlung beschränkt sich im wesentlichen auf die theoretische und experimentelle Bestimmung der Rührerleistung. Sie ist auch deshalb von besonderer Bedeutung, da sie ein Beispiel für die erfolgreiche Behandlung räumlicher Strömungen liefert. Man darf erwarten, daß auf dem Gebiet des Rührens und des Mischens in den nächsten Jahren bemerkenswerte Fortschritte erzielt werden.

In allen Kapiteln wird großer Wert auf Anschaulichkeit der betrachteten Vorgänge gelegt. Die mathematische Behandlung der Probleme erfolgt in den meisten Fällen auf recht elementarem Niveau. Dadurch ist die Hoffnung gerechtfertigt, daß das Buch zumindest in weiten Teilen auch von mathematisch weniger geübten Ingenieuren, Chemikern und Physikern mit Nutzen gelesen werden kann.

Erst im Rückblick auf eine sich über mehrere Jahre erstreckende Arbeit wird mir klar, in welchem Maße ich von der Tätigkeit vieler Mitarbeiter profitierte, in dem sie mir entweder Teile ihrer Forschungsarbeiten zur Verfügung stellten oder mit mir einzelne Probleme diskutierten. Hieran waren auch zahlreiche Studenten im Rahmen ihrer Studien- oder Diplom-Arbeiten beteiligt.

Ich sage daher Dank
meinen Lehrern
sowie meinen Mitarbeitern und Studenten

für eine Mitwirkung an diesem Buch, deren sie sich vielleicht erst bei seiner Lektüre bewußt werden. Meiner Sekretärin, Frau DORA HELLMICH, möchte ich an dieser Stelle für die Reinschrift des Manuskriptes und Frau URSULA BRUNO für die Herstellung der zahlreichen Bilder danken.

Den Herausgebern, insbesondere Herrn Dr.-Ing. H. KRAUSSOLD, möchte ich für vielfache Ratschläge, dem Verlag Sauerländer für die Zusammenarbeit und für die gute Ausstattung des Buches danken.

Berlin, Februar 1971

H. Brauer

Inhaltsverzeichnis

Teil I:	Einige Grundlagen der Einphasenströmung	17
1	Strömung durch Rohre	18
1.1	Laminare Rohrströmung	18
1.2	Turbulenz	21
1.3	Turbulente Rohrströmung	24
1.4	Widerstandsgesetze für glatte Rohre	30
1.5	Widerstandsgesetze für raue Rohre	35
1.51	Sandrauhe Rohre	36
1.52	Technisch raue Rohre	40
1.53	Künstlich raue Rohre	42
1.6	Strömung in gekrümmten Rohren und Rohrkrümmern	45
1.61	Gekrümmte Rohre	46
1.62	Rohrkrümmer	48
1.7	Isotherme und nicht isotherme Strömung	53
1.8	Ausgebildete und nicht ausgebildete Strömung	56
1.9	Strömung stark verdünnter Gase durch Rohre	59
1.91	Grundgesetze der Molekularbewegung	59
1.92	Geschwindigkeitsverteilung	63
1.93	Widerstandsgesetz	66
1.10	Verminderung des Reibungswiderstandes durch Zusatz hochmolekularer Substanzen	70
2	Strömung durch Kanäle und Rohrbündel	74
2.1	Strömung durch Ringkanäle	74
2.11	Glatte Ringkanäle	74
2.12	Exzentrische Anordnung des Kernrohres	82
2.13	Rauhe Ringkanäle	83
2.2	Strömung durch andere Kanäle	89
2.21	Kanäle mit rechteckiger Querschnittsfläche	90
2.22	Kanäle mit elliptischer Querschnittsfläche	92
2.23	Kanäle mit rhombischer Querschnittsfläche	97
2.24	Kanäle mit dreieckiger Querschnittsfläche	100
2.25	Kanäle mit ungewöhnlichen Querschnittsflächen	102
2.3	Vergleich der Druckverluste in Rohren und Kanälen mit kreis- und nicht kreisförmiger Querschnittsfläche	106
2.4	Strömung durch Rohrbündel	110
2.41	Querstrom durch Rohrbündel	110
2.411	Querstrom durch Parallelgitter	111
2.412	Querstrom durch Kreuzgitter	118
2.42	Längsstrom durch Rohrbündel	123
3	Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten durch Rohre und Kanäle	127
3.1	Einteilung der nicht-Newtonschen Flüssigkeiten	127
3.2	Schubspannungsansätze für rein viskose nicht-Newtonsche Flüssigkeiten	129
3.21	Potenzansatz von OSTWALD	129
3.22	Ansatz von PRANDTL und EYRING	136
3.23	Ansatz von BINGHAM	138
3.3	Berechnung der laminaren Rohrströmung mittels des Potenzansatzes	139
3.31	Geschwindigkeitsverteilung	139

3.32	Widerstandsgesetz	142
3.33	Deutung der verallgemeinerten Definitionsgleichung für die Reynoldszahl	143
3.34	Nicht ausgebildete Strömung	145
3.4	Berechnung der laminaren Rohrströmung mittels des Ansatzes von PRANDTL und EYRING	147
3.41	Geschwindigkeitsverteilung	147
3.42	Widerstandsgesetz	150
3.5	Berechnung der laminaren Rohrströmung mittels des Bingham-Ansatzes	154
3.51	Geschwindigkeitsverteilung	154
3.52	Widerstandsgesetz	157
3.6	Laminare Strömung durch ebene Kanäle	159
3.61	Strömung von Ostwald-Flüssigkeiten	159
3.62	Strömung von Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten	161
3.63	Strömung von Bingham-Flüssigkeiten	163
3.7	Laminare Strömung durch Ringkanäle	164
3.8	Kritische Reynoldszahlen für die Rohr- und Kanalströmung	166
3.81	Stabilitätszahl	166
3.82	Kritische Reynoldszahl der Rohrströmung	167
3.821	Ostwald-Flüssigkeiten	168
3.822	Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten	169
3.823	Bingham-Flüssigkeiten	170
3.83	Kritische Reynoldszahl der Strömung im ebenen Kanal	171
3.831	Ostwald-Flüssigkeiten	171
3.832	Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten	172
3.833	Bingham-Flüssigkeiten	172
3.9	Turbulente Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten	172
3.91	Geschwindigkeitsverteilung	172
3.92	Widerstandsgesetze für die Rohrströmung	174
3.921	Ostwald-Flüssigkeiten	174
3.922	Bingham-Flüssigkeiten	176
3.923	Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten	177
4	Bedeutung und Herleitung von Kennzahlen	181
4.1	Bedeutung der Kennzahlen	181
4.2	Herleitung von Kennzahlen mittels der Dimensionsanalyse	183
4.21	Kennzahlen für den pneumatischen Feststofftransport	184
4.22	Kennzahlen für die Strömung von Bingham-Flüssigkeiten	188
4.3	Herleitung der Kennzahlen aus den Differentialgleichungen	191
Teil II:	Bewegung von Partikeln und Partikelschwärmen	195
5	Bewegung starrer Partikeln	196
5.1	Widerstandsgesetze für Kugeln	196
5.11	Widerstandsgesetz für Kugeln in schwach turbulenter Strömung	196
5.12	Einfluß des Turbulenzgrades und kritische Reynoldszahl	202
5.13	Einflüsse von Beschleunigung, Rotation und Oberflächenrauigkeit	205
5.2	Widerstandsgesetze für nicht kugelförmige Körper	206
5.21	Kreiszyylinder	207
5.22	Kreisscheiben und andere Körper	211
5.3	Partikelbewegung auf gerader, senkrechter Bahn	213
5.31	Mögliche Bewegungsfälle	213
5.32	Stationäre Partikelbewegung	216

5.33	Schwebegeschwindigkeit	219
5.34	Instationäre Partikelbewegung	221
5.4	Partikelbewegung auf gekrümmter Bahn im linearen Strömungsfeld	225
5.41	Beschreibung einiger technisch interessanter Anwendungsfälle	226
5.42	Herleitung der Differentialgleichung für die Partikelbewegung	227
5.43	Partikelbewegung im Gültigkeitsbereich des Stokeschen Gesetzes	231
5.44	Partikelbewegung in einem senkrechten Strömungsfeld	232
5.45	Partikelbewegung in einem waagerechten Strömungsfeld	239
5.46	Partikelbewegung im linearen Strömungsfeld mit überlagertem elektrischem Feld	240
5.461	Partikelbewegung im elektrischen Feld konstanter Stärke	241
5.462	Partikelbewegung im elektrischen Feld veränderlicher Stärke	247
5.5	Partikelbewegung auf gekrümmter Bahn im gekrümmten Strömungsfeld	250
5.51	Beschreibung einiger technischer Beispiele	250
5.52	Herleitung der allgemeinen Differentialgleichungen	253
5.53	Partikelbahnen in Rohrkrümmern	256
5.531	Spezielle Form der Differentialgleichungen	256
5.532	Diskussion der Bahnkurven	261
6	Bildung und Bewegung von Blasen und Tropfen	272
6.1	Quasistatische Bildung von Blasen und Tropfen	272
6.2	Dynamik der Blasenbildung an Düsen	277
6.21	Blasendurchmesser	278
6.22	Blasenbildungsfrequenz	284
6.3	Dynamik der Blasenbildung an Lochplatten	289
6.4	Widerstand von Blasen	292
6.41	Allgemeine Beschreibung der Blasenformen und der Blasenbewegung	293
6.42	Widerstandsgesetze für Blasen	295
6.43	Korrekturen für Kugelblasen	299
6.44	Steiggeschwindigkeit zylindrischer Blasen in senkrechten Rohren	302
6.5	Steiggeschwindigkeit von Blasen in nicht-Newtonschen Flüssigkeiten	303
6.6	Tropfenbildung in Flüssigkeiten	305
6.7	Tropfenbildung in Gasen (Zerstäubung)	308
6.71	Ziel und technische Anwendung der Zerstäubung	308
6.72	Strahlzerfall	311
6.73	Lamellenzerfall	318
6.74	Zerstäubung durch rotierende Hohlzylinder	320
6.75	Zerstäubung durch rotierende Scheiben	323
6.8	Bewegung von Tropfen	337
6.81	Widerstand von Tropfen	337
6.82	Deformationen und Pulsationen von Tropfen	346
7	Bewegung von Partikelschwärmen	353
7.1	Bewegung von Kugelpaaren	353
7.11	Bewegung von zwei Kugeln entlang der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte	353
7.12	Bewegung von zwei Kugeln bei beliebiger Anordnung	358
7.13	Partikelbewegung in stark verdünnten Suspensionen	364
7.2	Partikelbewegung bei hohen Konzentrationen	369
7.21	Modell einer Zweikornsuspension	369
7.22	Gesetze der Kornbewegung	374
7.221	Allgemeine Erläuterung der Sinkbewegung	374
7.222	Sinkbewegung unter Berücksichtigung der Gegenströmung	377

7.223	Sinkbewegung unter Berücksichtigung des Impulsaustausches	379
7.224	Zusammenfassende Gleichungen für die effektiven Sinkgeschwindigkeiten	382
7.23	Vergleich mit anderen Ergebnissen	386
7.231	Geschwindigkeitsverhältnis bei Gleichkornsuspensionen	386
7.232	Geschwindigkeitsverhältnis bei Zweikornsuspensionen	389
7.3	Schwarmbewegung im senkrecht aufwärts oder abwärts strömenden Fluid	390
Teil III:	Strömungsgesetze bei ruhenden und bewegten Partikelmassen	397
8	Einphasenströmung durch ruhende Füllkörperschichten	398
8.1	Kennzeichnende Größen der Füllkörperschicht	399
8.11	Füllkörper	399
8.12	Lückengrad der Füllkörperschicht	403
8.121	Allgemeine Angaben zur Struktur und zum Lückengrad	403
8.122	Lückengrad von Gleichkornschichten	408
8.123	Lückengrad von Mehrkornschichten	413
8.13	Hydraulischer Durchmesser von Füllkörperschichten	417
8.2	Geschwindigkeitsverteilung innerhalb von Füllkörperschichten	421
8.3	Theoretisches Widerstandsgesetz	424
8.31	Kennzahlen	424
8.32	Widerstandsgesetz von HAPPEL	425
8.4	Empirische Widerstandsgesetze	429
8.41	Widerstandsgesetze für Gleichkornschichten	429
8.411	Widerstandsgesetz für Kugelschichten	429
8.412	Widerstandsgesetz für Granulatschichten	433
8.413	Widerstandsgesetz für Raschigringschichten	433
8.414	Widerstandsgesetz für Schichten aus anderen Füllkörpern	437
8.415	Einfluß einer fehlerhaften Angabe des Lückengrades auf die Berechnung des Druckverlustes	439
8.42	Widerstandsgesetze für Mehrkornschichten	441
8.421	Widerstandsgesetze für Kugel- und Granulatschichten	441
8.422	Vergleich zwischen den Druckverlusten in Gleich- und Mehrkornschichten	443
8.43	Widerstandsgesetze für Drahtgewebesichten	446
8.44	Widerstandsgesetze für geordnet aufgebaute Füllkörperschichten	449
8.441	Allgemeine Beschreibung	449
8.442	Lückengrad und Oberfläche	450
8.443	Widerstandsgesetz	452
9	Wirbelschicht	459
9.1	Allgemeine Beschreibung der Wirbelschicht	460
9.2	Untere und obere Grenzgeschwindigkeiten	463
9.3	Ausdehnung der Wirbelschicht	467
9.4	Günstige Betriebsgeschwindigkeit	470
9.5	Bewegung von Feststoff und Fluid	472
9.51	Bewegungen in der homogenen Wirbelschicht	472
9.52	Bewegungen in der inhomogenen Wirbelschicht	475
9.53	Übergang von der homogenen zur inhomogenen Wirbelschicht	478
9.54	Periodische Schwankungsbewegungen der Kornmasse	480
9.6	Mehrstufige Wirbelschichtanlagen	482
9.61	Druckverlust	485
9.611	Druckverlust bei der Durchströmung eines Bodens	485
9.612	Druckverlust der Wirbelschichtstufe	486
9.62	Lückengrad einer Wirbelschichtstufe	491

9.63	Verweilzeit der Partikeln in einer Wirbelschichtstufe	492
9.631	Mittlere Verweilzeit	492
9.632	Verweilzeitverteilung	496
9.7	Beschreibung der Strahlschicht	501
10	Pneumatischer und hydraulischer Transport körniger Feststoffe	507
10.1	Beschreibung der feststoffbeladenen Strömung	508
10.11	Konzentration des Feststoffs im Fluidstrom	508
10.12	Verteilung und Bewegung des Feststoffs im Fluidstrom	513
10.13	Physikalische Ursachen des Feststofftransportes	517
10.14	Druckverlustdiagramm des Feststofftransportes	521
10.2	Grundgleichung für den pneumatischen und hydraulischen Transport in horizontalen Rohren	522
10.21	Allgemeine Definitionen und Gesetze	522
10.22	Beschreibung des Transportmodells	524
10.23	Herleitung der Grundgleichung	526
10.3	Pneumatischer Transport durch gerade, horizontale Rohre	527
10.31	Spezielles Widerstandsgesetz	527
10.32	Geschwindigkeitsverhältnis	528
10.33	Vergleich des Widerstandsgesetzes mit Meßwerten	532
10.4	Hydraulischer Transport durch gerade, horizontale Rohre	533
10.41	Spezielles Widerstandsgesetz	533
10.42	Berechnung des gesamten Druckverlustes	540
10.43	Ablagerung des Feststoffs im horizontalen Rohr	543
10.44	Konzentrationsprofile für den Feststoff im horizontalen Rohr	547
10.5	Pneumatischer und hydraulischer Transport durch gerade, vertikale Rohre	549
10.51	Berechnung des gesamten Druckverlustes	549
10.52	Untere Fördergeschwindigkeit	550
10.6	Widerstand von Rohrkrümmern beim Feststofftransport	552
10.7	Verzweigung von Feststoffströmen	554
10.8	Verschleiß von Rohrleitungen beim Feststofftransport	555
10.81	Allgemeine Beschreibung des Verschleißes in Rohren	556
10.811	Verschleiß in vertikalen Rohren	556
10.812	Verschleiß in horizontalen Rohren	558
10.813	Verschleiß in Rohrkrümmern	560
10.814	Verschleiß in der Umgebung von Strömungshindernissen	562
10.82	Die Verschleißmulde	563
10.821	Form und Entwicklung	563
10.822	Verschleißgeschwindigkeit	565
10.83	Hochfrequenter Prallverschleiß	567
10.831	Modellvorstellung	567
10.832	Ähnlichkeitsgesetz für den Prallverschleiß	568
10.833	Einfluß des Elastizitätsmoduls	570
10.834	Näherungsgesetz zur Berechnung des Prallverschleißes	572
10.84	Verschleiß von Rohrkrümmern	574
10.841	Auftreffwinkel in 90°-Krümmern	574
10.842	Auftreffwinkel in Krümmern mit beliebigem Umlenkwinkel	577
10.843	Lage der Verschleißmulde	579
10.844	Verschleiß, abhängig vom Durchmesser Verhältnis	582
10.9	Hinweise auf den hydraulischen Kapseltransport	583

11	Fließbewegung von Kornmassen	587
11.1	Qualitative Beschreibung der Fließbewegung	588
11.2	Ausfluß aus Bunkern	595
11.21	Einige experimentell gewonnene Erkenntnisse	595
11.22	Ähnlichkeitskennzahlen des Ausflußvorganges	597
11.23	Ausflußgleichung für Bunker mit symmetrischem Trichter	598
11.24	Ausflußgleichung für Bunker mit unsymmetrischem Trichter	601
11.3	Fließen von Kornmassen durch geneigte Rohre	602
Teil IV:	Abscheidung von Partikeln aus einer fluiden Phase	605
12	Filtration und Sedimentation	606
12.1	Filtration	606
12.11	Unterscheidung zwischen Bettfilter und Oberflächenfilter	606
12.12	Arbeitsweise des Oberflächenfilters	608
12.13	Theorie der Filtration im Oberflächenfilter	612
12.14	Filtergleichungen für Korngemische	619
12.15	Berücksichtigung des Filtersiebtes und der Kompressibilität des Filterkuchens	622
12.2	Sedimentation	624
12.21	Allgemeine Beschreibung der Sedimentation	624
13	Gas- und Hydrozyklone	631
13.1	Einige Hinweise zur Staubtechnik	631
13.2	Der Entstaubungsgrad	635
13.21	Definition des Entstaubungsgrades	635
13.22	Entstaubungsgrade für einige Entstauber	639
13.3	Der Gaszyklon	642
13.31	Berechnung des Gaszyklons nach der Theorie von BARTH und MUSCHELKNAUTZ	643
13.311	Grenzkorndurchmesser und Abscheidegrad	644
13.312	Druckverlust im Gaszyklon	649
13.32	Auslegung von Gaszyklonen mit Hilfe von Kennfeldern	649
13.33	Berechnungsbeispiele	653
13.331	Berechnung nach MUSCHELKNAUTZ	654
13.332	Berechnung nach BARTH	654
13.333	Berechnung mit Hilfe von Kennfeldern	655
13.334	Bemerkungen zu den Berechnungsverfahren	655
13.4	Der Hydrozyklon	656
13.41	Aufbau und Betrieb	657
13.42	Abscheidung einer dispersen festen Phase	661
13.421	Abscheidegrad	662
13.422	Druckverlust	663
13.43	Abscheidung einer dispersen fluiden Phase	666
Teil V:	Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Rohren und Kolonnen	673
14	Strömung von Rieselfilmen	674
14.1	Filmströmung an unbewegten, senkrechten Wänden	674
14.11	Allgemeine Gesetze der Filmströmung	674
14.12	Gesetze für die mittlere Filmdicke	680

14.13	Gesetze für Rieselfilme mit welliger Oberfläche	683
14.131	Entstehung der Wellen	683
14.132	Struktur der welligen Filmoberfläche	685
14.133	Flüssigkeitsbewegung im welligen Rieselfilm	691
14.14	Mindestwert der Reynoldszahl für kontinuierliche Filmströmung	694
14.2	Filmströmung an unbewegten, geneigten Wänden	695
14.3	Filmströmung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten an senkrechten, ebenen Wänden	697
14.4	Filmströmung an gekrümmten Flächen	700
14.41	Filmströmung am horizontalen Zylinder	700
14.42	Filmströmung an Kugeln	702
14.5	Bewegung der Haftflüssigkeit an bewegten und ruhenden Körpern	703
14.51	Haftfilme an bewegten Platten	704
14.52	Haftfilme an bewegten Zylindern	707
15	Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Rohren	713
15.1	Klärung der Strömungs- und Phasenverteilungszustände	713
15.11	Allgemeiner Überblick	713
15.12	Phasenverteilungszustände bei Rohrströmungen	715
15.2	Gas-Film-Strömung im senkrechten Rohr	722
15.21	Theorie der Gas-Film-Strömung	722
15.211	Gesetze der Filmströmung	723
15.212	Gesetze der Gasströmung	728
15.213	Allgemeines Widerstandsgesetz	732
15.214	Spezielle Widerstandsgesetze	738
15.215	Druckverlust im Gegenstrombereich	739
15.22	Empirische Gesetze für die Gas-Film-Strömung	740
15.221	Gesetze der Filmströmung	740
15.222	Widerstandsgesetz für den Gegenstrombereich	742
15.223	Gleichung für die Staugrenze	746
15.3	Empirische Gesetze für die Gas-Flüssigkeits-Strömung bei beliebigen Phasenverteilungszuständen im Gleichstrom	747
15.31	Druckverlust bei der gleichgerichteten Gas-Flüssigkeits-Strömung	748
15.311	Berechnungsverfahren von LOCKHART und MARTINELLI	749
15.312	Berechnungsverfahren von KRIEGEL	753
15.313	Berechnungsverfahren von CHAWLA	755
15.314	Druckverlust in senkrechten Rohren und in Rohrkrümmern	756
15.32	Flüssigkeits- und Gasanteil	759
15.33	Druckschwankungen	759
15.4	Einige Hinweise auf die Strömung nicht mischbarer Flüssigkeiten	761
16	Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Füllkörperschichten	766
16.1	Allgemeine Angaben über die berieselte Füllkörperschicht	766
16.2	Gesetze der Flüssigkeitsströmung bei Gegenstrombetrieb	769
16.21	Flüssigkeitsinhalt	770
16.22	Flüssigkeitsverteilung	775
16.3	Gesetze der Gasströmung bei Gegenstrombetrieb	776
16.31	Druckverlust	776
16.32	Belastungsgrenzen	782
16.4	Größe der Phasengrenzfläche	790
16.5	Gleichstrom von Gas und Flüssigkeit	791
16.6	Gegenstrom durch geordnete Füllkörperschichten	794

17	Gas-Flüssigkeits-Strömungen auf Kolonnenböden	800
17.1	Sinn und Zweck von Bodenkolonnen und Kolonnenböden	800
17.2	Einige Bauformen für Kolonnenböden	804
17.21	Grundformen der Kolonnenböden	804
17.22	Der Glockenboden	805
17.23	Der Tunnelboden	808
17.24	Der Ventilboden	809
17.3	Siebböden	810
17.31	Beschreibung und allgemeine Hinweise	810
17.32	Druckverlust	813
17.321	Der Gesamtdruckverlust und seine Anteile	814
17.322	Druckverlust beim Durchströmen des trockenen Siebbodens	817
17.323	Druckverlust zur Überwindung des hydrostatischen Druckes	821
17.324	Druckverlust beim Durchströmen der Sprudelschicht	823
17.33	Belastungsgrenzen	824
17.331	Untere Belastungsgrenze	824
17.332	Obere Belastungsgrenze	824
17.4	Glocken- und Ventilböden	826
17.41	Beschreibung und allgemeine Hinweise	826
17.42	Untersuchungen an einem Glockenmodell	828
17.421	Widerstandsbeiwert von Kaminen ohne Deckplatte	828
17.422	Widerstandsbeiwert von Kaminen mit Deckplatte	831
17.423	Schlußfolgerungen aus den Modelluntersuchungen	832
17.43	Druckverlust von Glockenböden	833
17.431	Berechnungsgleichungen von KUTZER	835
17.4311	Der trockene Druckverlust bei Zylinder- und Flachglocken	835
17.4312	Der nasse Druckverlust bei Zylinder- und Flachglocken	838
17.432	Berechnungsgleichungen von DAVIES	840
17.44	Druckverlust von Ventilböden	841
17.441	Allgemeine Beschreibung	841
17.442	Berechnungsgleichungen von KUTZER	842
17.443	Berechnungsgleichungen von HOPPE	844
18	Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Blasensäulen	848
18.1	Allgemeine Beschreibung	848
18.2	Volumetrischer Gasgehalt und Höhe der Blasenschicht	851
18.21	Örtlicher Gasgehalt einer Blasenschicht	852
18.22	Höhe einer Blasenschicht	855
18.3	Phasengrenzfläche in der Blasenschicht	859
18.4	Druckverlust der Gasströmung	860
18.5	Verhalten von Schaumschichten	861
18.6	Verhalten von Blasenschichten mit suspendierten Feststoffpartikeln	862
Teil VI:	Rühren und Mischen	867
19	Rühren Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten	869
19.1	Allgemeine Beschreibung der Rührer und der Strömungsformen	869
19.11	Einteilung der Rührer	869
19.111	Axialrührer	870
19.112	Radialrührer	871
19.113	Tangentialrührer	872

19.12	Hinweise auf das Strömungsfeld	873
19.2	Empirische Gesetze für den Leistungsbedarf beim Rühren Newtonscher Flüssigkeiten	877
19.21	Das Ähnlichkeitsgesetz	878
19.22	Leistungsbedarf für einige Rührertypen	880
19.221	Axialrührer	880
19.222	Radialrührer	883
19.223	Tangentialrührer	885
19.3	Theorie des Rührens Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten	886
19.31	Theorie des Zylinderrührers für Newtonsche Flüssigkeiten	887
19.311	Erläuterung des Rührermodells	887
19.312	Berechnung der Schubspannung	888
19.313	Berechnung der Eintauchtiefe	891
19.314	Rührerleistung bei laminarer Strömung	895
19.315	Rührerleistung bei turbulenter Strömung	898
19.32	Theorie des Zylinderrührers für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten	899
19.33	Vergleich zwischen der Theorie für den Zylinderrührer und experimentellen Ergebnissen	902
19.34	Leistungsbedarf des Zylinderrührers, bezogen auf das Gefäßvolumen	904
19.35	Theorie des Scheibenrührers für Newtonsche Flüssigkeiten	906
19.36	Verbindung der Theorien für Zylinder- und Scheibenrührer	908
19.361	Herleitung der Leistungsgleichung	908
19.362	Leistungsgleichung für Rührer mit großer Höhe	911
19.363	Leistungsgleichung für Rührer mit mäßiger Höhe.....	913
19.4	Halbtheoretische Gleichungen zur Berechnung des Leistungsbedarfs beim Rühren Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten	915
19.41	Leistungsgleichungen für das Rühren Newtonscher Flüssigkeiten	915
19.411	Der gleichwertige Rührerdurchmesser	915
19.412	Leistungsberechnung für Blatt- und Ankerrührer	916
19.413	Leistungsberechnung für Turbinenrührer	920
19.414	Vergleich zwischen berechneter und gemessener Leistung von Blatt-, Anker- und Turbinenrührer	922
19.42	Leistungsgleichungen für das Rühren nicht-Newtonscher Flüssigkeiten ..	927
19.5	Einige Bemerkungen zum Mischen.....	933
19.51	Mischen von Flüssigkeiten	934
19.52	Begasen von Flüssigkeiten durch Rührer	937
19.53	Suspendieren fester Partikeln durch Rührer	937

Schrifttum: jeweils am Schluß der Kapitel 1 bis 19

Register	941
Namenverzeichnis	941
Sachverzeichnis	947

Teil I

Einige Grundlagen der Einphasenströmung

1	Strömung durch Rohre	18
2	Strömung durch Kanäle und Rohrbündel	74
3	Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten durch Rohre und Kanäle	127
4	Bedeutung und Herleitung von Kennzahlen	181

1 Strömung durch Rohre

1.1 Laminare Rohrströmung

Denkt man sich das durch ein Rohr strömende Fluid in einzelne Zylinderschalen oder Schichten (*laminae*) aufgeteilt, so verbleibt bei laminarer Strömung jedes Fluidelement innerhalb der betrachteten Schicht. Quer zur Strömungsrichtung ändert ein Fluidelement also seinen Platz nicht.

Zwischen zwei benachbarten Schichten wirkt eine Reibungskraft. Die auf die Flächeneinheit bezogene Reibungskraft bezeichnet man mit Schub- oder Scherspannung. Für die Schubspannung wird nach NEWTON der folgende Ansatz gemacht:

$$\tau = -\eta \frac{dw}{dy}. \quad (1.1)$$

Mit den Bezeichnungen in *Bild 1.1* ist $\Delta w = w_2 - w_1$ der Unterschied in den Geschwindigkeiten benachbarter Flüssigkeitsschichten und Δy deren Abstand voneinander. Die Schubspannung τ ist im Grenzfall $\Delta y \rightarrow 0$ dem Geschwindigkeitsgradienten dw/dy proportional. Der Proportionalitätsfaktor η ist die dynamische Viskosität des strömenden Stoffes; sie hängt von Temperatur und Druck ab.

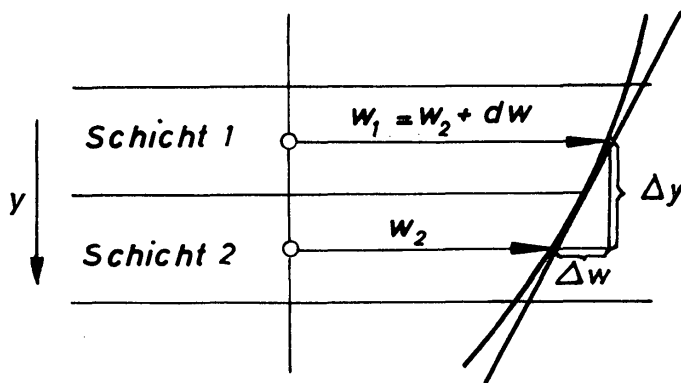


Bild 1.1. Zur Erläuterung des Schubspannungsansatzes

Flüssigkeiten, für die der obige Schubspannungsansatz zutrifft, nennt man Newtonsche Flüssigkeiten. Als Beispiele können Gase, anorganische Flüssigkeiten und eine große Anzahl organischer Flüssigkeiten genannt werden, deren Viskosität nicht zu hoch ist.

Flüssigkeiten, die dem Newtonschen Schubspannungsansatz nicht gehorchen, sind nicht-Newtonsche Flüssigkeiten. Für sie gelten andere Schubspannungsansätze, in denen ein nicht linearer Zusammenhang zwischen Schubspannung und Geschwindigkeitsgradient zum Ausdruck kommt. Nicht-Newtonisches Verhalten zeigen Farben und Lacke, Teer, Bitumina, Kunststoffschmelzen, Suspensionen und fast alle fließfähigen Produkte der Lebensmittelindustrie.

Die Schubspannung τ läßt sich auch als ein quer zur Strömungsrichtung transportierter Impuls je Zeit- und Flächeneinheit, also als eine Impulsstromdichte, auffassen. Das wird besonders durch die Schreibweise

$$\tau = -\nu \frac{d(w\rho)}{dy} \quad (1.2)$$

deutlich, wobei

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (1.3)$$

die kinematische Viskosität und ρ die Dichte des Fluids bedeuten. Das Produkt $w \cdot \rho$ stellt den je Volumeneinheit transportierten Impuls dar. Aus diesem Grunde spricht man häufig auch von einem Impulsaustausch, insbesondere dann, wenn Strömungen mit Wärme- und Stofftransportvorgängen verknüpft sind. Der Impulsstrom wird in Richtung des Geschwindigkeitsgefälles positiv gezählt. Nach *Bild 1.1* wird der Impuls in y -Richtung transportiert; in diesem Falle ergibt sich eine positive Schubspannung.

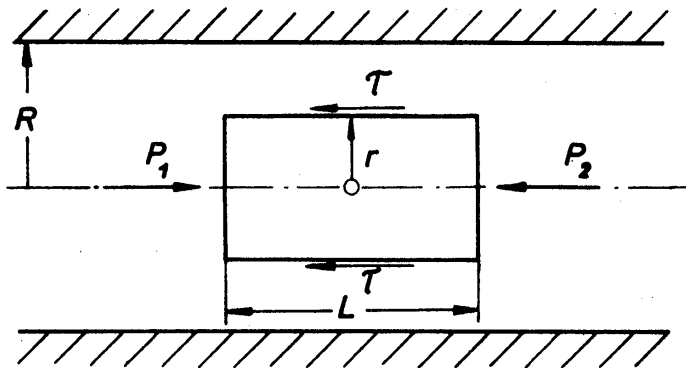


Bild 1.2. Kräftegleichgewicht bei der Rohrströmung

Die örtliche Geschwindigkeit w läßt sich für die Rohrströmung aus einer Betrachtung der an einem Fluidelement wirkenden Kräfte ermitteln. Gemäß *Bild 1.2* steht ein zylinderförmiges Element unter der Einwirkung von Druck- und Reibungskräften. Im Gleichgewichtszustand gilt:

$$\tau 2 r \pi L = (P_1 - P_2) \pi r^2. \quad (1.4)$$

Hierin bedeuten r und L Radius und Länge des Flüssigkeitszylinders, τ die bereits genannte Schubspannung, P_1 und P_2 die auf die Stirnflächen des Zylinders wirkenden Drücke. Da die Geschwindigkeit w mit dem Radius abnimmt, gilt für die Schubspannung τ der Ansatz nach Gl.(1.1) in der Form:

$$\tau = -\eta \frac{dw}{dr}. \quad (1.5)$$

Nach Einsetzen in Gl.(1.4) erhält man für die Geschwindigkeitsverteilung die Differentialgleichung:

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{L \cdot \eta} \cdot \frac{r}{2}. \quad (1.6)$$

Berücksichtigt man, daß die Flüssigkeit an der Rohrwand haftet ($w = 0$ bei $r = R$), so folgt nach Integration:

$$w = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (1.7)$$

Hierbei werden mit ΔP die Druckdifferenz $P_1 - P_2$ und mit R der Rohrradius bezeichnet. Bei laminarer Strömung stellt sich also eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrradius ein. Gl.(1.7) gilt für die Strömung in einem waagerechten Rohr.

Im senkrechten Rohr wirkt neben der Reibungs- und der Druckkraft noch die Massenkraft ($\rho r^2 \pi L g$) auf ein Flüssigkeitselement ein. Für diesen Fall ergibt sich für die örtliche Geschwindigkeit w die Beziehung:

$$w = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \left(\frac{\Delta P}{L} \pm \rho g \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (1.8)$$

Für die Massenkraft je Volumeinheit ρg ist bei senkrecht abwärts gerichteter Strömung das positive und bei senkrecht aufwärts gerichteter Strömung das negative Vorzeichen zu wählen.

Mittels Gl.(1.7) läßt sich nach einer weiteren Integration der Volumstrom \dot{V} angeben:

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi w r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}. \quad (1.9)$$

Dieses ist die bekannte «Hagen-Poiseuillesche» Gleichung. Sie ist als der Sonderfall einer exakten Lösung der für die Hydrodynamik grundlegenden allgemeinen «Navier-Stokesschen» Bewegungsgleichung anzusehen. Mittels Gleichungen (1.9) bzw. (1.7) läßt sich die Gültigkeit des Newtonschen Schubspannungsansatzes gemäß Gl.(1.5) und der Haftbedingung ($w = 0$ für $r = R$) nachprüfen. Beide Annahmen werden durch eine große Zahl von Versuchsergebnissen bestätigt.

Der auf die Querschnittsfläche des Rohres bezogene Volumstrom \dot{V} ergibt die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{w} :

$$\frac{\dot{V}}{R^2 \pi} = \bar{w} = \frac{R^2}{8\eta} \frac{\Delta P}{L}. \quad (1.10)$$

Ferner ergibt sich aus Gl.(1.7) mit $r = 0$ die maximale Geschwindigkeit w_{\max} in Rohrmitte zu

$$w_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \frac{\Delta P}{L}. \quad (1.11)$$

Aus einem Vergleich der Gleichungen (1.11) und (1.10) folgt, daß die maximale Geschwindigkeit w_{\max} doppelt so groß ist wie die mittlere \bar{w} . Gl.(1.11) wird häufig dazu herangezogen, die örtliche Geschwindigkeit w in dimensionsloser Form darzustellen, indem man das Verhältnis w/w_{\max} bildet:

$$\frac{w}{w_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2. \quad (1.12)$$

Gl.(1.12) ist in *Bild 1.3* dargestellt. Hierin ist gleichzeitig auch die Abhängigkeit des Schubspannungsverhältnisses τ/τ_w vom bezogenen Radius r/R angegeben. Aus Gl.(1.4) folgt:

$$\tau = \frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2}. \quad (1.13)$$

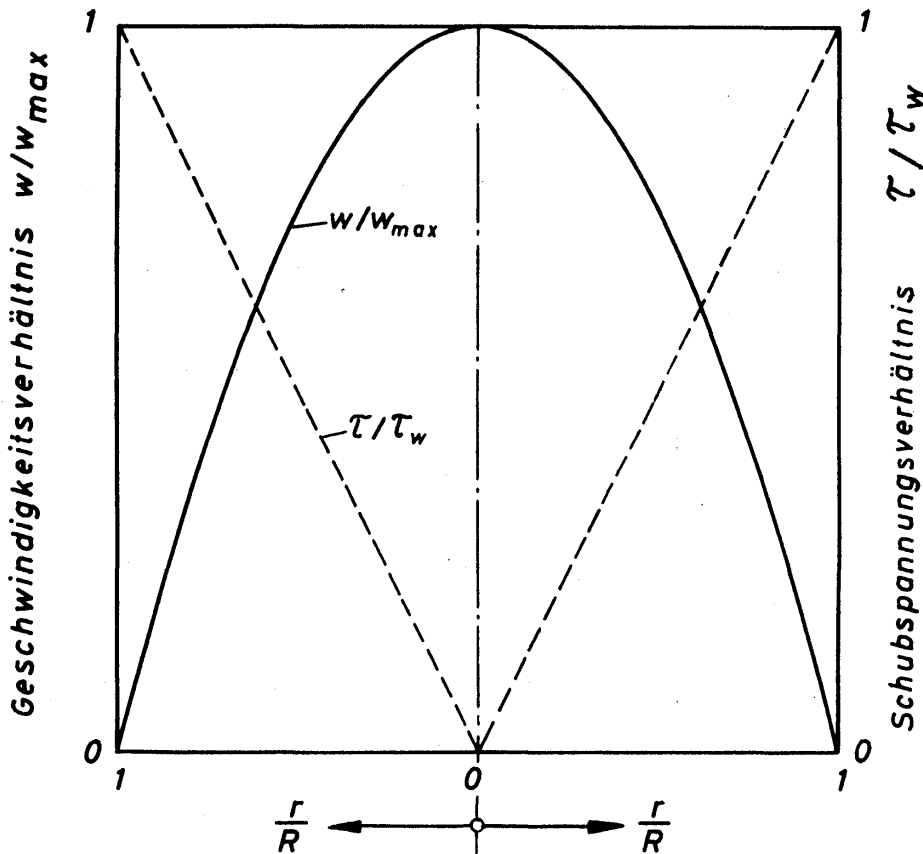


Bild 1.3. Geschwindigkeits- und Schubspannungsverhältnis bei laminarer Rohrströmung

Für $r = R$ ergibt sich aus dieser Gleichung die Wandschubspannung τ_w , und damit lautet das Verhältnis τ/τ_w

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{r}{R}. \quad (1.14)$$

Gl.(1.14) zeigt, daß in Rohrmitte bei $r = 0$ die Schubspannung $\tau = 0$ ist. An dieser Stelle ist der Geschwindigkeitsgradient $dw/dr = 0$.

Nach Gl.(1.10) besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der mittleren Geschwindigkeit w und dem Druckverlust ΔP . Wie Messungen ergeben haben, gilt dieser Zusammenhang nicht in unbeschränkter Weise. Wird der Durchfluß durch ein Rohr stetig erhöht, so steigt der Druckverlust ΔP ab einer bestimmten Geschwindigkeit w erheblich stärker an, als man nach Gl.(1.10) erwarten dürfte. Gleichzeitig ändert sich in auffälliger Weise das Geschwindigkeitsprofil. Die Strömung ist in den turbulenten Zustand übergegangen.

1.2 Turbulenz

Fügt man der durch ein Rohr strömenden Flüssigkeit einen angefärbten Stromfaden zu, so kann man dessen Verlauf beim Durchströmen des Rohres gut beobachten. Derartige Versuche wurden erstmals von OSBORNE REYNOLDS durchgeführt. REYNOLDS beobachtete, daß bei laminarer Strömung der angefärbte Stromfaden im Verlauf seines Weges stets an der gleichen Stelle des Rohrquerschnitts blieb, sich also nicht mit benachbarten Stromfäden vermischte. Streng

genommen darf man jedoch nur sagen, daß kein makroskopischer Austausch von Flüssigkeitselementen stattfindet. Ein Austausch mikroskopisch kleiner, für das Auge nicht wahrnehmbarer Flüssigkeitsteilchen findet auf Grund der thermischen Molekularbewegung stets statt; diese Austauschwirkung wird hier nicht betrachtet.

REYNOLDS beobachtete, daß der angefärbte Stromfaden bei Überschreiten eines bestimmten Wertes der später nach ihm benannten Reynoldszahl

$$Re \equiv \frac{\bar{w} d}{\nu} \quad (1.15)$$

in eine wellenförmige Bewegung übergang, sich in einzelne Wirbelelemente auflöste und dabei nahezu über den gesamten Rohrquerschnitt verbreitete. Diese Beobachtungen sind nur so zu deuten, daß zwischen den einzelnen Stromfäden ein Queraustausch diskreter Flüssigkeitsteilchen stattfindet. Dieser Queraustausch ist ein wesentliches Kennzeichen für die Erscheinung der Turbulenz. Die ausgetauschten Flüssigkeitselemente nennt man auch Turbulenzballen. Bei der Rohrströmung findet der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung bei einer kritischen Reynoldszahl von

$$Re_{kr} = 2320$$

statt, was durch zahlreiche Versuche von SCHILLER [1.1] festgestellt wurde. Die Größenordnung dieses Wertes haben MEISSNER und SCHUBERT [1.2] auf der Grundlage des Entropieprinzips auch theoretisch gefunden. Wie sich leicht nachweisen läßt, ist die Reynoldszahl das Verhältnis von Trägheitskraft zu Reibungskraft. Bei großen Reibungskräften und kleinen Trägheitskräften nimmt die Reynoldszahl also kleine Werte an, die Strömung ist folglich laminar. Überwiegen indes die Trägheitskräfte, so hat die Reynoldszahl einen großen Wert und die Strömung ist turbulent. Die mit dem Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung zusammenhängenden Probleme hat MORKOVIN [1.3] beschrieben.

Der Austausch von Turbulenzballen zwischen benachbarten Flüssigkeitsschichten ist mit einer zeitlichen Schwankung der örtlichen Geschwindigkeit w verbunden. Nach einer anschaulichen Vorstellung untergliedert man die Geschwindigkeit in einen zeitunabhängigen Mittelwert w , dem in allen drei Richtungen der Raumkoordinaten x , y und z Schwankungsgeschwindigkeiten w'_x , w'_y und w'_z überlagert sind. Die Größe der Schwankungsgeschwindigkeiten kann bis zu 10% des Wertes der zeitunabhängigen Geschwindigkeit w betragen. In *Bild 1.4* sind die Geschwindigkeit w mit überlagerter Schwankungsgeschwindigkeit w'_y sowie die zeitliche Änderung von w'_y dargestellt. Während eines genügend großen Zeitabschnitts ist der Mittelwert $w'_y = 0$. Als Maß für die Schwankungsgeschwindigkeit benutzt man daher die Wurzel aus dem Mittelwert der Geschwindigkeitsquadrate, beispielsweise also $\sqrt{\overline{w_y'^2}}$, der stets größer als Null ist, und mit den Bezeichnungen in *Bild 1.4a* folgendermaßen definiert wird:

$$\overline{w_y'^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} w_y'^2 dt, \quad (1.16)$$

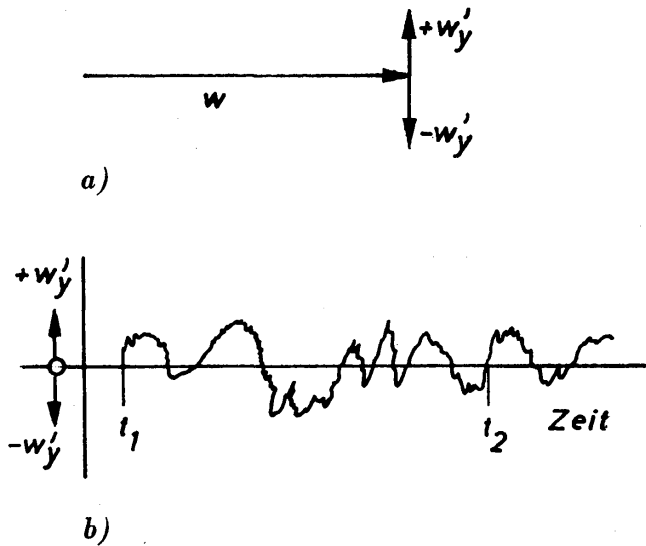
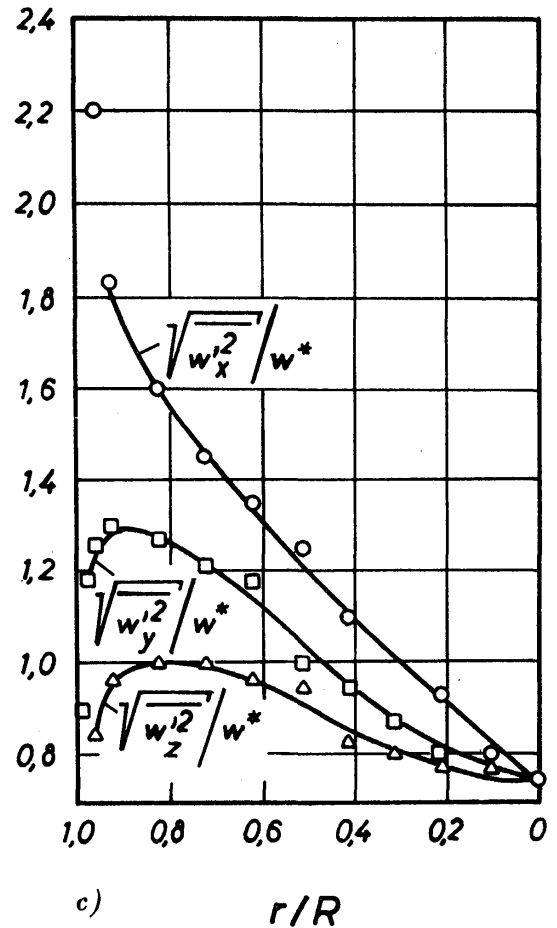


Bild 1.4
Zur Erläuterung der turbulenten
Schwankungsgrößen



wobei das Zeitintervall $t_2 - t_1$ nicht zu klein gewählt werden darf. Als Beispiel sind in *Bild 1.4* die bei der Rohrströmung auftretenden drei Schwankungsgrößen $\sqrt{w_x'^2}$ in Achsrichtung, $\sqrt{w_y'^2}$ in radialer Richtung und $\sqrt{w_z'^2}$ in Umfangsrichtung, jeweils bezogen auf die Schubspannungsgeschwindigkeit $w^* \equiv \sqrt{\tau_w/\rho}$, abhängig von r/R dargestellt. Die Kurven sind nach Meßwerten von LAUFER [1.4] gezeichnet worden, der die Schwankungsgeschwindigkeiten mittels sehr empfindlicher Hitzdrahtanemometer gemessen hat. Bemerkenswert ist, daß die bezogene Schwankungsgeschwindigkeit für die Achsrichtung $\sqrt{w_x'^2}/w^*$ in der Nähe der Rohrwand wesentlich größere Werte erreicht als diejenigen für die anderen Richtungen. Alle drei Schwankungsgeschwindigkeiten streben mit Annäherung an die Rohrwand schließlich dem Wert Null zu. Dieses Ergebnis mußte erwartet werden, da das Fluid an der Rohrwand haftet, also w'_x, w'_y und $w'_z = 0$ sind. Bei endlichen Werten der Schwankungsgeschwindigkeiten an der Rohrwand müßte die Flüssigkeit entlang der Rohrwand gleiten, was aber trotz sorgfältiger Untersuchungsmethoden noch niemals festgestellt werden konnte. Als Maß für die Turbulenz definiert man den Turbulenzgrad

$$Tu \equiv \frac{\sqrt{\frac{1}{3} (w_x'^2 + w_y'^2 + w_z'^2)}}{\bar{w}}, \tag{1.17}$$

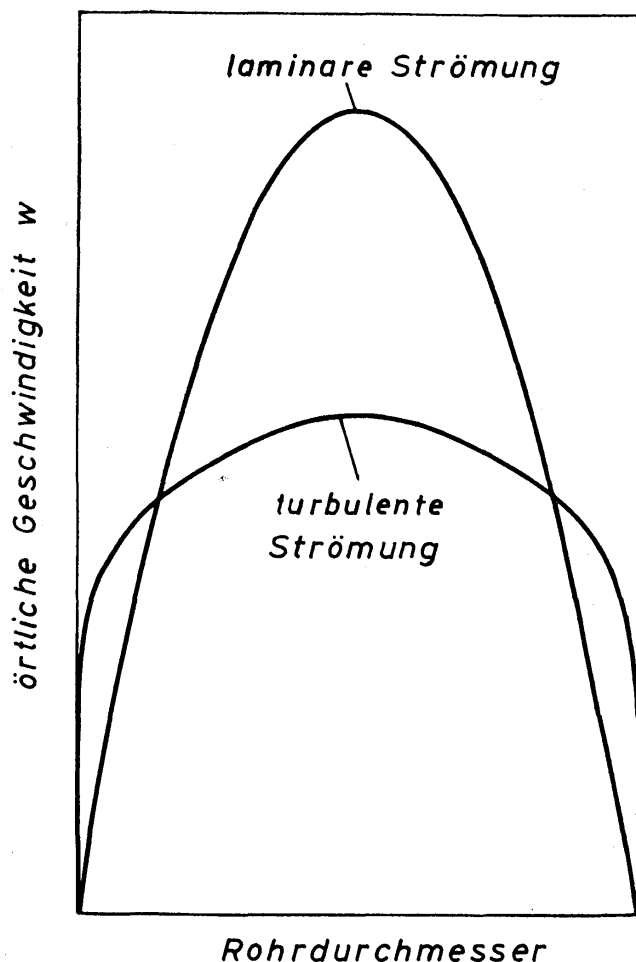
wobei \bar{w} die über den Rohrquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit darstellt. Bei homogener bzw. isotroper Turbulenz, die angenähert in der Umgebung der Rohrachse auftritt, vereinfacht sich die Beziehung zu

$$Tu \equiv \frac{\sqrt{w'^2}}{w}. \quad (1.18)$$

Die in *Bild 1.4c* angegebenen Kurven laufen in der Rohrachse annähernd zusammen.

Da das Produkt aus Schwankungsgeschwindigkeit und transportierter Masse einen Impuls ergibt, spricht man von einem turbulenten Impulsaustausch. Ein vergleichbarer Vorgang ist bei der laminaren Strömung nicht vorhanden. Der turbulente Impulsaustausch ist für den Druckverlust der Strömung sowie für Wärme- und Stofftransportvorgänge von außerordentlich großer Bedeutung. Die Turbulenz und die turbulenten Strömungen verdienen daher besondere Aufmerksamkeit. Während die Erhöhung des Druckverlustes durch die Turbulenz niemals erwünscht ist, weil damit ein erhöhter Energieaufwand verbunden ist, wird die Erhöhung des Wärme- und Stofftransportes fast immer angestrebt. In vielen Fällen trifft man sogar besondere Maßnahmen zur Verstärkung der Turbulenz, damit die beabsichtigten Wärme- und Stofftransportvorgänge verbessert werden. Jedoch sind nur solche Maßnahmen geeignet, die die Turbulenz an jenen Stellen erhöhen, wo sie von Natur aus schwach ausgebildet ist, d. h. in Wandnähe. Hier auf werden wir später noch häufig zurückkommen. Im folgenden sollen die speziellen Eigenschaften der turbulenten Rohrströmung betrachtet werden.

1.3 Turbulente Rohrströmung



Da die Turbulenz und mithin die turbulente Strömung theoretisch noch nicht genügend geklärt sind, müssen zu ihrer Erklärung Ergebnisse experimenteller Untersuchungen herangezogen werden. Betrachten wir zunächst die örtliche Geschwindigkeit im Rohr. In *Bild 1.5* sind das Geschwindigkeitsprofil der turbulenten und der laminaren Strömung bei gleichem Volumenstrom \dot{V} dargestellt.

Bild 1.5
Vergleich der Geschwindigkeitsprofile bei laminarer und turbulenter Rohrströmung

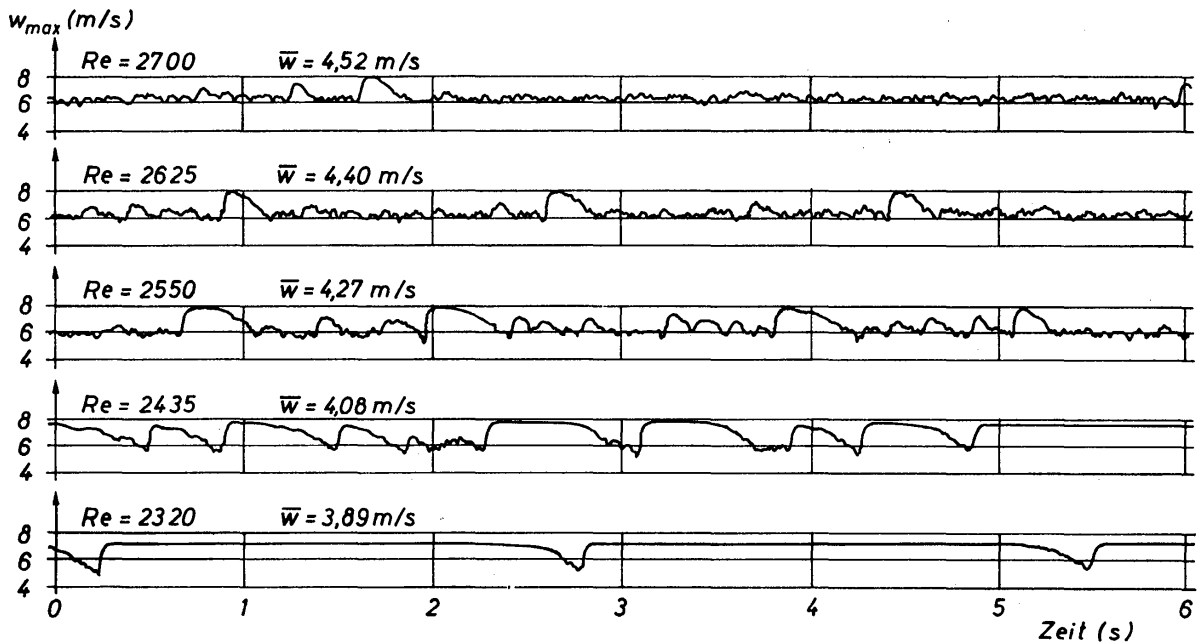


Bild 1.6. Abhängigkeit der Geschwindigkeit in der Rohrachse von der Zeit für verschiedene Werte der Reynoldszahl

Bei turbulenter Strömung führt der stark erhöhte Impulsaustausch quer zur Strömungsrichtung zu einer Verflachung des Geschwindigkeitsprofils. Man sagt auch, daß das Geschwindigkeitsprofil bei turbulenter Strömung sehr viel völliger ist als bei laminarer Strömung. Das kommt besonders deutlich durch das Verhältnis der maximalen Geschwindigkeit w_{\max} in der Rohrachse und der mittleren Geschwindigkeit \bar{w} zum Ausdruck. Das Verhältnis w_{\max}/\bar{w} beträgt bei laminarer Strömung 2 und bei turbulenter Strömung etwa 1,2. Diesen Sachverhalt nutzte ROTTA [1.5] bei einer Untersuchung des Überganges von der laminaren zur turbulenten Strömung. In *Bild 1.6* sind fünf Schreibleistungen wiedergegeben, in denen die mit einem Hitzdrahtanemometer gemessenen örtlichen Geschwindigkeiten in der Rohrachse in Abhängigkeit von der Zeit aufgezeichnet sind. In dem Streifen für $Re = 2320$ sind nur einige wenige turbulente Stöße zu beobachten, bei denen die Geschwindigkeit für sehr kurze Zeiten auf den für die turbulente Strömung charakteristischen niedrigen Wert absinkt. Mit steigenden Werten der Reynoldszahl werden die turbulenten Stöße immer zahlreicher. Bei $Re = 2700$ sind kaum noch Zeitabschnitte mit laminarer Strömungsform vorhanden, die Strömung ist turbulent.

Für viele Fälle läßt sich das Geschwindigkeitsprofil bei der turbulenten Strömung in Rohren näherungsweise durch die empirische, von NIKURADSE [1.6] aus Meßwerten gewonnene Beziehung,

$$\frac{w}{w_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^n, \quad (1.19)$$

sehr gut wiedergeben. Hierin ist $y = R - r$ der Wandabstand und n ein mit der Reynoldszahl schwach veränderlicher Wert. Bei mittleren Werten der Reynoldszahl, etwa $Re = 10^4$ bis 10^5 , kann man $n = 1/7$ setzen. Da dieser Wert der am häufigsten angewendete ist, heißt Gl. (1.19) auch das 1/7-Potenzgesetz. NUNNER

[1.7] hat in einer eingehenden Untersuchung der turbulenten Strömung in glatten und rauhen Rohren für den Exponenten n die allgemeine Beziehung

$$n = \sqrt{\psi} \quad (1.20)$$

gefunden, wobei ψ die später noch zu behandelnde Widerstandszahl bedeutet. Berechnet man mittels Gl.(1.19) das Verhältnis der maximalen zur mittleren Geschwindigkeit, so ergibt sich

$$\frac{w_{\max}}{\bar{w}} = \frac{1}{2} (1 + n) (2 + n). \quad (1.21)$$

Für einige Werte von n ergeben sich die folgenden Werte von w_{\max}/\bar{w} :

n	1/7	1/8	1/9	1/10
w_{\max}/\bar{w}	1,225	1,196	1,173	1,155

Zum Vergleich sei erwähnt, daß sich für die laminare Rohrströmung gemäß Gleichungen (1.11) und (1.10) der Wert $w_{\max}/\bar{w} = 2$ ergibt. Das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Rohrströmung ist also sehr viel spitzer als das der turbulenten.

Nach diesen ersten Angaben ist es erforderlich, das Geschwindigkeitsprofil der turbulenten Rohrströmung genauer zu betrachten. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse sind von allgemeiner Bedeutung und lassen sich näherungsweise auf die turbulente Strömung durch Kanäle mit nicht kreisförmigen Querschnitten und auf die turbulente Strömung längs ebener Platten übertragen. Wir gehen von der Erkenntnis aus, daß die turbulenten Schwankungsgrößen in Richtung zur Rohrwand abklingen und unmittelbar an der Rohrwand zu Null werden. Das heißt aber, daß die Strömung in Wandnähe, wenn auch nur in einer außerordentlich dünnen Strömungsschicht, laminar sein muß. Für diese sehr dünne, wandnahe Schicht muß also Gl.(1.7) genau erfüllt sein. Führt man Gl.(1.14) in Gl.(1.7) ein, so ergibt sich die für laminare Strömung gültige Beziehung:

$$w = \frac{\tau_w R}{2 \eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (1.22)$$

Mit dem Wandabstand $y = R - r$ und der kinematischen Viskosität $\nu = \eta/\rho$ wird hieraus

$$w = \frac{\tau_w}{\rho} \frac{y}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{R} \right). \quad (1.23)$$

Da die Größe $\sqrt{\tau_w/\rho}$ die Dimension einer Geschwindigkeit hat, wird sie als Schubspannungsgeschwindigkeit bezeichnet. Setzt man daher

$$w^* \equiv \sqrt{\tau_w/\rho} \quad (1.24)$$

in Gl.(1.23) ein, so erhält man in dimensionsloser Schreibweise

$$\frac{w}{w^*} = \frac{w^* y}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{R} \right). \quad (1.25)$$

Diese Beziehung gilt nur für sehr kleine Wandabstände y . Daher ist $y/2R$ im Vergleich zu 1 zu vernachlässigen, und Gl.(1.25) vereinfacht sich zu:

$$\frac{w}{w^*} = \frac{w^* y}{\nu}. \quad (1.26)$$

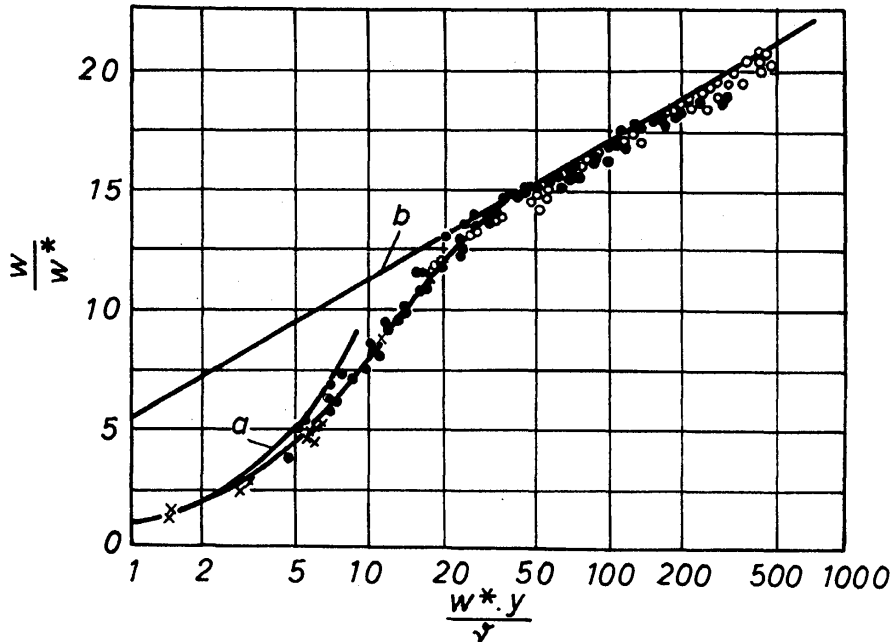


Bild 1.7. Geschwindigkeitsverteilung bei der turbulenten Rohrströmung; Kurve *a* nach Gl.(1.26) und Kurve *b* nach Gl.(1.27)

Dieses ist die Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Wandnähe, wo die Strömung noch laminar ist. Zeichnet man das Geschwindigkeitsverhältnis w/w^* als lineare Funktion von $w^* y/\nu$, so müssen Meßwerte auf dieser Geraden liegen. Mit wachsendem Wandabstand, also zunehmenden Werten für $w^* y/\nu$, ergeben sich Abweichungen, da der turbulente Impulsaustausch wirksam wird. In *Bild 1.7* sind Meßwerte w/w^* über $w^* y/\nu$ von REICHARDT [1.8] und NIKURADSE [1.6] in einem halblogarithmischen Koordinatensystem aufgetragen. Infolge der logarithmischen Abszissentheilung wird der besonders interessante wandnahe Strömungsbereich gestreckt dargestellt. Dadurch erhalten wir einen sehr klaren Überblick über den Verlauf der Geschwindigkeit in der wandnahen Strömungsschicht. Die Meßwerte werden bis etwa $w^* y/\nu = 5$ durch Kurve *a* und Gl.(1.26) befriedigend wiedergegeben. Für größere Werte $w^* y/\nu$ weichen die Meßwerte in zunehmendem Maße jedoch von Kurve *a* ab und gruppieren sich für $w^* y/\nu > 30$ bis 70 um die Gerade *b*, für die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{w}{w^*} = 5,75 \log \frac{w^* y}{\nu} + 5,5 = 2,5 \ln \frac{w^* y}{\nu} + 5,5. \quad (1.27)$$

Mit recht guter Näherung ist diese Beziehung als das Gesetz für die Geschwindigkeitsverteilung im turbulenten Strömungskern anzusehen, wobei jedoch die unmittelbare Umgebung der Rohrachse auszuschließen ist. Die Erweiterung dieses Gesetzes auf die Geschwindigkeitsverteilung in Ringkanälen und ebenen Kanälen haben ROTHFUS, WALKER und WHAN [1.9] vorgenommen. Die Meßwerte für $w^* y/\nu > 5$ liegen ganz erheblich unterhalb der extrapolierten Kurve *a*, die bis zu $w^* y/\nu < 5$ für den laminaren Wandbereich gültig ist. In dieser Darstellung wird

die bereits früher gemachte Bemerkung erneut bestätigt, daß das Geschwindigkeitsprofil bei turbulenter Strömung völliger ist als bei laminarer.

PRANDTL [1.10] hat Gl.(1.27) mittels der Mischungsweghypothese hergeleitet. Unter dem Mischungsweg versteht man die Weglänge, die ein Turbulenzballen im Verlauf der Querbewegung zurücklegt, bis er seinen überschüssigen Impuls durch Austausch mit seiner neuen Umgebung abgegeben und somit seine Identität verloren hat. Eine Unvollkommenheit der Gl.(1.27) besteht darin, daß sich in der Rohrmitte ein endlicher Geschwindigkeitsgradient ergibt. Für die allermeisten Fälle, in denen die Geschwindigkeitsverteilung zur Berechnung des Druckverlustes sowie des Wärme- und Stoffüberganges benötigt wird, ist diese Schwäche jedoch belanglos. Unsicher ist noch der Gültigkeitsbereich von Gl.(1.27) und damit auch der Übergangsbereich zwischen der laminaren Wandschicht und dem turbulenten Strömungskern.

Nach Angaben von SCHLICHTING [1.11] läßt sich das Geschwindigkeitsprofil in drei Bereiche unterteilen:

- $w^* y/\nu < 5$: überwiegend laminare Strömung, es gilt Gl.(1.26).
- $5 < w^* y/\nu < 70$: laminar-turbulenter Übergangsbereich.
- $w^* y/\nu > 70$: überwiegend turbulente Strömung, es gilt Gl.(1.27).

Es hat nicht an Versuchen gefehlt, für alle drei Bereiche eine einzige Gleichung aufzustellen. Die vorgeschlagenen Beziehungen sind jedoch so verwickelt, daß auf eine Wiedergabe verzichtet wird.

Die Angabe, daß die Strömung in der wandnahen Schicht überwiegend laminar ist, soll noch etwas näher erläutert werden. Dabei mag eine Vorstellung von der Dicke dieser Schicht dienlich sein. Wir nehmen zu dem Zweck an, daß die Reynoldszahl entweder 10^4 oder 10^5 sei; das sind für praktische Rohrströmungen geäußerte Werte. Die Dicke der laminaren Wandschicht y_l läßt sich dann aus der Bedingung

$$\frac{w^* y_l}{\nu} = 5 \quad (1.28)$$

berechnen. Mit

$$w^* \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \bar{w} \sqrt{\frac{\psi}{8}} \quad (1.29)$$

folgt hieraus unter Beachtung der Definition für die Reynoldszahl nach Gl.(1.15)

$$\frac{y_l}{d} = \frac{\sqrt{200/\psi}}{Re} \quad (1.30)$$

In dieser Gleichung bedeutet ψ die Widerstandszahl, für die das empirische Gesetz $\psi = 0,3164/Re^{1/4}$ im nächsten Abschnitt noch näher erläutert wird. Für die nach Gl.(1.30) berechnete Dicke y_l der laminaren Wandschicht ergeben sich in Abhängigkeit von den Reynoldszahlen Re und den Durchmessern d folgende Tabellenwerte:

	$d = 10 \text{ mm}$	100 mm	1000 mm
$Re = 10^4$	$y_l = 0,080 \text{ mm}$	0,800 mm	8,00 mm
$Re = 10^5$	$y_l = 0,0105 \text{ mm}$	0,105 mm	1,05 mm

Bei einem Rohrdurchmesser von 100 mm liegt die Schichtdicke in der Größenordnung von nur 0,1 bis 1 mm. Diese Angaben machen deutlich, wie schwierig Messungen der Geschwindigkeit in der äußerst dünnen, laminaren, wandnahen Schicht sind, wenn man bedenkt, daß die Abmessung des Meßgerätes stets klein im Vergleich zur Schichtdicke sein muß. Die Geschwindigkeitsmessung im wandnahen, laminaren Bereich zählt zu den schwierigsten meßtechnischen Aufgaben in der Strömungsforschung. Auf Grund dieser Schwierigkeiten sind unsere Kenntnisse über die genauen Eigenschaften dieser sehr dünnen Strömungsschicht noch verhältnismäßig unvollkommen. Das ist um so schwerwiegender, weil die Eigenschaften dieser Schicht den Wärme- und Stoffaustausch entscheidend beeinflussen.

Für die Schubspannung bei laminarer Strömung wurde nach NEWTON der Ansatz gemacht

$$\tau_l = -\eta \frac{dw}{dy}. \quad (1.1)$$

In dieser Gleichung berücksichtigt η die innere Reibung der Flüssigkeit, die allein auf die auch bei laminarer Strömung stets vorhandene thermische Molekularbewegung zurückzuführen ist. Betrachtet man eine rein turbulente Strömung, bei der im Grenzfall die innere Reibung allein durch den turbulenten Impulsaustausch zustande kommt, dann läßt sich für die Schubspannung τ_t der Ansatz

$$\tau_t = -A_\tau \frac{dw}{dy} \quad (1.31)$$

machen, in dem an Stelle von η als molekularer Austauschgröße die turbulente Austauschgröße A_τ auftritt. Für den allgemeinen Fall, daß die Schubspannung bzw. der Impulsaustausch infolge der Molekularbewegung und der turbulenten Austauschbewegung entsteht, addiert man beide Schubspannungsanteile und erhält

$$\tau = \tau_l + \tau_t, \quad (1.32)$$

$$\tau = -(\eta + A_\tau) \frac{dw}{dy}. \quad (1.33)$$

Diese Beziehung für die Schubspannung wird bei der Berechnung turbulenter Strömungen verwendet [1.12]; sie enthält die Sonderfälle der rein laminaren Strömung in Wandnähe (dann ist A_τ vernachlässigbar) und der rein turbulenten Strömung im Kern (dann ist η vernachlässigbar). Im Übergangsbereich zwischen $w^* y/\nu = 5$ und $w^* y/\nu = 70$ sind η und A_τ von gleicher Größenordnung.

Die Annahme einer rein laminaren Wandschicht, oftmals auch als laminare Unterschicht bezeichnet, im Bereich $w^* y/\nu < 5$ ist nicht ganz einwandfrei. In Zusammenhang mit *Bild 1.4* hatten wir erfahren, daß die turbulenten Schwankungsgrößen zwar in Richtung zur Wand hin abklingen, aber erst direkt an der Wand zu Null werden. Streng genommen gibt es also keine rein laminare Unterschicht. Alle heute verfügbaren Messungen erlauben jedoch folgende Aussagen: In der wandnahen Strömungsschicht treten sinusförmige Schwingungen auf, die eine instationäre Strömung hervorrufen [1.13]. Die Schwingungen sind aber noch nicht so stark angefacht, daß man sie als ausgebildete turbulente Schwankungsbewegungen antrifft. Während die sinusförmigen Schwingungen die geordnete Strömung noch nicht aufzulösen vermögen, handelt es sich bei der turbulenten Strömung um eine völlig ungeordnete Bewegungsform, von der man sich nur stark schematisierte Modellvorstellungen machen kann. Die bekannteste Modellvorstellung ist die Mischungsweg-Hypothese von PRANDTL mit dem Queraustausch von Turbulenzballen.

Hiermit sollen die allgemeinen Ausführungen über die turbulente Rohrströmung abgeschlossen werden. Im nächsten Abschnitt behandeln wir die Widerstandsgesetze der Rohrströmung bei laminarer und turbulenter Strömungsform.

1.4 Widerstandsgesetze für glatte Rohre

Als Widerstandsgesetz bezeichnet man den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen dem Druckverlust und einer größeren Zahl von Einflußgrößen, wovon die Strömungsgeschwindigkeit eine der wichtigsten ist. Im allgemeinen werden Widerstandsgesetze in dimensionsloser Form angegeben, wobei eine dimensionslose Druckverlustziffer, die Widerstandszahl ψ , sich in einfachen Fällen als Funktion der bereits definierten Reynoldszahl Re darstellen läßt. Die Definition der Widerstandszahl ψ lautet:

$$\psi \equiv \frac{\Delta P}{\rho w^2/2} \frac{d}{L}. \quad (1.34)$$

Die Widerstandszahl ψ besteht aus zwei dimensionslosen Größen, nämlich dem Verhältnis aus Druckverlust ΔP und Staudruck $\rho \bar{w}^2/2$ und dem Verhältnis von Rohrdurchmesser und Rohrlänge d/L . Die Art der Definitionsgleichung ist durch die historische Entwicklung bedingt, die wir später noch erkennen werden.

In einfachen Fällen ist ψ nur eine Funktion der Reynoldszahl

$$\psi = f(Re), \quad (1.35)$$

und zwar sowohl für die laminare als auch für die turbulente Strömung. In verallgemeinerter Form müßte das Widerstandsgesetz lauten:

$$\psi = f\left(Re; \frac{L}{d}; \frac{k}{d}; \sqrt{w'^2/\bar{w}}\right). \quad (1.36)$$

Hierin berücksichtigt L/d die zusätzliche Abhängigkeit der Widerstandszahl von der Rohrlänge. Dieser Einfluß macht sich nur im Einlaufbereich bemerkbar, wenn sich das Geschwindigkeitsprofil noch nicht ausgebildet hat und der Druckverlust daher keine lineare Funktion der Rohrlänge ist. Die Größe k/d berücksichtigt den Rauigkeitseinfluß, der bei glatten Rohren entfällt. Auf die Einflüsse der Rohrlänge im Einlaufbereich und der Rauigkeit wird später noch gesondert eingegangen. Von besonderer Bedeutung für den Strömungswiderstand bei turbulenter Strömung ist der Turbulenzgrad, der durch $\sqrt{w'^2}/\bar{w}$ näherungsweise erfaßt wird, wenn man die Fragen der Homogenität der Turbulenz außer acht läßt. Bei großen Werten von L/d , also in sehr großem Abstand vom Rohreintritt, strebt der Turbulenzgrad einem Minimum zu und bleibt dann konstant. In diesem Fall ist $\sqrt{w'^2}/\bar{w}$ keine unabhängige Größe mehr und kann vernachlässigt werden.

Nach diesen Ausführungen gilt die durch Gl.(1.35) mitgeteilte einfache Form des Widerstandsgesetzes also dann, wenn bei laminarer Rohrströmung das Geschwindigkeitsprofil voll ausgebildet und die Rohrwand glatt ist. Bei turbulenter Strömung muß zusätzlich noch vorausgesetzt werden, daß der Turbulenzgrad sein Minimum erreicht hat. Die Widerstandsgesetze für die laminare und die turbulente Strömung durch glatte Rohre werden im folgenden hergeleitet.

Wie bereits erwähnt, liefert das Widerstandsgesetz im wesentlichen einen Zusammenhang zwischen dem Druckverlust ΔP und der Geschwindigkeit \bar{w} . Für die laminare Rohrströmung kennen wir mit Gl.(1.10) bereits ein solches Gesetz in dimensionsbehafteter Form:

$$\Delta P = 32 \eta \bar{w} L/d^2. \quad (1.37)$$

Führt man diesen Ausdruck für ΔP in Gl.(1.34) ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Definition für Re nach Gl.(1.15) unmittelbar das Widerstandsgesetz für die laminare Rohrströmung:

$$\psi = \frac{64}{Re}. \quad (1.38)$$

Die Gleichungen (1.37) und (1.38) machen die gleichen Aussagen. Der Druckverlust ist proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit w und der Länge L , aber umgekehrt proportional dem Quadrat des Rohrdurchmessers d . Gegenüber Gl.(1.37) liegt der Vorteil des Widerstandsgesetzes gemäß Gl.(1.38) jedoch darin, daß die Aussage über die Abhängigkeit des Druckverlustes in die einfachste Form gebracht ist. Das wirkt sich insbesondere bei einer graphischen Darstellung aus. Bei Verwendung des Widerstandsgesetzes ist ψ über Re aufzutragen, wie es in *Bild 1.8* (Kurve *a*) getan ist. Wollte man unmittelbar den Druckverlust ΔP darstellen, so müßte man das in Abhängigkeit von vier Größen, nämlich η , w , L und d , tun, und erhielte mehrere Diagramme mit Kurvenscharen. Im Hinblick auf die einfache Schreibweise und die graphische Darstellungsmöglichkeit hat das Widerstandsgesetz in der dimensionslosen Form gemäß Gl.(1.38) alle Vorteile gegenüber Gl.(1.37).

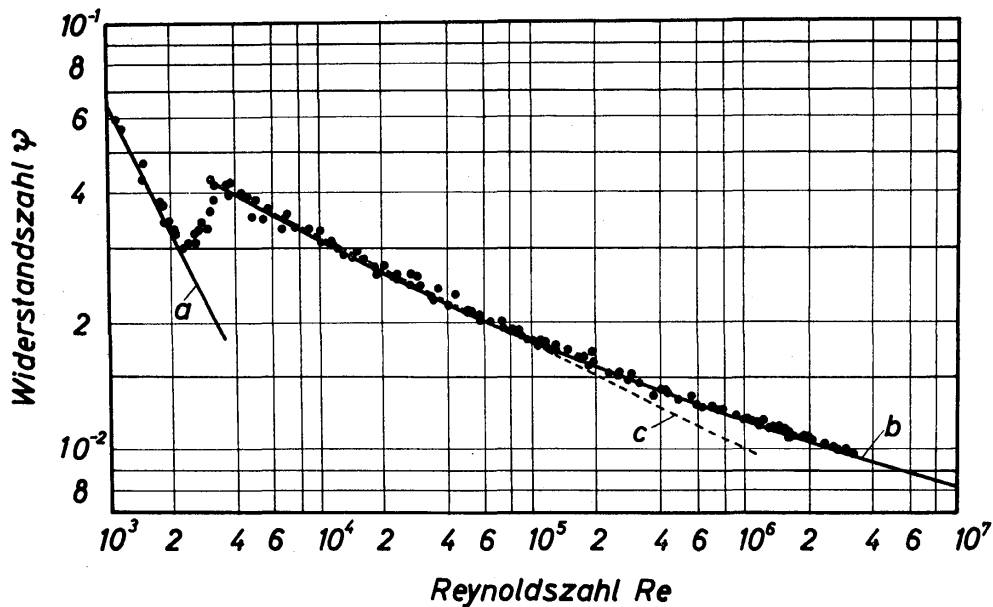


Bild 1.8. Abhängigkeit der Widerstandszahl für glatte Rohre von der Reynoldszahl, Kurve *a* nach Gl.(1.38), Kurve *b* nach Gl.(1.49) und Kurve *c* nach Gl.(1.50)

Zur Herleitung des entsprechenden Widerstandsgesetzes für die turbulente Rohrströmung benötigen wir wieder eine Gleichung für den Zusammenhang zwischen der mittleren Geschwindigkeit \bar{w} und dem Druckverlust ΔP . Eine solche Beziehung ließe sich durch Integration einer Gleichung für die örtliche Geschwindigkeit w gewinnen. Eine solche Gleichung für w steht jedoch nicht zur Verfügung. An Hand von *Bild 1.7* hatten wir uns klargemacht, daß das Geschwindigkeitsprofil nur abschnittsweise durch einfache Formeln ausgedrückt werden kann. Zur Vereinfachung nehmen wir die für die Kernströmung geltende Beziehung und setzen dabei voraus, daß sie, für den Zweck der Berechnung der mittleren Geschwindigkeit, über den gesamten Rohrradius gültig ist. Die Abweichungen vom wirklichen Geschwindigkeitsverlauf beschränken sich, was auch zahlenmäßig nachgewiesen wurde, auf eine außerordentlich dünne Wandschicht. Aus Gl.(1.27) folgt zunächst die örtliche Geschwindigkeit:

$$w = 2,5 w^* \ln \frac{w^* y}{\nu} + 5,5 w^*. \quad (1.39)$$

Bildet man hiermit die mittlere Geschwindigkeit gemäß

$$\bar{w} = \frac{2}{R^2} \int_0^R w y dy, \quad (1.40)$$

so erhält man

$$\bar{w} = w^* \left(2,5 \ln \frac{w^* R}{\nu} + 1,75 \right). \quad (1.41)$$

Einführen der Reynoldszahl $Re \equiv \bar{w} 2 R/\nu$ liefert nach Umformung:

$$\frac{\bar{w}}{w^*} = 2,5 \cdot \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{w^*}{\bar{w}} \cdot Re \right) + 1,75. \quad (1.42)$$

Diese Beziehung stellt den gesuchten Zusammenhang zwischen \bar{w} und ΔP dar, denn gemäß Gl. (1.24) ist $w^{*2} = \tau_w/\rho$, und die Wandschubspannung ist durch Gl. (1.14) wie folgt mit dem Druckverlust verbunden:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{4}{d} \tau_w. \quad (1.43)$$

Führt man diese Beziehung in die Definitionsgleichung (1.34) für die Widerstandszahl ψ ein, so ergibt sich

$$\psi = 4 \frac{\tau_w}{\rho \bar{w}^2/2}, \quad (1.44)$$

und unter Berücksichtigung von $\tau_w/\rho = w^{*2}$

$$\psi = 8 \left(\frac{w^*}{\bar{w}} \right)^2. \quad (1.45)$$

Schreibt man diese Gleichung wie folgt um,

$$\frac{w^*}{\bar{w}} = \sqrt{\frac{\psi}{8}}, \quad (1.46)$$

so erkennt man unmittelbar, daß sie, in Gl. (1.42) eingeführt, zu dem gesuchten Widerstandsgesetz führt:

$$\sqrt{\frac{8}{\psi}} = 2,5 \ln (Re \sqrt{\psi}) - 2,5 \ln (4 \cdot \sqrt{2}) + 1,75. \quad (1.47)$$

Hieraus wird unter Verwendung des dekadischen Logarithmus

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = 2,035 \log (Re \sqrt{\psi}) - 0,91. \quad (1.48)$$

Durch Vergleich mit zahlreichen Meßwerten hat man festgestellt, daß die festen Zahlenwerte etwas abgeändert werden müssen. Eine solche Änderung war zu erwarten, da für die Geschwindigkeitsverteilung Gl. (1.39) zugrunde gelegt wurde, die nicht für den gesamten Rohrquerschnitt gültig ist. In endgültiger Form lautet das Widerstandsgesetz

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = 2,0 \log (Re \sqrt{\psi}) - 0,8. \quad (1.49)$$

Dieses Gesetz wird das «Prandtlsche universelle Widerstandsgesetz für glatte Rohre» genannt [1.10]. Es gilt für beliebig hohe Reynoldszahlen oberhalb der kritischen Reynoldszahl $Re_{kr} = 2320$. Es gilt ferner für alle Newtonschen Flüssigkeiten. Von NIKURADSE [1.6] wurden Experimente bis zu $Re = 3,4 \cdot 10^6$ durchgeführt, wobei Meßwerte in ausgezeichneter Übereinstimmung mit Gl. (1.49) standen.

Gl. (1.49) ist in *Bild 1.8* durch Kurve *b* wiedergegeben. Die Anwendung von Gl. (1.49) bereitet gewisse Schwierigkeiten, da die gesuchte Widerstandszahl

nicht explizit auftritt. Eine graphische Darstellung $\psi(Re)$ behebt diese Schwierigkeit. Häufig wendet man auch das einfachere Widerstandsgesetz von BLASIUS [1.14] an:

$$\psi = \frac{0,3164}{Re^{1/4}} = (100 Re)^{-1/4}. \quad (1.50)$$

Dieses empirische Widerstandsgesetz ist in *Bild 1.8* als Kurve *c* dargestellt; der Gültigkeitsbereich erstreckt sich von $Re_{kr} = 2320$ bis $Re \approx 10^5$.

Im Gültigkeitsbereich des Blasiuschen Gesetzes ist ΔP proportional $\bar{w}^{1,75}$. Mit zunehmender Reynoldszahl steigt der Exponent der mittleren Geschwindigkeit noch etwas an. Im Grenzfall unendlich hoher Reynoldszahlen ergibt sich aus dem universellen Widerstandsgesetz, daß $\Delta P \sim \bar{w}^2$. Diesen Zusammenhang hatte man früher für andere Strömungsfälle (umströmte Körper) festgestellt. Für die Widerstandszahl ψ nach Gl.(1.34) ergibt sich dann ein von der Reynoldszahl unabhängiger und konstanter Wert. Diese Eigenart der Widerstandszahl erklärt ihre Definition. Nachdem die Strömungen inzwischen sehr viel genauer erforscht sind, stehen wir heute vor der zunächst überraschenden Tatsache, daß die Widerstandszahl ψ mit wachsender Reynoldszahl abnimmt, obwohl der Druckverlust mit wachsender Geschwindigkeit zunimmt.

In *Bild 1.8* ist der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung zu beachten. Im allgemeinen erfolgt dieser Übergang in einem breiteren Übergangsbereich. Nur in Ausnahmefällen findet der Übergang sprungartig statt. Die mitgeteilte kritische Reynoldszahl gibt auf Grund umfangreicher experimenteller Erfahrungen den kleinstmöglichen Wert der Reynoldszahl an, bei der die Strömung in den turbulenten Zustand übergehen kann. Es ist aber durchaus möglich, daß der Umschlag unter besonderen Umständen erst bei sehr viel höheren Reynoldszahlen erfolgt.

Die Berechnung des Druckverlustes mittels der Widerstandsgesetze wird folgendermaßen vorgenommen.

1. Aus den angegebenen Betriebsbedingungen wird zunächst die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} und die Reynoldszahl Re berechnet.
2. Danach bestimmt man die Widerstandszahl $\psi(Re)$, entweder mit einem Diagramm gemäß *Bild 1.8* oder den entsprechenden Gleichungen, also Gl.(1.38) für die laminare Strömung, Gl.(1.50) für die turbulente Strömung, wenn $2320 < Re < 10^5$, oder Gl.(1.49), wenn $2320 < Re < \infty$. Gl.(1.49) ist insbesondere immer dann anzuwenden, wenn die Reynoldszahl den Wert 10^5 überschreitet.
3. Mit der Widerstandszahl ψ kann der gesuchte Druckverlust ΔP nach Gl.(1.34) berechnet werden.

In vielen Fällen interessiert man sich für den Druckverlust in Abhängigkeit vom Rohrdurchmesser d bei gegebenem Volumstrom \dot{V} . In Gl.(1.37) ist \bar{w} durch

$$\bar{w} = \frac{4 \dot{V}}{d^2 \pi} \quad (1.51)$$

zu ersetzen. Dann ergibt sich für die laminare Strömung:

$$\Delta P = \frac{32 \cdot 4}{\pi} \cdot \frac{\eta L \dot{V}}{d^4}. \quad (1.52)$$

Bei laminarer Strömung und $\dot{V} = \text{const}$ ändert sich also der Druckverlust mit d^{-4} . Kleine Änderungen im Rohrdurchmesser führen zu großen Änderungen im Druckverlust.

Für die turbulente Rohrströmung gilt im Bereich $2300 \leq Re \leq 10^5$ das Blasius'sche Widerstandsgesetz. Dann ergibt sich

$$\Delta P = \frac{16 \cdot 0,3164}{2 \cdot 4^{1/4} \cdot \pi^{7/4}} \cdot \frac{\eta^{1/4} \cdot \rho^{3/4} \cdot L \cdot \dot{V}^{7/4}}{d^{4,75}}. \quad (1.53)$$

Bei turbulenter Strömung ändert sich der Druckverlust bei $\dot{V} = \text{const}$ mit $d^{-4,75}$ also in noch stärkerem Maße als bei der laminaren Strömung.

Aus den beiden letzten Gleichungen erkennt man ferner, daß ΔP bei laminarer Strömung proportional η , bei turbulenter Strömung aber nur noch proportional $\eta^{1/4}$ ist. Die molekulare Austauschgröße, die Viskosität η , ist für die turbulente Strömung also nur von untergeordneter Bedeutung. Im Grenzfalle sehr hoher Reynoldszahlen wird $\psi = \text{const}$ und ΔP folglich unabhängig von η .

1.5 Widerstandsgesetze für rauhe Rohre

Rohre mit absolut glatter Oberfläche lassen sich technisch nicht herstellen. Von besonderer Bedeutung ist daher der Druckverlust für die Strömung durch Rohre mit rauhen Oberflächen. Ob der Druckverlust in einem rauhen Rohr größer ist als in einem glatten Rohr, hängt insbesondere von der Höhe der Rauigkeit ab. Weiterhin üben die Zahl der Rauigkeitselemente je Flächeneinheit, die Form der Rauigkeiten und deren Anordnung einen wesentlichen Einfluß auf die Größe des Druckverlustes aus.

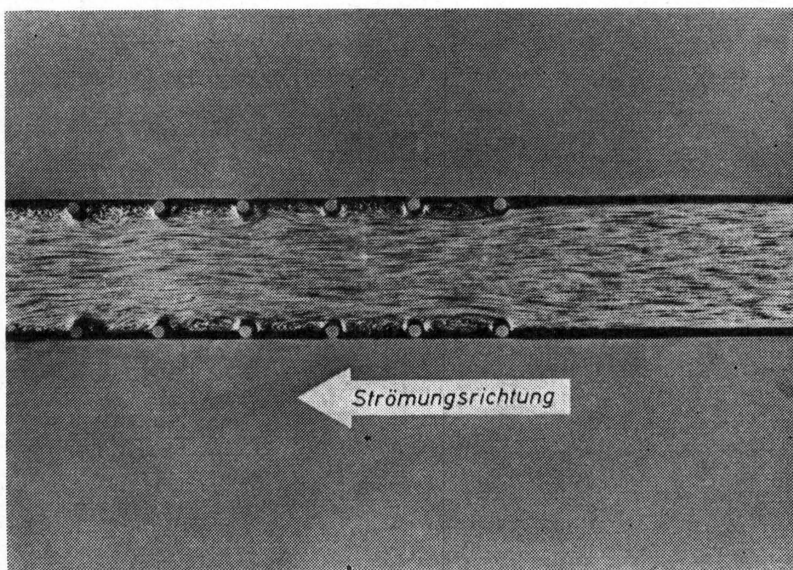


Bild 1.9. Photographische Aufnahme von der Strömung durch einen Kanal mit glatter und rauher Wand

Der bei der Strömung durch raue Rohre beobachtete erhöhte Druckverlust wird vor allem durch die hinter den Rauigkeitselementen auftretenden Wirbel hervorgerufen. Der zusätzliche Strömungswiderstand ist ein Druckwiderstand (häufig auch Formwiderstand genannt), der durch die Rauigkeitselemente verursacht wird. Der Druckwiderstand ist proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit. In *Bild 1.9* ist die Strömung durch einen Kanal mit einem glatten und einem rauhen Abschnitt sichtbar gemacht. Hinter den als Rauigkeitselementen dienenden zylindrischen Körpern treten Wirbelgebiete auf, deren Ausdehnung von Form, Höhe und Abstand der Rauigkeitselemente abhängt. Das Verhältnis k/R von Rauigkeitshöhe und Rohrradius übt den maßgebenden Einfluß auf die Größe des Druckverlustes aus.

1.51 Sandrauhe Rohre

Eine sehr umfassende Untersuchung über den Druckverlust in rauhen Rohren führte NIKURADSE [1.15] durch. Die Rohrwände waren mit Sand von gleichmäßiger Korngröße k_s so dicht wie möglich beklebt. Die Rohrradien und Sandkorngrößen wurden bei den Versuchen so geändert, daß sich für das Rauigkeitsverhältnis R/k_s sechs verschiedene Werte zwischen 15 und 507 ergaben. Die Ergebnisse der Messungen sind in *Bild 1.10* wiedergegeben. Aufgetragen ist die Widerstandszahl ψ , abhängig von der Reynoldszahl Re und dem Rauigkeitsverhältnis R/k_s . Zum Vergleich sind die Widerstandsgesetze für das glatte Rohr bei laminarer Strömung [Kurve *a* nach Gl.(1.38)] und bei turbulenter Strömung [Kurve *b* nach Gl.(1.49) und Kurve *c* nach Gl.(1.50)] eingezeichnet.

Die in *Bild 1.10* eingetragenen Meßwerte gelten nur für sandrauhe Rohre. Es zeigt sich, daß die sandrauhnen Rohre bei laminarer Strömung den gleichen Widerstand

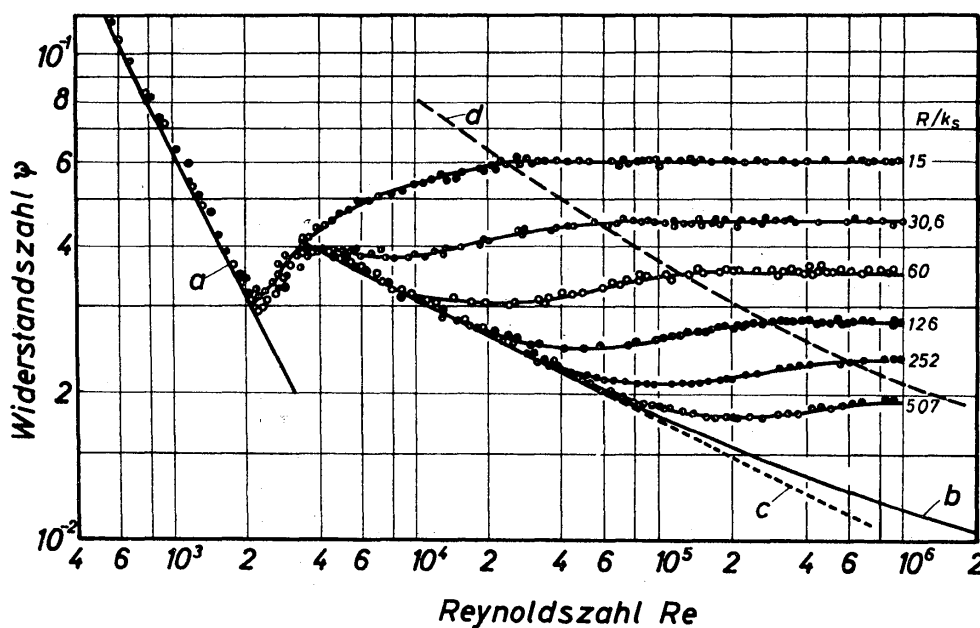


Bild 1.10. Abhängigkeit der Widerstandszahl für sandrauhne Rohre von der Reynoldszahl Re und dem Rauigkeitsparameter R/k_s ; Kurve *a* nach Gl.(1.38), Kurve *b* nach Gl.(1.49), Kurve *c* nach Gl.(1.50) und Kurve *d* nach Gl.(1.61)

haben wie glatte Rohre. Auch die kritische Reynoldszahl wird durch die Rauigkeiten nicht verändert. Bei turbulenter Strömung übt die Rauigkeit hingegen einen wesentlichen Einfluß auf den Widerstand aus. Für jedes Rauigkeitsverhältnis R/k_s ergibt sich eine gesonderte Kurve. Die Kurven lassen sich jeweils in drei Bereiche unterteilen:

a) In einem begrenzten Bereich der Reynoldszahl stimmt auch bei turbulenter Strömung der Widerstand rauher und glatter Rohre überein. In diesem Bereich ist die Rauigkeitshöhe k_s kleiner oder im Höchsthalle gleich der Dicke der laminaren Unterschicht. Ersetzt man in $w^* y/\nu$ den Wandabstand y durch k_s , so ergeben sich folgende Grenzen für den als «hydraulisch glatt» bezeichneten Bereich:

$$0 \leq \frac{k_s w^*}{\nu} \leq 5. \quad (1.54)$$

Bleiben die Rauigkeiten also innerhalb der laminaren Unterschicht, so üben sie keinen Einfluß auf den Strömungswiderstand aus. Das rauhe Rohr verhält sich dann in hydrodynamischer Hinsicht wie ein glattes Rohr. Demgemäß gelten in diesem Bereich auch die Widerstandsgesetze nach Gleichungen (1.49) und (1.50). Die obere Grenze, bis zu der das Widerstandsgesetz von BLASIUS auch für sandrauhe Rohre verwendet werden darf, läßt sich folgendermaßen bestimmen: Setzt man Gl. (1.45) mit Gl. (1.50) gleich, so ergibt sich

$$8 \left(\frac{w^*}{w} \right)^2 = 0,3164 Re^{-1/4}. \quad (1.55)$$

Nach Einführen von

$$w^* = 5 \frac{\nu}{k_s} \quad (1.56)$$

erhält man

$$R_{h,g} = 88,5 \left(\frac{R}{k_s} \right)^{3/7}. \quad (1.57)$$

Dieses ist die Reynoldszahl, bis zu der sich ein sandrauhes Rohr noch als hydraulisch glatt erweist. Im Bereich

$$Re_{kr} = 2320 \leq Re \leq Re_{h,g} \quad (1.58)$$

läßt sich also das Widerstandsgesetz von BLASIUS auch für sandrauhe Rohre anwenden.

Sofern die Sandrauhigkeit k_s bekannt ist, läßt sich die Reynoldszahl $Re_{h,g}$ berechnen. Die Anwendung von Gl. (1.57) setzt Werte von $R/k_s \geq 15$ voraus. Werte der Reynoldszahl $Re_{h,g}$ sind in der folgenden Tabelle für einige Werte von R/k_s angegeben:

R/k_s	$Re_{h,g}$
15	$2,50 \cdot 10^3$
30	$4,34 \cdot 10^3$
60	$9,55 \cdot 10^3$
120	$21,20 \cdot 10^3$
240	$46,50 \cdot 10^3$
480	$103,60 \cdot 10^3$

b) Für Reynoldszahlen größer als $Re_{h,g}$ verhält sich jedes raue Rohr auch in hydrodynamischer Hinsicht wie ein rauhes. Die Rauigkeiten ragen jetzt in den Übergangsbereich zwischen der laminaren Unterschicht und dem turbulenten Strömungskern hinein. Es gilt also:

$$5 \leq \frac{k_s w^*}{\nu} \leq 70. \quad (1.59)$$

Der von den Rauigkeiten verursachte zusätzliche Widerstand ist ein Druckwiderstand, dessen Anwachsen von dem Verhältnis R/k_s abhängt. Hierüber geben die in *Bild 1.10* dargestellten Kurven Aufschluß. Innerhalb des Übergangsbereiches ist die Widerstandszahl eine Funktion der Reynoldszahl Re und des Rauigkeitsparameters R/k_s . Nach Untersuchungen von TOWNES und SABERSKY [1.16] ist innerhalb des Übergangsbereiches vom hydraulisch glatten zum vollständig rauhen Verhalten der Oberfläche die Wirbelbildung hinter den Rauigkeitselementen instationär und von der Reynoldszahl abhängig.

c) Übertagen die Rauigkeitselemente – zumindest teilweise – auch noch die Übergangszone, so ist der Strömungswiderstand im wesentlichen durch den Druckwiderstand bedingt. Dann ist ΔP proportional \bar{w}^2 und die Widerstandszahl nicht mehr von der Reynoldszahl, sondern allein vom Rauigkeitsparameter R/k_s abhängig. Die Wirbelbildung hinter den Rauigkeitselementen ist in den stationären Zustand übergegangen.

Für die voll ausgebildete Rauigkeitsströmung hat v. KÁRMÁN [1.17] das folgende Widerstandsgesetz hergeleitet:

$$\psi = \frac{1}{\left(2 \log \frac{R}{k_s} + 1,74\right)^2}. \quad (1.60)$$

Dieses Widerstandsgesetz gilt für Reynoldszahlen, die größer sind als $Re_{h,r}$, wofür aus $k_s w^*/\nu \leq 70$ unter Verwendung der Gleichungen (1.60), (1.45) und (1.35) folgende Beziehung hergeleitet werden kann:

$$Re_{h,r} = 396 \frac{R}{k_s} \left[2 \log \left(\frac{R}{k_s} \right) + 1,74 \right]. \quad (1.61)$$

Für einige Werte von R/k_s ist $Re_{h,r}$ in der folgenden Tabelle angegeben:

R/k_s	$Re_{h,r}$
15	$2,43 \cdot 10^4$
30	$5,59 \cdot 10^4$
60	$12,60 \cdot 10^4$
120	$28,0 \cdot 10^4$
240	$61,8 \cdot 10^4$
480	$135,0 \cdot 10^4$

Eine ausgebildete Rauheitsströmung liegt vor, wenn $Re \geq Re_{h,r}$ ist. Nur unter dieser Voraussetzung ist die Widerstandszahl nach Gl.(1.60) zu berechnen. In Bild 1.10 ist $Re_{h,r}$ gemäß Gl.(1.61) durch Kurve *d* dargestellt.

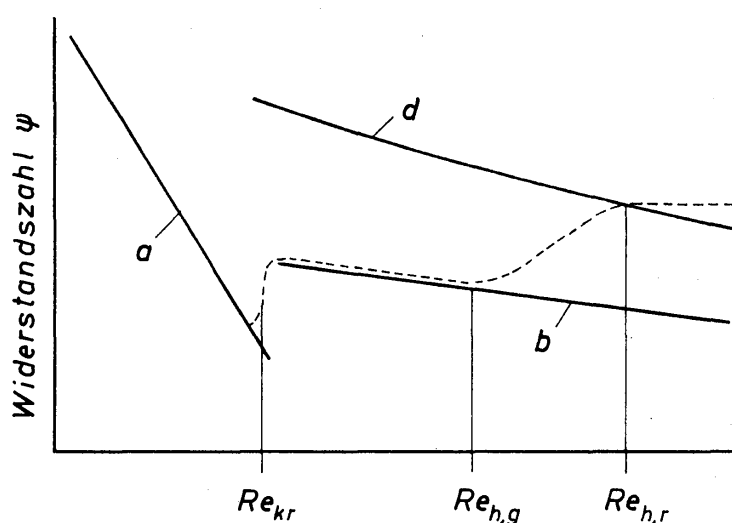


Bild 1.11. Zur Erläuterung der Strömungsbereiche in sandrauhem Rohren

Bild 1.11 enthält nochmals die Widerstandskurve für rauhe Rohre, für die die Reynoldszahlen Re_{krit} , $Re_{h,g}$ und $Re_{h,r}$ eingetragen sind. Danach ergibt sich folgende Zusammenstellung der für sandrauhe Rohre geltenden Gesetze:

Bedingung	Re-Bereich	Widerstandsgesetz
$\frac{k_s w^*}{\nu} \leq 5$	$Re_{kr} \leq Re \leq Re_{h,g}$	$\psi = f(Re)$; Gleichungen (1.49) und (1.50)
$5 \leq \frac{k_s w^*}{\nu} \leq 70$	$Re_{h,g} \leq Re \leq Re_{h,r}$	$\psi = f\left(Re; \frac{R}{k_s}\right)$
$\frac{k_s w^*}{\nu} \geq 70$	$Re_{h,r} \leq Re$	$\psi = f\left(\frac{R}{k_s}\right)$; Gl. (1.60)

Das Widerstandsgesetz nach Gl.(1.60) gilt nicht nur für Rohre mit den von NIKURADSE untersuchten Sandrauhigkeiten, sondern auch für alle technisch rauhen Rohre. Im Übergangsbereich und im Bereich, in dem sich sandrauhe Rohre als hydraulisch glatt erweisen, gelten für technisch rauhe Rohre jedoch andere Gesetze, die im folgenden Abschnitt gesondert erläutert werden.

1.52 Technisch raue Rohre

Die von NIKURADSE untersuchten Sandrauigkeiten zeichneten sich durch eine dichte und gleichmäßige Verteilung der einzelnen Sandkörner auf der Rohrwand aus. Bei technisch rauhen Rohren hingegen sind die Rauigkeiten von unterschiedlicher Höhe und weniger dicht und gleichmäßig auf der Oberfläche verteilt. Diese beiden Unterschiede führen dazu, daß insbesondere im Übergangsbereich zwischen «hydraulisch glatt» und «hydraulisch rauh» die Widerstandskurven sandrauer Rohre und technisch rauher Rohre nicht übereinstimmen.

Der Strömungswiderstand technisch rauher Rohre wurde von COLEBROOK [1.18] und MOODY [1.19] untersucht. COLEBROOK hat für die Widerstandszahl folgende Gleichung aufgestellt:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = -2 \log \left\{ \frac{2,51}{Re \sqrt{\psi}} + \frac{k_s/R}{7,42} \right\}. \quad (1.62)$$

Für $k_s/R = 0$ geht diese Gleichung in Gl. (1.49) für das glatte Rohr über und für $Re \sqrt{\psi} \rightarrow \infty$ in Gl. (1.60) für die ausgebildete Rauigkeitsströmung. Nach Gl. (1.62) berechnete Kurven sind in *Bild 1.12* dargestellt. Das Diagramm gilt nur für den turbulenten Strömungsbereich. Aussagen über den Widerstand im Bereich der laminaren Strömung sind nicht möglich; auch die kritische Reynoldszahl ist keineswegs sicher.

Der Übergang von der hydraulisch glatten Strömung zur ausgebildeten Rauigkeitsströmung erfolgt bei technisch rauhen Rohren nur ganz allmählich und nicht in der ausgeprägten Weise wie bei sandrauen Rohren. Wie bei sandrauen Roh-

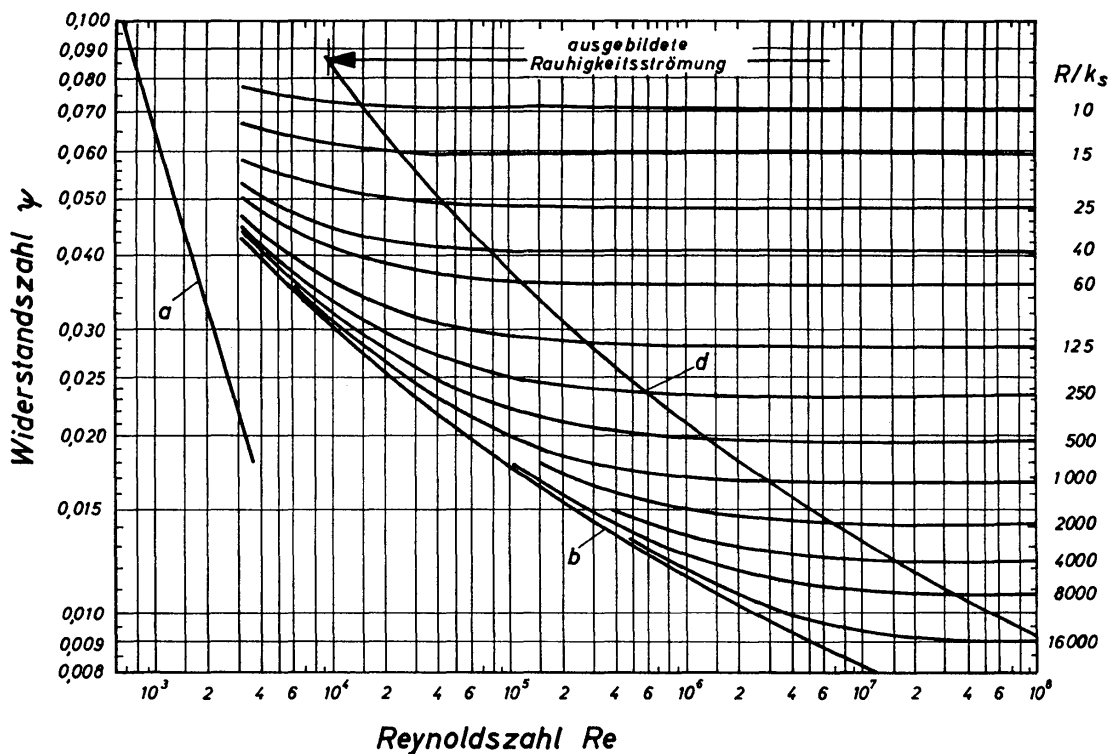


Bild 1.12. Abhängigkeit der Widerstandszahl für technisch raue Rohre von der Reynoldszahl Re und dem Rauigkeitsparameter R/k_s ; Kurve *a* für laminare Strömung nach Gl. (1.38), Kurve *b* für turbulente Strömung nach Gl. (1.49) und Kurve *d* nach Gl. (1.61)

ren beginnt der Bereich der ausgebildeten Rauheitsströmung jedoch auch bei $Re \geq Re_{h,r}$, Gl.(1.61), ebenso gilt dann das Widerstandsgesetz nach Gl.(1.60). Vorausgesetzt werden muß aber, daß als Rauheitsmaß für technisch raue Rohre eine «äquivalente Sandrauhigkeit» k_s verwendet wird.

Bei Metallrohren entsprechen anscheinend die mittels Rauhtiefenmessern bestimmten mittleren Rauhtiefen bereits der «äquivalenten Sandrauhigkeit» k_s . *Bild 1.13* gibt ein Beispiel für die mit Hilfe eines Perth-o-Meters ausgemessene raue Oberfläche eines gewalzten Stahlrohres von 100 mm Durchmesser. Die mittlere Rauhtiefe betrug etwa 0,3 mm, so daß $R/k_s = 167$ ist. Widerstandsmessungen ergaben Übereinstimmung mit der entsprechenden Kurve in *Bild 1.12*.

Tabelle 1.1: Rauheitswerte k_s nach KIRSCHMER [1.20]

Material	Zustand der Rohre	Absolute Rauigkeit k_s in mm
Gezogen Rohre aus: Glas, Kupfer, Messing, Bronze, Aluminium, sonstigen Leichtmetallen, Kunststoffen u. dgl.	neu, technisch glatt	0 (glatt) bis etwa 0,0015
Gezogene Stahlrohre	neu, verschiedene Glätte	0,01 bis 0,05
Geschweißte Stahlrohre	neu mäßig verrostet, leichte Verkrustung stärkere Verkrustung	0,05 bis 0,10 0,015 bis 0,2 bis 3
Genietetete Stahlrohre	je nach Nietart und Ausführung	1 bis über 5 (≈ 10)
Galvanisierte Eisenrohre	neu	0,12 bis 0,15
Schmiedeeiserne Rohre	neu	0,05
Rohre aus Gußeisen, einschließlich Schleudergut (mit Flansch- oder Muffenverbindung)	neu; innen mit Zement oder Bitumen ausgekleidet neu; nicht ausgekleidet angerostet stärkere Rostnarben, Verkrustung	0 (glatt) bis 0,12 0,25 bis 1,5 bis 3
Holzrohre	neu; Glätte nimmt infolge Verschleimung im Laufe der Jahre im allgemeinen zu	0,2 bis 1,0
Asbest-Zement-Rohre (Eternit-, Toschi-Rohre u. a.)	neu	0 (glatt) bis 0,10
Betonrohre und Druckstollen aus Beton	neu; Stahlbeton mit sorgfältig geglättetem Verputz neu; Schleuderbeton mit glattem Verputz neu; ohne Verputz Leitungen aus Stahlbeton mit glattem Verputz; mehrere Jahre in Betrieb	0 (glatt) bis etwa 0,15 0,15 0,2 bis 0,8 0,2 bis 0,3 und mehr

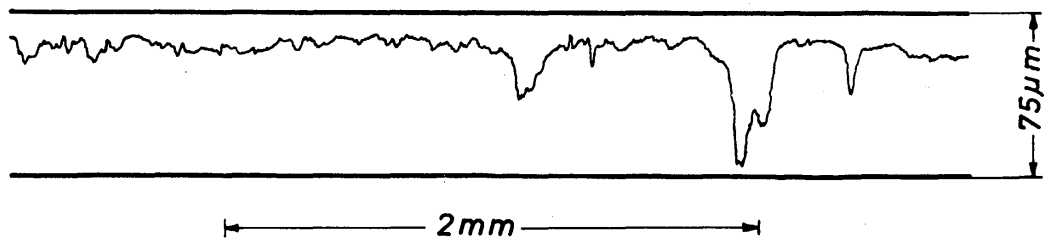


Bild 1.13. Oberfläche eines Stahlrohres, ausgemessen mit einem Perth-o-Meter

Sind Messungen zur Bestimmung der mittleren Rauhtiefen nicht möglich, dann lassen sich die in Tabelle 1.1 aufgeführten Werte für die «äquivalente Sandrauigkeit» k_s verwenden.

Die Anwendung der in Tabelle 1.1 zusammengestellten Rauheitswerte erfordert eine gewisse Vorsicht, da zeitliche Änderungen von k_s möglich sind. Treten Ablagerungen im Rohr auf, so ändert sich der lichte Durchmesser des Rohres. Letzteres ist besonders deshalb von Bedeutung, da sich die Widerstandszahl etwa mit der fünften Potenz des Rohrdurchmessers ändert.

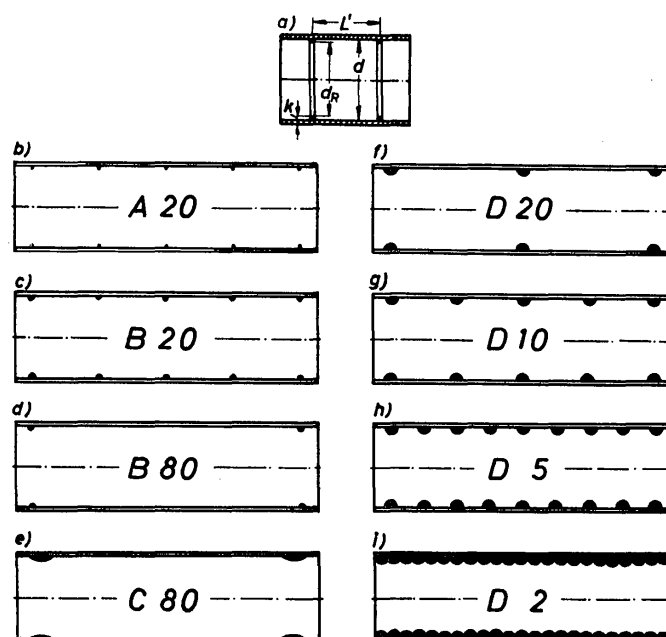
Bei rauhen Rohren ist der Durchmesser nicht mehr eindeutig festgelegt. Man definiert daher einen rechnerischen Durchmesser d mittels Rohrlänge und innerem Rohrvolumen:

$$d = \sqrt[4]{4 V_R / \pi L}. \quad (1.63)$$

Das Rohrvolumen V_R bestimmt man durch Auslitern, indem man das Rohr mit Wasser füllt und dessen Masse durch eine Wägung ermittelt. Mit der Dichte ergibt sich dann das gesuchte Volumen.

1.53 Künstlich raue Rohre

Die umfangreichsten Messungen zur Bestimmung des Widerstandes von Rohren mit künstlichen Rauigkeiten hat NUNNER [1.7] durchgeführt. Als Rauigkeitselemente dienten Ringe, deren Querschnitt und Anordnung in weiten Grenzen



geändert wurden. Die Ringe waren an der Innenwand des Rohres, dessen Durchmesser etwa 50 mm betrug, befestigt. Bild 1.14 gibt einen Überblick über die Ringformen und die gewählten Anordnungen. Die Abmessungen sind Tabelle 1.2 zu entnehmen.

Bild 1.14. Angaben zu den von NUNNER [1.7] untersuchten Rohren mit künstlichen Rauigkeiten

Tabelle 1.2: Daten der Versuchsrohre

Nr.	Bezeichnung des Rohres	Ring- querschnitt	Ring- dicke	Ring- abstand	Bezogener Ring- abstand	Innerer Ring- durchmesser	Mittlerer Rohr- durchmesser	Durch- messer- verhältnis	Mittlere Wider- stands- zahl	Äquivalente Sand- rauigkeit	Kritische Reynolds- zahl
			k	L'	$\frac{L'}{k}$	d_R	d	$\frac{d}{d_R}$	ψ	k_s	Re_{kr}
			mm	mm		mm				mm	
1	glatt	–	–	–	–	–	50,06	–	–	–	2600
2	A 20	rechteckig	2	40,9	20,4	46	49,82	1,084	0,15	9,5	2000
3	B 80	halbrund (Halbmesser 2 mm)	2	163,5	81,7	46	49,95	1,086	–	–	2600
4	B 20		2	40,9	20,4	46	49,82	1,084	0,117	6,4	2000
5	C 80	flachrund (Halbmesser 18 mm)	2	163,5	81,7	46	49,82	1,084	–	–	2600
6	D 20	halbrund (Halbmesser 4 mm)	4	81,7	20,4	42	49,5	1,18	0,225	16,4	1200
7	D 10		4	40,9	10,2	42	48,92	1,165	0,31	22,8	1900
8	D 5		4	20,4	5,1	42	47,78	1,14	0,24	17,7	2300
9	D 2		4	8	2	42	43,85	1,045	0,08	3,14	2900

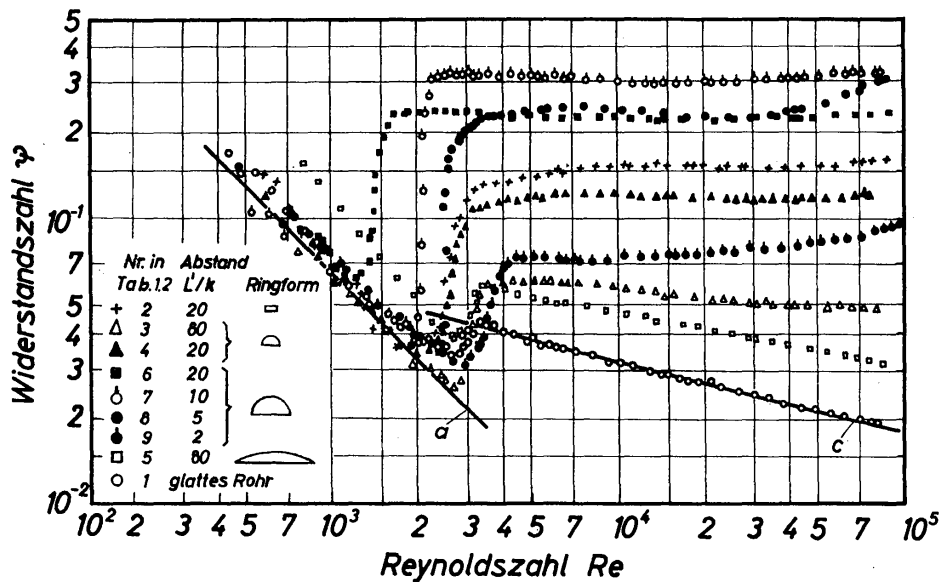


Bild 1.15. Abhängigkeit der Widerstandszahl künstlich rauher Rohre von der Reynoldszahl Re für die in Bild 1.14 und Tabelle 1.2 näher bezeichneten Rauigkeiten; Kurve a für laminare Strömung nach Gl. (1.38) und Kurve c für turbulente Strömung nach Gl. (1.50) in glatten Rohren

Die Ergebnisse der Widerstandsmessungen sind in Bild 1.15 dargestellt. Durch die Kurven a und c werden die Gesetze für das glatte Rohr nach Gl. (1.38) bei laminarer Strömung und nach Gl. (1.50) bei turbulenter Strömung ausgedrückt.

Die Widerstandszahl ψ und die Reynoldszahl Re sind in der üblichen Weise entsprechend den Gleichungen (1.34) und (1.15) definiert. Für die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit aus dem Volumstrom \dot{V} wurden bei laminarer und turbulenter Strömung verschiedene Rohrquerschnitte verwendet. Bei turbulenter Strömung wurde der Durchmesser $d = d_i$ nach Gl. (1.63) bestimmt.

Bei der laminaren Strömung gilt indes $d = d_i$ mit

$$d_i = d_R - 2k. \quad (1.64)$$

Mit d_R wird der lichte Rohrdurchmesser und mit k die Rauigkeitshöhe bezeichnet. Dieses Vorgehen stützt sich auf die Beobachtung, daß die Strömung im laminaren Zustand zwischen den Rauigkeitselementen nicht mehr an der Rohrwand anliegt. Es wird also angenommen, daß der für die laminare Strömung verfügbare Rohrquerschnitt durch $d_i^2 \pi/4$ gegeben ist.

Die Abhängigkeit der Widerstandszahl ψ von der Reynoldszahl Re ist für die untersuchten rauhen Rohre in Bild 1.15 angegeben. Man entnimmt diesem Bild, daß die Mehrzahl der Meßergebnisse im Bereich der laminaren Strömung durch das Widerstandsgesetz für glatte Rohre erfaßt wird, im Bereich der laminaren Strömung also kein Unterschied zwischen sandrauhem und künstlich rauhen Rohren besteht. Im Bereich der turbulenten Strömung ist der Kurvenverlauf ebenfalls ähnlich dem für sandrauhe Rohre. Die Widerstandszahlen nehmen im allgemeinen einen konstanten Wert an, für den in Tabelle 1.2 ein Mittelwert angegeben ist. Hieraus ließ sich dann eine äquivalente Sandrauigkeit k_s berechnen, die ebenfalls in Tabelle 1.2 mitgeteilt wird. Bemerkenswert an den Meßergebnissen ist, daß sich die kritische Reynoldszahl mit der Rauigkeit ändert.

Die Messungen wurden bei ausgebildeter, isothermer Strömung von Luft durchgeführt. Ist das Geschwindigkeitsprofil am Eintritt in das raue Rohr noch nicht ausgebildet, so bewirkt das bei laminarer Strömung eine Erhöhung der Widerstandszahl um bis zu 100%. Bei turbulenter Strömung durch raue Rohre wirkt sich der Einlaufvorgang praktisch nicht auf den Strömungswiderstand aus.

Die Verhältnisse können sich erheblich ändern, wenn die Rohre nicht mit künstlichen Rauheitselementen, sondern mit Wirbeleinbauten versehen werden. Den Strömungswiderstand von Rohren mit den verschiedensten Wirbeleinbauten hat KOCH [1.21] im Zusammenhang mit dem Wärmeübergang sehr gründlich untersucht. Zum Strömungswiderstand von Rohren mit welliger, riffelrauer Innenwand sei auf Untersuchungen von GESSNER [1.22] und BRAUER [1.23] hingewiesen.

1.6 Strömung in gekrümmten Rohren und Rohrkrümmern

Die bisher erläuterten Strömungsgesetze gelten für gerade Rohre. Hierbei sind die Geschwindigkeitsverteilungen gemäß *Bild 1.5* sowohl bei laminarer als auch bei turbulenter Strömung stets achsensymmetrisch. Betrachtet man jedoch die Strömung durch ein gekrümmtes Rohr, für das die Bezeichnungen und das Geschwindigkeitsprofil in *Bild 1.16* dargestellt sind, so stellt man als wichtigstes Ergebnis fest, daß das Geschwindigkeitsprofil asymmetrisch ist [1.10]. Dabei ist das Maximum der Geschwindigkeitsverteilung zur Außenwand des gekrümmten Rohres verschoben. Diese Verschiebung prägt sich mit kleiner werdendem Krümmungsdurchmesser D bei unveränderlichem Rohrdurchmesser d immer stärker aus. Offensichtlich ist das Durchmesserverhältnis d/D eine Kennzahl, die bei der Darstellung der Widerstandsgesetze für gekrümmte Rohre berücksichtigt werden muß.

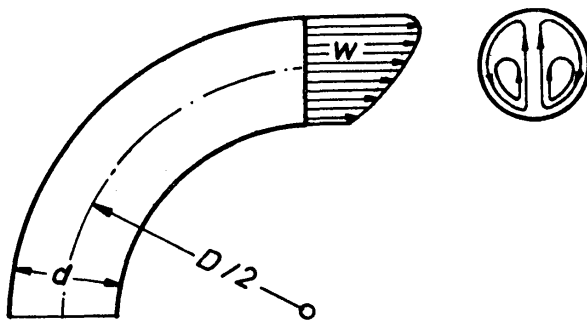


Bild 1.16

Zur Strömung in gekrümmten Kanälen

In gekrümmten Rohren überlagert sich der Hauptströmung eine Sekundärströmung, die aus zwei Wirbeln besteht, wie in *Bild 1.16* bereits angedeutet wurde. Jedes Flüssigkeitsteilchen bewegt sich in einem gekrümmten Rohr auf einer schraubenförmigen Bahn. Diese Bewegung der Flüssigkeit läßt sich durch Zugabe von Schwebeteilchen gut sichtbar machen.

Die schraubenförmigen Bewegungsbahnen der Flüssigkeitselemente, verbunden mit einer Umformung der Geschwindigkeitsverteilung, führen zu einem größeren Energieverlust. Befindet sich hinter dem gekrümmten Rohr eine gerade Rohrstrecke, so wird in dieser die Geschwindigkeitsverteilung wieder in eine sym-

metrische zurückverwandelt, wobei ein zusätzlicher Energieverlust auftritt. Der gesamte durch den Krümmer hervorgerufene Energieverlust setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen, nämlich dem in der gekrümmten Leitung und dem in einer anschließenden geraden Leitung.

Für die folgenden Ausführungen erweist es sich als zweckmäßig, zwischen dem gekrümmten Rohr und dem Rohrkrümmer zu unterscheiden. Unter einem gekrümmten Rohr wird ein schraubenförmig verwundenes Rohr verstanden, wie es vielfach beim Bau von Wärmeaustauschern verwendet wird. Geradlinige Zulauf- und Ablaufstrecken werden dabei nicht mit in die Betrachtung eingezogen. Beim Rohrkrümmer soll es sich um gekrümmte Rohrleitungsabschnitte handeln, die nur dazu dienen, zwei gerade Leitungsabschnitte zu verbinden. Die Umlenkung erfolgt stets um einen Winkel von weniger als 360° . Die technisch wichtigsten Umlenkungen erfolgen um 90 bis 180° .

1.61 Gekrümmte Rohre

Auf Grund einer eingehenden Überprüfung zahlreicher eigener und fremder Versuchsergebnisse stellte ITO [1.24] fest, daß eine von WHITE [1.25] aufgestellte empirische Formel zur Berechnung des Widerstandes gekrümmter Rohre bei laminarer Strömung die Meßwerte sehr gut wiederzugeben vermag. Diese Formel lautet:

$$\frac{1}{\psi_k/\psi} = 1 - \left[1 - \left(\frac{11,6}{Re \sqrt{d/D}} \right)^{0,45} \right]^{2,22}. \quad (1.65)$$

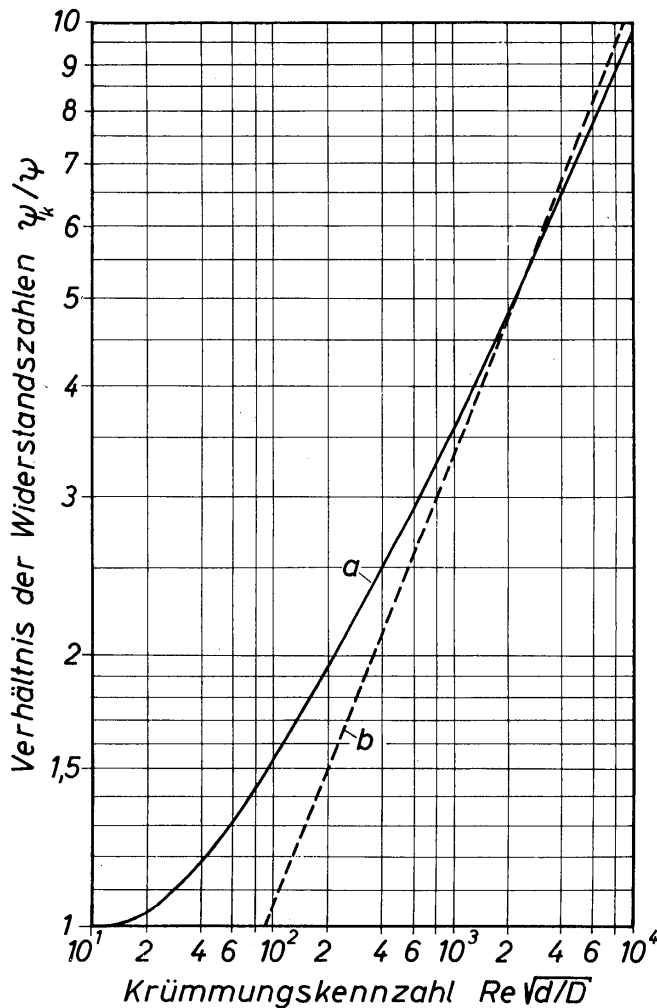
Hierin bedeuten ψ_k und ψ die Widerstandszahlen für das gekrümmte und das gerade Rohr, Re die Reynoldszahl, d den Rohrdurchmesser und D den Krümmungsdurchmesser. Die Widerstandszahlen sind durch Gl. (1.34) definiert. Da das gekrümmte Rohr mit einem geraden Rohr von gleicher Länge und gleichem Durchmesser verglichen wird, gibt das Verhältnis der Widerstandszahlen ψ_k/ψ unmittelbar das Verhältnis der Druckverluste $\Delta P_k/\Delta P$ an. Der Druckverlust für das gerade Rohr wird mittels Gl. (1.38) berechnet. Der Gültigkeitsbereich von Gl. (1.65) ist durch folgende Werte begrenzt:

$$11,6 \leq Re \sqrt{d/D} \leq 3000.$$

Für Werte der Krümmungskennzahl $Re \sqrt{d/D}$ kleiner als 11,6 ist $\psi_k/\psi = 1$. Die vorhandenen Meßwerte erstrecken sich etwa bis zu $Re \sqrt{d/D} = 3000$. Für noch größere Werte der Krümmungskennzahl gilt wahrscheinlich eine theoretische Gleichung, die von ADLER [1.26] hergeleitet wurde:

$$\frac{\psi_k}{\psi} = 0,1064 (Re \sqrt{d/D})^{1/2} \quad \text{für } Re \sqrt{d/D} > 3000. \quad (1.66)$$

Die in der theoretischen Rechnung auftretende Kennzahl $Re \sqrt{d/D}$ wurde erstmalig in einer Untersuchung von DEAN [1.27] gefunden, weshalb sie häufig auch Deanzahl genannt wird.



In *Bild 1.17*, in dem ψ_k/ψ über der Krümmungskennzahl $Re\sqrt{d/D}$ aufgetragen wurde, ist die nach Gl. (1.65) berechnete Kurve mit *a* und die nach Gl. (1.66) berechnete Kurve mit *b* bezeichnet. Die Versuchswerte erstrecken sich bis zu $Re\sqrt{d/D} = 3000$. Die von ITO [1.24] ausgewerteten Versuchsergebnisse gelten für Durchmesserhältnisse von $D/d = 15$ bis 3820.

Bild 1.17. Verhältnis der Widerstandszahlen für laminar durchströmte gekrümmte Rohre, abhängig von der Krümmungskennzahl; Kurve *a* nach Gl. (1.65) und Kurve *b* nach Gl. (1.66)

Da die von WHITE mitgeteilte Gl. (1.65) einen etwas verwickelten Aufbau hat, stellte HAUSEN [1.28] die folgende, einfachere Formel auf:

$$\frac{\psi_k}{\psi} = 0,805 + 0,0448 (Re\sqrt{d/D})^{0,6}. \quad (1.67)$$

Auch diese Beziehung gibt die Meßwerte sehr gut wieder. Der Anwendungsbereich ist mit $11,6 < Re\sqrt{d/D} < 1000$ etwas begrenzter als der für die Gl. (1.65). Da die Gleichungen (1.65) bis (1.67) nur für die Berechnung des Strömungswiderstandes bei laminarer Strömung geeignet sind, erhebt sich die Frage, bis zu welchem Wert der Reynoldszahl die laminare Strömung in gekrümmten Rohren stabil ist. Zahlreiche Versuchsergebnisse, die von ITO [1.24] zusammengestellt wurden, beweisen, daß die laminare Strömung um so stabiler ist, je stärker das Rohr gekrümmt ist. Die Erhöhung der kritischen Reynoldszahl mit zunehmender Krümmung der Rohre läßt sich wahrscheinlich darauf zurückführen, daß die gerichteten Zentrifugalkräfte die turbulenten Kräfte zunächst noch nicht zur Wirkung kommen lassen. Aus den verfügbaren Angaben hat ITO zur Berechnung der kritischen Reynoldszahl Re_{kr} folgende Formel aufgestellt:

$$Re_{kr} = 2 \cdot 10^4 (d/D)^{0,32}. \quad (1.68)$$

Die Gültigkeitsgrenzen sind durch $15 < D/d < 860$ gegeben. Für D/d größer als 860 wird $Re_{kr} = 2320$, stimmt dann also mit dem Wert für das gerade Rohr überein. Für D/d kleiner als 15 liegen zur Zeit noch keine Meßwerte vor.

Für den turbulenten Strömungsbereich hat ITO [1.24] ebenfalls eine große Zahl eigener und fremder Versuchsergebnisse ausgewertet und eine Beziehung aufgestellt, die sich in der folgenden Form schreiben läßt:

$$\frac{\psi_k}{\psi} = 0,9608 + 0,0917 [Re (d/D)^2]^{1/4}. \quad (1.69)$$

Hierin ist ψ die durch das Gesetz von BLASIUS gemäß Gl. (1.50) gegebene Widerstandszahl für das gerade Rohr. Der Gültigkeitsbereich von Gl. (1.69) erstreckt sich von $Re (d/D)^2 = 0,034$ bis 300. Für $Re (d/D)^2$ kleiner als 0,034 ist $\psi_k/\psi = 1$ zu setzen. Ändert man die festen Zahlenwerte in Gl. (1.69) geringfügig, so erhält man die Beziehung

$$\frac{\psi_k}{\psi} = 1 + 0,08 [Re (d/D)^2]^{1/4}, \quad (1.70)$$

die von $Re (d/D)^2 = 0$ bis 300 anwendbar ist und die verfügbaren Meßwerte ebenso gut wiedergibt wie Gl. (1.69). Oberhalb $Re (d/D)^2 = 300$ liegen noch keine Meßwerte vor; eine Extrapolation der Gleichungen über diesen Wert hinaus sollte daher vermieden werden. Die bei den Versuchen angewendeten Krümmungsverhältnisse D/d lagen zwischen 15 und 4900. In *Bild 1.18* werden Gl. (1.69) durch Kurve *a* und Gl. (1.70) durch Kurve *b* wiedergegeben. Bei turbulenter Strömung ist der Widerstand in gekrümmten Rohren für die untersuchten Bedingungen nicht sehr viel größer als in geraden Rohren.

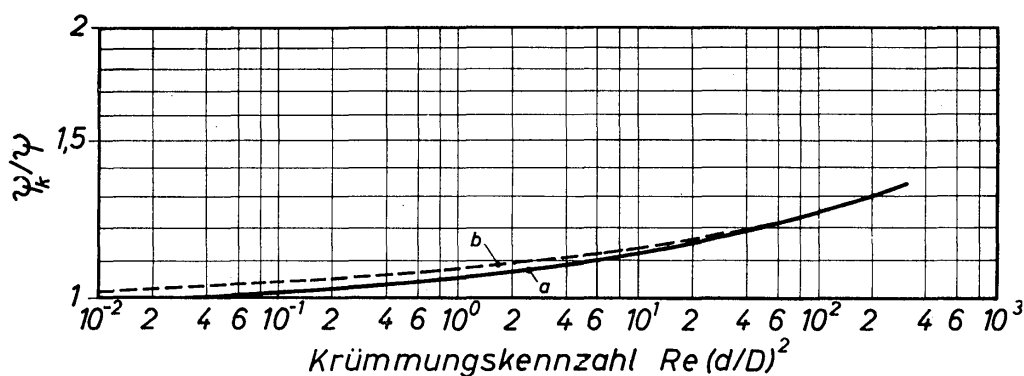


Bild 1.18. Verhältnis der Widerstandszahlen für turbulent durchströmte gekrümmte Rohre, abhängig von der Krümmungskennzahl; Kurve *a* nach Gl. (1.69) und Kurve *b* nach Gl. (1.70)

1.62 Rohrkrümmer

Ein Rohrkrümmer verbindet zwei gerade Leitungsabschnitte, die Zulauf- und Ablaufstrecke genannt werden sollen. Der Krümmungsdurchmesser sei D und der Rohrdurchmesser d . Strömt ein Fluid durch eine solche Anordnung, dann wird das Geschwindigkeitsprofil, welches bei Eintritt in den Krümmer symmetrisch sein möge, zu der in *Bild 1.16* bereits angedeuteten unsymmetrischen Form verändert. Jedes Fluidelement bewegt sich innerhalb des Krümmers auf einer schraubenförmigen Bahn. Bei sehr kleinem Durchmesser Verhältnis D/d beginnt sich die

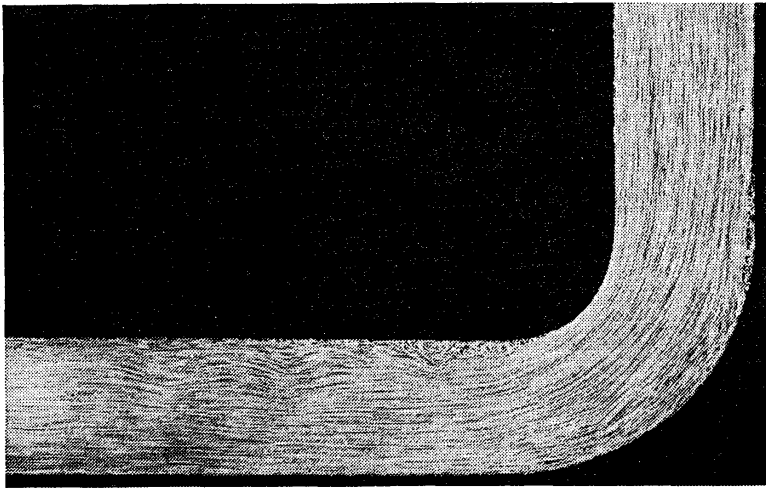


Bild 1.19. Photographische Aufnahme von der Strömung durch einen Krümmer

Strömung darüber hinaus im letzten Abschnitt des Krümmers von der Innenwand abzulösen, wodurch die Unsymmetrie des Geschwindigkeitsprofils noch verstärkt wird. Das Ablösegebiet ist von energieverzehrenden Wirbeln erfüllt und erstreckt sich, wie *Bild 1.19* erkennen läßt, in die gerade Ablaufstrecke hinein. Erst nach Zurücklegen eines längeren Weges stellt sich wieder der ursprüngliche ungestörte Strömungszustand ein, wie er vor Eintritt in den Krümmer herrscht. Der gesamte durch den Krümmer verursachte Druckverlust setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, nämlich aus dem im Krümmer selbst beobachteten und aus dem zusätzlichen in der Ablaufstrecke. Diese beiden Verlustanteile sollen an Hand von *Bild 1.20* erläutert werden.

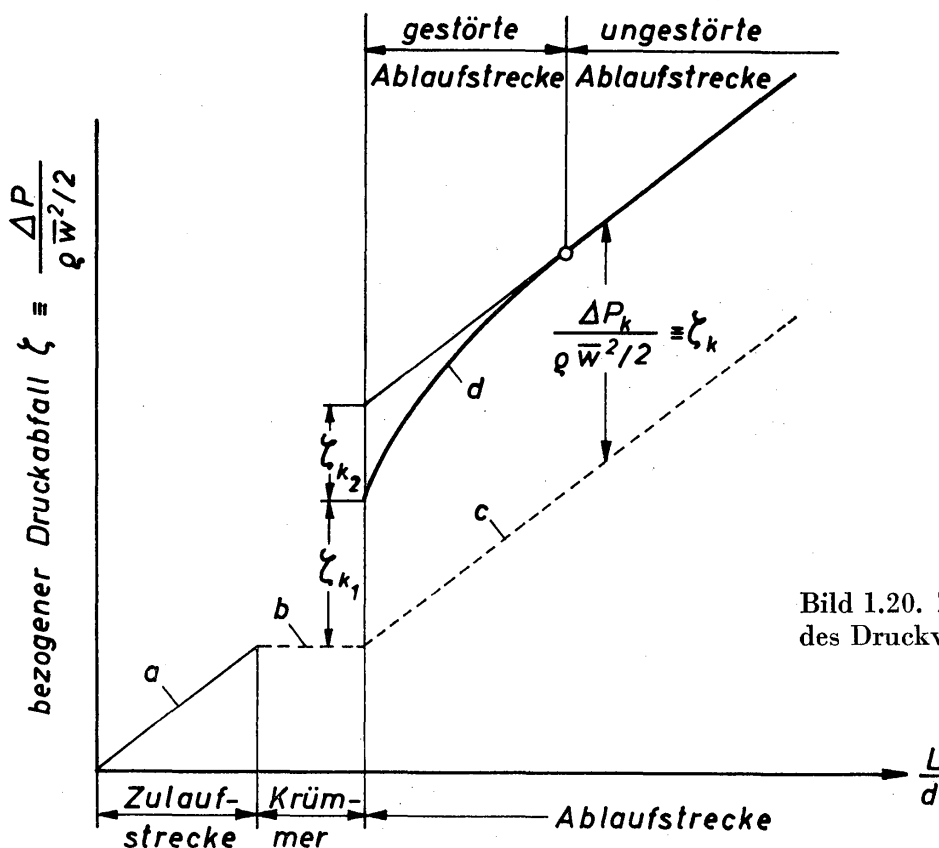


Bild 1.20. Zur Erläuterung des Druckverlustes im Krümmer

Zur Darstellung der Krümmerverluste wird der Widerstandsbeiwert

$$\zeta_k = \frac{\Delta P_k}{\rho \bar{w}^2 / 2} \quad (1.71)$$

definiert. Es bedeuten ΔP_k den vom Krümmer verursachten Druckverlust, ρ die Dichte und \bar{w} die mittlere Geschwindigkeit des Fluids. Trägt man den Widerstandsbeiwert, der für die geraden Leitungsabschnitte ohne den Index k ebenfalls angewendet werden kann, für die drei Abschnitte der Rohrleitung über dem Längenverhältnis L/D auf, so ergeben sich die in *Bild 1.20* dargestellten Verhältnisse. Kurve *a* gibt das Ansteigen des Druckabfalls in der geraden Zulaufstrecke wieder. An die Zulaufstrecke schließt der Krümmer an, der zunächst als verlustfrei angenommen sei. Dann gilt für den Krümmer die gestrichelte Kurve *b*. Für die verlustbehaftete gerade Ablaufstrecke steigt der Druckabfall wieder geradlinig an, und zwar gemäß Kurve *c*. Der hinter einem verlustbehafteten Krümmer auftretende Druckabfall in der geraden Ablaufstrecke ändert sich gemäß Kurve *d*. Im ersten Teil, der gestörten Ablaufstrecke, ergibt sich ein gekrümmter Kurvenast. In diesem Streckenabschnitt klingen alle durch den Krümmer verursachten Störungen allmählich ab. Im anschließenden ungestörten Teil der Ablaufstrecke ändert sich der Druckabfall wieder linear mit der bezogenen Lauflänge L/d . Der im ungestörten Bereich liegende Ast der Kurve *d* verläuft parallel zur Kurve *c*. Der senkrechte Abstand dieser parallelen Kurvenabschnitte ergibt den insgesamt durch den Krümmer verursachten bezogenen Druckabfall. Er läßt sich in die Anteile ζ_{k_1} und ζ_{k_2} unterteilen. Hiervon stellt ζ_{k_1} den innerhalb des Krümmers selbst auftretenden Abfall dar, verursacht durch Wandreibung, Umformung des Geschwindigkeitsprofils und Ablösung. Mit ζ_{k_2} wird der zusätzliche Druckabfall in der geraden Ablaufstrecke bezeichnet, der durch die Rückbildung des Geschwindigkeitsprofils und die Ablösung bedingt ist. Der bei ungestörter Strömung in jedem Falle in der Ablaufstrecke auftretende Druckabfall ist in ζ_{k_2} und somit auch in ζ_k nicht enthalten. Bei Krümmern mit sehr großem Krümmungsverhältnis D/d wird ζ_{k_2} im Vergleich zu ζ_{k_1} sehr klein sein. Bei sehr kleinen Werten von D/d kann ζ_{k_2} aber sogar größer sein als ζ_{k_1} . Für den Ingenieur interessiert fast ausnahmslos nur der Gesamtwert ζ_k . Hierfür werden im folgenden Berechnungsgleichungen mitgeteilt.

Die bislang umfassendste Untersuchung über Krümmerverluste bei turbulenter Strömung hat ITO [1.29] durchgeführt, in dessen Bericht das auf diesem Gebiet vorliegende Schrifttum zusammengestellt und ausgewertet wurde. ITO geht von der Vorstellung aus, daß sich die für Krümmer aufzustellenden Gesetze aus denen für gekrümmte Rohre herleiten lassen müssen, wenn ein zusätzlicher Korrekturfaktor φ eingeführt wird. Somit muß also gelten:

$$\zeta_k = \varphi \cdot \psi_k \frac{L_k}{d} \quad (1.72)$$

Hierin sind ψ_k die Widerstandszahl für das gekrümmte Rohr gemäß Gl.(1.70) und L_k die Länge der Krümmerachse. Für das Längenverhältnis gilt die Beziehung:

$$\frac{L_k}{d} = \frac{1}{2} \theta_r \frac{D}{d}. \tag{1.73}$$

Mit θ_r wird der Krümmerwinkel im Bogenmaß bezeichnet, der mit dem Krümmerwinkel θ in Winkelgraden in dem Zusammenhang $\theta_r = \theta \cdot 2\pi/360$ steht. Damit erhält man

$$\zeta_k = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot \theta_r \cdot \psi_k \frac{D}{d}. \tag{1.74}$$

Setzt man hierin für ψ_k Gl.(1.70) ein, und berücksichtigt Gl.(1.50) für die Widerstandszahl ψ des geraden Rohres, dann ergibt sich die folgende Beziehung:

$$\frac{\zeta_k}{\theta_r (D/d)^{1/2}} = \varphi \left\{ 0,0127 + \frac{0,158}{[Re (d/D)^2]^{1/4}} \right\}. \tag{1.75}$$

Der Vergleich mit einer großen Zahl von Meßergebnissen ergab, daß sich der Gültigkeitsbereich dieser Gleichung von $Re (d/D)^2 = 0$ bis 80 erstreckt. Für $Re (d/D)^2 > 80$ ist die Beziehung

$$\frac{\zeta_k}{\theta_r (D/d)^{1/2}} = \frac{\varphi \cdot 0,138}{[Re(d/D)^2]^{0,17}} \tag{1.76}$$

den Meßwerten sehr gut angepaßt, die sich bis zu etwa $Re (d/D)^2 = 10^5$ erstrecken. Der Korrekturfaktor φ ist eine reine Funktion des Durchmesserverhältnisses D/d und konnte für die drei technisch wichtigsten Fälle durch Gleichungen ausgedrückt werden. Für einen Krümmerwinkel von $\theta = 45^\circ$ gilt

$$\varphi = 1 + 14,2 (d/D)^{1,47}, \tag{1.77}$$

für $\theta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \varphi &= 0,95 + 17,2 (d/D)^{1,96} && \text{mit } D/d < 19,7, \\ \varphi &= 1 && \text{mit } D/d > 19,7 \end{aligned} \tag{1.78}$$

und für $\theta = 180^\circ$

$$\varphi = 1 + 116 (d/D)^{4,52}. \tag{1.79}$$

In *Bild 1.21* ist φ für die drei Krümmerwinkel abhängig von D/d dargestellt. Die eingetragenen Meßwerte wurden von ITO zusammengetragen. Man entnimmt dem Bild, daß der Korrekturfaktor φ für größere Werte des Durchmesserverhältnisses stets den Wert 1 annimmt. *Bild 1.22* zeigt die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes vom Durchmesserverhältnis D/d mit dem Krümmungswinkel θ als Parameter. Das Minimum des Widerstandsbeiwertes liegt bei einem Durchmesserverhältnis von etwa 4 bis 5. Oberhalb von $D/d \approx 8$ ändert sich der Widerstandsbeiwert geradlinig mit dem Durchmesserverhältnis. Schließlich ist in *Bild 1.23* ζ_k über dem Krümmungswinkel θ aufgetragen, wobei das Durchmesserverhältnis als Parameter auftritt.

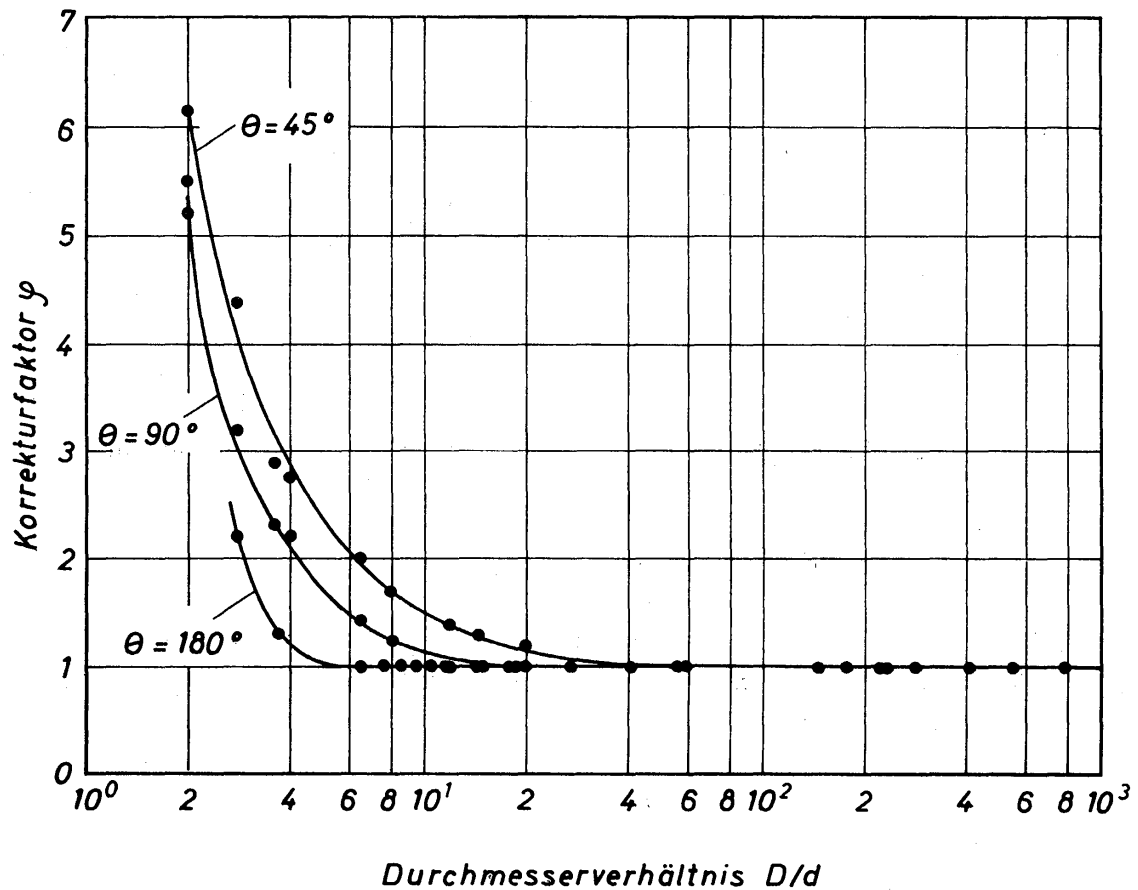


Bild 1.21. Abhängigkeit des Korrekturfaktors φ vom Durchmesser Verhältnis D/d für verschiedene Krümmungswinkel nach Angaben von Ito [1.29]

Zur Unterrichtung über weitere Einzelheiten der Krümmerströmung sei auf die Arbeit von NIPPERT [1.30] verwiesen, in der auch auf Krümmer mit anderen Querschnittsformen ausführlich eingegangen wird.

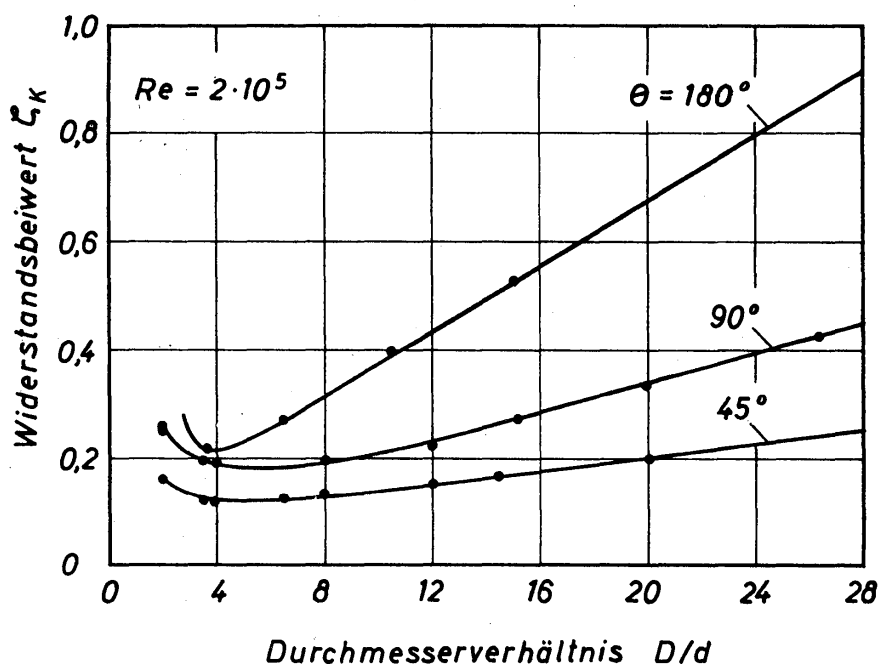


Bild 1.22. Abhängigkeit der Widerstandszahl für turbulent durchströmte Rohrkrümmer vom Durchmesser Verhältnis nach Angaben von Ito [1.29]

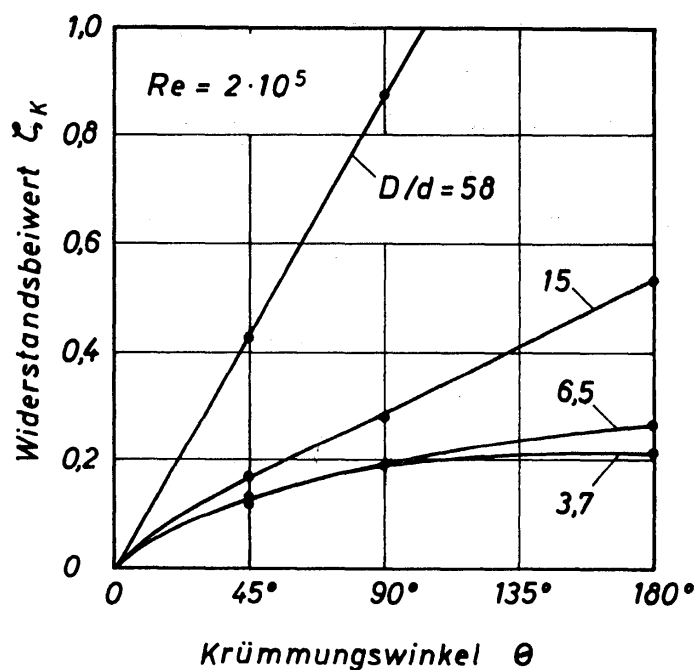


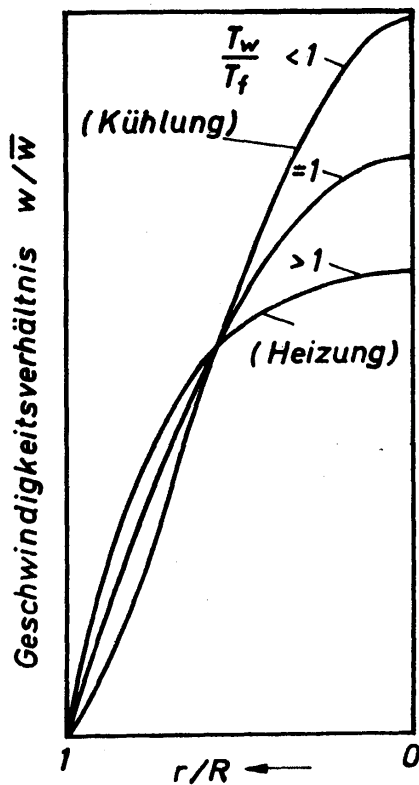
Bild 1.23. Abhängigkeit der Widerstandsbeiwert für turbulent durchströmte Rohrkrümmer vom Krümmungswinkel nach Angaben von Ito [1.29]

1.7 Isotherme und nicht isotherme Strömung

Von einer isothermen Strömung spricht man, wenn die Temperatur des strömenden Mediums zeitlich und örtlich konstant ist. Damit ergeben sich für jedes Fluidelement die gleichen Werte der physikalischen Stoffeigenschaften, soweit diese nur von der Temperatur abhängen. Alle in den vorausgegangenen Abschnitten angegebenen Strömungsgesetze gelten für die isotherme Strömung.

Eine Strömung ist nicht isotherm, wenn das Fluid Wärme aufnimmt oder abgibt. In diesen Fällen ändert sich die Temperatur in und quer zur Strömungsrichtung. Die stärkste örtliche Temperaturänderung tritt dabei quer zur Strömungsrichtung auf, und zwar im wesentlichen innerhalb einer dünnen Temperaturschicht, die in unmittelbarer Nähe der wärmeaustauschenden Fläche liegt. Innerhalb dieser Schicht ändern sich dann auch die Stoffwerte der Flüssigkeit besonders stark. Am stärksten ändert sich mit der Temperatur die Viskosität. Bei Flüssigkeiten wird sie mit der Temperatur im allgemeinen kleiner, bei Gasen indes größer. Die Viskosität der Flüssigkeit ändert sich in sehr viel stärkerem Maße mit der Temperatur als die der Gase. Ganz allgemein läßt sich sagen, daß die Temperaturabhängigkeit um so ausgeprägter ist, je größer die Viskosität der strömenden Medien bei einer bestimmten Temperatur ist. Diese Aussage gilt auch für die Wärmeleitfähigkeit, die im allgemeinen jedoch nur in geringerem Maße von der Temperatur abhängt.

Um einen Eindruck von dem Einfluß der Temperaturabhängigkeit der Viskosität auf die örtliche Geschwindigkeit zu erhalten, sind in *Bild 1.24* die Geschwindigkeitsprofile einer Flüssigkeitsströmung für verschiedene Temperaturverhältnisse T_w/T_f qualitativ dargestellt. Hierbei bedeuten T_w die absolute Temperatur der Rohrwand und T_f die über den Rohrquerschnitt gemittelte absolute Temperatur der Flüssigkeit. Für $T_w/T_f = 1$ liegt eine isotherme Strömung vor; dementsprechend errechnet man die Geschwindigkeitsverteilung mittels der Gleichungen



(1.7) und (1.10). Wird die Flüssigkeit beheizt, so ist $T_w/T_f > 1$ und die Viskosität der Flüssigkeit in Wandnähe kleiner als im Strömungskern. Das Geschwindigkeitsprofil wird fülliger, und an der Rohrwand ergibt sich gemäß Gl. (1.7) ein größerer Geschwindigkeitsgradient als bei isothermer Strömung. Wird im umgekehrten Falle die Flüssigkeit gekühlt, so ist $T_w/T_f < 1$, das Geschwindigkeitsprofil wird spitzer und der Geschwindigkeitsgradient an der Wand kleiner.

Bild 1.24. Einfluß von Heizung und Kühlung auf die Geschwindigkeitsverteilung einer Flüssigkeit

Die stärksten Deformationen des Geschwindigkeitsprofils ergeben sich natürlich bei der nicht isothermen Strömung (Heizung oder Kühlung) von sehr viskosen Flüssigkeiten, beispielsweise Ölen. Werden Gase beheizt oder gekühlt, dann wird für Beheizung ($T_w/T_f > 1$) das Geschwindigkeitsprofil spitzer und bei Kühlung ($T_w/T_f < 1$) fülliger. Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität wirkt sich also auf das Geschwindigkeitsprofil der Gasströmung in gerade umgekehrter Weise aus wie bei Flüssigkeiten. Darüber hinaus ist die Deformation des Geschwindigkeitsprofils bei Gasströmungen aber stets sehr viel geringer als bei Flüssigkeitsströmungen.

Wie bereits erwähnt, wird bei Beheizung oder Kühlung von Flüssigkeiten der Geschwindigkeitsgradient an der Wand entweder größer oder kleiner als bei isothermer Strömung. Das hat eine entsprechende Vergrößerung oder Verkleinerung des Reibungsverlustes, also des Druckabfalles, zur Folge, was in der Größe der Widerstandszahl zum Ausdruck kommen muß. Eine theoretische Berechnung der Widerstandsgesetze, unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit aller Stoffwerte, ist mit außerordentlich großen Schwierigkeiten verbunden und wurde bislang nur für einige wenige Einzelfälle durchgeführt. Erwähnt seien die Arbeiten von HAUSENBLAS [1.31], KAYS und LONDON [1.32] und DEISSLER [1.33]. Im allgemeinen ist man jedoch darauf angewiesen, mittels empirischer Korrekturen die Widerstandszahlen bei nicht isothermer Strömung aus den bekannten Werten für die isotherme Strömung zu berechnen. Dabei ergeben sich für Flüssigkeiten und Gase unterschiedliche Korrekturen. Im folgenden werden daher zunächst die Widerstandsgesetze für die nicht isotherme Strömung von Flüssigkeiten und anschließend die von Gasen erörtert.

Nach Angaben von McADAMS [1.34] besteht zwischen der Widerstandszahl ψ der isothermen Strömung und der Widerstandszahl ψ_n der nicht isothermen Strömung folgender Zusammenhang:

$$\psi = \psi_n \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14}. \quad (1.80)$$

Hierin bedeuten η_w und η die Viskositäten bei Wandtemperatur und bei mittlerer Flüssigkeitstemperatur ϑ_f . Alle anderen im Widerstandsgesetz enthaltenen Stoffwerte sind auf die mittlere Flüssigkeitstemperatur ϑ_f zu beziehen, die folgendermaßen definiert ist:

$$\vartheta_f = \frac{1}{2} (\vartheta_e + \vartheta_a). \quad (1.81)$$

Mit ϑ_e und ϑ_a werden die Mischtemperaturen des strömenden Mediums im Ein- und Austrittsquerschnitt des Kanals bezeichnet. Als Beispiel sei das Blasius'sche Widerstandsgesetz für die nicht isotherme Strömung von Flüssigkeiten angegeben. Es lautet:

$$\psi = \psi_n \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} = \frac{0,3164}{Re^{1/4}}. \quad (1.82)$$

Das auf der linken Seite stehende Produkt läßt sich, was durch Gl.(1.80) bereits ausgesagt wurde, auch unmittelbar als Ordinatenwert der mitgeteilten Widerstandsdiagramme entnehmen. Den Druckverlust bei nicht isothermer Strömung errechnet man dann unter Verwendung von Gl.(1.34) gemäß der Beziehung

$$\left(\frac{\Delta P}{L} \right)_n = \psi_n \frac{\rho \bar{w}^2}{2} \frac{L}{d} = \frac{\psi}{(\eta/\eta_w)^{0,14}} \frac{\rho \bar{w}^2}{2} \frac{L}{d}. \quad (1.83)$$

Diese Berechnungsgleichung gilt sowohl bei laminarer als auch bei turbulenter Strömung von Flüssigkeiten. Die Widerstandszahl ψ ist die für isotherme Strömung und kann bekannten Diagrammen entnommen werden. Da bei Beheizung von Flüssigkeiten $\eta_w < \eta$ ist, ergibt sich ein kleinerer Druckverlust als bei isothermer Strömung. Wird die Flüssigkeit gekühlt, dann wird der Druckverlust wegen $\eta_w > \eta$ auch größer als bei isothermer Strömung.

Für die nicht isotherme turbulente Strömung von Gasen wurde von HUMBLE, LOWDERMILK und DESMON [1.35] das folgende Widerstandsgesetz aufgestellt:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi} T_g/T_f} = 2,0 \log \left[Re \frac{\eta}{\eta_g} \sqrt{\psi} \right] - 0,8. \quad (1.84)$$

Hierin bedeuten η und η_g die Viskositäten bei mittlerer Flüssigkeitstemperatur ϑ_f und mittlerer Grenzschichttemperatur ϑ_g , die folgendermaßen definiert ist:

$$\vartheta_g = \frac{1}{2} (\vartheta_w + \vartheta_f). \quad (1.85)$$

Mit ϑ_w wird dabei die mittlere Wandtemperatur bezeichnet. In Gl.(1.84) sind ferner $T_g = \vartheta_g + 273,15$ und $T_f = \vartheta_f + 273,15$ die absoluten, in Grad Kelvin

angegebenen Werte der mittleren Grenzschicht- und der mittleren Flüssigkeitstemperatur. Die in der Widerstandszahl und der Reynoldszahl enthaltenen Stoffwerte sind auf die mittlere Flüssigkeitstemperatur ϑ_f zu beziehen.

Im allgemeinen ist der Strömungswiderstand bei nicht isothermer Gasströmung nur wenig verschieden von dem der isothermen Gasströmung. Es reicht daher in den meisten praktischen Fällen aus, wenn man den Druckverlust aus den Widerstandsgesetzen für die isotherme Strömung berechnet. Merkliche Abweichungen können sich nur bei sehr großen Unterschieden von T_w und T_f ergeben, etwa wenn $T_w/T_f > 2$ wird.

Bei der nicht isothermen Strömung ändern sich auf Grund der deformierten Geschwindigkeitsprofile nicht nur die Widerstandsgesetze, sondern auch der Wert der kritischen Reynoldszahl. Für den praktisch tätigen Ingenieur wird dieser Sachverhalt besonders wichtig, wenn die Wärmeübertragung dazu führt, daß sich der erzwungenen Strömung eine freie überlagert. Dann muß man im allgemeinen damit rechnen, daß der für die isotherme Strömung gültige Wert von $Re = 2320$ sehr stark herabgesetzt wird. Hiermit befaßt sich eine Arbeit von SCHEELE und GREEN [1.36]. Allgemein verbindliche Aussagen über die Änderung der kritischen Reynoldszahl lassen sich aber noch nicht machen.

1.8 Ausgebildete und nicht ausgebildete Strömung

Beim Eintritt eines Fluids in einen Kanal ergibt sich unter bestimmten Bedingungen eine über den ganzen Strömungsquerschnitt konstante Geschwindigkeitsverteilung. Mit zunehmender Lauflänge wird die in Wandnähe befindliche Flüssigkeit durch die Wandreibung verzögert und die in Achsennähe befindliche Flüssigkeit beschleunigt. Dabei wird das Geschwindigkeitsprofil umgeformt und nähert sich immer mehr dem Profil der ausgebildeten laminaren oder turbulenten Strömung. Die Strömungsgrenzschicht an der Wand wächst und erreicht im Grenzfall der ausgebildeten Strömung die Kanalachse. Die ausgebildete Strömung ist dann erreicht, wenn das Geschwindigkeitsprofil keinerlei Änderung mehr erfährt. Hierzu ist theoretisch eine unendlich lange Einlaufstrecke erforderlich. Praktisch spricht man aber bereits von einer ausgebildeten Strömung, wenn sich die

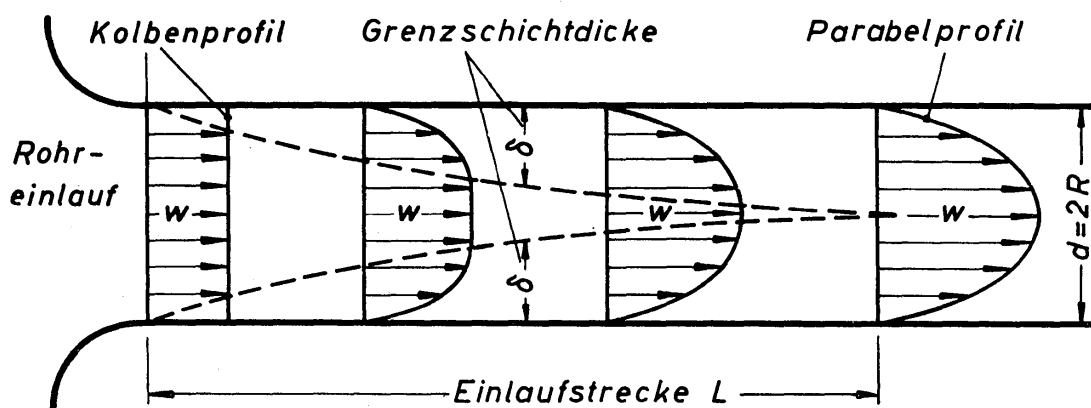


Bild 1.25. Zur Erläuterung der Einlaufstrecke

Geschwindigkeit in Kanalmitte bis auf 1 oder 2% dem endgültigen Wert angenähert hat. Die hierzu erforderliche Einlaufstrecke wird gemäß *Bild 1.25* als Einlaufstrecke L bezeichnet.

Nach neueren Rechnungen von STEPHAN [1.37] beträgt die zur Ausbildung des Geschwindigkeitsprofils bei laminarer Rohrströmung erforderliche hydrodynamische Einlaufstrecke in dimensionsloser Form:

$$\left(\frac{L}{d}\right)_h = 0,0575 Re \quad (\text{für } Re < 2320). \quad (1.86)$$

Mit d wird der Rohrdurchmesser bezeichnet. Die Einlaufstrecke wird bei laminarer Strömung mit zunehmender Reynoldszahl Re größer. Diese Beziehung ist an die Bedingung geknüpft, daß sich die Geschwindigkeit in Rohrmitte nur noch um 1% vom endgültigen Wert unterscheidet. Unter der gleichen Bedingung ergibt sich der Zahlenwert nach Rechnungen von SCHILLER [1.38] zu 0,02875, von BOGUE [1.39] zu 0,02875, von LANGHAAR [1.40] zu 0,0575, von TOMITA [1.41] zu 0,0505 und von COLLINS und SCHOWALTER [1.42] zu 0,061. Aus experimentellen Untersuchungen von NIKURADSE [1.15] folgt der Wert zu 0,0625.

Die von STEPHAN und anderen Forschern durchgeführten Rechnungen gehen von der Annahme aus, daß die Geschwindigkeit im Eintrittsquerschnitt einen konstanten Wert hat. Bei anderen Formen des Geschwindigkeitsprofils muß man andere Werte für die Einlaufstrecke erwarten. Darüber hinaus werden in allen theoretischen Untersuchungen Annahmen getroffen, die das Problem stark vereinfachen. Somit darf man also den theoretisch ermittelten Werten für die Einlaufstrecke kein sehr großes Vertrauen entgegenbringen. Ähnlich einschränkende Bedeutung haben aber auch experimentell bestimmte Werte. Auf die hiermit zusammenhängenden Fragen wird in den Arbeiten von DEALY [1.43] sowie TAUNER und MANTON [1.44] eingegangen, ohne daß jedoch zuverlässige Angaben gemacht werden.

Bei turbulenter Strömung wird die Einlaufstrecke unabhängig von Re . Nach Messungen von NIKURADSE [1.6 und 1.15] kann man für die Einlaufstrecke bei glatten Rohren

$$\left(\frac{L}{d}\right)_h = 50 \quad (\text{für } Re > 2320) \quad (1.87)$$

und bei rauhen Rohren

$$\left(\frac{L}{d}\right)_h \approx 40 \quad (\text{für } Re > 2320) \quad (1.88)$$

setzen. Bei sehr großen Rauigkeiten wird die Einlaufstrecke noch kürzer, und bei Rohren mit Wirbeleinbauten tritt praktisch keine Einlaufstrecke mehr auf.

Die Umformung des Geschwindigkeitsprofils innerhalb der Einlaufstrecke erfordert zusätzliche Energie. Das führt, im Vergleich zur ausgebildeten Strömung, zu einem erhöhten Druckverlust. Die Berechnung des Druckverlustes bei laminarer Strömung im Einlauf von Rohren und ebenen Spalten wurde von zahlreichen

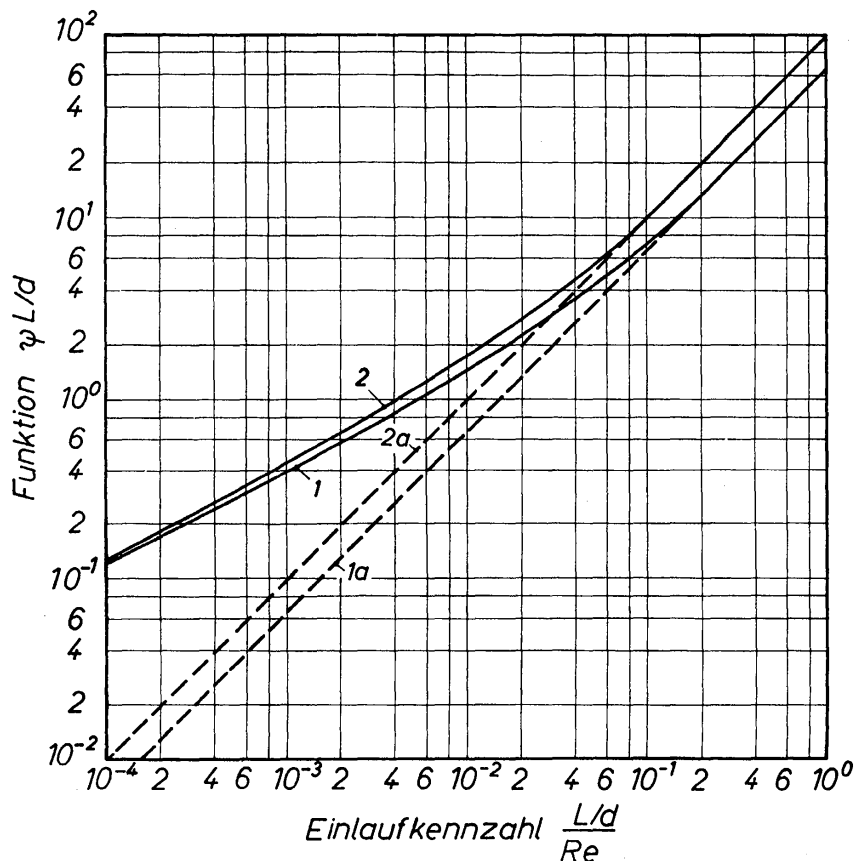


Bild 1.26. Widerstandsgesetze für den Einlauf bei laminarer Strömung im Rohr (Kurve 1) und im ebenen Kanal (Kurve 2)

Forscher durchgeführt. SCHOLZ [1.45] verglich die Ergebnisse und teilte für die auftretenden Bereiche der Einlaufstrecke einfache Berechnungsgleichungen mit. Die neuesten Berechnungen stammen von STEPHAN [1.37]. In *Bild 1.26* ist die Größe $\psi L/d$ über der Einlaufkennzahl $L/(d Re)$ für die laminare Strömung in Rohren und ebenen Spalten dargestellt. Kurve 1 gilt für die nicht ausgebildete und Kurve 1a für die ausgebildete Rohrströmung. Bei großen Werten von $L/(d Re)$ stimmen beide Kurven überein. Entsprechend gilt Kurve 2 für die nicht ausgebildete und Kurve 2a für die ausgebildete Spaltströmung. In Richtung zu sehr kleinen Werten der Einlaufkennzahl nähern sich die Kurven 1 und 2, so daß sich schließlich für Rohre und Spalte eine einzige Kurve ergibt. Den in der Einlaufstrecke L auftretenden Druckverlust berechnet man mittels folgender Beziehung:

$$\Delta P_e = \psi \frac{L}{d} \rho \bar{w}^2 / 2. \quad (1.89)$$

Die hierin auftretende Größe $\psi L/d$ ist für die laminare Strömung aus *Bild 1.26* bei dem jeweiligen Wert $L/d Re$ zu entnehmen.

Bei turbulenter Strömung in der Einlaufstrecke entnimmt man die Größe $\psi L/d$ *Bild 1.27* von SCHOLZ [1.45]. Kurve 1 gilt für die nicht ausgebildete und Kurve 1a für die ausgebildete Strömung. Kurve 1 kann auch zur näherungsweisen Berechnung des Druckverlustes in der Einlaufstrecke von Kanälen mit nicht kreisförmigen Querschnitten verwendet werden.

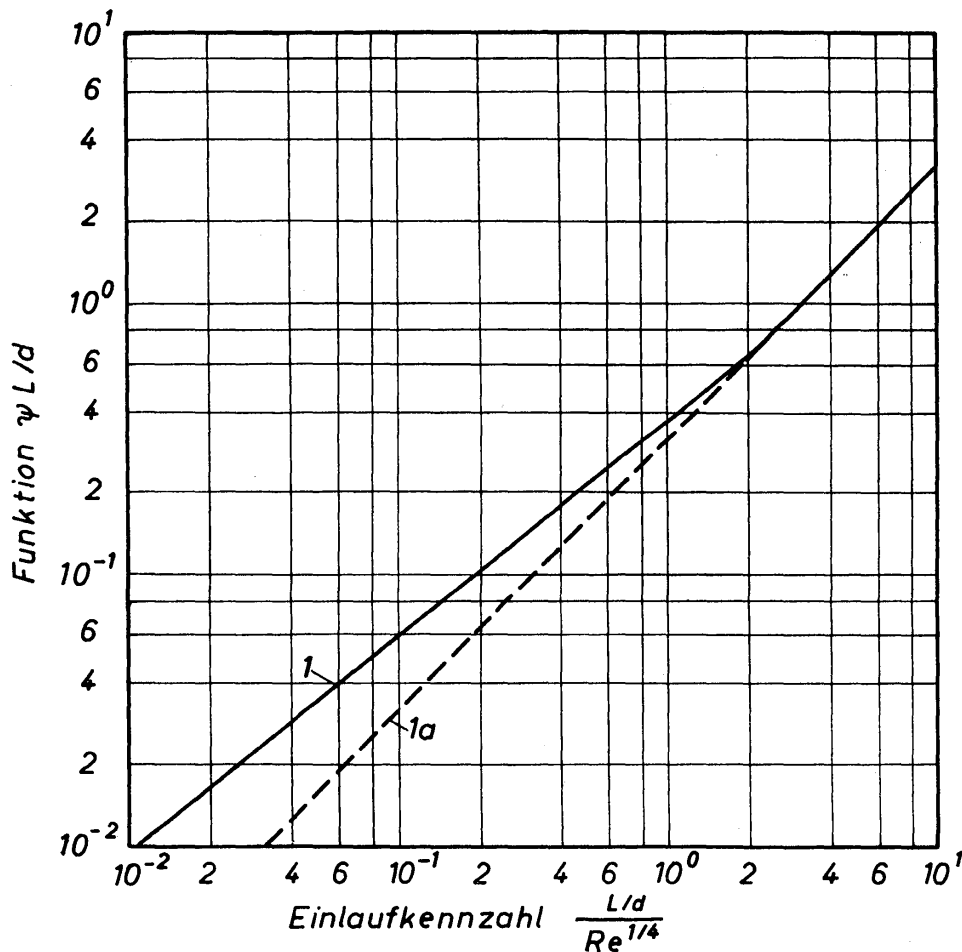


Bild 1.27. Widerstandsgesetz für den Einlauf bei turbulenter Strömung im Rohr

1.9 Strömung stark verdünnter Gase durch Rohre

Von einem stark verdünnten Gas spricht man, wenn das Gas unter einem sehr geringen Druck steht. In diesem Zustand läßt sich ein Gas nicht mehr als Kontinuum auffassen. Zur Beschreibung seines Zustandes müssen die Eigenschaften seiner kleinsten Einheiten, der Moleküle, in Betracht gezogen werden. Jedes Molekül ist das Zentrum eines Kraftfeldes, in dem bei kleinem Abstand die abstoßenden und bei großem Abstand die anziehenden Kräfte überwiegen.

Die Gasmoleküle führen ständig die « Brownsche Molekularbewegung » aus. Jedes Gasmolekül bewegt sich – wenn man die Zusammenstöße außer acht läßt – unabhängig von allen anderen, da sein Durchmesser klein im Vergleich zum Abstand des Nachbarmoleküls ist und ebenfalls klein im Vergleich zu der zwischen zwei Zusammenstößen zurückgelegten Wegstrecke.

Um die Strömung stark verdünnter Gase behandeln zu können, müssen einige Grundgesetze der Molekularbewegung vorausgeschickt werden.

1.91 Grundgesetze der Molekularbewegung

Die Grundgesetze der Molekularbewegung werden von GRASSMANN [1.46] mittels der kinetischen Gastheorie hergeleitet. An dieser Stelle sollen ohne Herleitung

nur die zum Verständnis der Strömung stark verdünnter Gase erforderlichen Größen, nämlich die mittlere Molekülgeschwindigkeit und die mittlere freie Weglänge, angegeben werden.

Für die mittlere Molekulargeschwindigkeit \bar{c} folgt aus der kinetischen Gastheorie unter Berücksichtigung der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung die Beziehung

$$\bar{c} = 0,92 \sqrt{3 RT/\mu} = 0,92 \sqrt{3 RT}. \quad (1.90)$$

Hierin bedeuten R universelle und $R = R/\mu$ individuelle Gaskonstante, T absolute Temperatur und μ Molmasse (früher Molekulargewicht genannt). In Luft mit $R = 0,287 \text{ kJ/kg}^\circ\text{K}$ und $T = 300^\circ\text{K}$ bewegen sich die Moleküle mit einer mittleren Geschwindigkeit von $\bar{c} = 467 \text{ m/s}$.

Die zwischen zwei Zusammenstößen zurückgelegte mittlere freie Weglänge Λ berechnet man nach der Formel

$$\Lambda = \frac{\mu RT}{\pi \sqrt{2} N_L d_M^2 P}. \quad (1.91)$$

Es bedeuten P Druck, d_M Moleküldurchmesser und $N_L = 6,0236 \cdot 10^{26} \text{ (1/kmol)}$ die Loschmidtsche Zahl, die angibt, wieviel Moleküle in der Masse 1 kmol enthalten sind. Mit der universellen Gaskonstanten

$$R = \mu R = 8,315 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}^\circ\text{K}} = 8315 \frac{\text{Nm}}{\text{kmol}^\circ\text{K}} = 8315 \frac{\text{kg m}^2}{\text{kmol}^\circ\text{K s}^2}$$

ergibt sich

$$\Lambda = \frac{RT}{\pi \sqrt{2} N_L d_M^2 P}. \quad (1.92)$$

Führt man ferner die Boltzmann-Konstante ein,

$$k = \frac{R}{N_L} = 1,3804 \cdot 10^{-26} \frac{\text{kJ}}{^\circ\text{K}} = 1,3804 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Nm}}{^\circ\text{K}} = 1,3804 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{ } ^\circ\text{K}},$$

so erhält man schließlich:

$$\Lambda = \frac{k T}{\pi \sqrt{2} d_M^2 P}. \quad (1.93)$$

Ist der Moleküldurchmesser d_M eines Gases bekannt, so läßt sich mittels dieser Gleichung die mittlere freie Weglänge leicht bestimmen. Angaben über die freie Weglänge findet man im LANDOLT-BÖRNSTEIN [1.47]. Für Luft ist $d_M = 3,62 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ oder $0,000362 \text{ } \mu\text{m}$. Berechnet man die mittlere freie Weglänge für $T = 300^\circ\text{K}$, so ergeben sich bei veränderlichem Druck P die in folgender Tabelle zusammengestellten Werte:

Tabelle 1.3

Druck P $\frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m/s^2}$	bar	Torr	Freie mittlere Weglänge m	N/V (1/m ³)	$\lambda/d = Kn$ (für $d = 0,1$ m)
10^7	10^2	$7,5 \cdot 10^4$	$7,11 \cdot 10^{-10}$	$2,41 \cdot 10^{27}$	$7,11 \cdot 10^{-9}$
10^6	10^1	$7,5 \cdot 10^3$	$7,11 \cdot 10^{-9}$	$2,41 \cdot 10^{26}$	$7,11 \cdot 10^{-8}$
10^5	10^0	$7,5 \cdot 10^2$	$7,11 \cdot 10^{-8}$	$2,41 \cdot 10^{25}$	$7,11 \cdot 10^{-7}$
10^4	10^{-1}	$7,5 \cdot 10^1$	$7,11 \cdot 10^{-7}$	$2,41 \cdot 10^{24}$	$7,11 \cdot 10^{-6}$
10^3	10^{-2}	$7,5 \cdot 10^0$	$7,11 \cdot 10^{-6}$	$2,41 \cdot 10^{23}$	$7,11 \cdot 10^{-5}$
10^2	10^{-3}	$7,5 \cdot 10^{-1}$	$7,11 \cdot 10^{-5}$	$2,41 \cdot 10^{22}$	$7,11 \cdot 10^{-4}$
10^1	10^{-4}	$7,5 \cdot 10^{-2}$	$7,11 \cdot 10^{-4}$	$2,41 \cdot 10^{21}$	$7,11 \cdot 10^{-3}$
10^0	10^{-5}	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$7,11 \cdot 10^{-3}$	$2,41 \cdot 10^{20}$	$7,11 \cdot 10^{-2}$
10^{-1}	10^{-6}	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$7,11 \cdot 10^{-2}$	$2,41 \cdot 10^{19}$	$7,11 \cdot 10^{-1}$
10^{-2}	10^{-7}	$7,5 \cdot 10^{-5}$	$7,11 \cdot 10^{-1}$	$2,41 \cdot 10^{18}$	$7,11 \cdot 10^0$
10^{-3}	10^{-8}	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$7,11 \cdot 10^0$	$2,41 \cdot 10^{17}$	$7,11 \cdot 10^1$
10^{-4}	10^{-9}	$7,5 \cdot 10^{-7}$	$7,11 \cdot 10^1$	$2,41 \cdot 10^{16}$	$7,11 \cdot 10^2$
10^{-5}	10^{-10}	$7,5 \cdot 10^{-8}$	$7,11 \cdot 10^2$	$2,41 \cdot 10^{15}$	$7,11 \cdot 10^3$

Drücke in der Größenordnung von $10^{-1} \text{ N/m}^2 = 10^{-6} \text{ bar} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ Torr}$ werden in der technischen Praxis bereits vielfach angewendet, z. B. bei der Gefrier-trocknung von Lebensmitteln und Pharmazeutika oder auch bei der Molekular-destillation temperaturempfindlicher Güter. Bei dem genannten Druck haben die Luftmoleküle bereits eine freie Weglänge von $7,11 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 7,11 \text{ cm}$. Das heißt also, daß bei diesem Druck die mittlere freie Weglänge bereits in der Größen-ordnung z. B. eines Rohrdurchmessers oder einer anderen Abmessung eines Ap- parates liegen kann.

Die großen Werte für die mittlere freie Weglänge dürfen nicht zu der Vorstellung verleiten, daß in einem begrenzten Volumen nur noch sehr wenige Moleküle vorhanden sind. Für die im Volumen V enthaltene Zahl N der Moleküle soll eine Gleichung hergeleitet werden. Ausgehend von der Gasgleichung

$$Pv = RT, \quad (1.94)$$

folgt mit $V = mv = n\mu$ und $\mu = R/R$ zunächst

$$PV = nRT, \quad (1.95)$$

wobei n die Molmenge bedeutet; ferner sind m die Masse und μ die Molmasse. Die Molmenge n läßt sich als Verhältnis zweier Molekülzahlen ausdrücken:

$$n = \frac{N}{N_L}. \quad (1.96)$$

Mit N wird die Zahl der Moleküle in n kmol und mit N_L die Zahl der Moleküle in 1 kmol bezeichnet. Damit ergibt sich dann für die Zahl N der Moleküle im Volumen V die Beziehung:

$$\frac{N}{V} = \frac{N_L}{R} \frac{P}{T}. \quad (1.97)$$

Führt man hierin $R = 8315 \text{ Nm/kmol}^\circ\text{K}$ und $N_L = 6,0236 \cdot 10^{26} \text{ 1/kmol}$ ein, so erhält man die Zahlenwertgleichung

$$\frac{N}{V} = 7,24 \cdot 10^{22} \frac{P}{T} \left[\frac{1}{\text{m}^3} \right], \quad (1.98)$$

in die P in N/m^2 und T in $^\circ\text{K}$ einzusetzen sind. In Tabelle 1.3 ist für die angenommenen Werte des Druckes P die Größe N/V angegeben.

Das Verhältnis der mittleren freien Weglänge Λ zur charakteristischen Abmessung eines umströmten oder durchströmten Körpers, für die der Durchmesser d gewählt werden soll, nennt man Knudsenzahl:

$$Kn = \frac{\Lambda}{d}. \quad (1.99)$$

Betrachtet man die Abmessungen von Apparaten und Rohrleitungen, wie sie im Bereich der Gefriertrocknung oder Destillation auftreten, dann ist die Knudsenzahl bereits wesentlich größer als 1. Bei sehr kleinen Werten der Knudsenzahl ist die Strömung als Kontinuumsströmung, bei sehr großen Werten der Knudsenzahl hingegen als Molekularströmung zu betrachten. In der Tabelle 1.3 sind die Werte für die Knudsenzahl ebenfalls angegeben.

Neben der Knudsenzahl ist bei der Molekularströmung aber auch die Reynoldszahl noch von Bedeutung, deren Definition nochmals wiederholt sei:

$$Re \equiv \frac{\bar{w} d \rho}{\eta}. \quad (1.100)$$

Hierin ist \bar{w} die aus dem Volumstrom berechnete mittlere Gasgeschwindigkeit, d der Rohrdurchmesser, ρ die Dichte und η die dynamische Viskosität des Gases. Für letztere erhält man aus der kinetischen Gastheorie die Beziehung:

$$\eta = \frac{1}{2} \rho \bar{c} \Lambda. \quad (1.101)$$

Mit dieser Beziehung für η lautet die Reynoldszahl

$$Re = 2 \frac{\bar{w}}{\bar{c}} \frac{d}{\Lambda} = \frac{2}{Kn} \frac{\bar{w}}{\bar{c}}. \quad (1.102)$$

Die Reynoldszahl ist also eine Funktion der Knudsenzahl und des Geschwindigkeitsverhältnisses \bar{w}/\bar{c} , welches in den meisten technischen Fällen nicht sehr groß ist. Man darf daher erwarten, daß sich für die Reynoldszahl verhältnismäßig kleine Werte ergeben und die Strömung allgemein laminar ist. Im folgenden wird die laminare Strömung stark verdünnter Gase durch Rohre behandelt.

1.92 Geschwindigkeitsverteilung

Betrachtet man die Bewegung der Moleküle bei großen Werten der Knudsenzahl im Rohr, so ergeben sich die in *Bild 1.28* schematisch dargestellten Bahnkurven von jeweils zwei Molekülen. In *Bild 1.28a* reflektieren die Moleküle an der Rohrwand spiegelnd (wie ein Lichtstrahl an einer glatten Oberfläche), in *Bild 1.28b* hingegen diffus. Je größer der Anteil der diffus reflektierten Moleküle an der Gesamtzahl der im Rohr befindlichen Moleküle ist, desto weniger Moleküle durchfliegen das Rohr.

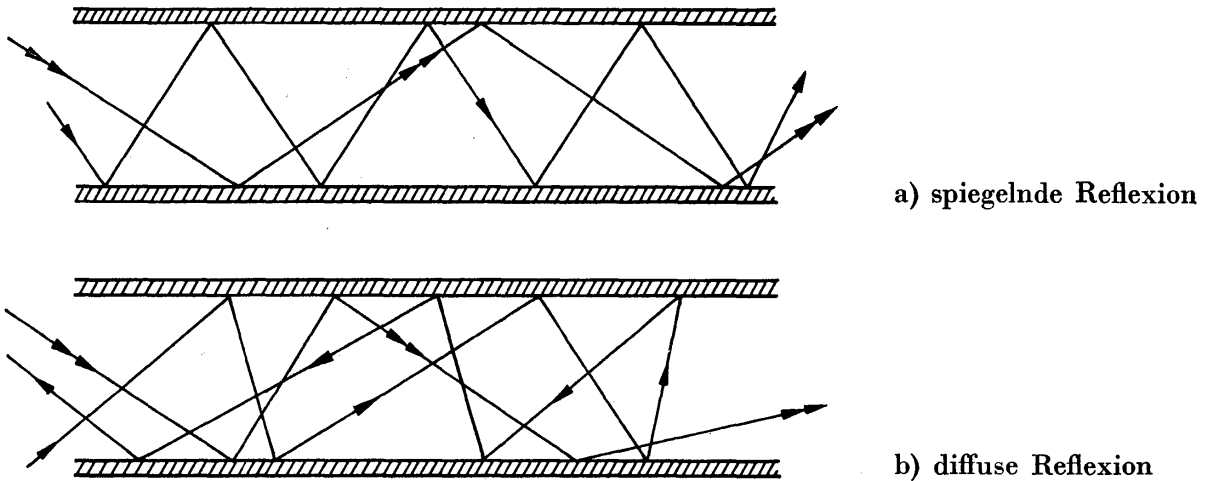


Bild 1.28. Bewegung von Molekülen durch ein Rohr bei spiegelnder und diffuser Reflexion an der Wand

Beide Bilder vermitteln den Eindruck, daß die von der Kontinuumstheorie her gewohnte Haftbedingung für das strömende Medium nicht mehr erfüllt sein kann. Ersetzt man die Haftbedingung jedoch durch eine Gleitbedingung, was KUNDT und WARBURG [1.48] und WARBURG [1.49] erstmalig taten, so erweist es sich als möglich, die als Gleitströmung bezeichnete Strömungsform in der gleichen Weise zu behandeln wie die Kontinuumsströmung. Bildet man das Kräftegleichgewicht an einem zylinderförmigen Element, so erhält man wieder wie bei der Kontinuumsströmung

$$\tau 2 \pi r L = \Delta P \pi r^2. \tag{1.103}$$

Für die Schubspannung τ gilt der von der Kontinuumsströmung her bekannte Ansatz

$$\tau = -\eta \frac{dw}{dr}. \tag{1.104}$$

Nach Einsetzen von τ in Gl. (1.103) und Umformen erhält man

$$-\eta \int_w^{w_0} dw = \frac{\Delta P}{2L} \int_r^R r dr. \tag{1.105}$$

Hierin bedeutet die Integrationsgrenze w_0 die an der Rohrwand bei $r = R$ angenommene Gleitgeschwindigkeit. Die Integration führt zur örtlichen Geschwindigkeit

$$w = \frac{\Delta P d^2}{16 L \eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + w_0. \quad (1.106)$$

In dieser Beziehung stellt der erste Ausdruck auf der rechten Seite die bereits früher für die Kontinuumsströmung hergeleitete Geschwindigkeit nach Gl.(1.7) dar. Bei der Gleitströmung ist die örtliche Geschwindigkeit um den Betrag der Gleitgeschwindigkeit w_0 größer als bei der Kontinuumsströmung.

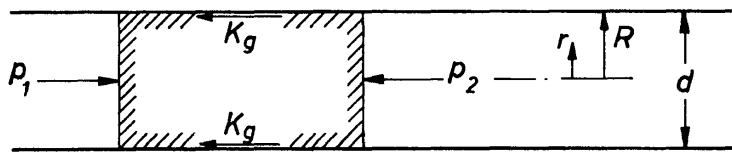


Bild 1.29
Kräftegleichgewicht bei der Gleitströmung

Die nächste Aufgabe besteht darin, die Gleitgeschwindigkeit w_0 zu berechnen. Zu dem Zweck betrachtet man wieder das Gleichgewicht an einem Element von der Länge L , wie es in *Bild 1.29* dargestellt ist. Hierin bedeutet K_g die auf die Flächeneinheit bezogene Gleitkraft, für die ein sinnvoller Ansatz zu machen ist. Zum Verständnis dieses Ansatzes soll zuvor die Gleichung für die Wandschubspannung τ_w angegeben werden, die sich bei der Kontinuumsströmung ergibt. Aus den früher hergeleiteten Gleichungen folgt

$$\tau_w = 4 \frac{\eta}{R} \bar{w}. \quad (1.107)$$

Für die bei der Gleitströmung an der Wand auftretende Gleitspannung lautet der empirische Ansatz:

$$K_g = \frac{\eta}{A} w_0 \frac{1}{\left(\frac{2}{f} - 1 \right)}. \quad (1.108)$$

Bis auf den Ausdruck $(2/f) - 1$ ergibt sich in formaler Hinsicht völlige Übereinstimmung zwischen den beiden Gleichungen für die Kontinuums- und Gleitströmung. Lediglich der Rohrradius R wird durch die mittlere freie Weglänge A und die mittlere Geschwindigkeit w durch die Gleitgeschwindigkeit w_0 ersetzt. Der bereits genannte Ausdruck $(2/f) - 1$ geht auf molekularkinetische Betrachtungen von MAXWELL zurück, wobei f den Anteil der diffus reflektierenden Oberfläche des Rohres berücksichtigt. Der Anteil der spiegelnd reflektierenden Oberfläche ist $1 - f$. Aus dem Kräftegleichgewicht

$$K_g 2 \pi R L = \Delta P R^2 \pi. \quad (1.109)$$

folgt nach Einsetzen von Gl.(1.108) und Umformen für die Gleitgeschwindigkeit w_0 die Beziehung:

$$w_0 = \frac{\Delta P d^2}{4 L \eta} \frac{A}{d} \left(\frac{2}{f} - 1 \right). \quad (1.110)$$

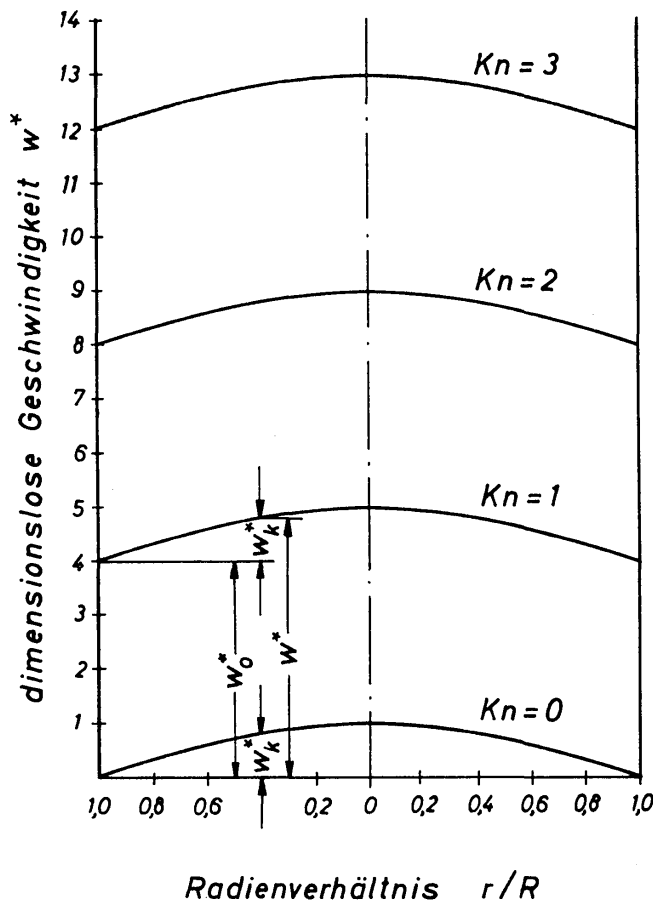
Die Gleitgeschwindigkeit ist der mittleren freien Weglänge Λ bzw. der Knudsenzahl $Kn \equiv \Lambda/d$ proportional. Die Gleitgeschwindigkeit hat folglich nur bei großen Knudsenzahlen bzw. niedrigem Gasdruck nennenswerte Bedeutung.

Nach Einsetzen von Gl.(1.110) in Gl.(1.106) folgt

$$w = \frac{\Delta P d^2}{16 L \eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 4 Kn \left(\frac{2}{f} - 1 \right) \right]. \quad (1.111)$$

Diese Beziehung für die örtliche Geschwindigkeit ist sowohl bei Kontinuums- als auch bei Gleitströmung gültig. Der Einfluß der Molekularbewegung auf die örtliche Geschwindigkeit wird durch den letzten Term in der eckigen Klammer zum Ausdruck gebracht. Der Einfluß verschwindet für sehr kleine Werte der Knudsenzahl. Für eine graphische Darstellung soll Gl.(1.111) wie folgt umgeformt werden:

$$w^* \equiv \frac{w 16 L \eta}{\Delta P d^2} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 4 Kn \left(\frac{2}{f} - 1 \right). \quad (1.112)$$



Die dimensionslose örtliche Geschwindigkeit w^* ist in Bild 1.30 für verschiedene Werte der Knudsenzahl über dem Radienverhältnis r/R dargestellt. Dabei wurde $f=1$ gesetzt, d.h. alle Moleküle werden diffus reflektiert. Für $Kn=0$ ergibt sich das charakteristische Parabelprofil der Kontinuumsströmung, wobei die örtliche dimensionslose Geschwindigkeit zu w_k^* wird. Für andere Werte der Knudsenzahl ändert sich allein w_0^* , während w_k^* unverändert bleibt.

Bild 1.30. Geschwindigkeitsverteilungen bei der Gleitströmung im Rohr für verschiedene Werte der Knudsenzahl Kn

Mit steigender Knudsenzahl wird jedoch schließlich w_k^* vernachlässigbar klein im Vergleich zu w_0^* .

Setzt man in Gl.(1.111) $r=0$, so erhält man die maximale Geschwindigkeit:

$$w_{\max} = \frac{\Delta P d^2}{16 L \eta} \left[1 + 4 Kn \left(\frac{2}{f} - 1 \right) \right]. \quad (1.113)$$

Mit zunehmenden Werten der Knudsenzahl nähert sich w_{\max} immer mehr dem Wert der Gleitgeschwindigkeit w_0 an.

Die Berechnung des Volumstroms

$$\dot{V} = \int_0^{d/2} 2\pi w r dr \quad (1.114)$$

erfolgt nach Einsetzen von w nach Gl.(1.111) durch Integration und Berücksichtigung der Grenzen und liefert die Gleichung:

$$\dot{V} = \frac{\Delta P \pi d^4}{128 L \eta} \left[1 + 8 Kn \left(\frac{2}{f} - 1 \right) \right]. \quad (1.115)$$

Diese Gleichung wurde erstmalig in ähnlicher Form von KNUDSEN [1.50 und 1.51] hergeleitet. Dividiert man den Volumstrom \dot{V} durch die Querschnittsfläche des Rohres, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{d^2 \pi/4} = \frac{\Delta P d^2}{32 L \eta} \left[1 + 8 Kn \left(\frac{2}{f} - 1 \right) \right]. \quad (1.116)$$

Die letzten beiden Gleichungen zeigen, daß Volumstrom bzw. mittlere Geschwindigkeit durch die Eigenbewegung der Moleküle vergrößert werden. Dieser Einfluß wirkt sich indes erst im Bereich großer Knudsenzahlen aus. Bezieht man die mittlere Geschwindigkeit auf die maximale, so ergibt sich

$$\frac{\bar{w}}{w_{\max}} = \frac{1}{2} \frac{1 + 8 Kn \left(\frac{2}{f} - 1 \right)}{1 + 4 Kn \left(\frac{2}{f} - 1 \right)}. \quad (1.117)$$

Das Verhältnis \bar{w}/w_{\max} nähert sich mit zunehmenden Werten für $Kn[(2/f) - 1]$ immer mehr dem Wert 1. Schließlich ist, wie aus *Bild 1.30* hervorgeht, w_k^* vernachlässigbar klein im Vergleich zu w_0^* .

Nach Gl.(1.116) besteht auch bei Gleitströmungen ein linearer Zusammenhang zwischen Druckabfall ΔP und mittlerer Geschwindigkeit \bar{w} , nämlich

$$\Delta P = \frac{32 \bar{w} L \eta}{d^2} \frac{1}{\left[1 + 8 Kn \left(\frac{2}{f} - 1 \right) \right]}. \quad (1.118)$$

Man sieht, daß sich ohne Berücksichtigung der Molekularbewegung stets der größere Druckverlust ergibt. Einen vollständigen Überblick bietet das Widerstandsgesetz.

1.93 Widerstandsgesetz

Die bereits gegebene Definitionsgleichung der Widerstandszahl ψ sei hier nochmals angeführt:

$$\psi \equiv \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2/2} \frac{d}{L}. \quad (1.119)$$

Setzt man hierin für ΔP Gl.(1.118) ein, so erhält man nach Umformung

$$\psi = \frac{64}{Re \left[1 + 8 Kn \left(\frac{2}{f} - 1 \right) \right]} \quad (1.120)$$

oder in anderer Schreibweise

$$\psi = \frac{1}{\frac{Re}{64} + \frac{Re Kn}{8} \left(\frac{2}{f} - 1 \right)}. \quad (1.121)$$

Dieses ist das allgemeingültige Widerstandsgesetz der laminaren Rohrströmung, da es sowohl die Kontinuums- als auch die Gleitströmung berücksichtigt. Ersetzt man in dem Produkt aus Reynolds- und Knudsenzahl

$$Re Kn = \frac{\bar{w} d \rho}{\eta} \frac{\Delta}{d} = \frac{\bar{w} \rho \Delta}{\eta} \quad (1.122)$$

die dynamische Viskosität η durch die aus der kinetischen Gastheorie abgeleitete Beziehung (1.101), so folgt

$$Re Kn = 2 \frac{\bar{w}}{\bar{c}}. \quad (1.123)$$

Die Größe $Re \cdot Kn$ ist also gleich dem doppelten Verhältnis aus mittlerer Geschwindigkeit \bar{w} und mittlerer Molekulargeschwindigkeit \bar{c} . Mit Gl.(1.123) erhält das Widerstandsgesetz die Form:

$$\psi = \frac{1}{\frac{Re}{64} + \frac{1}{4} \frac{\bar{w}}{\bar{c}} \left(\frac{2}{f} - 1 \right)}. \quad (1.124)$$

In *Bild 1.31* ist die Widerstandszahl ψ über der Reynoldszahl Re mit dem Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}/\bar{c} als Parameter in einem Diagramm mit logarithmisch geteilten Koordinaten für $f = 1$ dargestellt. Die Grenzkurve *a* gibt das Widerstandsgesetz $\psi = 64/Re$ bei einer Kontinuumsströmung wieder. Für eine bestimmte Reynoldszahl erreicht in diesem Fall die Widerstandszahl stets den größten Wert. Je größer das Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}/\bar{c} ist, desto stärker wirkt sich der Einfluß der Molekularbewegung auf die Größe der Widerstandszahl und des Druckverlustes aus.

Das Geschwindigkeitsverhältnis läßt sich auch durch die Machzahl ersetzen, die folgendermaßen definiert ist:

$$Ma \equiv \frac{\bar{w}}{w_s}. \quad (1.125)$$

Die Schallgeschwindigkeit w_s ist für Gase durch die Beziehung

$$w_s = \sqrt{\kappa RT/\mu} \quad (1.126)$$

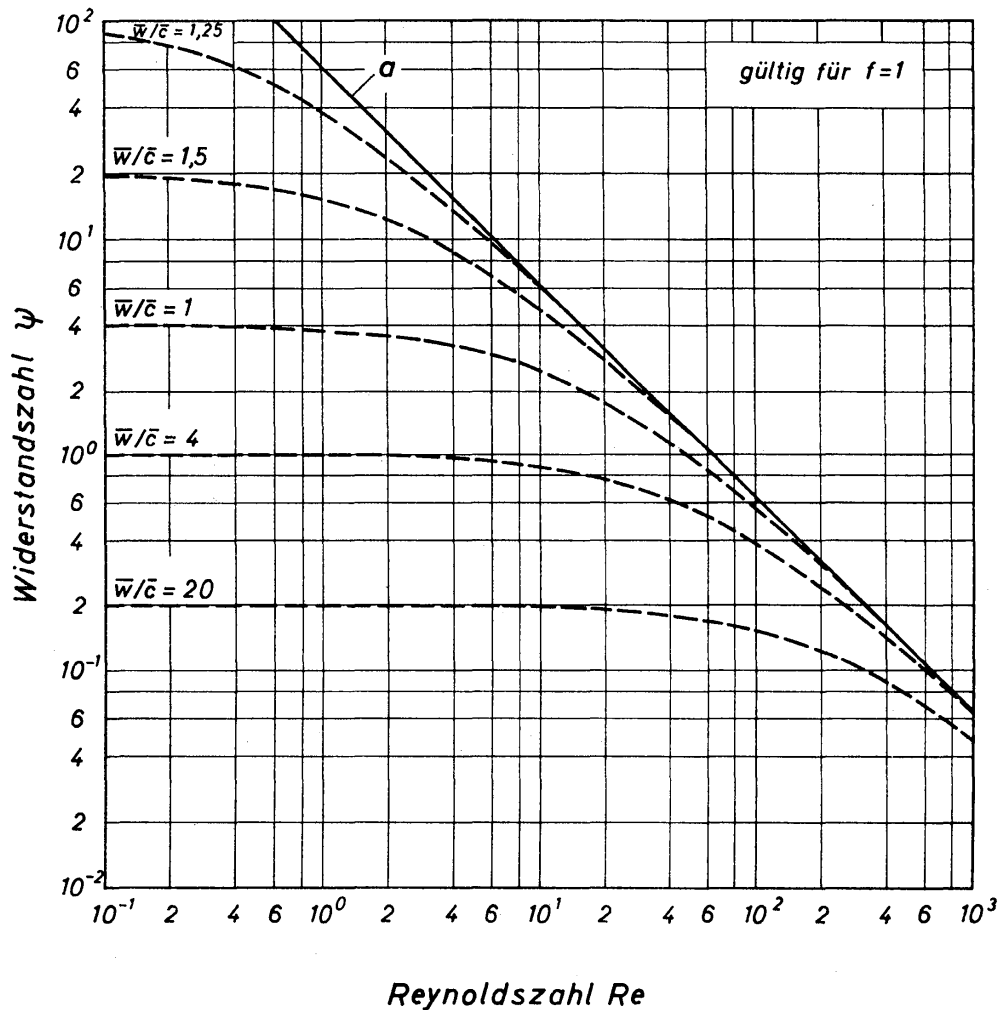


Bild 1.31. Widerstandszahl für Rohre bei Gleitströmung, abhängig von der Reynoldszahl Re und dem Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}/\bar{c}

gegeben, wobei κ den Adiabatenexponenten bedeutet. Mit den Gleichungen (1.126) und (1.90) wird zunächst das Verhältnis aus Schallgeschwindigkeit und Molekulargeschwindigkeit gebildet:

$$\frac{w_s}{\bar{c}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{1,593} \quad (1.127)$$

Hieraus erkennt man auch, daß die Schallgeschwindigkeit für zweiatomige Gase mit $\kappa = 1,4$ stets kleiner ist als die mittlere Molekulargeschwindigkeit. Ersetzt man in Gl. (1.127) w_s durch die Machzahl, so lautet das Geschwindigkeitsverhältnis

$$\frac{\bar{w}}{\bar{c}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{1,593} Ma. \quad (1.128)$$

Damit läßt sich das Widerstandsgesetz dann auch noch in der folgenden Schreibweise angeben:

$$\psi = \frac{1}{\frac{Re}{64} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\kappa}}{1,593} Ma \left(\frac{2}{f} - 1 \right)}. \quad (1.129)$$

In dieser Beziehung ist die Molekularbewegung nur dann von Bedeutung, wenn die Machzahl größere Werte annimmt. Je größer die Machzahl ist, desto stärker wird die Widerstandszahl und ebenso der Druckverlust erniedrigt. Die Erniedrigung des Druckverlustes ist darauf zurückzuführen, daß bei der Gleitströmung die innere Reibung, bedingt durch Zusammenstöße der Moleküle, weitgehend aufgehoben ist und nur eine sogenannte äußere Reibung auftritt, hervorgerufen durch Stöße der Moleküle auf die Rohrwand.

Um zu einem möglichst einfachen Vergleich zwischen dem theoretischen Widerstandsgesetz und Meßwerten zu kommen, wird von Gl.(1.124) ausgegangen. Durch Umformung erhält man hieraus:

$$\psi \frac{\bar{w}}{c} = \frac{1}{\frac{\bar{c}}{w} \frac{Re}{64} + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{f} - 1 \right)}. \quad (1.130)$$

In Bild 1.32 ist $\psi \bar{w}/c$ über $Re/(\bar{w}/c)$ mit f als Parameter im logarithmisch geteilten Koordinatennetz aufgetragen. Für f wurden die Werte 1,0, 0,87 und 0,74 gewählt, da diese am häufigsten auftreten. Die eingezeichneten Meßwerte wurden einer Arbeit von BROWN, DI NARDO, CHENG und SHERWOOD [1.52] entnommen, in der alle im Schrifttum bereits vorhandenen Werte zusammengestellt und durch neue ergänzt wurden. Dieser Darstellung zufolge besteht also eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Dabei ist jedoch zu be-

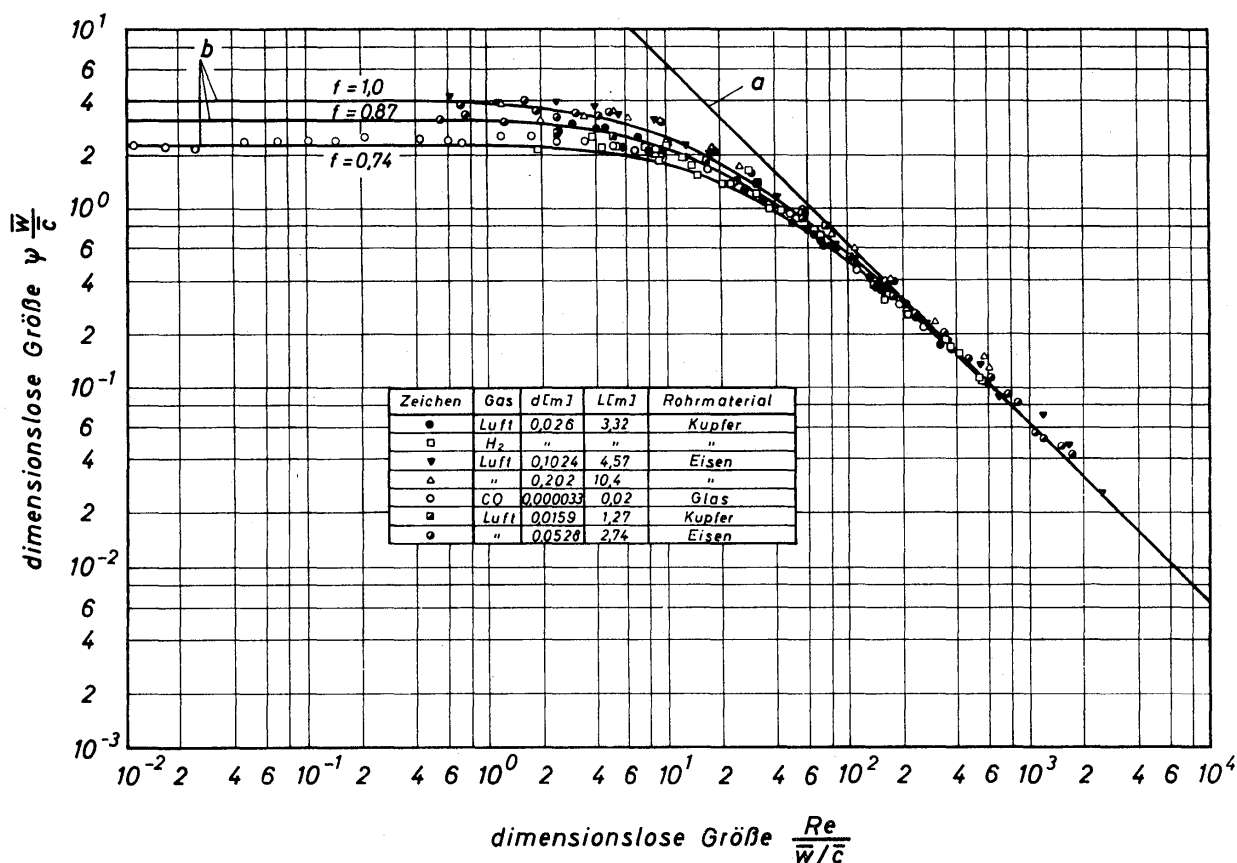


Bild 1.32. Vergleich des Widerstandsgesetzes mit Meßwerten für die Gleitströmung durch Rohre

rücksichtigen, daß die Größe von f , die den Anteil der diffus reflektierenden Wandoberfläche angibt, erst durch das Experiment bestimmt wird. Je kleiner f ist, desto kleiner ist die Widerstandszahl und folglich auch der Druckverlust. Das leuchtet auch unmittelbar ein, da bei diffuser Reflexion die Moleküle auch entgegen der Hauptströmungsrichtung fliegen können.

Zur weiteren Erklärung des Diagrammes sei noch erwähnt, daß Kurve a nach der aus Gl.(1.130) folgenden Beziehung

$$\psi \frac{\bar{w}}{c} = \frac{64}{Re} \frac{\bar{w}}{c} \quad (1.131)$$

berechnet wurde. Die mit b bezeichneten, parallel zur Abszissenachse verlaufenden Kurven sind durch

$$\psi \frac{\bar{w}}{c} = \frac{4}{\frac{2}{f} - 1} \quad (1.132)$$

gegeben. Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die hergeleiteten Gleichungen nur für $P = \text{const}$ gelten, so daß der Druckverlust ΔP stets klein im Verhältnis zu dem Gesamtdruck P sein muß.

1.10 Verminderung des Reibungswiderstandes durch Zusatz hochmolekularer Substanzen

Bereits vor längerer Zeit wurde die bemerkenswerte Feststellung gemacht, daß der Reibungswiderstand bei der Strömung normaler, Newtonscher Flüssigkeiten durch Rohre in ganz erheblichem Maße herabgesetzt werden kann, wenn der Flüssigkeit sehr geringe Mengen an hochmolekularen Stoffen zugesetzt werden. Diese Beobachtung wird Tomssches Phänomen genannt. Es könnte insbesondere für den Transport von Flüssigkeiten durch Fernleitungen von großer technischer Bedeutung werden. LUMLEY [1.53] hat über die bis 1967 zur Klärung dieses Phänomens durchgeführten Untersuchungen in zusammenfassender Weise berichtet. Weitere Veröffentlichungen erscheinen in rascher Folge in allen einschlägigen Fachzeitschriften. Die Molmasse der zugesetzten Stoffe liegt in der Größenordnung von 10^5 bis 10^6 . Es handelt sich dabei um Substanzen aus linearen oder verzweigten langkettigen Molekülen. Die zugesetzten Mengen der hochmolekularen Substanzen liegen in der Größenordnung von einigen Massenpromille. Den bisherigen Untersuchungen zufolge nimmt man an, daß die bei turbulenter Strömung auftretende laminare Wandschicht erheblich verstärkt wird, so daß sich ein geringerer Geschwindigkeitsgradient an der Rohrwand einstellt. Bei laminarer Strömung üben die zugesetzten Stoffe keinen Einfluß auf den Widerstand aus. Bei turbulenter Strömung konnte der Widerstand bis auf etwa $1/3$ des normalen Wertes vermindert werden.

Schrifttum

- [1.1] L. SCHILLER, Experimentelle Untersuchung zum Turbulenzproblem, *Z. angew. Math. Mech.* 1 (1921) 436–44
- [1.2] W. MEISSNER und G. U. SCHUBERT, Kritische Reynoldssche Zahl für Rohrströmung und Entropieprinzip, *Ann. Physik* 3 (1948) 6, 163–82
- [1.3] H. V. MORKOVIN, Transition from laminar to turbulent shear flow, *Trans. ASME* 80 (1958) 7, 1121–8
- [1.4] J. LAUFER, The structure of turbulence in fully developed pipe flow, *NACA Techn. Report 1174* (1954)
- [1.5] J. ROTTA, Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr, *Ing.-Arch.* 24 (1956) 4, 258–81
- [1.6] J. NIKURADSE, Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, *VDI-Forschungsh.* 356 (1932)
- [1.7] W. NUNNER, Wärmeübergang und Druckabfall in rauhen Rohren, *VDI-Forschungsh.* 455 (1956)
- [1.8] H. REICHARDT, Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen, *Z. angew. Math. Mech.* 31 (1951) 208–19
- [1.9] R. R. ROTHFUS, J. E. WALKER und G. A. WHAN, Correlation of local velocities in tubes, annuli, and parallel plates, *AIChE J.* 4 (1958) 2, 240–5
- [1.10] ● L. PRANDTL, *Führer durch die Strömungslehre*, 3. Auflage, Vieweg, Braunschweig 1949
- [1.11] ● H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*, 3. Auflage, Braun, Karlsruhe 1958
- [1.12] H. REICHARDT, Die Grundlagen des turbulenten Wärmeüberganges, *Allg. Wärmetechn.* 2 (1951) 129–42
- [1.13] L. P. REISS und T. H. HANRATTY, An experimental study of the unsteady nature of the viscous sublayer, *AIChE J.* 9 (1963) 2, 154–60
- [1.14] H. BLASIUS, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, *VDI-Forschungsh.* 131 (1913)
- [1.15] J. NIKURADSE, Strömungsgesetze in rauhen Rohren, *VDI-Forschungsh.* 361 (1933)
- [1.16] H. W. TOWNES und R. H. SABERSKY, Experiments on the flow over a rough surface, *Int. J. Heat Mass Transfer* 9 (1966) 8, 729–38
- [1.17] TH. V. KÁRMÁN, Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Physik. Klasse* 58 (1930)
- [1.18] C. F. COLEBROOK, Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws, *J. Inst. Civ. Eng. (London)* 11 (1938/39) 133–56
- [1.19] L. F. MOODY, Friction factors for pipe flow, *Trans. ASME* 66 (1944) 12, 671–84
- [1.20] O. KIRSCHMER, Kritische Betrachtungen zur Frage der Rohrreibung, *Z. VDI* 94 (1952) 24, 785–91
- [1.21] R. KOCH, Druckverlust und Wärmeübergang bei verwirbelter Strömung, *VDI-Forschungsh.* 469 (1958)
- [1.22] W. GESSNER, Druckverlust in Rohrleitungen und geschlossenen Kanälen bei Riffelrauigkeit, *Chemiker-Ztg./Chem. Apparatur* 84 (1960) 329–33, 394–8 und 463–70
- [1.23] H. BRAUER, Strömungswiderstand riffelrauer Rohre, *Chemiker-Ztg./Chem. Apparatur* 87 (1963) 199–208 und 289–93
- [1.24] H. ITO, Friction factors for turbulent flow in curved pipes, *Trans. ASME Ser. D* 81 (1959) 2, 123–34
- [1.25] C. H. WHITE, Streamline flow through curved pipes, *Proc. Roy. Soc. (A)* 123 (1929) 645–63
- [1.26] M. ADLER, Strömung in gekrümmten Rohren, *Z. angew. Math. Mech.* 14 (1934) 5, 257–75

- [1.27] W. R. DEAN, The streamline motion of fluid in a curved pipe, *Edinburgh & Dublin Phil. Mag. und J. Science* 4 (1927) 208–23 und 5 (1928) 673–95
- [1.28] ● H. HAUSEN, *Wärmeübergang im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950
- [1.29] H. ITO, Pressure losses in smooth pipe bends, *Trans. ASME Ser. D, J. Basic Eng.* 82 (1960) 3, 131–43
- [1.30] H. NIPPERT, Über den Strömungswiderstand in gekrümmten Kanälen, *VDI-Forschungsh.* 320 (1929)
- [1.31] H. HAUSENBLAS, Die nicht isotherme laminare Strömung einer zähen Flüssigkeit durch enge Spalte und Kapillarröhren, *Ing.-Arch.* 18 (1950) 151–66
- [1.32] ● W. M. KAYS und A. L. LONDON, *Compact Heat Exchangers*, McGraw-Hill, New York/Toronto/London 1958
- [1.33] R. G. DEISSLER, Analytical investigation of turbulent flow in smooth pipes with heat transfer with variable fluid properties for Prandtl number of 1, *NACA Techn. Note* 2242 (1950)
- [1.34] ● W. H. MCADAMS, *Heat Transmission*, 3. Auflage, McGraw-Hill, New York/Toronto/London 1954
- [1.35] L. V. HUMBLE, W. H. LOWDERMILK und L. G. DESMON, Measurements of average heat transfer and friction coefficients for subsonic flow of air in smooth tubes at high surface and fluid temperatures, *NACA Report* 1020 (1951)
- [1.36] G. F. SCHEELE und H. L. GREENE, Laminar-turbulent transition for nonisothermal pipe flow, *AIChE J.* 12 (1966) 4, 737–40
- [1.37] K. STEPHAN, Wärmeübergang und Druckabfall bei nicht ausgebildeter Laminarströmung in Rohren und in ebenen Spalten, *Chem.-Ing.-Techn.* 31 (1959) 12, 773–8
- [1.38] L. SCHILLER, Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung, *VDI-Forschungsh.* 248 (1922)
- [1.39] D. C. BOGUE, Entrance effects and prediction of turbulence in non-Newtonian flow, *Ind. Eng. Chem.* 51 (1959) 7, 874–8
- [1.40] H. L. LANGHAAR, Steady flow in the transition length of a straight tube, *J. Appl. Mech.* 9 (1942) A 55 – A 58
- [1.41] Y. TOMITA, Analytical treatments of non-Newtonian fluid by introducing the conception of boundary layer, *Bull. Japan. Soc. Mech. Eng.* 4 (1961) 13, 77–86
- [1.42] M. COLLINS und W. R. SCHOWALTER, Behavior of non-Newtonian fluids in the entry region of a pipe, *AIChE J.* 9 (1963) 6, 804–9
- [1.43] J. M. DEALY, A neglected effect in entrance flow analyses, *AIChE J.* 11 (1965) 4, 745
- [1.44] R. I. TAUNER und M. J. MANTON, On the nonuniqueness of the entry length, *AIChE J.* 12 (1966) 4, 816
- [1.45] N. SCHOLZ, Berechnung des laminaren und turbulenten Druckabfalls im Rohreinlauf, *Chem.-Ing.-Techn.* 32 (1960) 6, 404–9
- [1.46] ● P. GRASSMANN, *Physikalische Grundlagen der Verfahrenstechnik*, 2. Auflage, Sauerländer, Aarau/Frankfurt am Main 1970
- [1.47] ● LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik*, 2. Band, 6. Auflage
- [1.48] A. KUNDT und E. WARBURG, Über Reibung und Wärmeleitung verdünnter Gase, *Pogg. Ann. Physik. Chem.* 155 (1875) 337–65 und 525–50
- [1.49] E. WARBURG, Über die Gleitung der Gase an Glaswänden, *Pogg. Ann. Physik. Chem.* 159 (1876) 399–415
- [1.50] M. KNUDSEN, Die Gesetze der Molekularströmung und der inneren Reibungsströmung der Gase durch Röhren, *Ann. Physik* 28 (1909) 1, 75–130
- [1.51] M. KNUDSEN, Die Molekularströmung der Gase durch Öffnungen und die Effusion, *Ann. Physik* 28 (1909) 5, 999–1016

- [1.52] G. P. BROWN, A. DI NARDO, G. K. CHENG und TH. K. SHERWOOD, The flow of gases in pipes at low pressures, *J. Appl. Physics* 17 (1946) 10, 802–13
- [1.53] J. L. LUMLEY, The Toms phenomenon: Anomalous effects in turbulent flow of dilute solutions of high molecular weight linear polymers, *Appl. Mech. Rev.* 20 (1967) 12, 1139–49

2 Strömung durch Kanäle und Rohrbündel

Im ersten Teil dieses Abschnittes wird auf die Strömung durch Kanäle eingegangen, deren Querschnittsform von der des Kreises abweicht. Am ausführlichsten wird der Ringkanal behandelt, weil er technisch sehr bedeutsam ist und bei laminarer Strömung die erforderlichen Rechnungen ohne großen mathematischen Aufwand durchgeführt werden können. Es ist daher leicht möglich, die charakteristischen Eigenschaften der Strömung durch Kanäle mit vom Kreis abweichender Querschnittsform aufzuzeigen. Weiterhin wird dann auf Kanäle mit rechteckigen, elliptischen, dreieckigen, rhombischen und einigen ungewöhnlichen Querschnittsformen eingegangen.

Im zweiten Teil dieses Abschnittes wird die Strömung durch Rohrbündel behandelt. Die bündelweise Zusammenfassung von Rohren ist für den Bau von Wärmeaustauschern von großer Bedeutung. Dabei kann die Strömung sowohl quer als auch parallel zu den Rohren gerichtet sein.

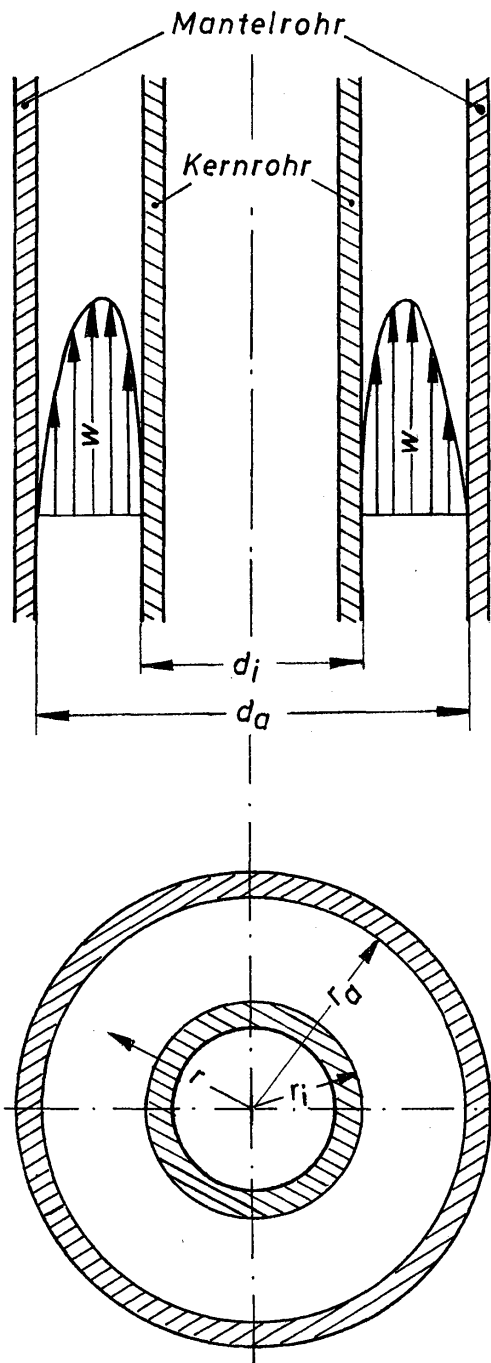
In Zusammenhang mit den Widerstandsgesetzen für die verschiedenen Kanäle wird die Frage nach der Bedeutung des hydraulischen Durchmessers, also jener in den Widerstandsgesetzen enthaltenen charakteristischen Länge, auftreten. Seit den Untersuchungen von NIKURADSE [2.1] und SCHILLER [2.2] an Kanälen mit rechteck- und dreieckförmigen Querschnittsflächen wurde vielfach angenommen, daß der Widerstand dieser Kanäle mittels der Gesetze für das Rohr mit kreisförmiger Querschnittsfläche ermittelt werden kann, wenn man den Rohrdurchmesser durch den hydraulischen Durchmesser des Kanals ersetzt. Diese Annahme trifft näherungsweise in einigen Sonderfällen zu. Im allgemeinen wird man aber für jede Kanalform ein gesondertes Widerstandsgesetz erwarten müssen, das von dem für das Rohr mit kreisförmigem Querschnitt abweicht. Im Verlauf der Ausführungen werden sich in diesem Abschnitt für den praktisch tätigen Ingenieur aber auch Hinweise ergeben, unter welchen Bedingungen sich die Gesetze für das Rohr auf Kanäle mit nicht kreisförmigen Querschnittsflächen übertragen lassen, ohne daß sich zu große Abweichungen ergeben.

2.1 Strömung durch Ringkanäle

2.11 Glatte Ringkanäle

Ringkanäle werden durch zwei coaxial angeordnete Rohre verschiedenen Durchmessers gebildet. Das innere Rohr wird Kernrohr und das äußere Mantelrohr genannt. Die im folgenden verwendeten Bezeichnungen sind *Bild 2.1* zu entnehmen. Beim Wärmeaustausch zwischen zwei Medien strömt ein Medium durch das Kernrohr und das andere durch den vom Kern- und Mantelrohr gebildeten Ringkanal. Entscheidend für die Strömungsgesetze sind die unterschiedlichen Krümmungen der Rohrwände, die den Kanal seitlich begrenzen.

Bild 2.1. Bezeichnung bei Ringkanälen



LAMB [2.3] hat die örtliche Geschwindigkeit w im Ringspalt bei laminarer Strömung mittels des Kräftegleichgewichtes an einem ringförmigen Flüssigkeitselement berechnet. Setzt man das Radien- bzw. Durchmesser Verhältnis

$$\frac{r_i}{r_a} = \frac{d_i}{d_a} = x, \tag{2.1}$$

so erhält man für die örtliche Geschwindigkeit w , bezogen auf die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} , die Beziehung:

$$\frac{w}{\bar{w}} = 2 \frac{1 - (r/r_a)^2 - (1 - x^2) \ln(r/r_a)/\ln x}{1 + x^2 + (1 - x^2)/\ln x}. \tag{2.2}$$

Für die über den Strömungsquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit \bar{w} gilt

$$\bar{w} = \frac{r_a^2}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} \left(1 + x^2 + \frac{1 - x^2}{\ln x} \right). \tag{2.3}$$

Der Ausdruck vor der Klammer stimmt mit Gl.(1.10) für das Rohr überein, wenn r_a gleich dem Radius R des Rohres mit kreisförmigem Querschnitt gesetzt wird.

Einige nach Gl.(2.2) berechnete Geschwindigkeitsprofile sind in *Bild 2.2* dargestellt. Das Maximum verschiebt sich mit abnehmenden Werten r_i/r_a in Richtung zum Kernrohr. Dabei wird der Geschwindigkeitsgradient am Mantelrohr kleiner und am Kernrohr größer. Als Grenzfälle erhält man für $r_i/r_a = 1$ das

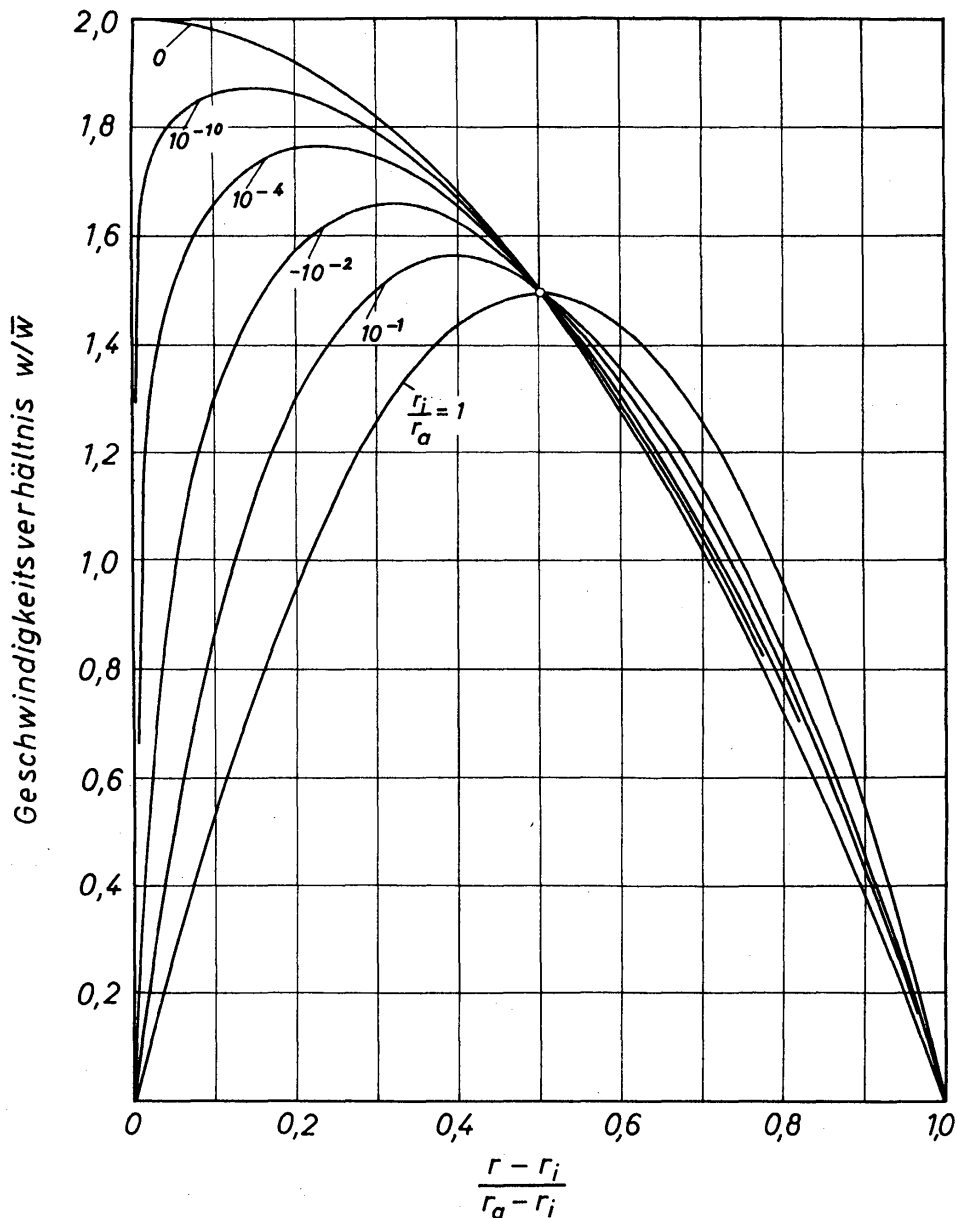


Bild 2.2. Geschwindigkeitsprofile bei laminarer Strömung in Ringkanälen

Geschwindigkeitsprofil der Strömung im ebenen Spalt und für $r_i/r_a = 0$ das der Strömung im Rohr mit Kreisquerschnitt. Da in den meisten praktischen Fällen das Radienverhältnis r_i/r_a größer als 0,1 ist, verschiebt sich das Maximum der Geschwindigkeitsverteilung also nur sehr geringfügig.

Für die örtliche Schubspannung $\tau = -\eta (dw/dr)$ folgt aus Gl.(2.2):

$$\tau = 8 \frac{\eta \bar{w}}{d_a} \frac{\frac{r}{r_a} + \frac{1}{2} \frac{1-x^2}{(r/r_a) \ln x}}{1+x^2 + \frac{1-x^2}{\ln x}} \quad (2.4)$$

Nach dieser Gleichung ändert sich die Schubspannung nicht mehr linear mit der Ortskoordinate r , wie es beim Rohr der Fall ist. Man erhält für $\tau(r)$ eine gekrümmte Kurve, deren Krümmung bei üblichen Radienverhältnissen jedoch sehr gering ist. In allen Kanälen, deren Querschnitt von dem des Kreises abweichen, ändert sich die Wandschubspannung τ_w über den Kanalumfang. Diese Verhältnisse lassen

sich für den Ringkanal noch in sehr einfacher Weise überschauen. Die Geschwindigkeitsprofile in *Bild 2.2* ließen bereits erkennen, daß die für die Wandschubspannung maßgebenden Geschwindigkeitsgradienten am Mantelrohr kleiner sind als am Kernrohr. Entsprechend verhalten sich die Wandschubspannungen, die sich mittels Gl.(2.4) berechnen lassen. Setzt man zur Abkürzung

$$b = 1 + x^2 + \frac{1 - x^2}{\ln x}, \tag{2.5}$$

so folgt für $r = r_i$ die Wandschubspannung τ_{wi} am Kernrohr zu

$$\tau_{wi} = +\eta \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=r_i} = -\frac{8\eta \bar{w}}{r_a b} \left(x + \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{x \ln x} \right) \tag{2.6}$$

und für $r = r_a$ die Wandschubspannung am Mantelrohr zu

$$\tau_{wa} = -\eta \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=r_a} = \frac{8\eta \bar{w}}{r_a b} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{\ln x} \right). \tag{2.7}$$

Das hiermit gebildete Verhältnis

$$\frac{\tau_{wi}}{\tau_{wa}} = -\frac{x + \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{x \ln x}}{1 + \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{\ln x}} \tag{2.8}$$

läßt unmittelbar erkennen, in welchem Maße die Wandschubspannung τ_{wi} am Kernrohr größer ist als die am Mantelrohr. In Tabelle 2.1 sind für die in *Bild 2.2* verwendeten Werte des Radienverhältnisses $x = r_i/r_a$ die Werte des Schubspannungsverhältnisses angegeben.

Tabelle 2.1: Verhältniswerte für die Wandschubspannungen τ_{wi}/τ_{wa} und die Schubkräfte K_{wi}/K_{wa} bei Ringkanälen, abhängig vom Radienverhältnis $x = r_i/r_a$

$x = r_i/r_a$	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-10}
τ_{wi}/τ_{wa}	1	2,61	12,17	574	$2,22 \cdot 10^8$
K_{wi}/K_{wa}	1	0,261	0,1217	0,0574	0,0222

Bei einem Radienverhältnis von $r_i/r_a = 0,01$ ist die Schubspannung am Kernrohr bereits etwa 12mal so groß wie die am Mantelrohr. Die Schubkraft K_{wi} jedoch, die man durch Multiplikation mit der Oberfläche erhält, beträgt nur etwa 1/8 derjenigen am Mantelrohr.

Von Interesse für den Vergleich der Strömung im Ringkanal mit der im Rohr ist das Verhältnis aus der Wandschubspannung τ_{wa} am Mantelrohr zu τ_w der Wandschubspannung im Rohr. Mit der Gl.(2.7) und derjenigen für das Rohr

$$\tau_w = 8 \frac{\eta \bar{w}}{d} \tag{2.9}$$

erhält man:

$$\frac{\tau_{wa}}{\tau_w} = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{1-x^2}{\ln x}}{1 + x^2 + \frac{1-x^2}{\ln x}}. \quad (2.10)$$

Für $x = r_i/r_a = 0$ erhält man $\tau_{wa}/\tau_w = 1$, denn der Ringkanal ist in das Kreisrohr übergegangen. Für alle anderen Werte von r_i/r_a ist jedoch $\tau_{wa}/\tau_w > 1$. Der größte Wert ergibt sich für den Grenzfall des ebenen Kanals, für den mit $r_i/r_a = 1$ das Schubspannungsverhältnis $\tau_{wa}/\tau_w = 1,5$ wird. Diese Überlegungen zeigen also, daß der Widerstand eines Ringkanals stets größer ist als der eines Rohres, wenn gleiche mittlere Geschwindigkeiten und gleiche Durchmesser für das Rohr und das Mantelrohr vorausgesetzt werden. Dieses Ergebnis ließ sich auch schon aus dem Verlauf der in *Bild 2.2* dargestellten Geschwindigkeitsprofile entnehmen.

Für die Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Strömung in Ringspalten ergeben sich für jede Profillseite Gleichungen, die derjenigen für das Rohr gemäß Gl.(1.27) entsprechen. Die hierin auftretenden Zahlenwerte lassen sich aber aus den bislang verfügbaren Meßwerten, die KNUDSEN und KATZ [2.4] zusammengestellt haben, nicht mit der gewünschten Genauigkeit ermitteln. Sehr sorgfältige Messungen zur Bestimmung der Wandschubspannungen im turbulenten Strömungsbereich haben KOCH und FEIND [2.5] durchgeführt.

Für den Druckverlust ΔP ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht folgender Zusammenhang mit den Wandschubspannungen:

$$\Delta P \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) = \tau_{wa} d_a \pi L + \tau_{wi} d_i \pi L. \quad (2.11)$$

Nach Umformung wird hieraus:

$$\frac{\Delta P}{L} = 4 \frac{\tau_{wa}}{d_a} \left[\frac{1 + \frac{\tau_{wi} d_i}{\tau_{wa} d_a}}{1 - \left(\frac{d_i}{d_a}\right)^2} \right]. \quad (2.12)$$

Wird der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck gleich 1, was für $d_i/d_a = 0$ zutrifft, dann stimmt Gl.(2.12) mit derjenigen für das Kreisrohr überein, wenn dessen Durchmesser gleich d_a ist. Das Verhältnis $\tau_{wi} d_i/\tau_{wa} d_a$ ist gleich dem Schubkraftverhältnis K_{wi}/K_{wa} , welches nach Tabelle 2.1 mit abnehmenden Werten für d_i/d_a sehr rasch kleiner wird. Da Gl.(2.12) sowohl für die laminare als auch für die turbulente Strömung gilt, wird man also erwarten dürfen, daß man für kleine Werte des Durchmesserhältnisses den Druckverlust im Ringkanal näherungsweise mit den Gesetzen der Rohrströmung berechnen kann.

Das Widerstandsgesetz für laminar durchströmte Ringkanäle wird in der gleichen Weise aufgestellt wie für Rohre. Man erhält das Gesetz

$$\psi = \varphi_s \frac{64}{Re}. \quad (2.13)$$

Die Form dieses Gesetzes gleicht bis auf den Faktor φ_s , der von Gl.(1.38) für laminar durchströmte Kreisrohre. Die Widerstandszahl ψ und die Reynoldszahl Re sind wie folgt definiert:

$$\psi \equiv \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2 / 2} \frac{d_h}{L}, \quad (2.14)$$

$$Re \equiv \frac{\bar{w} d_h \rho}{\eta}. \quad (2.15)$$

Neben den bereits bekannten Größen ist d_h der hydraulische Durchmesser,

$$d_h = 4 \frac{F}{U} \quad (2.16)$$

mit F Querschnittsfläche des Ringspaltes und U dessen Umfang. Wird Gl.(2.16) auf ein Rohr mit Kreisquerschnitt angewendet, so wird $d_h = d$. Der hydraulische Durchmesser des Ringspaltes ist mit $d_h = d_a - d_i$ gleich der doppelten Spaltbreite.

Der in Gl.(2.13) eingeführte Faktor φ_s hängt vom Radien- bzw. vom Durchmesser Verhältnis $x = r_i/r_a = d_i/d_a$ ab. Man erhält

$$\varphi_s = \frac{(1-x)^2}{1+x^2 + \frac{1-x^2}{\ln x}}. \quad (2.17)$$

Für $d_i = 0$ (Kreisrohr) wird $\varphi_s = 1$ und für $d_i = d_a$ (ebener Spalt) wird $\varphi_s = 1,5$. In Bild 2.3 ist φ_s abhängig vom Durchmesser Verhältnis d_i/d_a dargestellt.

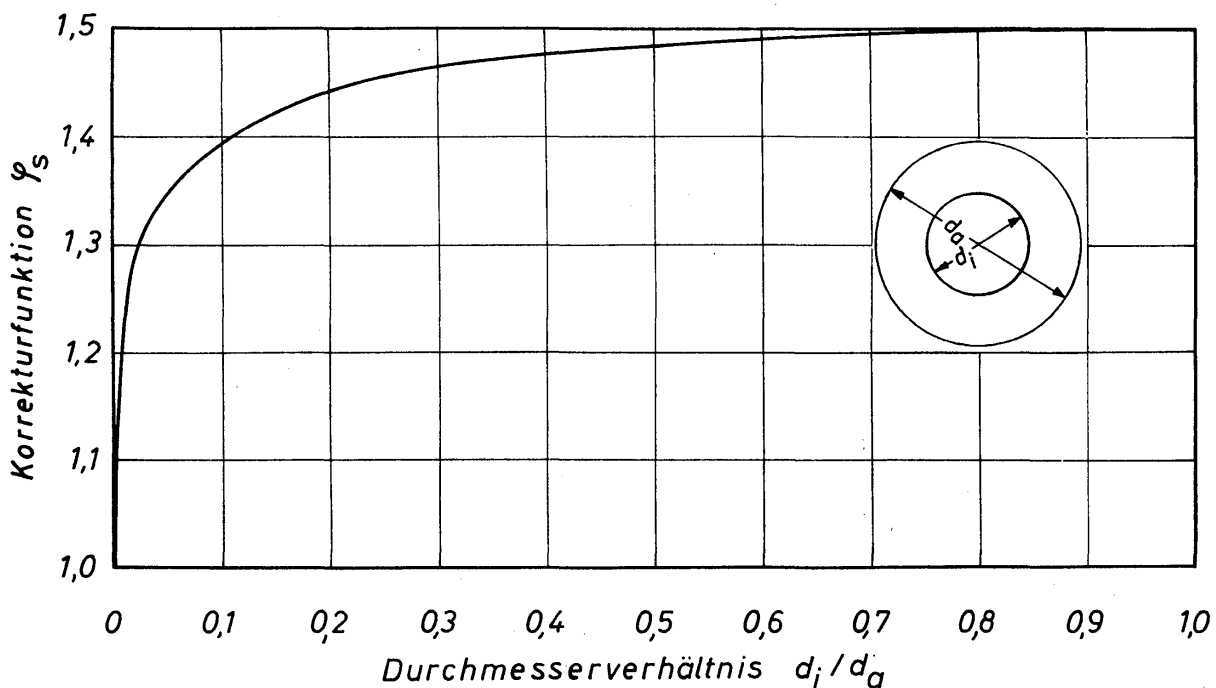


Bild 2.3. Abhängigkeit der Korrekturfunktion φ_s für das Widerstandsgesetz von laminar durchströmten Ringspalten vom Durchmesser Verhältnis d_i/d_a

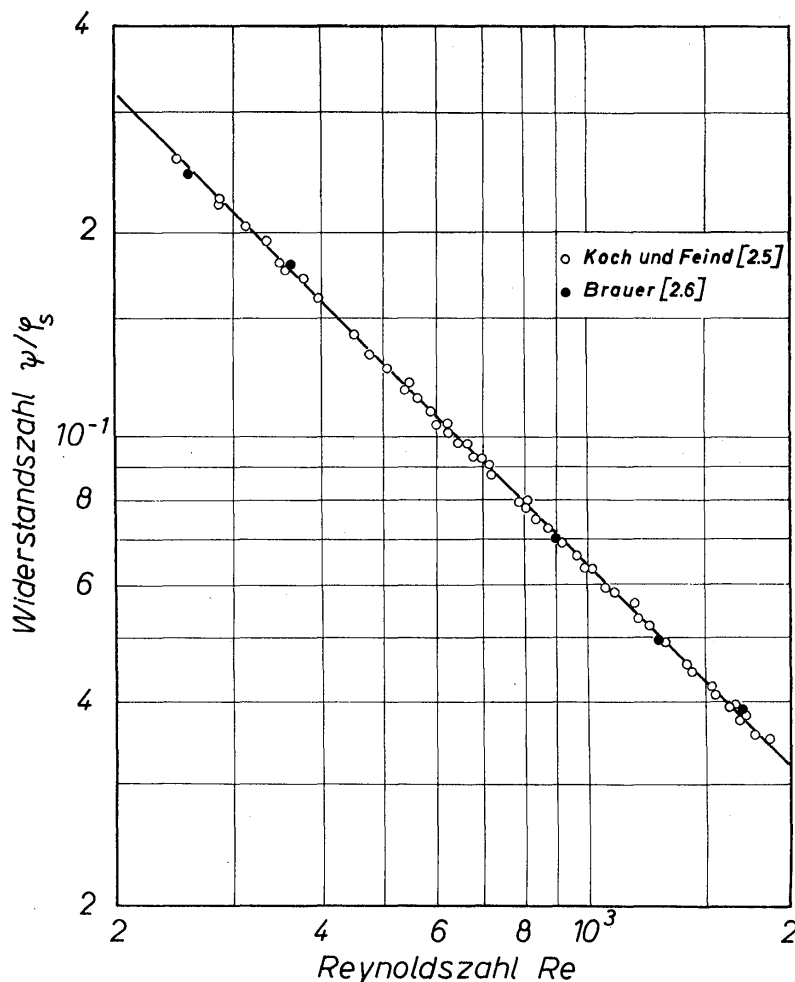


Bild 2.4. Vergleich zwischen dem theoretischen Widerstandsgesetz für laminar durchströmte Ringspalte und Meßwerten; ausgezogene Kurve nach Gl.(2.13)

Ein Vergleich zwischen dem theoretischen Widerstandsgesetz und experimentell ermittelten Werten ist in *Bild 2.4* durchgeführt. Aufgetragen wurde der Verhältnisswert ψ/φ_s über der Reynoldszahl Re . Die ausgezogene Kurve ist nach Gl.(2.13) berechnet worden. Die Meßwerte wurden Arbeiten von KOCH und FEIND [2.5] sowie BRAUER [2.6] entnommen, die als Beispiel für viele andere Angaben dienen mögen. KOCH und FEIND führten Versuche mit Luft als Strömungsmittel durch und BRAUER mit Wasser. Das Durchmesser Verhältnis wurde von $d_i/d_a = 0,2$ bis $0,83$ geändert. In der Untersuchung von WALKER, WHAN und ROTHFUS [2.7] wurde das Durchmesser Verhältnis bis herunter zu $0,026$ geändert. Auch die Meßergebnisse dieser Forscher stimmen mit dem theoretischen Widerstandsgesetz sehr gut überein. Auf die Untersuchungsergebnisse weiterer Verfasser wird in den schon zitierten Arbeiten hingewiesen.

Die obere Grenze für den Gültigkeitsbereich des Widerstandsgesetzes für laminar durchströmte Kanäle ist die kritische Reynoldszahl Re_{kr} . Deren Wert hängt, wie HANKS [2.8] theoretisch nachweisen konnte, vom Durchmesser Verhältnis d_i/d_a ab. Die im Schrifttum vorhandenen Meßwerte beweisen die Gültigkeit der von HANKS mitgeteilten theoretischen Gleichung. Da der Wert der kritischen Reynoldszahl äußerstenfalls aber nur um etwa 17% von dem für das Rohr gültigen Wert abweicht, ist es für den Ingenieur also zulässig, für Rohre und Ringkanäle den gleichen Wert von $Re_{kr} = 2320$ anzunehmen.

Für die turbulente Strömung durch glatte Ringkanäle haben METER und BIRD [2.9] auf der Grundlage der Mischungsweghypothese von PRANDTL [1.10] ein

theoretisches Widerstandsgesetz hergeleitet, welches in der hier verwendeten Schreibweise die folgende Form hat:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = C_1 \log (Re \sqrt{\psi}) - C_2. \tag{2.18}$$

C_1 und C_2 sind sehr verwickelte Funktionen des Durchmesserverhältnisses d_i/d_a , die in Tabelle 2.2 angegeben sind. Die Gl.(2.18) hat den gleichen Aufbau wie Gl.(1.49), die für Kreisrohre gilt. Das ist auch zu erwarten, da beiden Gleichungen dieselbe Turbulenzhypothese zugrunde liegt. Für $d_i/d_a = 0$, d.h. für den Übergang des Ringrohres in das Kreisrohr, muß $C_1 = 2,0$ und $C_2 = 0,8$ werden, was durch die Angaben in Tabelle 2.2 auch bestätigt wird.

Tabelle 2.2: Funktionswerte für C_1 und C_2 im Widerstandsgesetz gemäß Gl.(2.18) für Ringkanäle bei turbulenter Strömung

d_i/d_a	C_1	C_2
0,00	2,000	0,802
0,05	1,874	0,954
0,10	1,868	0,953
0,15	1,869	0,954
0,2	1,873	0,955
0,3	1,886	0,958
0,4	1,901	0,961
0,5	1,917	0,963
0,6	1,933	0,965
0,7	1,950	0,967
0,8	1,967	0,968
0,9	1,984	0,969
1,0	2,000	0,970

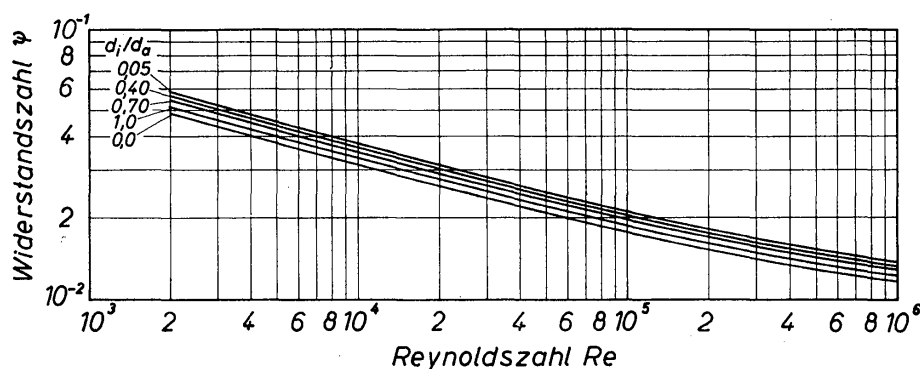


Bild 2.5. Abhängigkeit der Widerstandszahl für turbulent durchströmte Ringkanäle von der Reynoldszahl Re und dem Durchmesserverhältnis d_i/d_a ; Kurven wurden nach Gl.(2.18) berechnet

Die Abhängigkeit der Widerstandszahl ψ von der Reynoldszahl Re ist in Bild 2.5 für verschiedene Werte von d_i/d_a dargestellt. Weiterhin ist ψ in Bild 2.6, abhängig von d_i/d_a , für $Re = 10^5$ angegeben. Im Bereich sehr kleiner Werte des

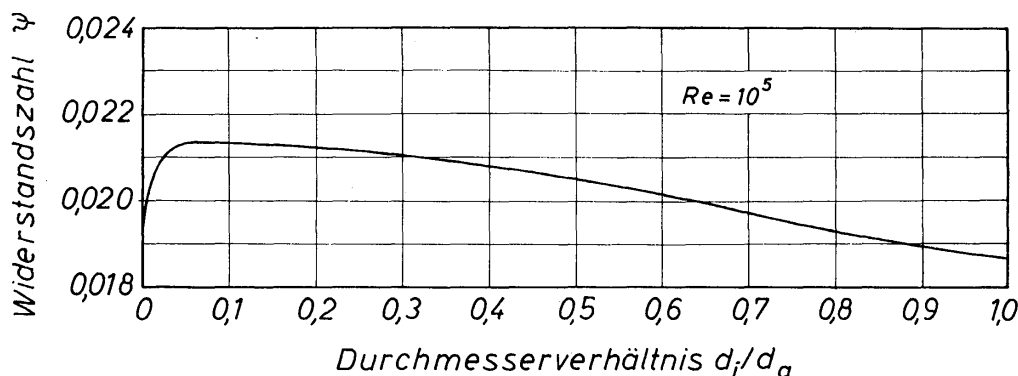


Bild 2.6. Abhängigkeit der Widerstandszahl für turbulent durchströmte Ringkanäle vom Durchmesser Verhältnis d_i/d_a bei $Re = 10^5$; Kurvenzug nach Gl.(2.18)

Durchmesserverhältnisses steigt die Widerstandszahl zunächst sehr stark an, durchläuft ein schwach ausgeprägtes Maximum und fällt dann wieder langsam ab. Dieses Verhalten der Widerstandszahl stimmt, wie METER und BIRD zeigen konnten, recht gut mit einer großen Zahl experimenteller Ergebnisse überein.

Als Sonderfall wird von Gl.(2.18) auch das Widerstandsgesetz für die Strömung zwischen parallelen Platten erfaßt. Die Widerstandszahl ist hierfür um etwa 4% größer als für Kreisrohre. Als charakteristische Länge dient sowohl in der Reynolds- als auch in der Widerstandszahl der hydraulische Durchmesser.

2.12 Exzentrische Anordnung des Kernrohres

Es wird häufig die Frage gestellt, wie sich eine exzentrische Anordnung des Kernrohres im Mantelrohr auf den Strömungswiderstand auswirkt. Mit den Bezeichnungen von Bild 2.7 ist e der Abstand zwischen den beiden Rohrachsen, der im

Höchstfalle gleich $r_a - r_i$ werden kann, wenn das Kernrohr einseitig an der Innenwand des Mantelrohres anliegt. Das Verhältnis $e/(r_a - r_i)$, die relative Exzentrizität, kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

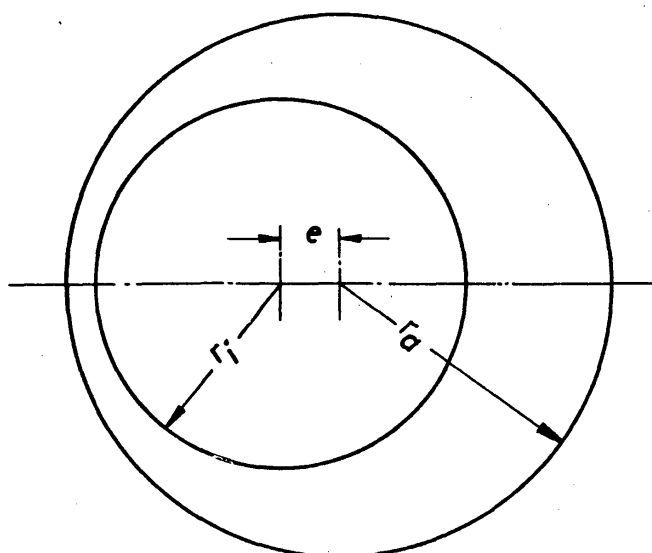


Bild 2.7. Exzentrische Anordnung des Kernrohres im Mantelrohr

Den Einfluß der Exzentrizität auf den Druckverlust hat ULLRICH [2.10] für die laminare Strömung berechnet. Das Ergebnis läßt sich durch die folgende Gleichung ausdrücken:

$$\psi = \varphi_{\text{ex}} \varphi_s \frac{64}{Re} \quad (2.19)$$

Hierin bedeuten

$$\varphi_{\text{ex}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \left(\frac{e}{r_a - r_i} \right)^2} \quad (2.20)$$

den Exzentrizitätsfaktor, φ_s den Korrekturfaktor nach Gl. (2.17), Re die Reynoldszahl nach Gl. (2.15) und ψ die Widerstandszahl nach Gl. (2.14). Als charakteristische Länge ist der hydraulische Durchmesser $d_h = d_a - d_i$ zu nehmen. In *Bild 2.8* ist φ_{ex} als Kurve *a* über der Exzentrizität aufgetragen; φ_{ex} ändert sich von 1 bis 0,4. Das heißt also, daß die Exzentrizität zu einer Verminderung des Druckverlustes führt. Als Kurve *b* ist das Ergebnis einer theoretischen Untersuchung von SNYDER und GOLDSTEIN [2.11] angegeben. Über einen großen Bereich der Exzentrizität stimmen die Ergebnisse gut überein. SNYDER und GOLDSTEIN berechneten ferner die Schubspannungen am Kern- und Mantelrohr. Mit zunehmender Exzentrizität können sich die Schubspannungen über den Umfang um einen Faktor 20 ändern. Eine ebenfalls umfassende theoretische Untersuchung über die Strömung in Ringspalten mit exzentrisch angeordnetem Kernrohr führten REDBERGER und CHARLES [2.12] durch.

Für die turbulente Strömung haben DEISSLER und TAYLOR [2.13] den Einfluß der exzentrischen Rohranordnung auf den Druckverlust untersucht. Danach wird auch bei turbulenter Strömung der Druckverlust mit zunehmender Exzentrizität etwa in der gleichen Weise verringert wie bei laminarer Strömung.

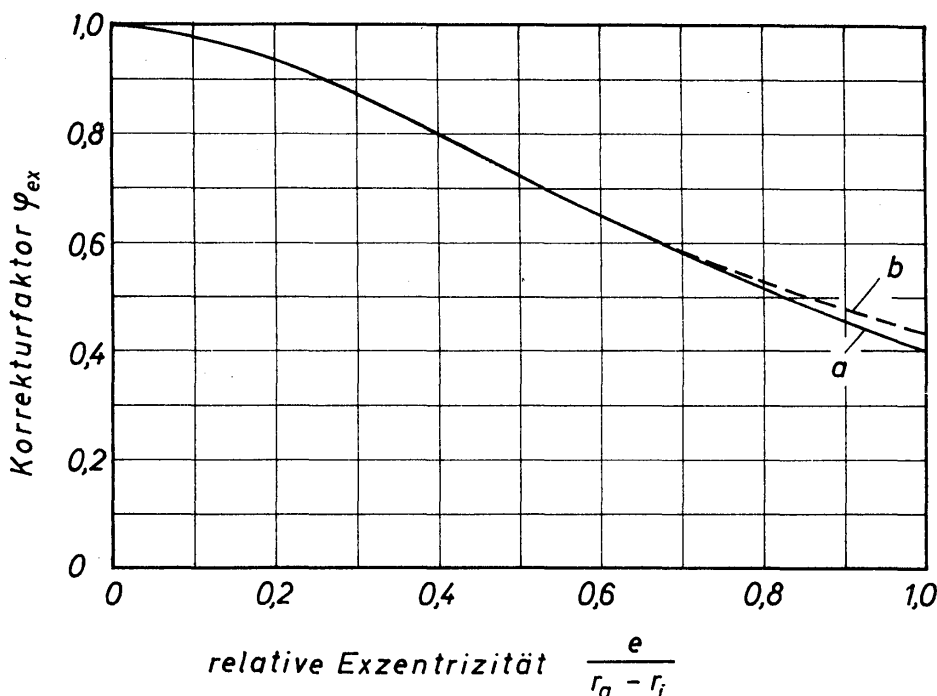
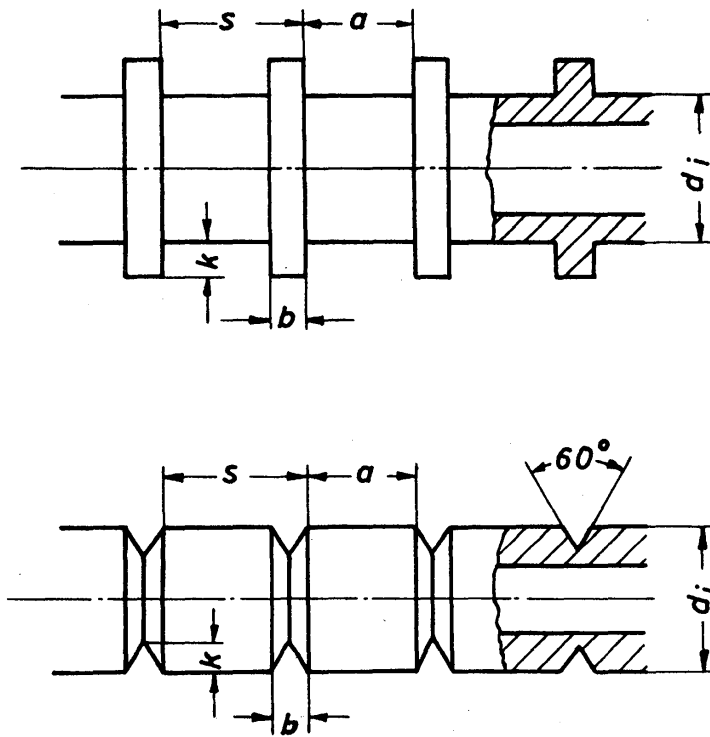


Bild 2.8. Abhängigkeit des Korrekturfaktors φ_{ex} zur Berücksichtigung einer exzentrischen Anordnung des Kernrohres im Ringspalt

2.13 Rauhe Ringkanäle

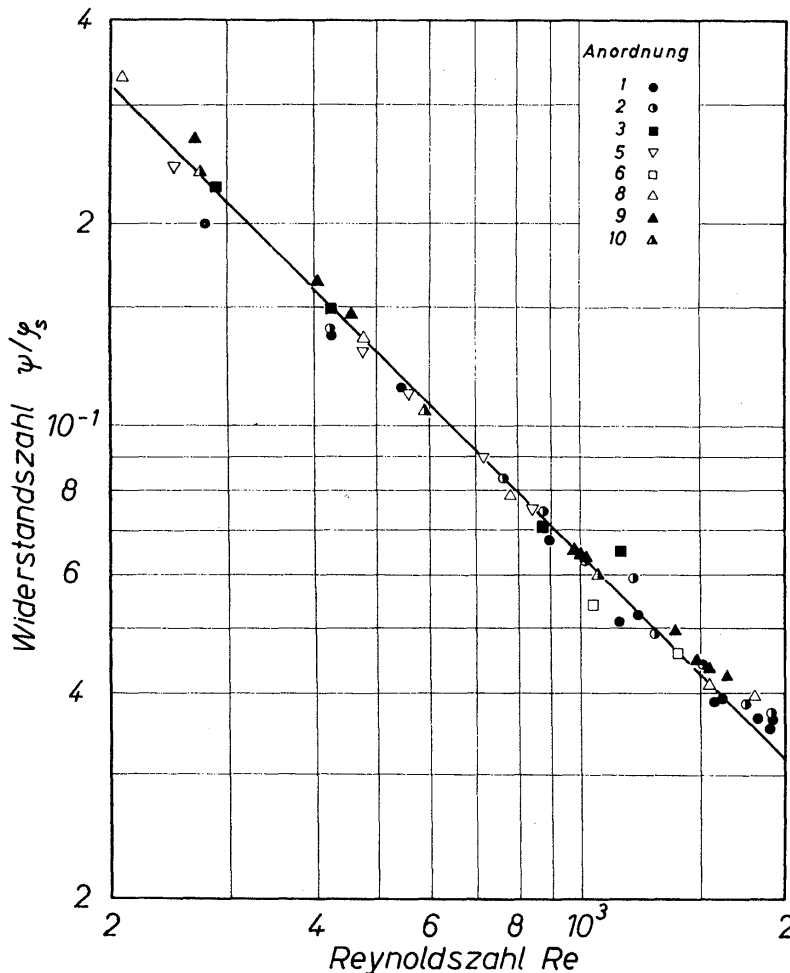
Den Strömungswiderstand von Ringkanälen mit rauhen Kernrohren im Bereich laminarer und turbulenter Strömung hat BRAUER [2.6] gemessen. Die Kernrohre



a)

b) Bild 2.9
Form der untersuchten
rauen Rohre

wiesen entweder rippenförmige Erhebungen oder rillenförmige Vertiefungen auf, die quer zur Strömungsrichtung über dem Rohrumfang angeordnet waren. Die verwendeten Bezeichnungen gehen aus *Bild 2.9a* und *2.9b* hervor. Die Abmessungen der verwendeten Rohre und Rauigkeiten sind in Tabelle 2.3 zusammengestellt.



In *Bild 2.10* ist für den laminaren Strömungsbereich das Verhältnis ψ/φ_s der untersuchten Rohranordnungen über der Reynoldszahl Re aufgetragen. Wie im Abschnitt 1.53 bereits erläutert wurde, ist bei laminarer Strömung zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit der wirksame Strömungsquerschnitt zu verwenden.

Bild 2.10. Widerstandszahl für Ringkanäle mit rauhen Kernrohren, abhängig von der Reynoldszahl Re bei laminarer Strömung

Tabelle 2.3: Geometrische Abmessungen der Kreisringkanäle

Anordnung	Mantelrohr- durchmesser	Kernrohr- durchmesser	Durchmesser- verhältnis	Rauigkeits- höhe oder -tiefe	Rauigkeits- breite	Rauigkeits- abstand	Rauigkeits- teilung	Teilungs- verhältnis	Bemerkungen
Nr.	d_a (mm)	d_i (mm)	$\frac{d_i}{d_a}$	k (mm)	b (mm)	a (mm)	$s = a + b$ (mm)	s/k	
1	19,3	15	0,777	0,3	0,3	0,3	0,6	2,00	Kernrohre mit Rippen
2	19,3	15	0,777	0,3	0,3	0,6	0,9	3,00	
3	19,3	15	0,777	0,3	0,3	1,2	1,5	5,00	
4	19,3	15	0,777	0,3	0,3	2,6	2,9	9,67	
5	19,3	15	0,777	0,3	0,3	5,2	5,5	18,33	
6	19,3	15	0,777	0,3	0,3	10,1	10,4	34,67	
7	19,3	15	0,777	0,3	0,3	20,1	20,4	68,00	
8	19,3	15	0,777	0,3	0,35	0	0,35	1,17	Kernrohre mit Rillen
9	19,3	15	0,777	0,3	0,35	0,3	0,65	2,17	
10	19,3	15	0,777	0,3	0,35	0,6	0,95	3,17	
11	19,0	11	0,579	0,3	0,3	0,3	0,6	2,00	Kernrohre mit Rippen
12	19,0	11	0,579	0,3	0,3	0,6	0,9	3,00	
13	19,0	11	0,579	0,3	0,3	1,0	1,3	4,33	
14	19,0	11	0,579	0,3	0,3	2,5	2,8	9,33	
15	19,0	11	0,579	0,3	0,3	5,0	5,3	17,76	
16	19,0	11	0,579	0,3	0,3	10,0	10,3	34,3	
17	19,0	11	0,579	0,3	0,3	20,0	20,3	67,7	

Hierfür ist bei rauhen Ringspalten mit rippenförmigen Erhebungen an Stelle des Kernrohrdurchmessers d_i der rechnerische Durchmesser $d_i + 2k$ in die Rechnung einzuführen. Der hydraulische Durchmesser ergibt sich dann zu $d_{h,l} = d_a - (d_i + 2k)$. Bei Kernrohren mit rillenförmigen Vertiefungen ist jedoch wie beim glatten Kernrohr $d_{h,l} = d_a - d_i$, weil die Rillen die Strömung praktisch nicht beeinflussen. Bei der Berechnung der Durchmesserfunktion φ_s ist für gerillte Kernrohre d_i/d_a und bei berippten Kernrohren $(d_i + 2k)/d_a$ zu verwenden.

Unter Berücksichtigung dieser Vereinbarungen gilt dann bei laminarer Strömung für rauhe und glatte Ringspalte das durch Gl.(2.13) bereits gegebene Widerstandsgesetz. Trotz der beobachteten Streuung der Meßwerte wird man die Gültigkeit von Gl.(2.13) für Ringspalte mit glatten und rauhen Kernrohren als hinreichend gesichert ansehen können.

Im Bereich der turbulenten Strömung ergeben sich für jede Form und Anordnung der Rauigkeiten getrennte Widerstandsgesetze. In den *Bildern 2.11 bis 2.13* sind die Widerstandsgesetze für die in Tabelle 2.3 angegebenen Rauigkeiten dargestellt. Zur vereinfachten Berechnung der Widerstandszahl ψ und der Reynolds-

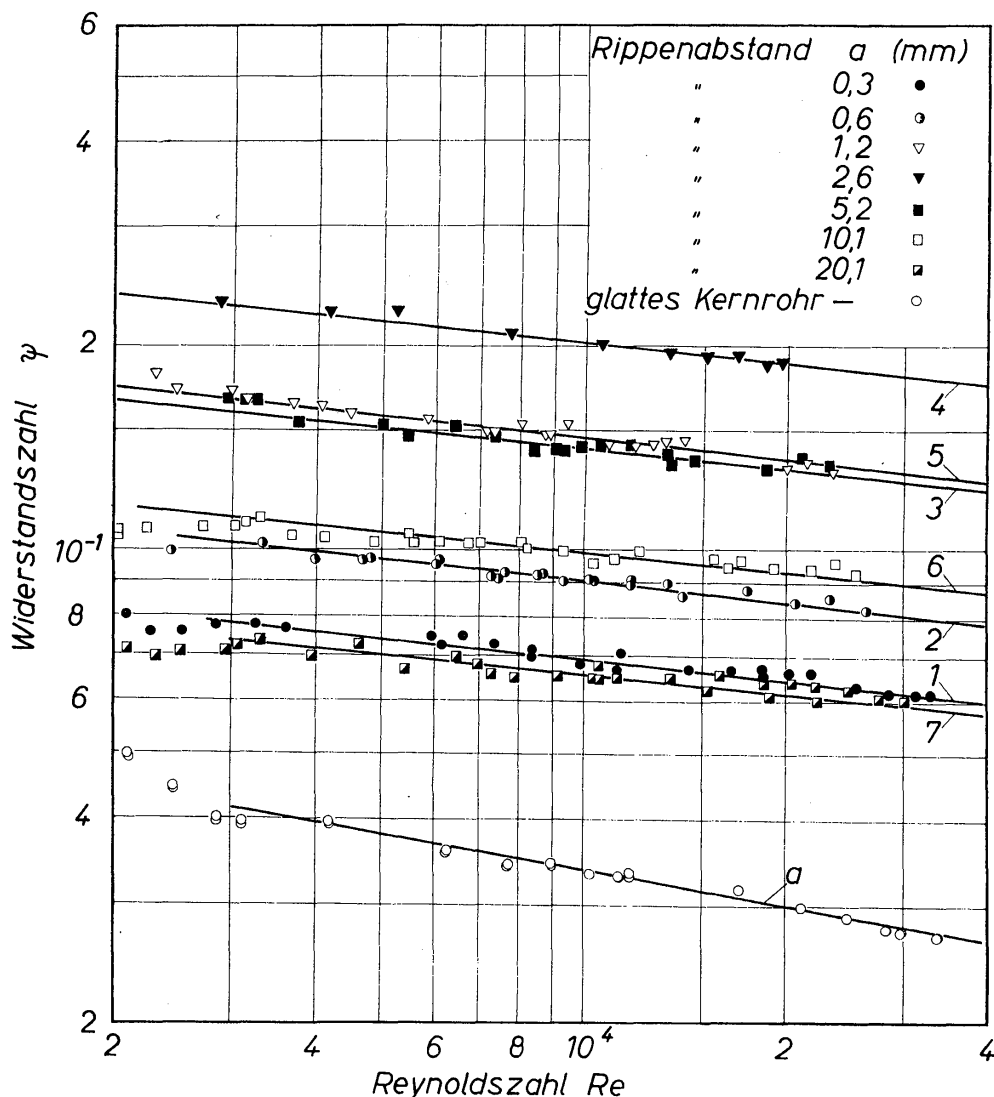


Bild 2.11. Widerstandszahlen für Ringkanäle mit rauhen Kernrohren für die in Tabelle 2.3 aufgeführten Anordnungen 1 bis 7; Kurve a für glattes Kernrohr

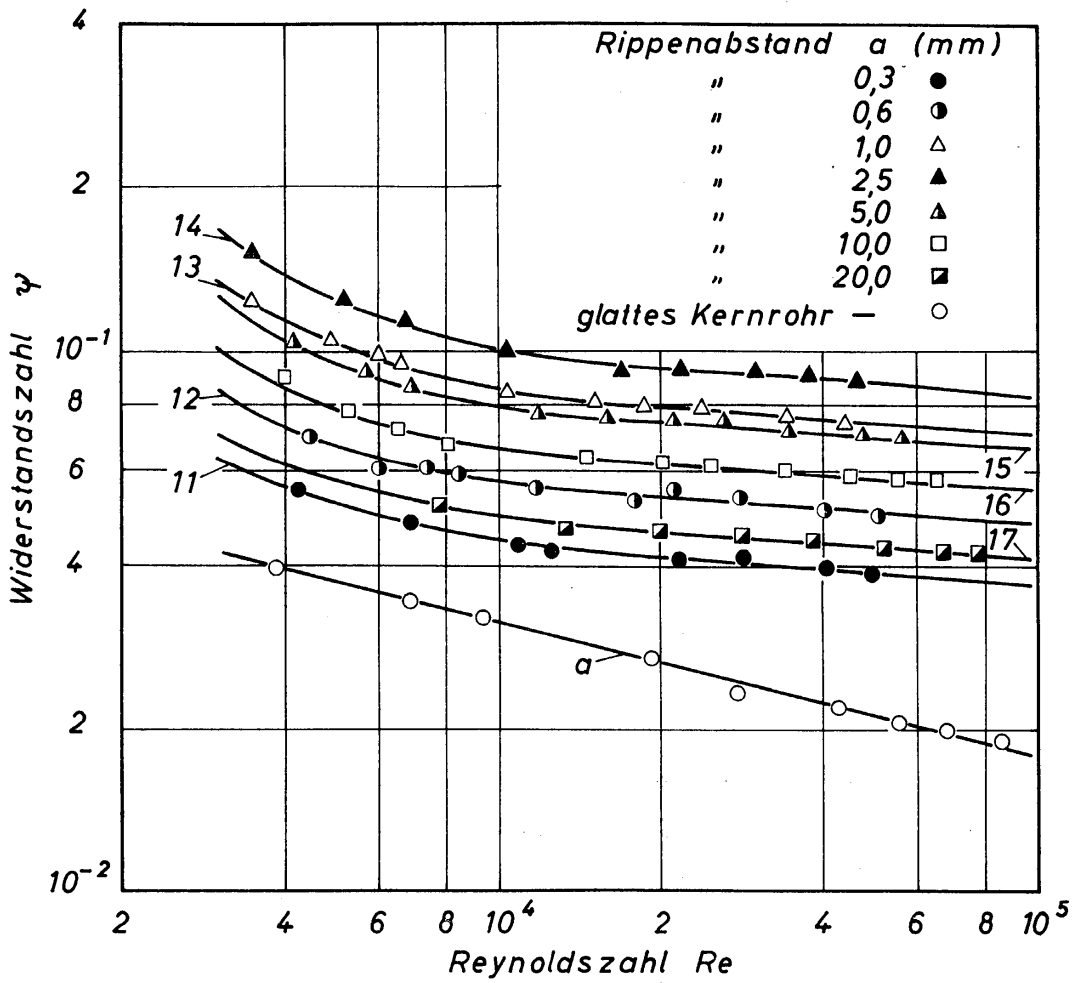


Bild 2.12. Widerstandszahlen für Ringkanäle mit rauhen Kernrohren für die in Tabelle 2.3 aufgeführten Anordnungen 11 bis 17; Kurve a für glattes Kernrohr

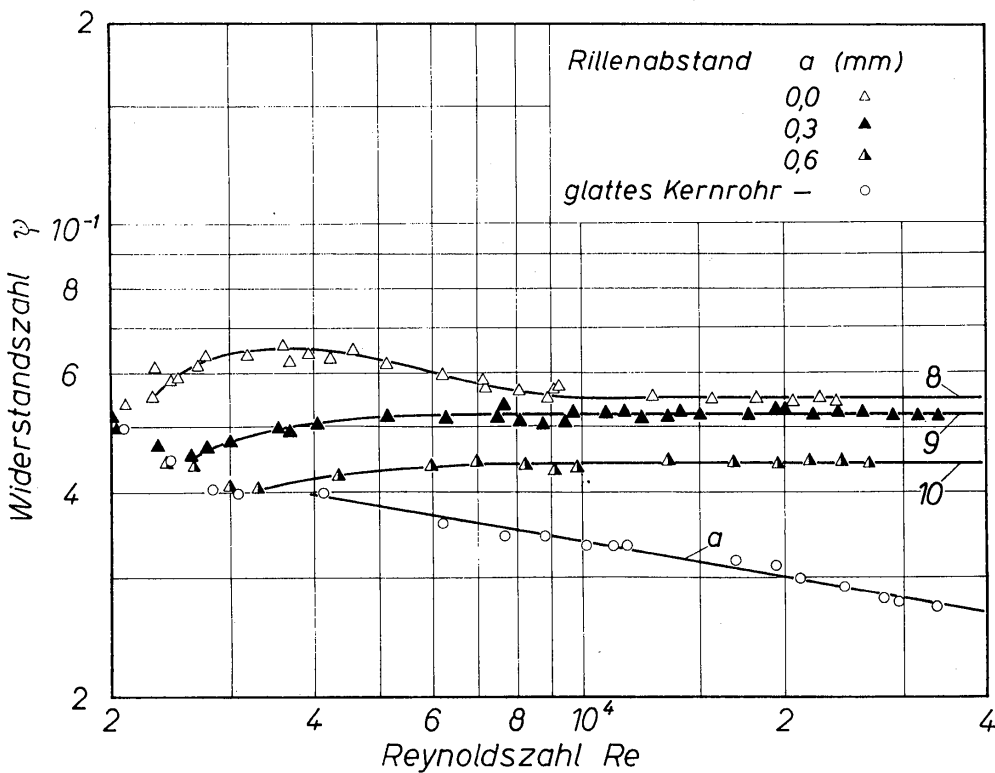


Bild 2.13. Widerstandszahlen für Ringkanäle mit rauhen Kernrohren für die in Tabelle 2.3 aufgeführten Anordnungen 8 bis 10; Kurve a für glattes Kernrohr

zahl wurde stets der Kernrohrdurchmesser d_i verwendet. Für den hydraulischen Durchmesser gilt also wie beim glatten Kernrohr $d_h = d_a - d_i$. Zum Vergleich sind in den *Bildern 2.11 bis 2.13* die jeweiligen Meßergebnisse für die glatten Ringspalte eingetragen und durch Kurve *a* ausgeglichen.

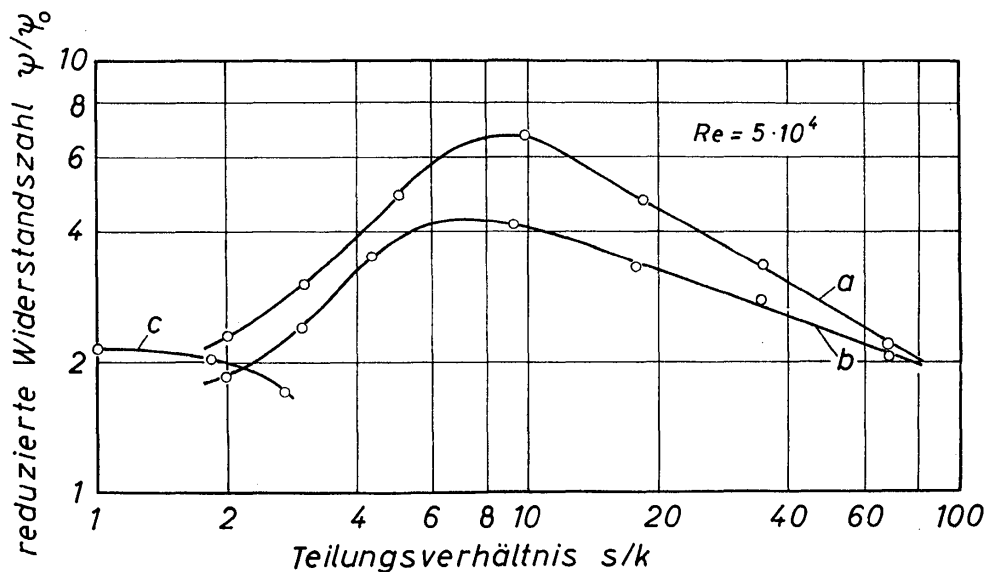
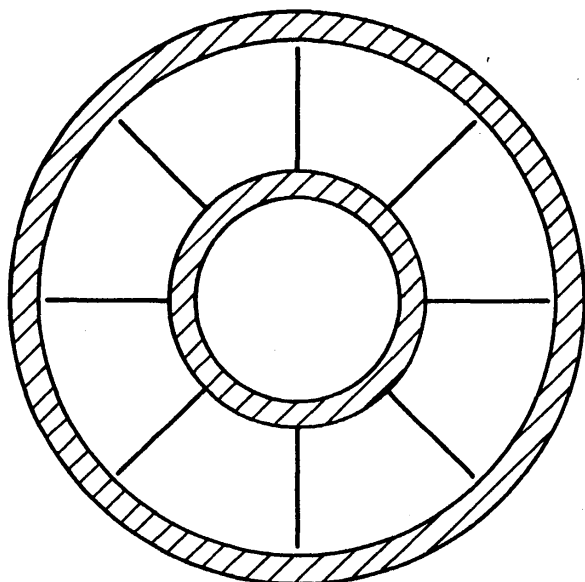


Bild 2.14. Reduzierte Widerstandszahl für Ringkanäle mit rauhen Kernrohren, abhängig vom Teilungsverhältnis s/k bei $Re = 5 \cdot 10^4$; Kurve *a* für die Anordnungen 1 bis 7, Kurve *b* für die Anordnungen 11 bis 17 und Kurve *c* für die Anordnungen 8 bis 10

Bedeutet ψ_0 die Widerstandszahl beim glatten und ψ die beim rauhen Ringspalt, so gibt das Verhältnis ψ/ψ_0 , welches als reduzierte Widerstandszahl bezeichnet wird, die Erhöhung des Widerstandes beim rauhen im Vergleich zum glatten Ringspalt an. In *Bild 2.14* ist ψ/ψ_0 abhängig vom Teilungsverhältnis s/k dargestellt (k ist die Höhe und s die Teilung der Rauigkeiten). Kurve *a* gilt für den Ringspalt mit $d_i/d_a = 0,777$ und rippenförmigen Rauigkeiten, Kurve *b* für $d_i/d_a = 0,579$ und rippenförmigen Rauigkeiten und schließlich Kurve *c* für $d_i/d_a = 0,777$ mit rillenförmigen Rauigkeiten. *Bild 2.14* zeigt, daß die reduzierte Widerstandszahl bei Ringspalten mit rippenförmigen Rauigkeiten ein sehr ausgeprägtes Maximum durchläuft, welches vornehmlich durch die Art der Wirbelbildung zwischen den einzelnen Rauigkeitselementen bedingt ist. Für rillenförmige Rauigkeiten nimmt die reduzierte Widerstandszahl mit zunehmendem Teilungsverhältnis ab. Bei sehr großen Werten von s/k werden die Rillen vom Grenzschichtmaterial ausgefüllt, ohne daß der Strömungswiderstand dadurch beeinflußt wird. Weitere Meßergebnisse für Ringkanäle mit rauhen Kernrohren werden von SKUPINSKI [2.14] mitgeteilt.

KNUDSEN und KATZ [2.15] untersuchten den Strömungswiderstand von Ringkanälen, bei denen die Kernrohre mit Rippen spiralförmig umwickelt waren. Die Höhe der Rippen wurde von 4,9 mm bis 8,7 mm und die Rippenteilung zwischen 3,1 mm und 6,4 mm geändert. Die Ergebnisse sind in [2.4] graphisch dargestellt worden.

Ringspalte mit Kernrohren, die Längsrippen von der in *Bild 2.15* dargestellten Form aufweisen, haben DE LORENZO und ANDERSON [2.16] untersucht. Die Ver-



fasser empfehlen das in *Bild 2.16* wiedergegebene Widerstandsgesetz. Als charakteristische Länge wird in der Widerstandszahl und in der Reynoldszahl der hydraulische Durchmesser $d_h = 4 F/U$ verwendet; F ist die Fläche des Strömungsquerschnitts und U der von der Strömung berührte Umfang.

Bild 2.15. Ringkanal mit Längsrippen

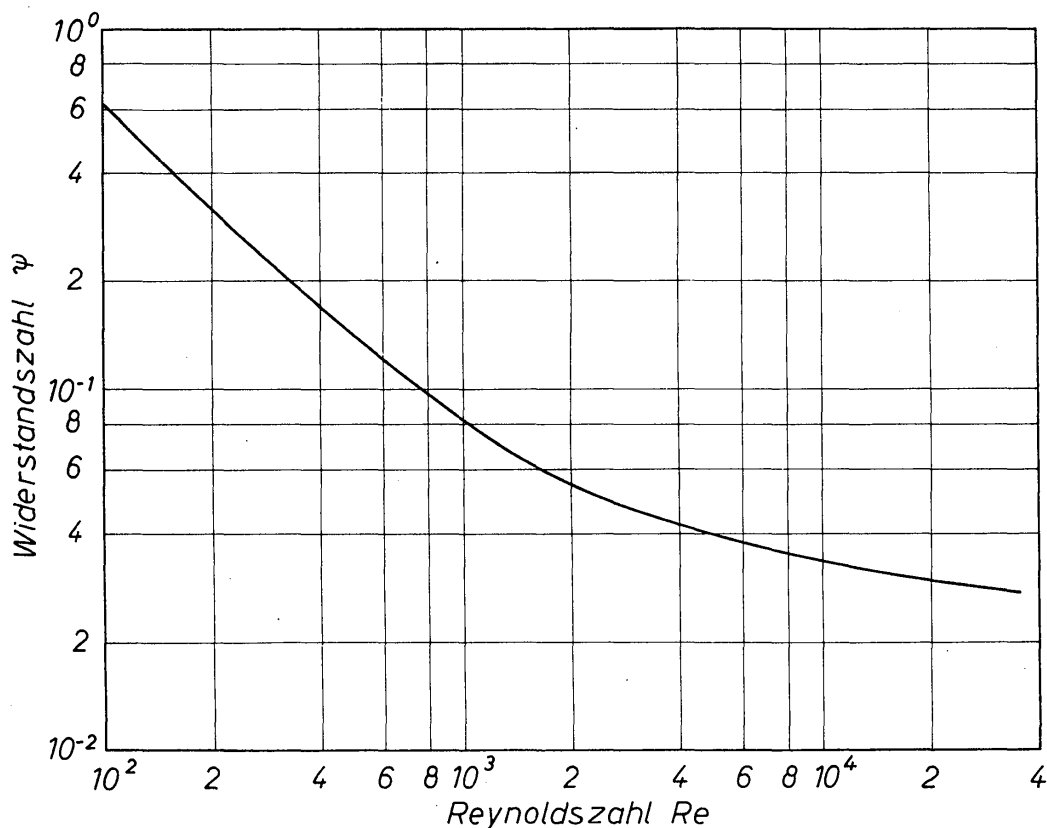


Bild 2.16. Widerstandszahl für Ringkanal mit Längsrippen, abhängig von der Reynoldszahl

2.2 Strömung durch andere Kanäle

Es soll die Strömung durch Kanäle mit rechteckigen, elliptischen, dreieckigen, rhombischen und einigen ungewöhnlichen Querschnittsflächen betrachtet werden. Die hierfür mitgeteilten Widerstandsgesetze sind, wie bereits für Ringkanäle, in eine solche Form gebracht, daß sie leicht mit den bekannten Gesetzen für die Rohrströmung verglichen werden können. Auf diese Weise ergibt sich zwanglos eine abgerundete Vorstellung von der Bedeutung des hydraulischen Durchmessers. Der praktisch tätige Ingenieur sollte dann in der Lage sein, auch Strömungen

durch Kanäle mit Querschnittsformen, die hier nicht behandelt werden, sicher zu beurteilen und ihren Druckverlust mit ausreichender Genauigkeit vorauszubestimmen.

2.21 Kanäle mit rechteckiger Querschnittsfläche

Nach CORNISH [2.17] ergibt sich für laminar durchströmte Kanäle mit rechteckigem Querschnitt folgendes Widerstandsgesetz:

$$\psi = \varphi_r \frac{64}{Re}. \quad (2.21)$$

Hierbei ist φ_r eine Funktion des Seitenverhältnisses b/a des Rechteckes, die in *Bild 2.17* angegeben ist. Als charakteristische Länge dient der hydraulische Durchmesser d_h gemäß Gl. (2.16). Die wichtigsten Sonderfälle sind Kanäle von quadratischem Querschnitt ($a = b$), mit $\varphi_r = 0,89$, und ebene Kanäle ($a \gg b$),

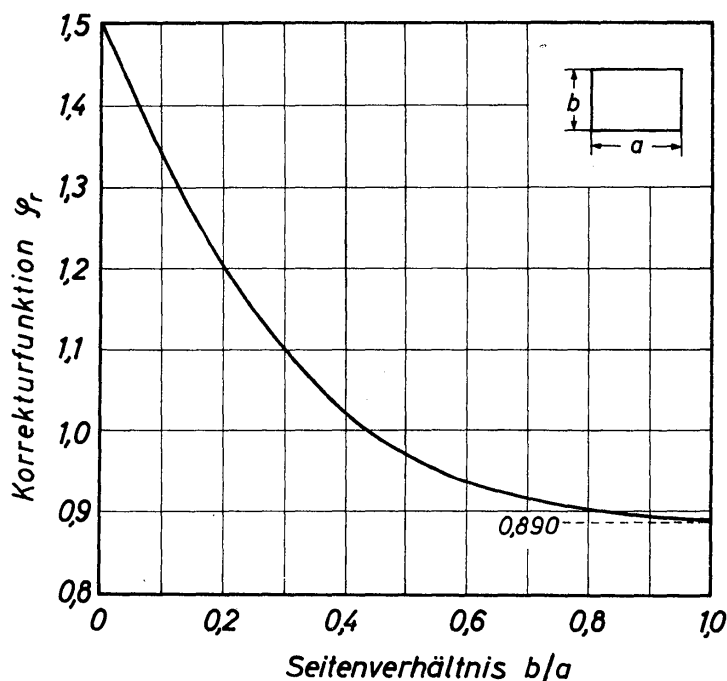


Bild 2.17. Abhängigkeit der Korrekturfunktion φ_r für die Widerstandszahl von laminar durchströmten Kanälen mit rechteckigem Querschnitt vom Seitenverhältnis a/b

mit $\varphi_r = 1,5$. Die in *Bild 2.17* dargestellte Kurve, die das Ergebnis der theoretischen Untersuchung von CORNISH darstellt, läßt sich mit sehr guter Genauigkeit durch folgende empirische Gleichung annähern:

$$\varphi_r = 0,878 + 0,0566 \varepsilon + 0,758 \varepsilon^2 - 0,193 \varepsilon^3. \quad (2.22)$$

Hierin ist

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-b/a}{1+b/a} \quad (2.23)$$

eine Funktion des Seitenverhältnisses.

Für die laminare Strömung durch ebene Spalte ($a \gg b$) berechnete STEPHAN [2.18] die zur Ausbildung des Geschwindigkeitsprofils erforderliche Einlaufänge zu

$$\left(\frac{L}{d_h}\right)_h = 0,0112 Re. \quad (2.24)$$

Hierin ist d_h der hydraulische Durchmesser des Spaltes, der gleich der doppelten Spaltbreite ist. Der Rechnung liegt die Annahme zugrunde, daß der in Spaltmitte auftretende maximale Wert der Geschwindigkeit nur noch 1% von dem endgültigen Wert bei unendlich langer Lauflänge abweicht. WANG und LONGWELL [2.19] ließen eine Abweichung von 2% zu und berechneten den festen Zahlenwert zu 0,0084. Bei turbulenter Strömung läßt sich die Einlauflänge näherungsweise nach der für das Rohr geltenden Gl.(1.87) berechnen.

Bei turbulenter Strömung durch Kanäle mit rechteckigem Querschnitt läßt sich auf Grund neuer Versuche mit technisch hinreichender Genauigkeit das Blasius'sche Widerstandsgesetz nach Gl.(1.50) anwenden, wenn für die charakteristische Länge der hydraulische Durchmesser gewählt wird [2.20].

Beim Bau von Wärmeaustauschern bevorzugt man häufig sehr kurze Kanäle, um die günstige Wirkung des Anlaufvorganges für den Wärmeübergang ausnutzen zu können. Gleichzeitig verändert sich aber auch der Druckverlust. RAESFELD [2.21] hat den Wärmeübergang und den Druckverlust in sehr kurzen, luftdurchströmten Kanälen gemessen. Die Breite der Querschnittsfläche blieb bei allen Versuchen mit $a = 300$ mm unverändert. Verändert wurden die Höhe b und die Länge L der Kanäle. Die aus den Druckverlustmessungen berechneten Widerstandszahlen sind in *Bild 2.18* über der Reynoldszahl aufgetragen. Das Längenverhältnis L/d_h ist in allen Fällen kleiner als die nach Gleichungen (2.24) bzw. (1.87) berechnete hydrodynamische Einlauflänge. Das heißt also, daß die Strömung mit Sicherheit noch nicht ausgebildet war. Widerstandszahl und Reynolds-

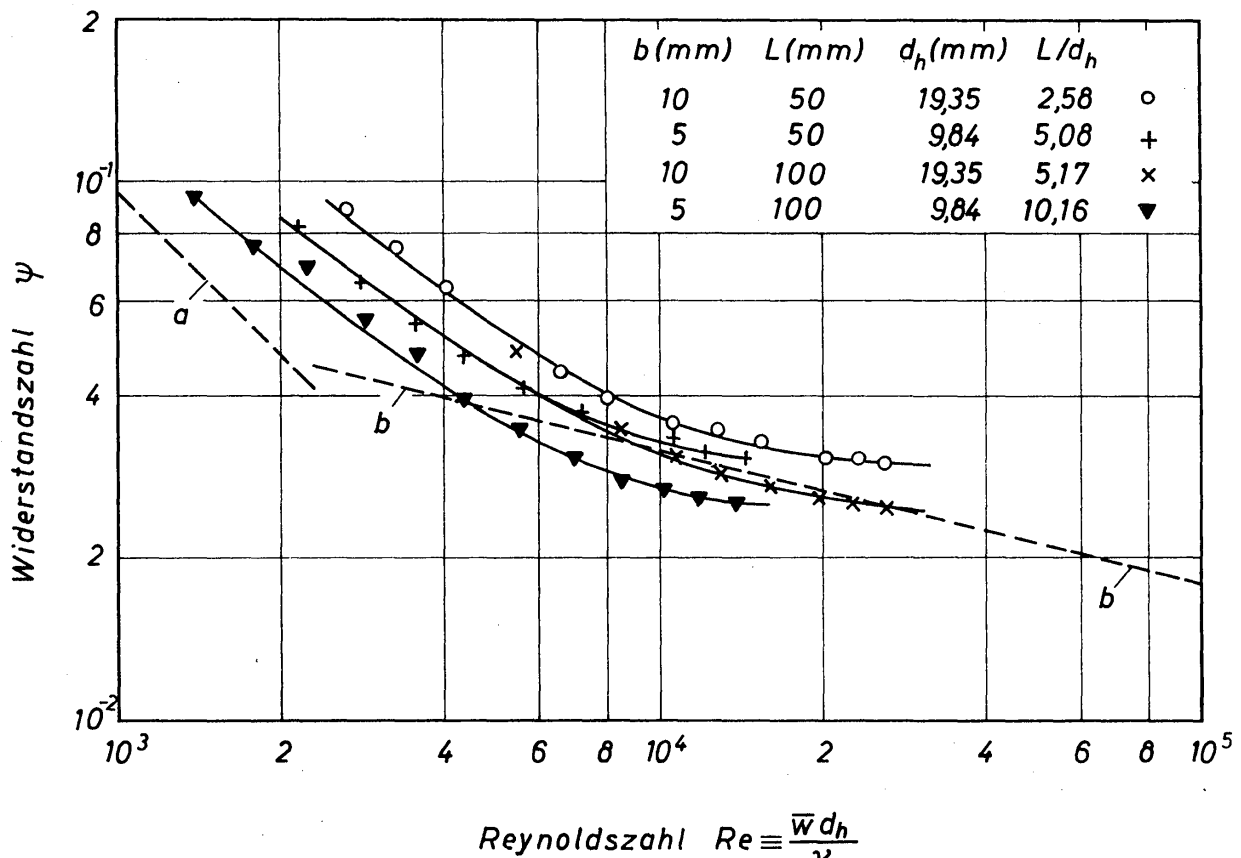


Bild 2.18. Widerstandszahlen für sehr kurze Kanäle mit rechteckförmiger Querschnittsfläche, abhängig von der Reynoldszahl Re und dem Längenverhältnis L/d_h

zahl sind mit dem hydraulischen Durchmesser d_h gebildet. Zum Vergleich sind in *Bild 2.18* die Kurven *a* und *b* eingezeichnet, die die Widerstandsgesetze für ebene Kanäle im Bereich laminarer und turbulenter Strömung wiedergeben. Für ebene Kanäle ist bei laminarer Strömung der Korrekturfaktor $\varphi_r = 1,5$. Die von RAESFELD untersuchten Kanäle hatten im Seitenverhältnis $b/a = 0,0333$ bzw. $0,0167$, so daß φ_r nur wenig kleiner ist als $1,5$. Bei ausgebildeter Strömung müßten die Meßwerte daher auch noch nahezu auf der Kurve liegen. Die Abweichungen der Meßwerte von Kurve *a* sind somit auf die zu geringe Einlaufänge L/d_h zurückzuführen, innerhalb der sich das Geschwindigkeitsprofil noch nicht ausbilden kann. Die Meßwerte zeigen, daß die Widerstandszahl um so größer ist, je kleiner das Verhältnis L/d_h ist. Mit zunehmender Reynoldszahl scheinen sich die Meßwerte der Kurve *b* anzunähern. Lediglich die Meßwerte für den Kanal mit $L/d_h = 2,58$ folgen diesem zu erwartenden Verlauf nicht ganz.

2.22 Kanäle mit elliptischer Querschnittsfläche

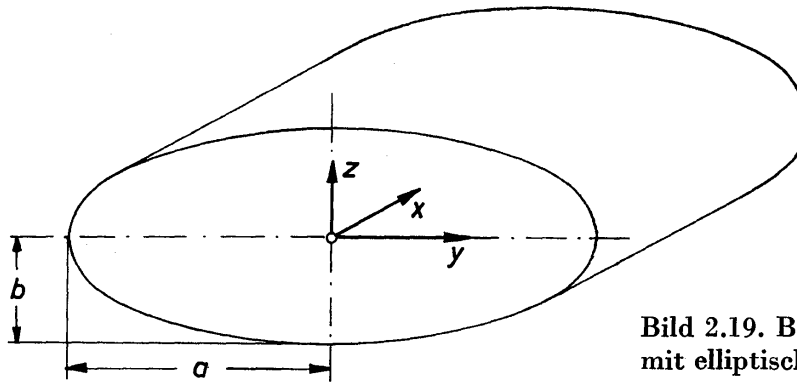


Bild 2.19. Bezeichnungen bei Kanälen mit elliptischer Querschnittsfläche

Die laminare Strömung durch Kanäle mit elliptischer Querschnittsfläche hat HOFMANN [2.22] näher untersucht. Mit den Bezeichnungen von *Bild 2.19* ist a die große und b die kleine Halbachse. Die in der Querschnittsfläche liegenden Ortskoordinaten sind y und z . Die Strömung erfolgt in der x -Richtung. Bei stationärer und inkompressibler Strömung gilt allgemein für die Strömung durch Kanäle mit beliebig geformten Querschnittsflächen die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \frac{\Delta P/L}{\eta}, \quad (2.25)$$

wenn die Querschnittsflächen durch die Koordinaten y und z beschrieben werden. Ihre Form wird erst durch die Randbedingung festgelegt. Denn an den Kanalwänden muß die Haftbedingung, also $w = 0$, erfüllt werden. Der Rand des Querschnittes ist durch die Ellipsengleichung

$$1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 0 \quad (2.26)$$

gegeben. Zur Lösung von Gl.(2.25) unter Berücksichtigung der Randbedingung wird der Ansatz

$$w = C \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right] \quad (2.27)$$

gemacht. Bildet man hiervon die zweiten Ableitungen nach y und z und führt sie in Gl.(2.25) ein, so erhält man für C den Ausdruck

$$C = \frac{\Delta P/L}{2 \eta} \frac{a^2}{1 + (a/b)^2}. \quad (2.28)$$

Nach Einsetzen in Gl.(2.27) ergibt sich dann als Gleichung für die örtliche Geschwindigkeit

$$w = \frac{\Delta P/L}{2 \eta} \frac{a^2}{1 + (a/b)^2} \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right]. \quad (2.29)$$

Diese Gleichung wurde bereits von KNUDSEN und KATZ [2.4] mitgeteilt. Sie geht in die Gleichung für die Rohrströmung über, wenn $a = b = R$ gesetzt wird. Der Übergang zur Strömung zwischen parallelen Platten ließe sich formal vollziehen, wenn man $a = \infty$ und $b = 0$ setzt. Streng genommen ist das aber nicht zulässig, weil man damit gegen die Ellipsengleichung (2.26) verstößt. Hierauf wird später noch einmal eingegangen. Die maximale Geschwindigkeit tritt bei $z = y = 0$ auf:

$$w_{\max} = \frac{\Delta P/L}{2 \eta} \frac{a^2}{1 + (a/b)^2}. \quad (2.30)$$

Damit läßt sich das Verhältnis w/w_{\max} bilden, wofür sich die einfache Beziehung

$$\frac{w}{w_{\max}} = 1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \quad (2.31)$$

ergibt. Durch Integration von Gl.(2.29) über die Ellipsenfläche erhält man den Volumstrom \dot{V} , aus dem nach Division durch die Ellipsenfläche

$$F = \pi a b \quad (2.32)$$

die Gleichung für die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} folgt:

$$\bar{w} = \frac{\Delta P/L}{4 \eta} \frac{a^2}{1 + (a/b)^2}. \quad (2.33)$$

Diese Gleichung ist bereits von KARAS [2.23] angegeben worden. Sie wird zur Aufstellung des Widerstandsgesetzes verwendet.

Das Widerstandsgesetz für die laminare Strömung lautet

$$\psi = \varphi_e \frac{64}{Re}, \quad (2.34)$$

worin ψ und Re die bereits durch Gleichungen (2.14) und (2.15) definierten Größen sind. Der hierin auftretende hydraulische Durchmesser $d_h = 4 F/U$ läßt sich mittels Gl.(2.32) für F und die folgende Gleichung für den Ellipsenumfang U berechnen:

$$U = \pi (a + b) \left[1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \varepsilon^{2n} \right\} \right]. \quad (2.35)$$

Hierin ist ε die durch Gl. (2.23) bereits gegebene Funktion des Achsenverhältnisses b/a . Damit folgt für den Korrekturfaktor φ_e im Widerstandsgesetz:

$$\varphi_e = \frac{1 + \varepsilon^2}{\left[1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \varepsilon^{2n} \right\} \right]^2}. \quad (2.36)$$

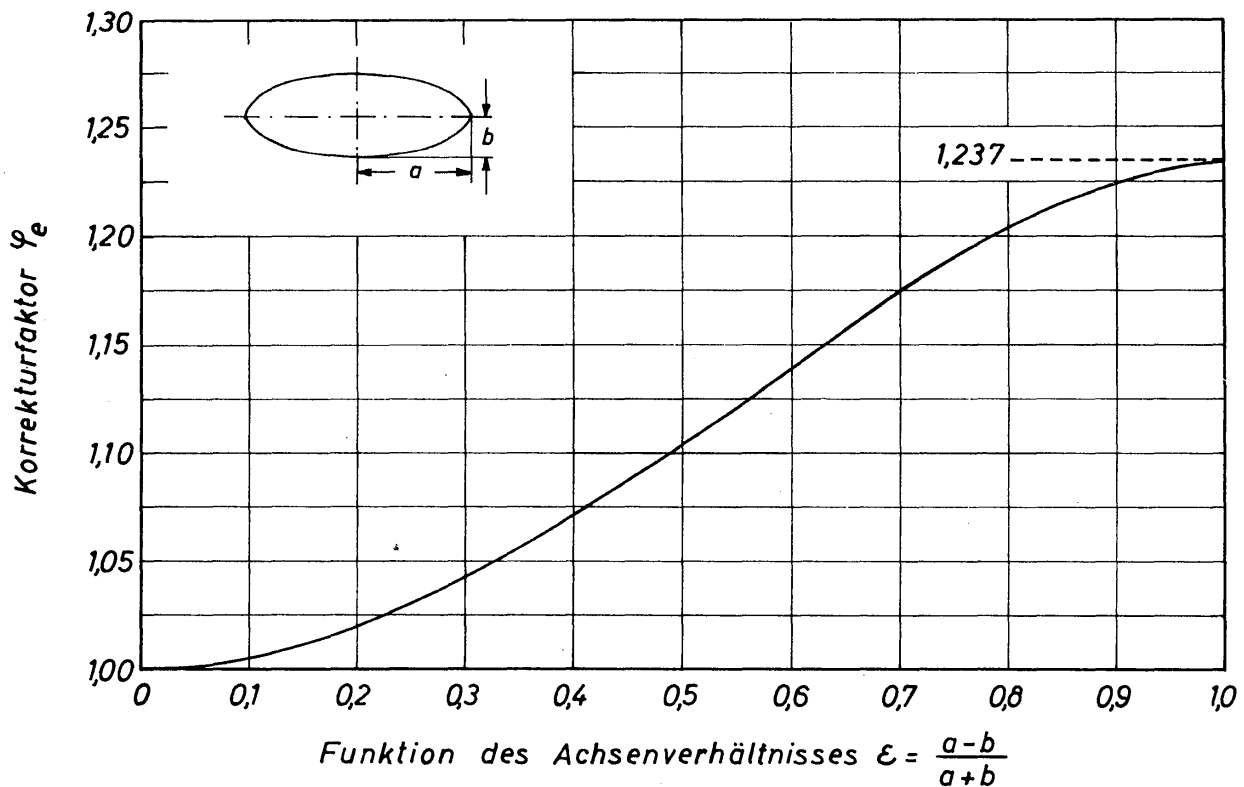


Bild 2.20. Korrekturfaktor φ_e zum Widerstandsgesetz für Kanäle mit elliptischer Querschnittsfläche, die laminar durchströmt werden

In Bild 2.20 ist φ_e abhängig von ε dargestellt. Der Kurvenverlauf läßt sich mit sehr guter Genauigkeit durch folgende empirische Funktion annähern:

$$\varphi_e = 1,12 - 0,12 \cos (2,9 \varepsilon). \quad (2.37)$$

Für $\varepsilon = 0$ ist $a = b$ und $\varphi_e = 1$. Da die Ellipsenfläche in die Kreisfläche übergegangen ist, gilt somit das Widerstandsgesetz $\psi = 64/Re$. Für $\varepsilon = 1$ ist $b/a = 0$ und $\varphi_e = 1,237$. Der Fall $b/a = 0$ führt, was ausdrücklich betont sei, nicht auf einen ebenen Kanal, worunter man zwei parallele Platten versteht, deren Abstand gleich b und Breite $a = \infty$ ist. Für den ebenen Kanal mit $b/a = 0$ hatte sich $\varphi_r = 1,5$ ergeben.

Der Unterschied zwischen einem ebenen Kanal und einem Kanal mit elliptischer Querschnittsfläche sehr großen Achsenverhältnisses wird verständlich, wenn man die Wandschubspannung über den Umfang der Kanäle betrachtet. Beim ebenen Kanal ist die Wandschubspannung an beiden Platten gleich und außerdem kon-

stant. Beim Kanal mit elliptischem Querschnitt ändert sich jedoch die Wandschubspannung τ_w mit dem Achsenverhältnis b/a ganz erheblich. Für die Komponenten τ_{xy} und τ_{xz} der Schubspannung ergibt sich:

$$\tau_{xy} = \frac{\Delta P}{L} \frac{b^2}{a^2 + b^2} y, \quad (2.37 a)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\Delta P}{L} \frac{a^2}{a^2 + b^2} z. \quad (2.38)$$

Hiermit folgt die Schubspannung τ durch geometrische Addition zu:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{\Delta P}{L} \frac{b}{1 + (b/a)^2} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}. \quad (2.39)$$

Eliminiert man $(z/b)^2$ mittels der Ellipsengleichung (2.26), so erhält man die Wandschubspannung zu

$$\tau_w = \frac{\Delta P}{L} \frac{b}{1 + (b/a)^2} \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right] \left(\frac{y}{a}\right)^2}. \quad (2.40)$$

Bei $y/a = 0$ tritt die maximale Wandschubspannung

$$\tau_{w_{\max}} = \frac{\Delta P}{L} \frac{b}{1 + (b/a)^2} \quad (2.41)$$

und bei $y/a = 1$ die minimale Wandschubspannung

$$\tau_{w_{\min}} = \frac{\Delta P}{L} \frac{a}{1 + (a/b)^2} \quad (2.42)$$

auf. Das Verhältnis von minimaler zu maximaler Wandschubspannung ist

$$\frac{\tau_{w_{\min}}}{\tau_{w_{\max}}} = \frac{b}{a}. \quad (2.43)$$

Das Schubspannungsverhältnis ist also gleich dem Achsenverhältnis b/a , das sich theoretisch von 0 bis 1 ändern kann. Beim ebenen Kanal ist die Schubspannung konstant, und zwar gleich $\Delta P b/L$. Dieser Wert folgt aus Gl.(2.41), wenn man $(b/a)^2$ gegen 1 vernachlässigt. Beim ebenen Kanal tritt also die für Kanäle mit elliptischer Querschnittsfläche denkbar größte Wandschubspannung über die gesamte Kanalbreite auf, während sie beim elliptischen Kanal nur in einem Punkt, nämlich $y = 0$, vorhanden ist und dann sehr stark abnimmt. Damit ist es also verständlich, daß φ_e für $\varepsilon = 1$ einen Wert annehmen muß, der kleiner als 1,5 ist. Eine anschauliche Vorstellung von der Änderung der Wandschubspannung über den Ellipsenumfang vermittelt *Bild 2.21*.

In *Bild 2.22* sind einige von GLASER [2.24] mitgeteilte Meßwerte für den Strömungswiderstand über der Reynoldszahl Re aufgetragen. Kurve *a* gibt Gl.(2.34) und Kurve *b* das Widerstandsgesetz für turbulent durchströmte Rohre mit kreisförmiger Querschnittsfläche wieder. Im laminaren Strömungsbereich darf man die theoretische Gleichung als erfüllt ansehen. Da sich der Korrekturfaktor φ_e

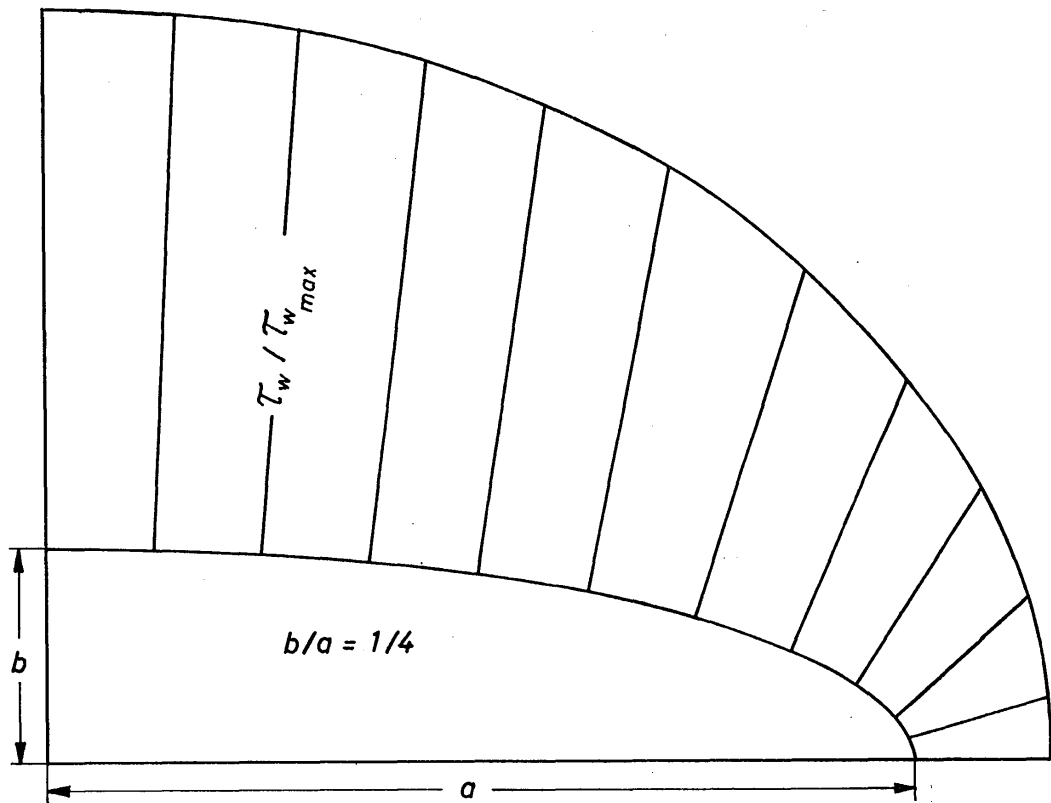


Bild 2.21. Bezogene örtliche Wandschubspannung $\tau_w / \tau_{w_{max}}$ über den Ellipsenumfang für ein Achsenverhältnis $b/a = 1/4$

nur zwischen 1 und 1,237 ändert, überrascht es nicht, daß man den Widerstand elliptischer Kanäle bei turbulenter Strömung mit dem Gesetz für Kreisrohre bestimmen kann, so man den hydraulischen Durchmesser als charakteristische Länge in die Widerstands- und die Reynoldszahl einführt.

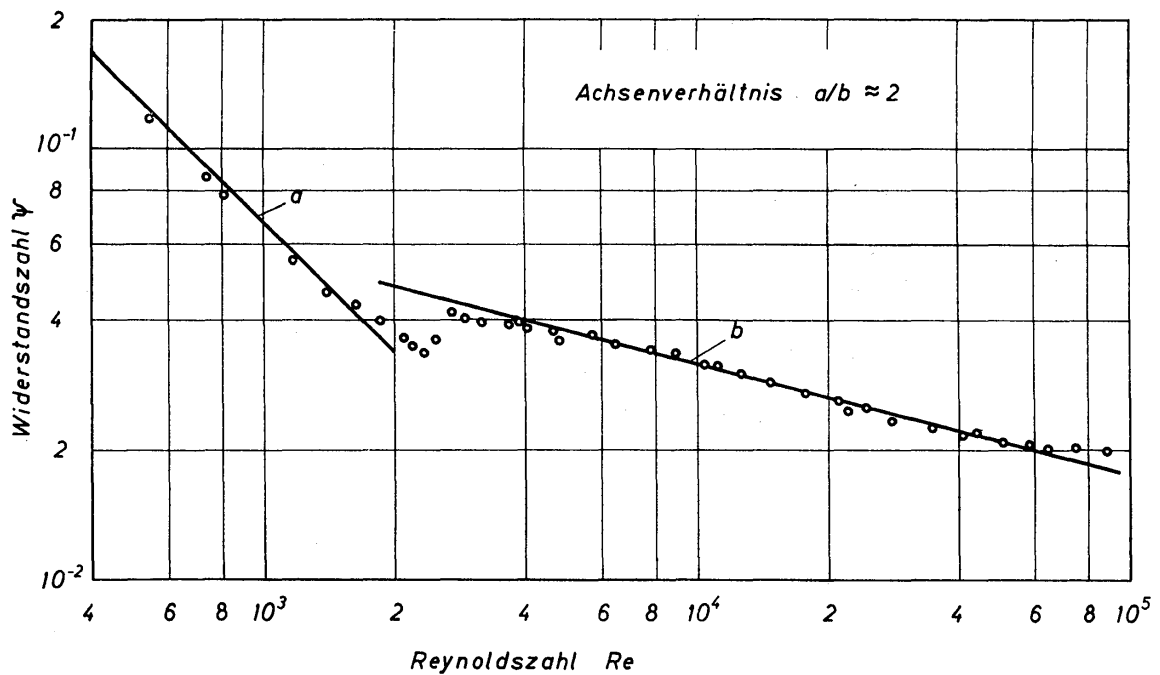


Bild 2.22. Vergleich zwischen experimentell und theoretisch bestimmten Widerstandszahlen für einen Kanal mit elliptischem Querschnitt. Kurve a nach Gl.(2.34) und Kurve b nach Gl.(1.50) für das Kreisrohr

2.23 Kanäle mit rhombischer Querschnittsfläche

Die Untersuchung der Strömung in Kanälen mit rhombischer Querschnittsfläche liefert einen besonders guten Einblick in das Verhalten eines Fluids in spitzwinkligen Querschnittsteilen. Die Rechnungen für die laminare Strömung hat HOFMANN [2.22] durchgeführt. Mit den Bezeichnungen in *Bild 2.23* gilt für die Geschwindigkeitsverteilung die Differentialgleichung (2.25), die mittels eines Differenzenverfahrens gelöst wurde. Eine sehr anschauliche Vorstellung von der Geschwindigkeitsverteilung liefert die perspektivische Darstellung in *Bild 2.24*,

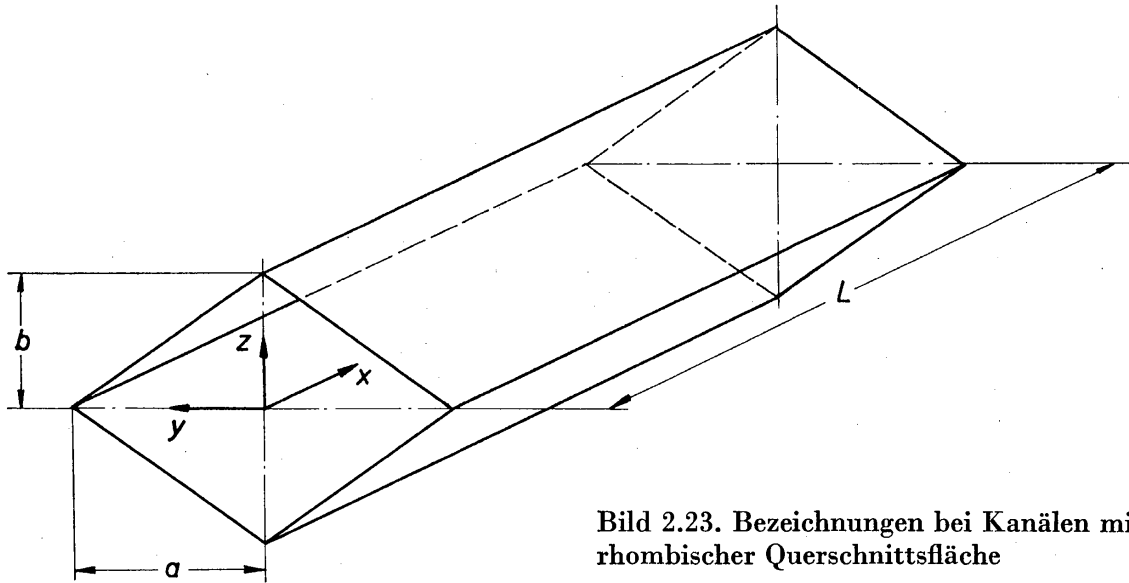
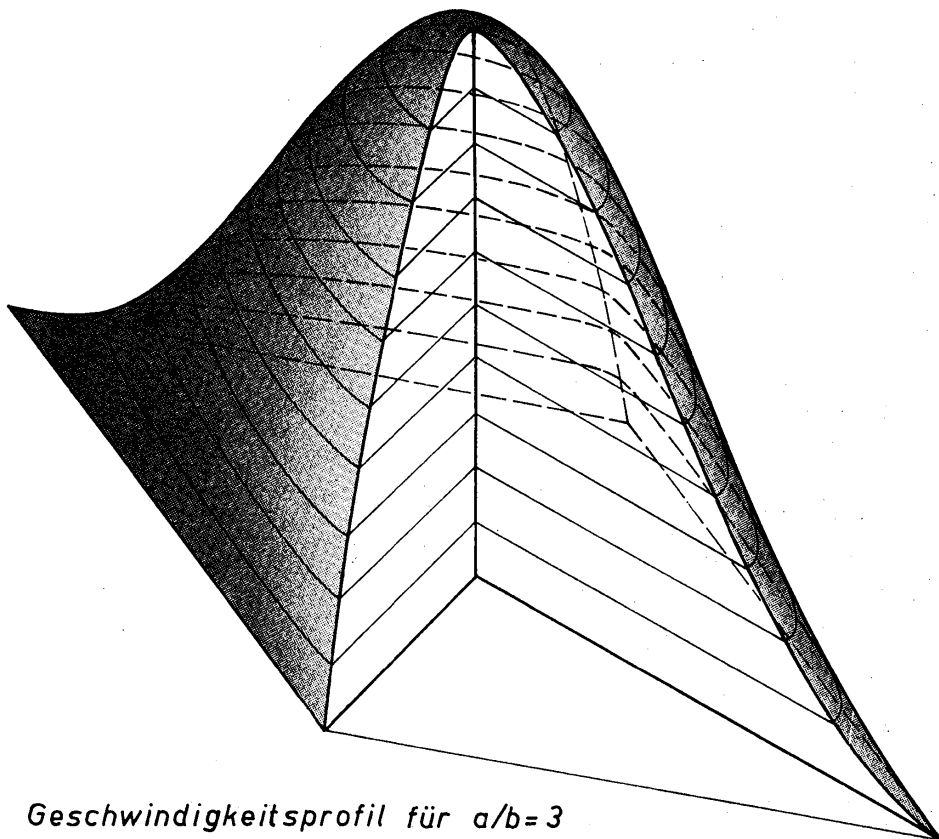


Bild 2.23. Bezeichnungen bei Kanälen mit rhombischer Querschnittsfläche



Geschwindigkeitsprofil für $a/b=3$

Bild 2.24. Räumliche Darstellung des Geschwindigkeitsprofils für einen Kanal mit rhombischer Querschnittsfläche und einem Achsenverhältnis $a/b = 3$

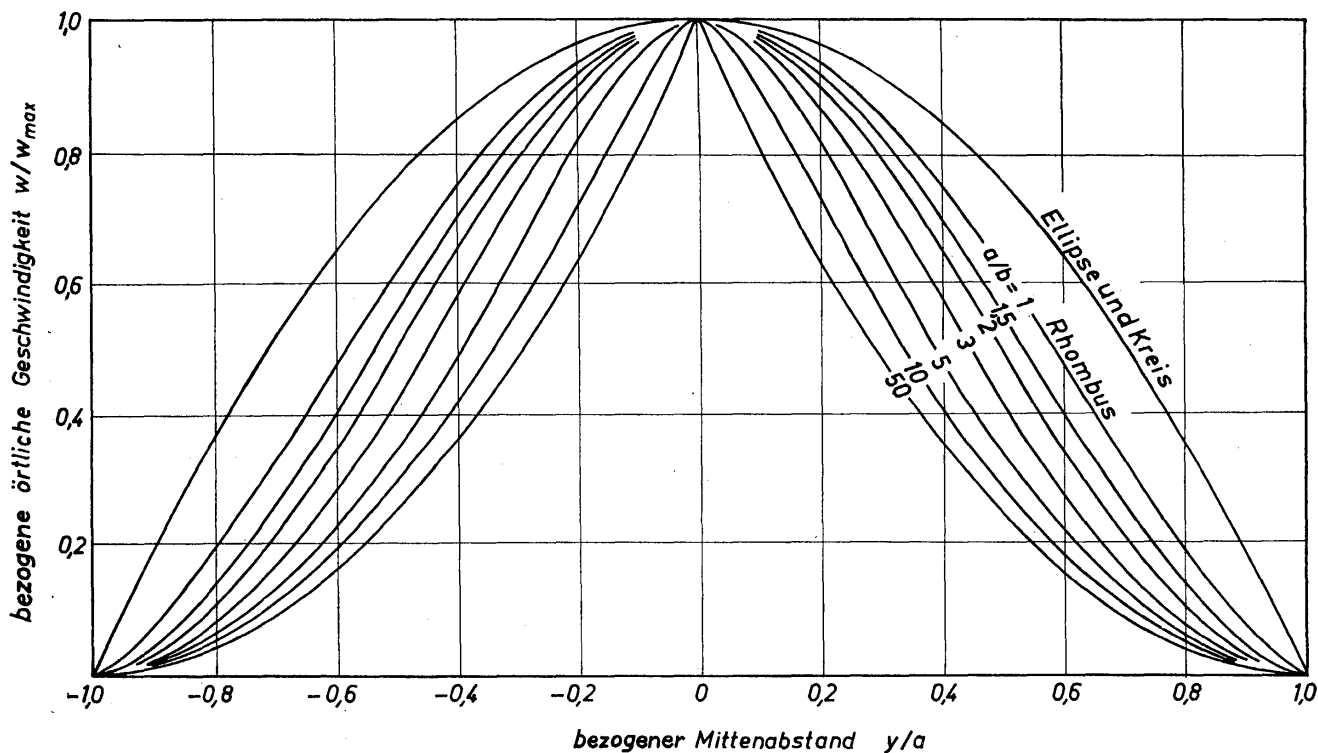


Bild 2.25. Abhängigkeit der bezogenen örtlichen Geschwindigkeit w/w_{\max} vom bezogenen Mittenabstand y/a für verschiedene Werte des Seitenverhältnisses a/b rhombischer Querschnittsflächen; zum Vergleich ist die entsprechende Geschwindigkeitsverteilung in elliptischen und kreisförmigen Querschnittsflächen angegeben

die für ein Seitenverhältnis von $a/b = 3$ gilt. In *Bild 2.25* ist für sieben verschiedene Werte des Seitenverhältnisses a/b die auf die maximale bezogene örtliche Geschwindigkeit w/w_{\max} über dem bezogenen Abstand vom Mittelpunkt y/a bei $z/b = 0$ aufgetragen. Alle Geschwindigkeitsprofile weisen einen Wendepunkt auf. Mit zunehmendem Seitenverhältnis a/b nimmt der Geschwindigkeitsgradient an der Stelle $y/a = 1$ sehr schnell ab. Das bedeutet also, daß die Geschwindigkeit des Fluids in den spitzen Ecken unverhältnismäßig niedrig ist. Zum Vergleich ist in *Bild 2.25* die Geschwindigkeitsverteilung über der großen Achse einer elliptischen Querschnittsfläche eingezeichnet, die mit derjenigen im Kreisquerschnitt übereinstimmt. Ferner ist die bezogene mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{w}^* \equiv \frac{\bar{w} \eta L}{\Delta P a^2} \quad (2.44)$$

abhängig vom reduzierten Achsenverhältnis ε berechnet und in *Bild 2.26* dargestellt worden. Zum Vergleich ist in das gleiche Bild auch die entsprechende Kurve für einen Kanal mit elliptischer Querschnittsfläche eingezeichnet.

Für das Widerstandsgesetz bei laminarer Strömung gilt die Beziehung

$$\psi = \varphi_{rh} \frac{64}{Re} \cdot \quad (2.45)$$

Die Widerstandszahl ψ und die Reynoldszahl Re sind gemäß den Gleichungen (2.14) und (2.15) mit dem hydraulischen Durchmesser d_h definiert. Der nach numerischem Verfahren berechnete Korrekturfaktor φ_{rh} ist in *Bild 2.27* über dem

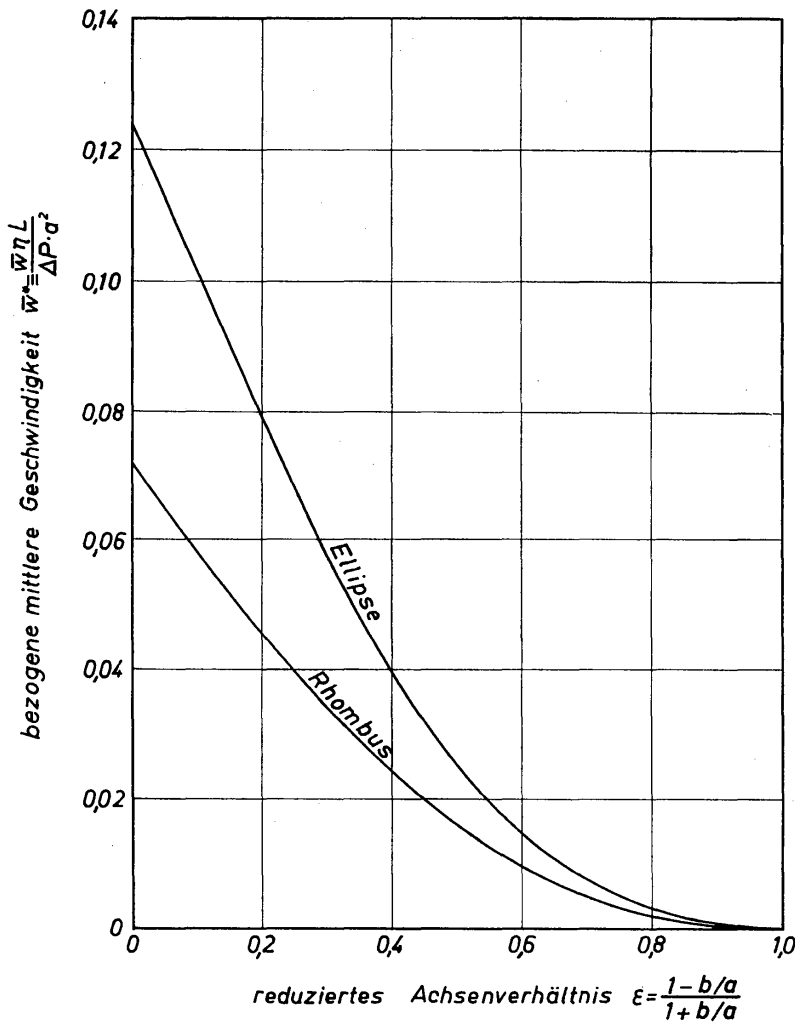


Bild 2.26. Abhängigkeit der bezogenen mittleren Geschwindigkeit \bar{w}^* vom reduzierten Achsenverhältnis ε für Kanäle mit rhombischer und elliptischer Querschnittsfläche

reduzierten Achsenverhältnis ε aufgetragen. Die Kurve wird durch die empirische Gleichung

$$\varphi_{rh} = 0,79 + 0,072 \cos(\pi \cdot \varepsilon) \tag{2.46}$$

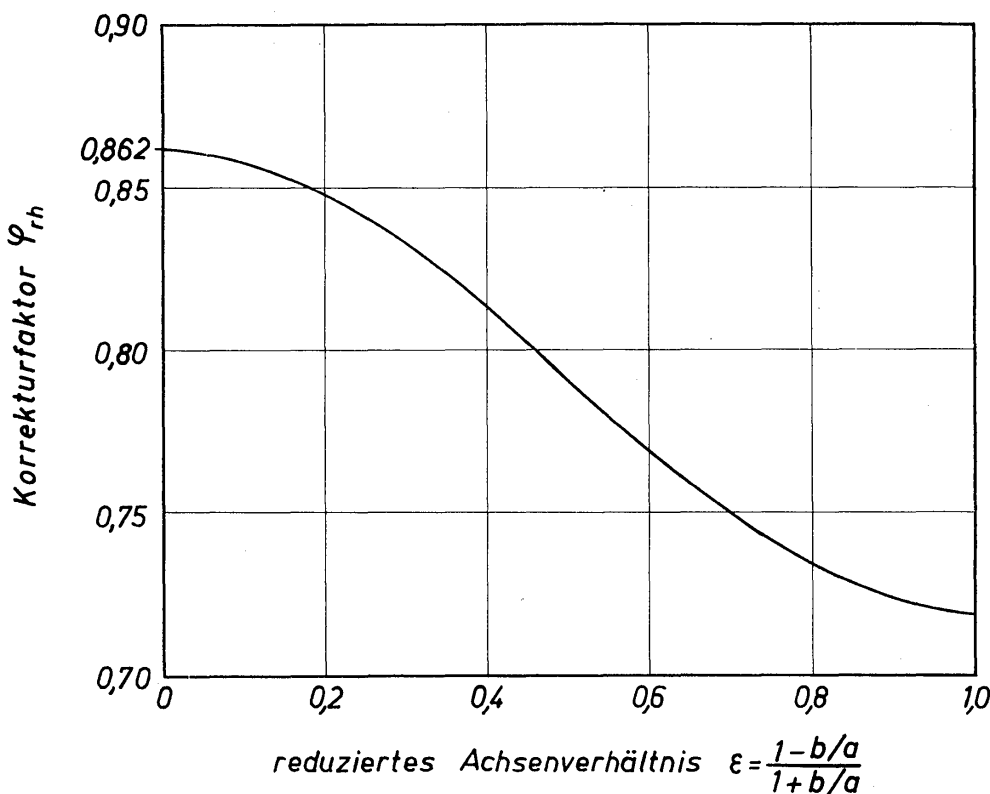


Bild 2.27 Korrekturfaktor φ_{rh} zum Widerstandsgesetz für Kanäle mit rhombischer Querschnittsfläche, die laminar durchströmt werden

sehr gut angenähert. Für $\varepsilon = 0$ ist $a = b$, und somit geht die rhombische in eine quadratische Fläche über. Nach *Bild 2.27* und Gl. (2.46) ergibt sich für diesen Fall $\varphi_{rh} = 0,862$. Aus *Bild 2.17* ergibt sich hingegen für $b/a = 1$ der Wert 0,890. Dieses dürfte der genauere Wert sein, da er sich auf Grund einer geschlossenen Lösung des Strömungsproblems ergibt. Für die rhombische Querschnittsfläche wurde die Lösung mittels eines Differenzenverfahrens durchgeführt, wobei die Schrittzahl begrenzt war. Der Unterschied zwischen den beiden Werten beträgt aber nur 3% und ist daher für technische Probleme unbedeutend.

Für die turbulente Strömung durch Kanäle mit rhombischer Querschnittsfläche liegen noch keine Untersuchungen vor. Zur Berechnung der Widerstandszahl wird das Blasius'sche Gesetz für Kreisrohre empfohlen. Man wird dann sehr wahrscheinlich für große Werte des Achsenverhältnisses a/b eine etwas zu große Widerstandszahl erhalten.

2.24 Kanäle mit dreieckiger Querschnittsfläche

Das Widerstandsgesetz für laminar durchströmte Kanäle mit dreieckiger Querschnittsfläche läßt sich ebenfalls in der Form

$$\psi = \varphi_d \frac{64}{Re} \quad (2.47)$$

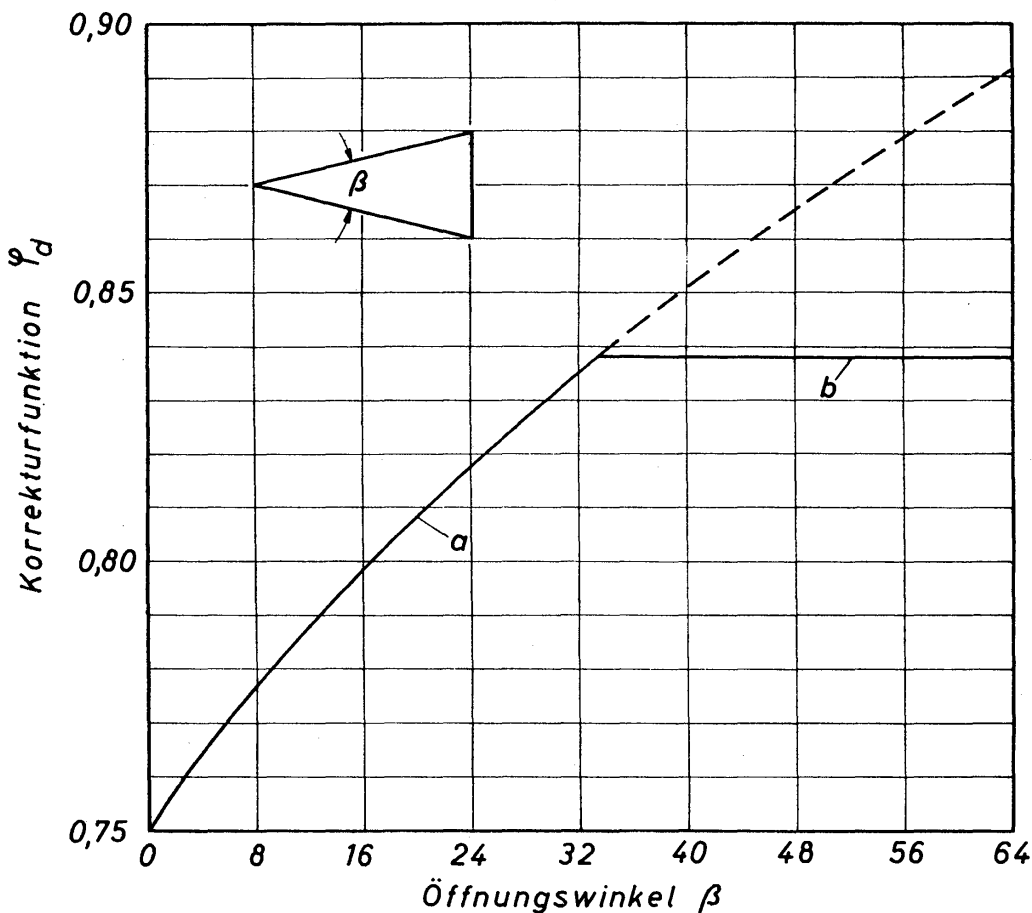


Bild 2.28. Abhängigkeit der Korrekturfunktion φ_d für die Widerstandszahl von laminar durchströmten Kanälen mit dreieckigem Querschnitt, abhängig vom Öffnungswinkel

schreiben, wenn in Re und ψ der hydraulische Durchmesser eingeführt wird. Nach experimentellen Untersuchungen von CARLSON und IRVINE [2.25] an Kanälen mit gleichschenkeligen Dreiecken als Querschnittsfläche hängt die Korrekturgröße φ_d vom Öffnungswinkel β ab. In *Bild 2.28* stellt Kurve *a* eine theoretische Lösung von ECKERT, IRVINE und YEN [2.26] dar. Kurve *b* wurde von NUTTAL [2.27] angegeben. Die ausgezogenen Kurvenäste werden durch Messungen gut bestätigt. Eine weitere Stütze erfahren die in *Bild 2.28* angegebenen Kurven *a* und *b* durch eine umfassende theoretische Untersuchung von SPARROW [2.28].

Im Bereich der turbulenten Strömung gilt für das Widerstandsgesetz die folgende Beziehung:

$$\psi = \frac{C}{Re^{1/4}}. \quad (2.48)$$

Aus Versuchsergebnissen ermittelten CARLSON und IRVINE [2.25] die in *Bild 2.29* in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel β angegebenen Werte von C ; mit $C = 0,3164$ geht Gl.(2.48) in das Gesetz von BLASIUS für Kreisrohre über.

Bei gleichem Wert der Reynoldszahl ergeben sich für Kanäle mit dreieckiger Querschnittsfläche sowohl bei laminarer als auch bei turbulenter Strömung ge-

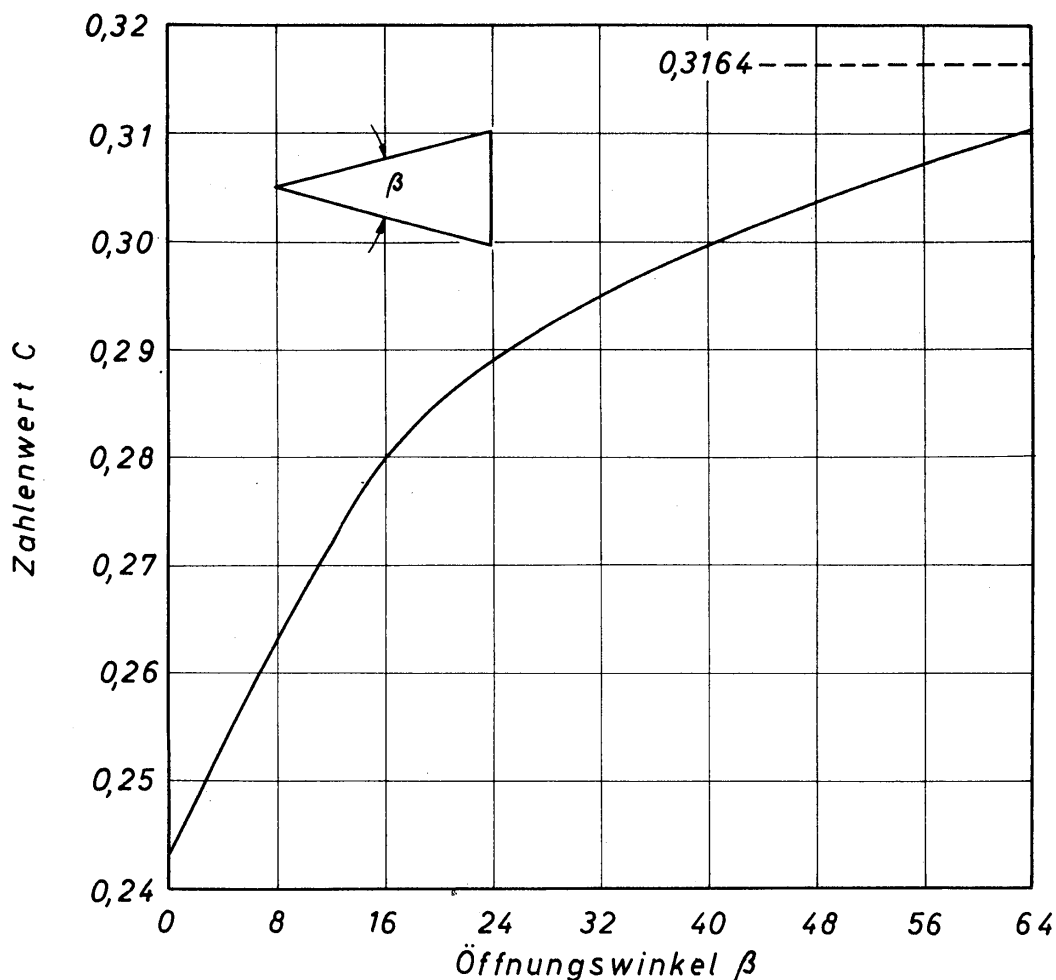


Bild 2.29. Abhängigkeit des Zahlenwertes C für die Widerstandszahl von turbulent durchströmten Kanälen mit dreieckigem Querschnitt, abhängig vom Öffnungswinkel

ringere Werte für die Widerstandszahl als für Kreisrohre, da die keilförmigen Querschnittsanteile in verstärktem Maße von der laminaren Grenzschicht ausgefüllt werden.

2.25 Kanäle mit ungewöhnlichen Querschnittsflächen

Es soll ein Kanal betrachtet werden, dessen Querschnitt in *Bild 2.30* dargestellt ist. Innerhalb des Kanals, dessen Querschnitt gleiche Kantenlänge aufweist, sind vier Rohre parallel zur Kanalachse angeordnet. Zur Abkürzung soll dieser Kanal Rohrkanal genannt werden. Innerhalb des Rohrkanals umströmt das Fluid die Außenwände der Rohre in axialer Richtung. Derartige Strömungsbedingungen treten häufig in Wärmeaustauschern auf, folglich interessieren die Geschwindigkeitsverteilung und der Strömungswiderstand. In zwei sehr gründlichen Studien haben

GUNN und DARLING [2.29] sowie SPARROW und LOEFFLER [2.30] diese Fragen bearbeitet. Die wichtigsten Ergebnisse werden im folgenden erläutert.

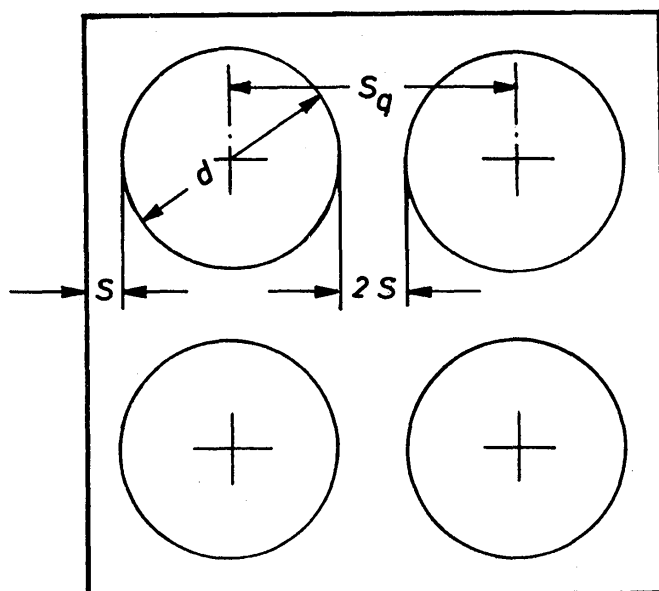


Bild 2.30
Querschnitt eines Rohrkanals,
parallel zu dessen Längsachse vier
Rohre angeordnet sind

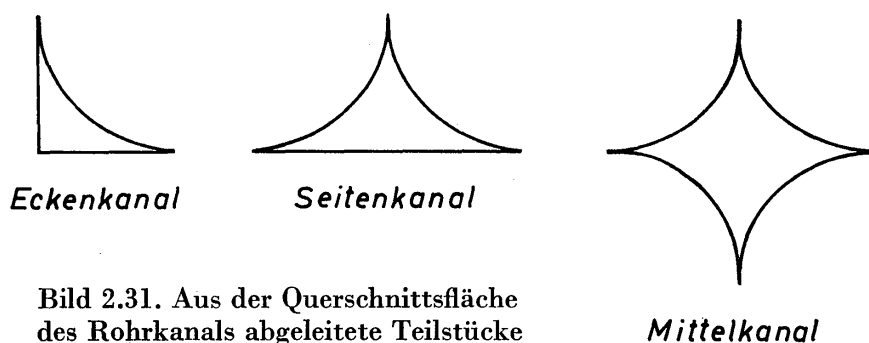


Bild 2.31. Aus der Querschnittsfläche
des Rohrkanals abgeleitete Teilstücke

Um einen vertieften Einblick in die Strömungsverhältnisse zu erhalten, untergliederten GUNN und DARLING den Querschnitt des Rohrkanals in drei Querschnittselemente, die in *Bild 2.31* dargestellt sind. Kanäle mit diesen Querschnittsformen werden Eckenkanal, Seitenkanal und Mittelkanal genannt. Für diese Kanäle und den Rohrkanal wurden die Geschwindigkeitsverteilungen für die laminare Strömung mittels eines Differenzenverfahrens berechnet. *Bild 2.32* zeigt die Iso-tachenfelder, in denen die örtliche Geschwindigkeit w als Vielfaches der mittleren

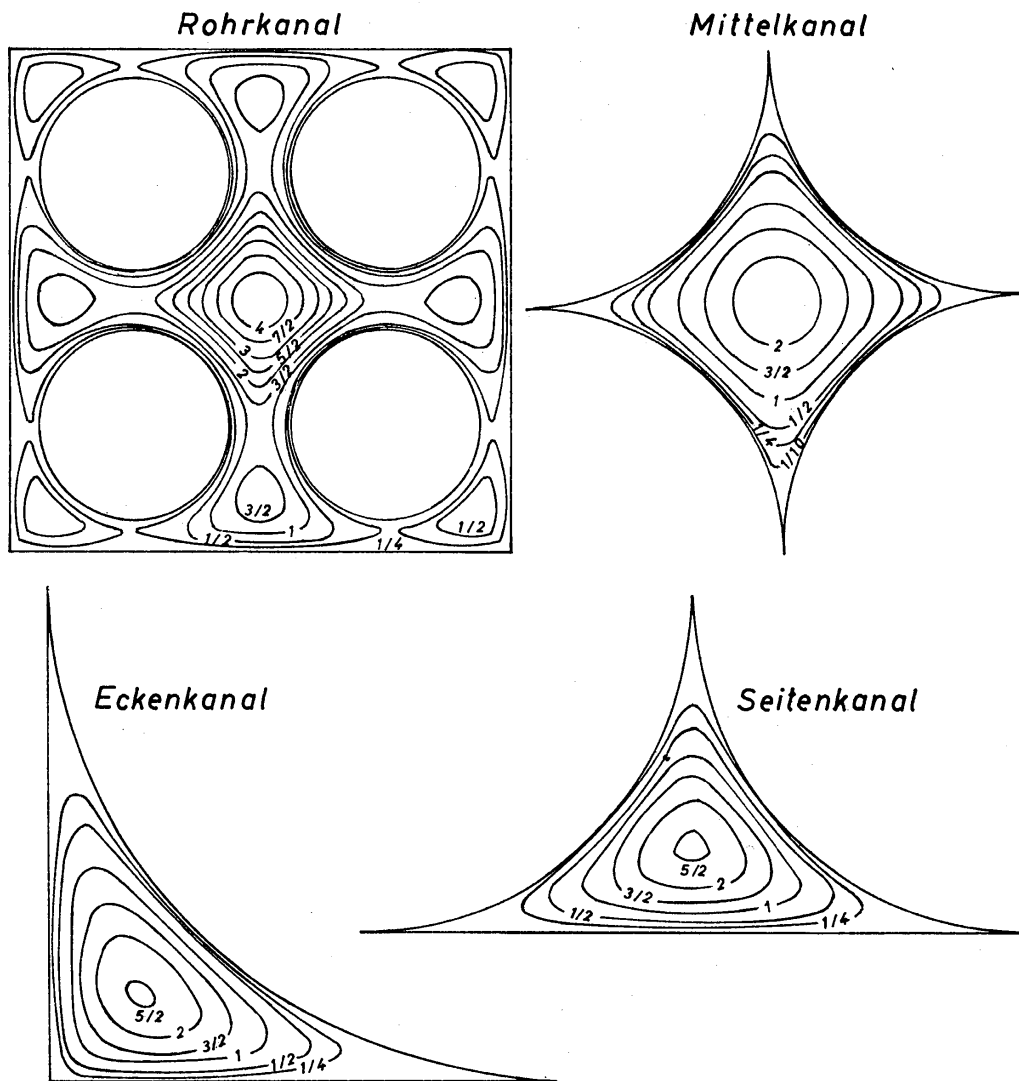


Bild 2.32. Isotachenfelder für vier Kanäle mit verschiedenen Querschnittsflächen bei laminarer Strömung; Zahlenwerte an den Kurven geben die örtliche Geschwindigkeit w als Vielfaches der mittleren Geschwindigkeit \bar{w} an

Geschwindigkeit \bar{w} angegeben ist. Folgende Werte wurden gewählt: $w/\bar{w} = 1/10 - 1/4 - 1/2 - 1 - 3/2 - 2 - 5/2 - 3 - 7/2 - 4$. Besonders hingewiesen sei auf das ausgedehnte Gebiet mit sehr niedriger Geschwindigkeit, das jeweils in den keilförmigen Spalten auftritt. Bemerkenswert ist ferner die maximale Geschwindigkeit, die beim Rohrkanal zu $4 \bar{w}$, beim Eckenkanal und Seitenkanal zu $2,5 \bar{w}$ und beim Mittelkanal zu $2 \bar{w}$ ermittelt wurde.

Für die turbulente Strömung wurden keine Isotachenfelder berechnet. Man darf aber, insbesondere auf Grund der Untersuchungen von ECKERT und IRVINE [2.31] sowie SPARROW [2.28] annehmen, daß auch bei turbulenter Strömung in den keilförmigen Ecken eines Kanalquerschnitts die örtliche Geschwindigkeit im Vergleich zur mittleren sehr stark herabgesetzt ist und die Strömung hier auch laminaren Charakter aufweist.

Die von GUNN und DARLING berechneten Widerstandsgesetze für die laminar durchströmten Kanäle lassen sich in der Form

$$\psi = \varphi_1 \frac{64}{Re} \quad (2.49)$$

schreiben. Sowohl die Widerstandszahl ψ als auch die Reynoldszahl Re werden mit dem hydraulischen Durchmesser gebildet. Hierin gibt φ_l die Abweichung von dem Gesetz für laminar durchströmte Rohre mit Kreisquerschnitt an. Für φ_t ergeben sich die in Tabelle 2.4 zusammengestellten Werte.

Tabelle 2.4: Korrekturfaktoren φ_l und φ_t für die Widerstandsgesetze bei laminarer und turbulenter Strömung sowie die kritischen Reynoldszahlen

	φ_l	φ_t	Re_{kr}
Kreisrohr	1,000	1,000	2320
Rohrkanal	0,906	0,902	2000
Eckenkanal	0,444	0,714	1100
Seitenkanal	0,406	0,632	1000
Mittelkanal	0,406	0,714	900

Zum Vergleich sind die entsprechenden Werte für das Kreisrohr angegeben. Es ist zu beachten, daß der Korrekturfaktor für die drei Sonderkanäle allgemeingültig ist, da deren Querschnittsfläche allein durch eine Abmessung, nämlich den Krümmungsradius, festgelegt ist. Die Querschnittsfläche des Rohrkanals hingegen läßt sich nur durch wenigstens zwei Abmessungen beschreiben, beispielsweise durch die Querteilung s_q der Rohre und den Rohrdurchmesser. Aus diesem Grunde wird der Korrekturfaktor also ein Funktion von s_q/d sein.

Für den Rohrkanal ergibt sich überraschenderweise nur eine verhältnismäßig geringe Abweichung von dem Gesetz für das Kreisrohr. Demgegenüber ist jedoch der Korrekturfaktor für die anderen Kanäle erheblich kleiner als der für das Kreisrohr. Dieser Unterschied wird durch keilförmige Ausbuchtungen der drei Sonderkanäle hervorgerufen, in denen sich nicht nur die örtlichen Geschwindigkeiten, sondern auch die Wandschubspannungen über den Kanalumfang sehr stark ändern.

Die theoretisch ermittelten Widerstandsgesetze werden durch Meßwerte sehr gut bestätigt. In *Bild 2.33* werden die im laminaren Strömungsbereich nach Gl. (2.49) berechneten Widerstandsgesetze durch die Kurven *a* bis *d* wiedergegeben.

In Tabelle 2.4 sind die aus den Versuchsergebnissen ermittelten Werte der kritischen Reynoldszahl, bei der der Übergang in den turbulenten Strömungszustand einsetzt, vermerkt. Je größer die Abweichung des Widerstandsgesetzes für den betrachteten Kanal von dem des Rohres ist, desto niedriger scheint der Wert der kritischen Reynoldszahl zu sein.

Kurve *e* stellt das Prandtlsche Widerstandsgesetz für turbulent durchströmte Rohre dar. Da die Meßwerte unterhalb $Re = 10^5$ liegen, läßt sich in diesem Bereich auch das Gesetz von BLASIUS gemäß Gl. (1.50) anwenden. Um es auf Kanäle mit nicht kreisförmigem Querschnitt übertragen zu können, soll es in der Form

$$\psi = \varphi_t \frac{0,3164}{Re^{1/4}} \quad (2.50)$$

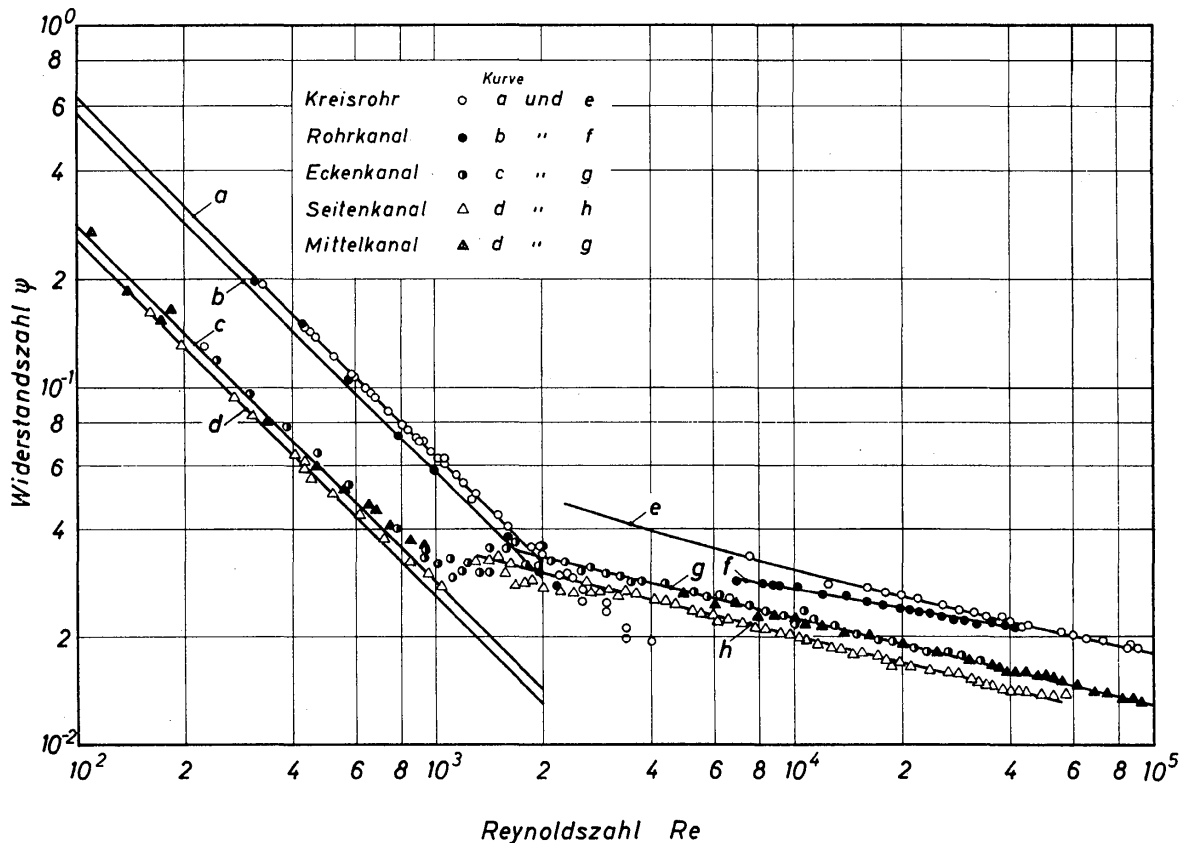


Bild 2.33. Widerstandszahlen für Kanäle mit den in Bild 2.30 und 2.31 dargestellten Querschnittsflächen

geschrieben werden. Für das Kreisrohr ist $\varphi_t = 1$. Die aus dem Diagramm bei $Re = 2 \cdot 10^4$ ermittelten Werte des Korrekturfaktors sind in Tabelle 2.4 eingetragen. Für den Rohrkanal ergeben sich bei turbulenter und laminarer Strömung nahezu die gleichen Werte für den Korrekturfaktor, wohingegen sie für die drei Sonderkanäle bei turbulenter Strömung erheblich größer sind als bei laminarer. Sicherlich wird man dieses Ergebnis als Hinweis dafür betrachten dürfen, daß Widerstandsgesetze für Kanäle mit nicht kreisförmigen Querschnitten, die bei laminarer Strömung nicht mit dem für das Kreisrohr übereinstimmen, auch bei turbulenter Strömung nicht mit dem Gesetz für das Kreisrohr übereinstimmen. Die Abweichungen von dem Gesetz für das Kreisrohr sind jedoch bei turbulenter Strömung wesentlich geringer als bei laminarer. Die geringere Abweichung ist darauf zurückzuführen, daß der turbulente Impulstransport die Geschwindigkeitsverteilung in verstärktem Maße ausgleicht und dazu beiträgt, daß Unterschiede in der Wandschubspannung über den Umfang des Kanals ausgeglichen werden. GUNN und DARLING weisen darauf hin, daß für unendlich große Reynoldszahlen die Schubspannung über jeden beliebig geformten Kanalumfang konstant sein wird. Dann muß aber auch für alle Kanäle das Widerstandsgesetz des Kreisrohres gelten. Aus diesen Überlegungen kann der praktisch tätige Ingenieur aber keinen Nutzen ziehen, denn innerhalb des bisher untersuchten Bereiches der Reynoldszahl hat man noch nicht feststellen können, daß sich die Widerstandsgesetze für Kanäle und Rohre annähern.

Diese Ausführungen haben also ergeben, daß es auch im technisch sehr wichtigen turbulenten Strömungsbereich nicht zulässig ist, das Widerstandsgesetz für Rohre

auf Kanäle mit nicht kreisförmigem Querschnitt zu übertragen, wenn man als maßgebende Länge den hydraulischen Durchmesser einführt. Experimentelle Ergebnisse und theoretische Überlegungen weisen aber darauf hin, daß die Abweichungen zwischen den Gesetzen für Kanäle und Rohre im turbulenten Strömungsbereich erheblich geringer sind als im laminaren. Da im laminaren Strömungsbereich für manche Kanalformen theoretische Gesetze vorliegen, läßt sich aus deren Abweichung vom Gesetz für das Rohr auf das Widerstandsgesetz im turbulenten Bereich wenigstens näherungsweise schließen.

Ein Verfahren zur Berechnung des Strömungswiderstandes turbulent durchströmter Kanäle mit beliebig geformten Querschnittsflächen haben DEISSLER und TAYLOR [2.32] entwickelt. Indes liefert dieses Verfahren, das sehr umständlich zu handhaben ist, für verwickelte Querschnittsformen keine zuverlässigen Ergebnisse.

2.3 Vergleich der Druckverluste in Rohren und Kanälen mit kreis- und nicht kreisförmiger Querschnittsfläche

In den vorausgegangenen Abschnitten sind für Kanäle mit nicht kreisförmigen Querschnittsflächen die Widerstandsgesetze bei laminarer und turbulenter Strömung mitgeteilt worden. Bei laminarer Strömung haben die Gesetze die Form $\psi = \varphi \cdot 64/Re$, wobei φ ein Korrekturfaktor ist. Für Kreisrohre ist $\varphi = 1$ und für Kanäle mit nicht kreisförmiger Querschnittsfläche kann φ sowohl größer als auch kleiner als 1 sein. Hieraus darf jedoch nicht gefolgert werden, daß der Druckverlust bei laminarer Strömung durch Kanäle mit nicht kreisförmiger Querschnittsfläche sowohl größer als auch kleiner sein kann als in Kreisrohren. Der Druckverlust ist unter vergleichbaren Verhältnissen im Kreisrohr immer am geringsten.

Um einen einwandfreien Vergleich anstellen zu können, soll der Druckverlust in einem Kanal mit beliebiger Querschnittsfläche auf den Druckverlust ΔP in einem Kreisrohr bezogen werden. Ganz allgemein gilt für den Druckverlust in einem Kanal die Beziehung

$$\Delta P_K = \varphi_K 32 \eta L_K \frac{\bar{w}_k}{d_h^2} = \varphi_K 32 \eta L_K \frac{\dot{V}_k}{F_K d_h^2}. \quad (2.51)$$

Es bedeuten η dynamische Viskosität, L_K Kanallänge, \bar{w}_k mittlere Geschwindigkeit, $d_h = 4 F_K / U_K$ hydraulischer Durchmesser, F_K Querschnittsfläche, U_K Umfang und \dot{V}_K Volumstrom. Für das Kreisrohr ist $\varphi_K = 1$, $L_K = L$, $\bar{w}_k = \bar{w}$, $\dot{V}_K = \dot{V}$, $F_K = F$, d_h gleich dem Rohrdurchmesser d und $\Delta P_K = \Delta P$. Bezieht man nun den Druckverlust in einem beliebigen Kanal auf den in einem Kreisrohr, so ergibt sich:

$$\frac{\Delta P_K}{\Delta P} = \varphi_K \frac{L_K}{L} \frac{\dot{V}_K}{\dot{V}} \frac{F}{F_K} \left(\frac{d}{d_h} \right)^2. \quad (2.52)$$

Zunächst wird vorausgesetzt, daß die Länge von Rohr und Kanal übereinstimmen, also $L = L_K$ ist, und daß ferner durch Rohr und Kanal die gleichen Volumströme hindurchtreten, also $\dot{V} = \dot{V}_K$ ist. Dann folgt

$$\frac{\Delta P_K}{\Delta P} = \varphi_K \frac{F}{F_K} \left(\frac{d}{d_h} \right)^2 \quad (2.53)$$

und nach Einsetzen von $d = 4 F/U$ und $d_h = 4 F_K/U_K$ die allgemeine Beziehung

$$\frac{\Delta P_K}{\Delta P} = \varphi_K \left(\frac{F}{F_K} \right)^3 \left(\frac{U_K}{U} \right)^2. \quad (2.54)$$

Zur Auswertung dieser Gleichung soll vereinbart werden, daß entweder die Querschnittsflächen F und F_K oder die Umfänge U und U_K von Kreisrohr und Kanal übereinstimmen.

Nimmt man an, daß die Querschnittsflächen gleich sind und somit also außer den Volumströmen auch die mittleren Geschwindigkeiten übereinstimmen, dann ergibt sich für den allgemeinen Fall

$$\frac{\Delta P_K}{\Delta P} = \varphi_K \left(\frac{U_K}{U} \right)^2. \quad (2.55)$$

Für die untersuchten Kanäle ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$\text{Ringspalt: } \frac{\Delta P_s}{\Delta P} = \varphi_s \frac{(r_a/r_i)^2 - 1}{[(r_a/r_i) - 1]^2}. \quad (2.56)$$

$$\text{Rechteck: } \frac{\Delta P_r}{\Delta P} = 2 \varphi_r \frac{1 + (a/b)^2}{\pi a/b}. \quad (2.57)$$

$$\text{Ellipse: } \frac{\Delta P_e}{\Delta P} = \frac{1 + (a/b)^2}{2 a/b}. \quad (2.58)$$

$$\text{Rhombus: } \frac{\Delta P_{rh}}{\Delta P} = 2 \varphi_{rh} \frac{1 + (a/b)^2}{\pi a/b}. \quad (2.59)$$

$$\text{Dreieck: } \frac{\Delta P_d}{\Delta P} = \varphi_d \frac{(1 + \sqrt{1 + (a/b)^2})}{\pi a/b}. \quad (2.60)$$

Die in den Gleichungen (2.56) bis (2.59) verwendeten Bezeichnungen sind bereits früher erläutert worden. In Gl. (2.60) bedeuten a die Höhe und b die halbe Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks. Der Zusammenhang mit dem früher verwendeten Öffnungswinkel β ist durch

$$\text{tg } \frac{\beta}{2} = \frac{b}{a} \quad (2.61)$$

gegeben.

In *Bild 2.34* ist das Verhältnis der Druckverluste über dem reduzierten Achsenverhältnis bzw. dem reduzierten Radienverhältnis dargestellt. Für alle Kanäle mit nicht kreisförmigen Querschnittsflächen ist der Druckverlust erheblich größer als für das Kreisrohr. Die ungünstigsten Bedingungen ergeben sich erwartungs-

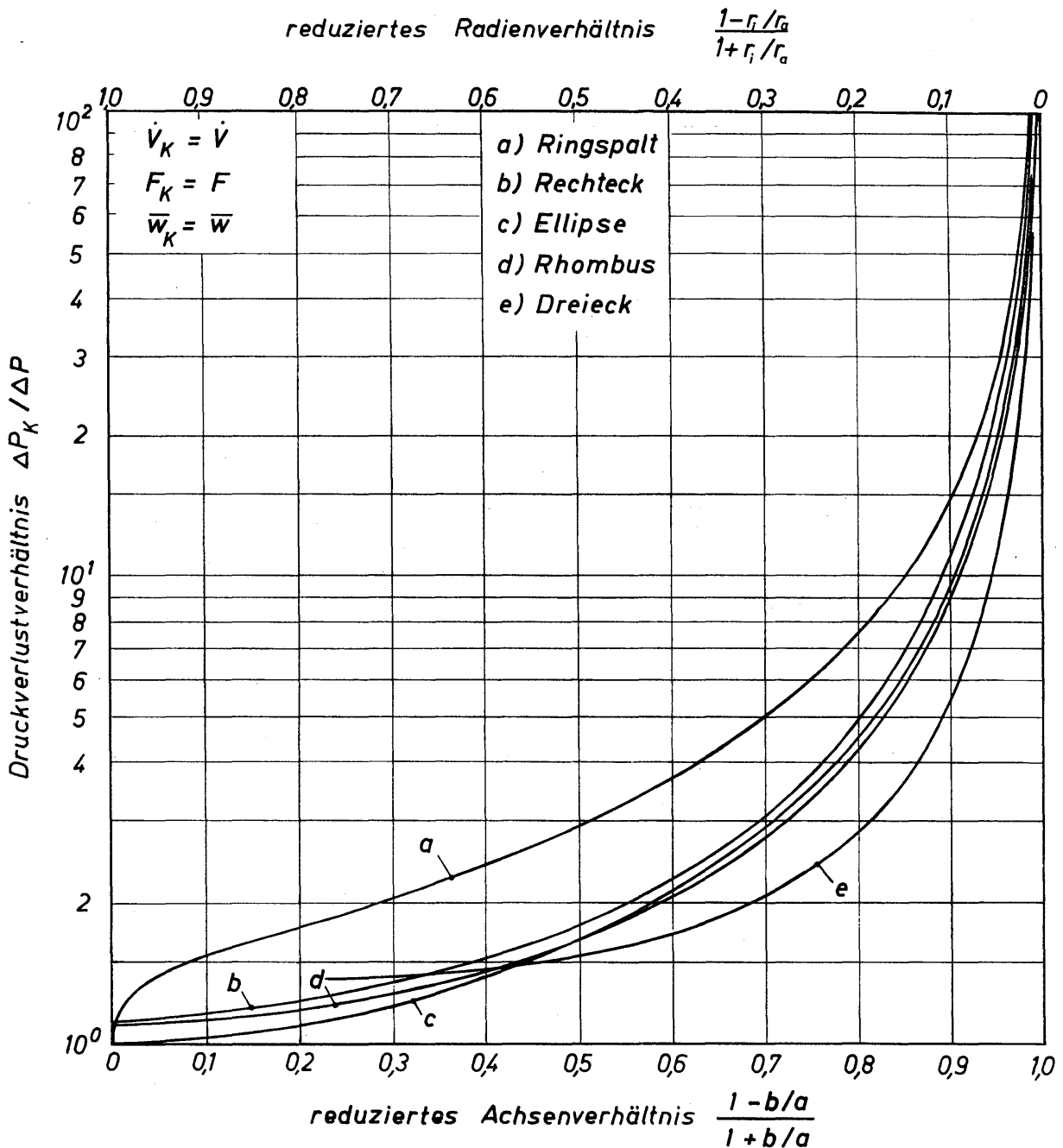


Bild 2.34. Auf den in Kreisrohren bezogener Druckverlust in Kanälen mit verschiedenen Querschnittsflächen bei Annahme konstanter Volumströme $\dot{V}_k = \dot{V}$ und konstanter Querschnittsflächen $F_K = F$

gemäß für den Ringspalt. Andererseits war aber auch zu erwarten, daß sich von allen Kanälen mit nicht kreisförmigen Querschnittsflächen der elliptische Kanal im Bereich niedriger Werte des reduzierten Achsenverhältnisses als sehr vorteilhaft erweist. Überraschend ist dagegen das verhältnismäßig günstige Verhalten der Kanäle mit dreieckförmiger Querschnittsfläche im Bereich größerer Werte des reduzierten Achsenverhältnisses.

Nimmt man im zweiten Falle an, daß die Umfänge für alle betrachteten Kanäle gleich sind, was unter der Voraussetzung gleicher Volumströme zu vergrößerten mittleren Geschwindigkeiten führt, dann erhält man zunächst als allgemeine Beziehung

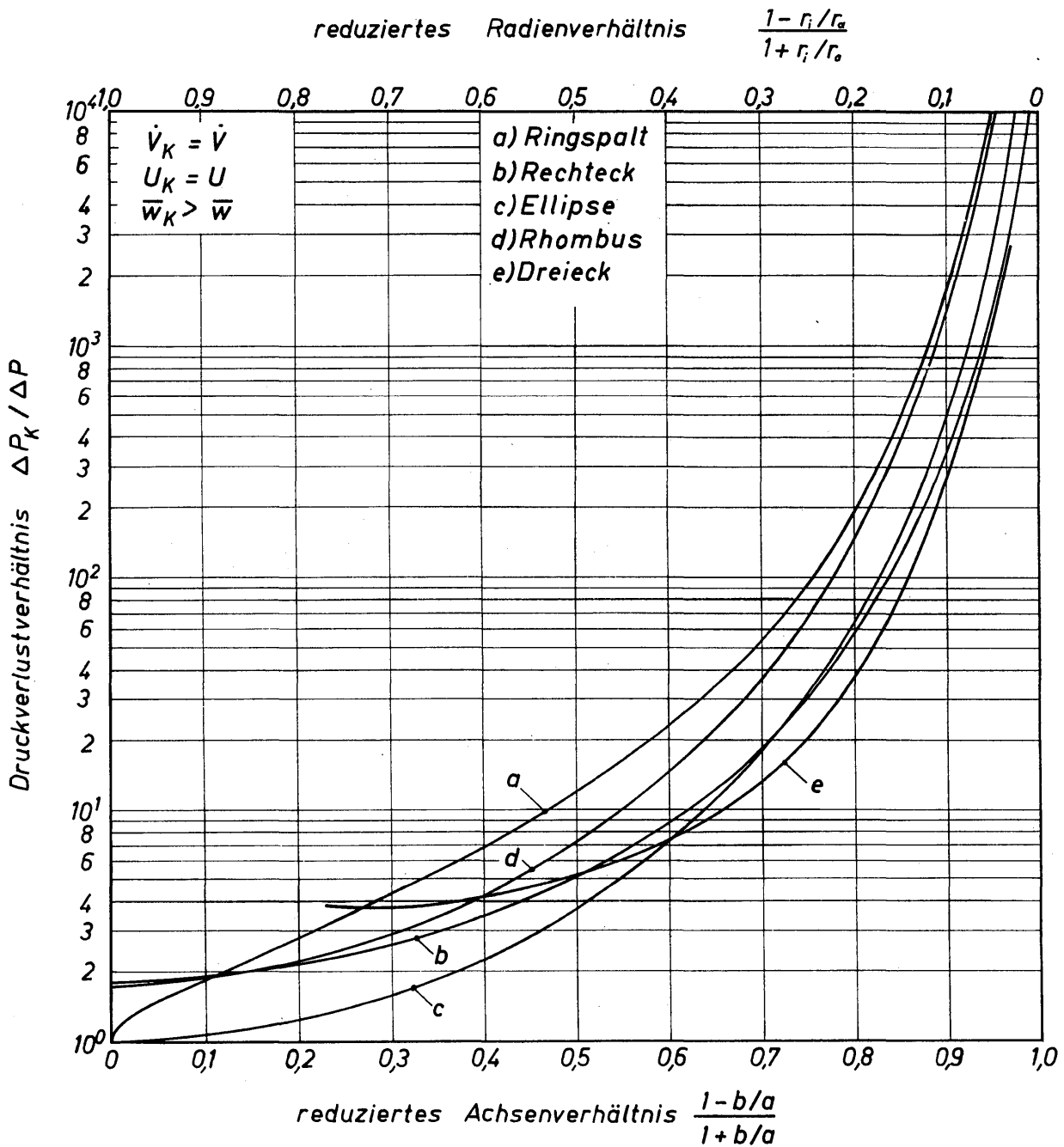


Bild 2.35. Auf den in Kreisrohren bezogener Druckverlust in Kanälen mit verschiedenen Querschnittsflächen bei Annahme konstanter Volumströme $\dot{V}_k = \dot{V}$ und konstanter Umfänge $U_k = U$

$$\frac{\Delta P_K}{\Delta P} = \varphi_K \left(\frac{F}{F_K} \right)^3 \tag{2.62}$$

Hiermit erhält man für die zum Vergleich herangezogenen Kanäle folgende Berechnungsgleichungen:

$$\text{Ringspalt: } \frac{\Delta P_s}{\Delta P} = \varphi_s \left[\frac{(r_a/r_i) + 1}{(r_a/r_i) - 1} \right]^3 \tag{2.63}$$

$$\text{Rechteck: } \frac{\Delta P_r}{\Delta P} = \varphi_r \frac{(1 + a/b)^6}{\pi^3 (a/b)^3} \tag{2.64}$$

Ellipse:

$$\frac{\Delta P_e}{\Delta P} = \frac{[1 + (a/b)^2] [1 + a/b]^4 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \varepsilon^{2n} \right\}^4}{32 (a/b)^3}. \quad (2.65)$$

$$\text{Rhombus: } \frac{\Delta P_{rh}}{\Delta P} = 8 \varphi_{rh} \frac{[1 + (a/b)^2]^3}{\pi^3 (a/b)^3}. \quad (2.66)$$

$$\text{Dreieck: } \frac{\Delta P_d}{\Delta P} = \varphi_d \frac{[1 + \sqrt{1 + (a/b)^2}]^6}{\pi^3 (a/b)^3}. \quad (2.67)$$

Die nach diesen Gleichungen berechneten Druckverlustverhältnisse sind in *Bild 2.35* über dem reduzierten Achsen- bzw. Radienverhältnis dargestellt. Die Kurven sind in ähnlicher Weise gestaffelt wie in *Bild 2.34*. Das bedeutet also, daß, unter den Bedingungen gleicher Querschnittsflächen oder gleicher Umfänge, von allen Kanälen mit nicht kreisförmiger Querschnittsfläche der Ringspalt den größten und der Kanal mit elliptischer Querschnittsfläche im Bereich kleiner Werte des reduzierten Achsenverhältnisses den geringsten Druckverlust hervorruft. Im Bereich großer Werte des reduzierten Achsenverhältnisses erweist sich der Kanal mit der Querschnittsfläche eines gleichschenkligen Dreieckes als überraschend günstig. Zu beachten ist, daß das Druckverlustverhältnis bei Annahme konstanter Umfänge erheblich größer ist als bei Annahme konstanter Querschnittsflächen.

2.4 Strömung durch Rohrbündel

Beim Bau von Wärmeaustauschern werden häufig viele Rohre zu einem Rohrbündel zusammengefaßt. Das eine Medium durchströmt die Rohre, und das andere umströmt sie oder, in anderen Worten ausgedrückt, durchströmt das Rohrbündel. Der Druckverlust, den das Medium erleidet, welches die Rohre durchströmt, wird nach den bekannten Gesetzen der Rohrströmung ermittelt. Für den Druckverlust des Mediums, welches das Bündel durchströmt, werden im folgenden Gesetze mitgeteilt. Dieser Druckverlust hängt von der Anordnung der Rohre und von der Richtung der Strömung in bezug auf die Rohre ab. Erfolgt die Strömung quer zu den Rohrachsen, dann spricht man vom Querstrom, erfolgt die Strömung jedoch parallel zur Rohrachse, so spricht man vom Längsstrom. Auf beide Strömungsformen wird im folgenden eingegangen.

2.4.1 Querstrom durch Rohrbündel

In den meisten Fällen werden die Rohre im Bündel so angeordnet, daß ihre Achsen parallel verlaufen. Ein solches Rohrbündel soll Parallelgitter genannt werden. Zu einer kompakteren Bauweise kann man bei Verwendung von Kreuzgittern gelangen. Hierbei sind die Rohre jeder zweiten Reihe, gerechnet in Strömungsrichtung, gegen die Rohre der voraufgegangenen Reihe um den Winkel β verdreht. Im einfachsten Fall ist $\beta = 90^\circ$. Jeweils zwei hintereinander liegende Rohrreihen bilden ein Kreuzgitter.

2.411 Querstrom durch Parallelgitter

Innerhalb eines Parallelgitters werden die Rohre entweder fluchtend oder versetzt angeordnet, wie es in *Bild 2.36* angedeutet ist. Hierin bedeuten s_q den Querabstand und s_l den Längsabstand. Bezieht man diese Größen auf den Rohrdurchmesser d , so ist s_q/d das Querteilungsverhältnis und s_l/d das Längsteilungsverhältnis. Durch diese Teilungsverhältnisse ist die fluchtende Rohranordnung eindeutig festgelegt. Bei versetzter Anordnung muß weiterhin noch das Ausmaß der Querversetzung s_v mitgeteilt werden. In der Praxis ist es üblich, $s_v = s_q/2$ zu wählen, so daß also das Versetzungsverhältnis s_v/d nicht als Einflußgröße für den Druckverlust und den Wärmeübergang auftritt. Bemerkenswert ist, daß mit $s_v = s_q/2$ nicht immer die günstigste Versetzung erzielt wird. BRESSLER [2.33] hat nämlich durch Versuche festgestellt, daß in bestimmten Bereichen der Reynoldszahl der Wärmeübergangskoeffizient dann seinen größten Wert erreicht, wenn $0 < s_v < s_q/2$ ist. Fertigungsgründe zwingen die Praxis jedoch zur Festlegung von $s_v = s_q/2$. In Strömungsrichtung befinden sich im Rohrbündel n_l und quer zur Strömungsrichtung n_q Rohrreihen.

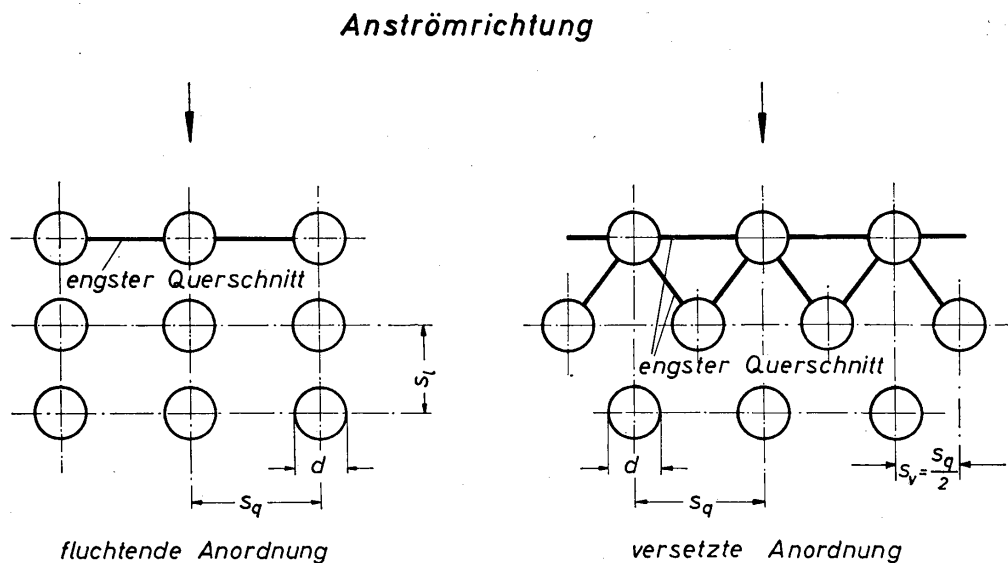
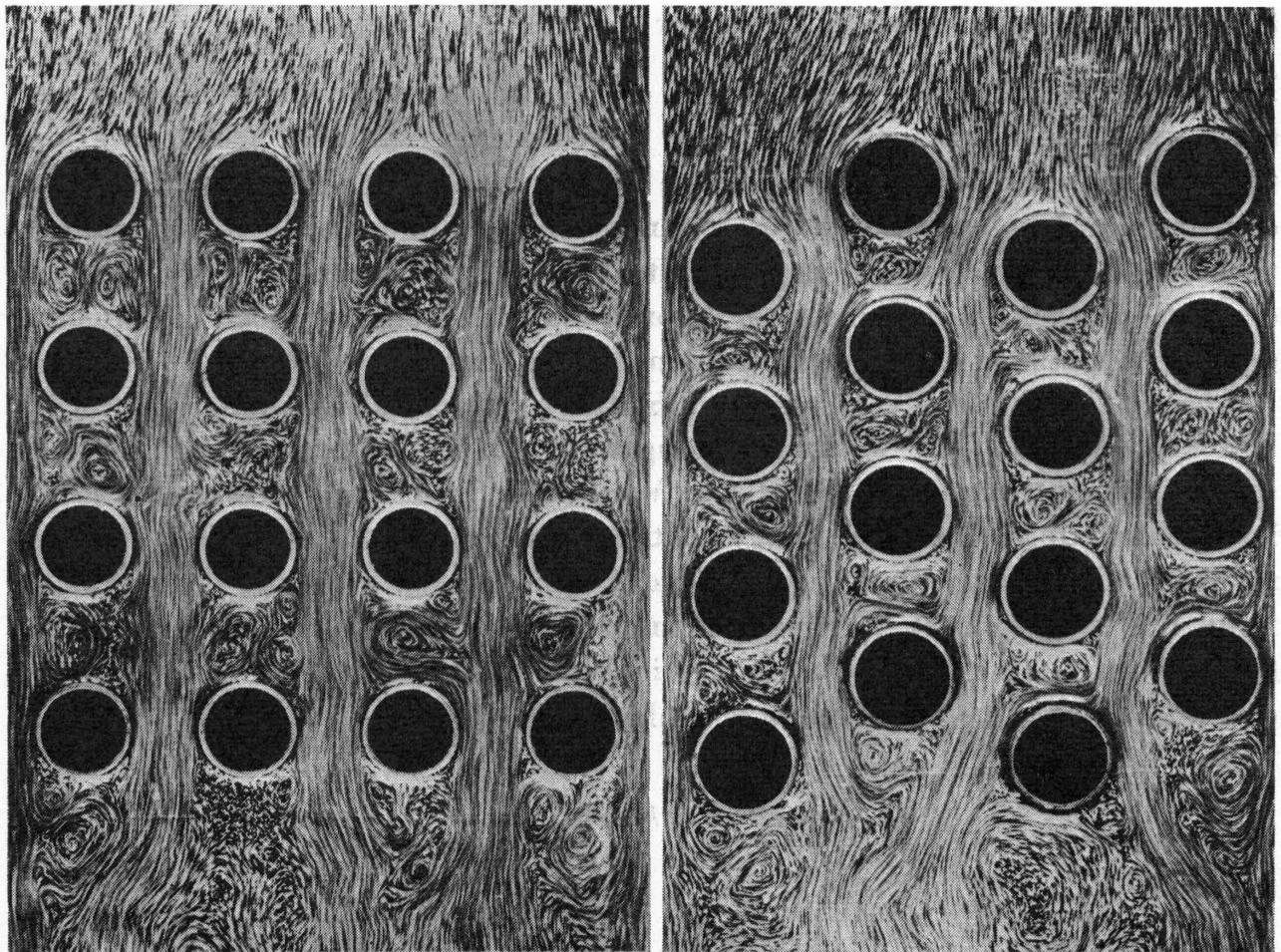


Bild 2.36. Bezeichnungen bei fluchtend und versetzt angeordneten Rohren

Die für den Strömungswiderstand und den Wärmeübergang maßgebende Geschwindigkeit w berechnet man aus dem Volumstrom \dot{V} des Fluids und der engsten freien Querschnittsfläche. In *Bild 2.36* ist der engste Strömungsquerschnitt bei fluchtender Rohranordnung durch einen geraden Linienzug und bei versetzter Rohranordnung je nach den Teilungsverhältnissen durch einen geraden oder geknickten Linienzug angedeutet. Die *Bilder 2.37 a* und *b* zeigen photographische Annahmen von der Strömung durch Bündel mit fluchtend und versetzt angeordneten Rohren. Bei fluchtender Rohranordnung bewegt sich das Fluid auf nahezu geraden Strombahnen durch das Bündel. Bei versetzter Rohranordnung sind die Stromlinien hingegen sinusförmig gekrümmt, wobei sich die Krümmung mit abnehmendem Querteilungsverhältnis stärker ausprägt. Bei verhältnismäßig großem



a) fluchtende Rohranordnung

b) versetzte Rohranordnung

Bild 2.37. Photographische Aufnahmen von der Strömung durch Bündel mit fluchtender (a) und versetzter (b) Rohranordnung

Querabstand verhält sich die versetzte Rohranordnung in strömungs- und wärmetechnischer Hinsicht wie die fluchtende. Bei nicht zu hohen Reynoldszahlen ist die Wirbelbewegung zwischen versetzt angeordneten Rohren lebhafter als bei fluchtend angeordneten. Aus diesem Grunde ist der Wärmeübergangskoeffizient bei versetzter Rohranordnung größer als bei fluchtender. Gleichzeitig steigt aber auch der Druckverlust. Bei sehr hohen Reynoldszahlen bestehen in wärmetechnischer Hinsicht keine Unterschiede mehr zwischen den beiden Rohranordnungen.

Für das Volumen V_a eines fluchtend oder versetzten Parallelgitters und die äußere Oberfläche A der darin befindlichen Rohre mit der Länge l erhält man die Beziehungen:

$$V_a = n_q n_l s_q s_l l, \quad (2.68)$$

$$A = n_q n_l d \pi l. \quad (2.69)$$

Hieraus folgt das Verhältnis aus Bauvolumen und Rohroberfläche zu

$$\frac{V_a}{A} = \frac{s_p}{\pi} \frac{s_l}{d}. \quad (2.70)$$

Dieser Verhältniswert gibt Aufschluß darüber, wie gut das Bauvolumen zur Unterbringung von Rohren ausgenutzt wurde. Das günstigste Verhältnis ergibt sich dann, wenn $s_l/d = 1$ ist. Bei fluchtender Rohranordnung besteht dann kein Abstand mehr zwischen den Rohren in Längsrichtung. Hierfür ergibt sich zwar ein geringer Druckverlust, gleichzeitig aber auch ein niedriger Wärmeübergangskoeffizient. Die Gründe lassen sich hierfür unmittelbar aus der in *Bild 2.38*

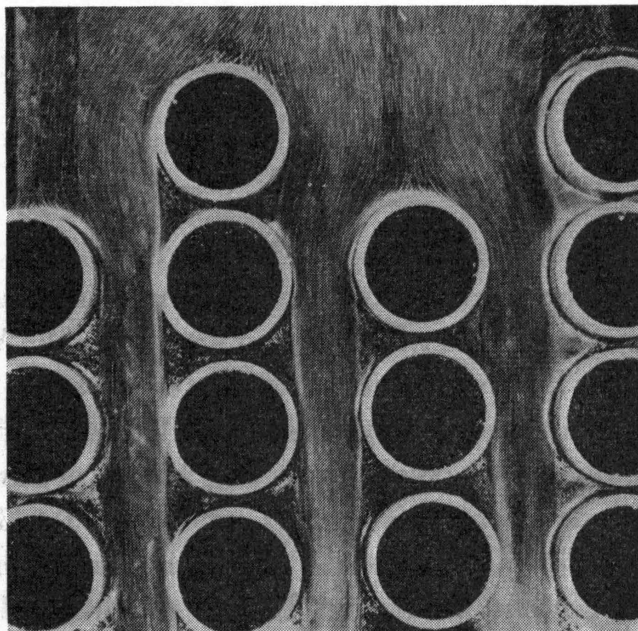


Bild 2.38

Photographische Aufnahmen von der Strömung durch ein Bündel mit fluchtender Rohranordnung bei einem Längsteilungsverhältnis $s_l/d = 1$

wiedergegebenen photographischen Aufnahme von der Strömung durch solch ein Parallelgitter erkennen. Zwischen benachbarten Rohren einer Längsreihe bildet sich kein Wirbelgebiet mehr aus. Es treten nur noch kleine Strömungstoträume auf, die dazu führen, daß Bereiche der Rohroberfläche von der Strömung nahezu unberührt bleiben. Die Folge ist eine verringerte Wärmeströmung in diesem Gebiet. Durch Messungen wurde nachgewiesen, daß der Wärmeübergangskoeffizient für ein Bündel mit $s_l/d = 1$ bei einer Reynoldszahl von 10^4 nur 60% desjenigen für ein Bündel mit $s_l/d = 1,7$ beträgt [2.34]. Eine so starke Herabsetzung des Wärmeübergangskoeffizienten ist nicht erträglich. Alle Maßnahmen zur Verkleinerung von V_a/A , die auch eine merkliche Erniedrigung des Wärmeübergangskoeffizienten zur Folge haben, sind für die Praxis bedeutungslos. Erwähnt sei aber auch, daß im Bereich sehr hoher Reynoldszahlen, etwa oberhalb von $Re = 10^5$, die Anordnung der Rohre nur noch einen geringen Einfluß auf den Wärmeübergang hat. In der Mehrzahl der praktischen Anwendungsfälle liegt die Reynoldszahl jedoch in der Größenordnung von $Re = 10^4$, und somit muß der Rohranordnung sehr viel Aufmerksamkeit entgegengebracht werden.

Strömungswiderstand und Wärmeübergang in quer angeströmten Rohrbündeln sind von zahlreichen Forschern untersucht worden. Die umfangreichsten Messungen führten PIERSON und HUGE durch, deren Ergebnisse GRIMISON [2.35] zusammenfaßte. JAKOB [2.36] ermittelte aus den Meßwerten für den Druckverlust dimensionslose Widerstandsgesetze. Für fluchtende Rohranordnung gilt

$$\psi = Re^{-0,15} \left[0,176 + \frac{0,32 s_l/d}{\left(\frac{s_q}{d}\right)^{0,43 + 1,13 d/s_l}} \right] \quad (2.71)$$

und für versetzte Rohranordnung

$$\psi = Re^{-0,16} \left[1 + \frac{0,47}{\left(\frac{s_q}{d}\right)^{1,08}} \right]. \quad (2.72)$$

Hierin sind ψ die Widerstandszahl und Re die Reynoldszahl:

$$\psi \equiv \frac{\Delta P/n_l}{\rho w^2/2}, \quad (2.73)$$

$$Re \equiv \frac{w d}{\nu}. \quad (2.74)$$

Es bedeuten ΔP Druckverlust, w Geschwindigkeit im engsten freien Querschnitt des Rohrbündels, d Rohrdurchmesser, ρ und ν Dichte und kinematische Viskosität des Fluids und n_l die Zahl der in Strömungsrichtung hintereinander liegenden Rohrreihen. Für die fluchtende Rohranordnung hängt die Widerstandszahl sowohl vom Quer- als auch vom Längsteilungsverhältnis ab. Wie zu erwarten, wird sie mit abnehmendem Querteilungsverhältnis größer und mit abnehmendem Längsteilungsverhältnis kleiner. Für die versetzte Rohranordnung hängt die Widerstandszahl nur vom Quer-, nicht aber vom Längsverhältnis ab, da der Strömungswiderstand vornehmlich durch die Umlenungen bestimmt wird. Die

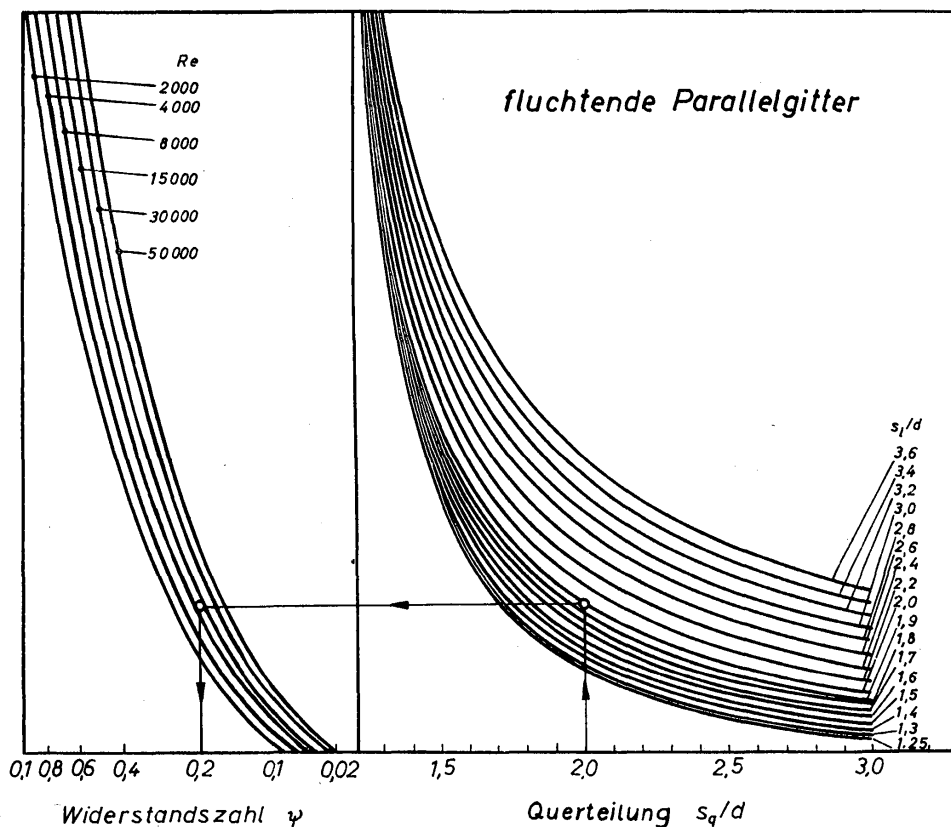


Bild 2.39. Nomogramm zur Bestimmung der Widerstandszahl für Bündel mit fluchtender Rohranordnung nach ZUMANN [2.37]

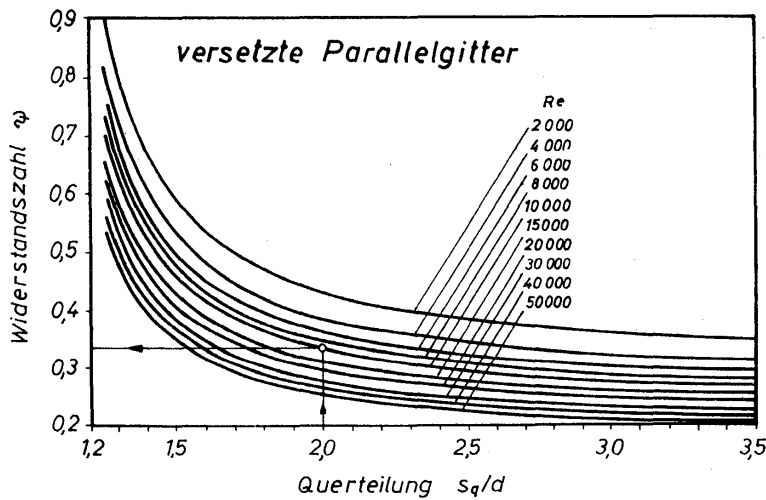


Bild 2.40
 Nomogramm zur Bestimmung
 der Widerstandszahl für
 Bündel mit versetzter Rohr-
 anordnung nach ZUMANN
 [2.37]

obigen Gleichungen für den Strömungswiderstand gelten für die Bedingung, daß zehn oder mehr Rohrreihen hintereinander angeordnet sind. Bei geringerer Rohrreihenanzahl erhöht sich die Widerstandszahl.

Von allen bisher bekannt gewordenen Widerstandsgesetzen werden, nach Angaben von ZUMANN [2.37], die von JAKOB mitgeteilten Gleichungen (2.71) und (2.72) den Meßwerten am besten gerecht. Aus diesem Grunde verwendete ZUMANN diese Gleichungen zur Aufstellung von Nomogrammen, die in den Bildern 2.39 und 2.40 wiedergegeben sind.

In Bild 2.41 sind die Meßwerte für den Widerstand eines Bündels mit versetzter Rohranordnung, wobei $s_q/d = 2,63$ und $s_l/d = 0,66$ war, wiedergegeben und

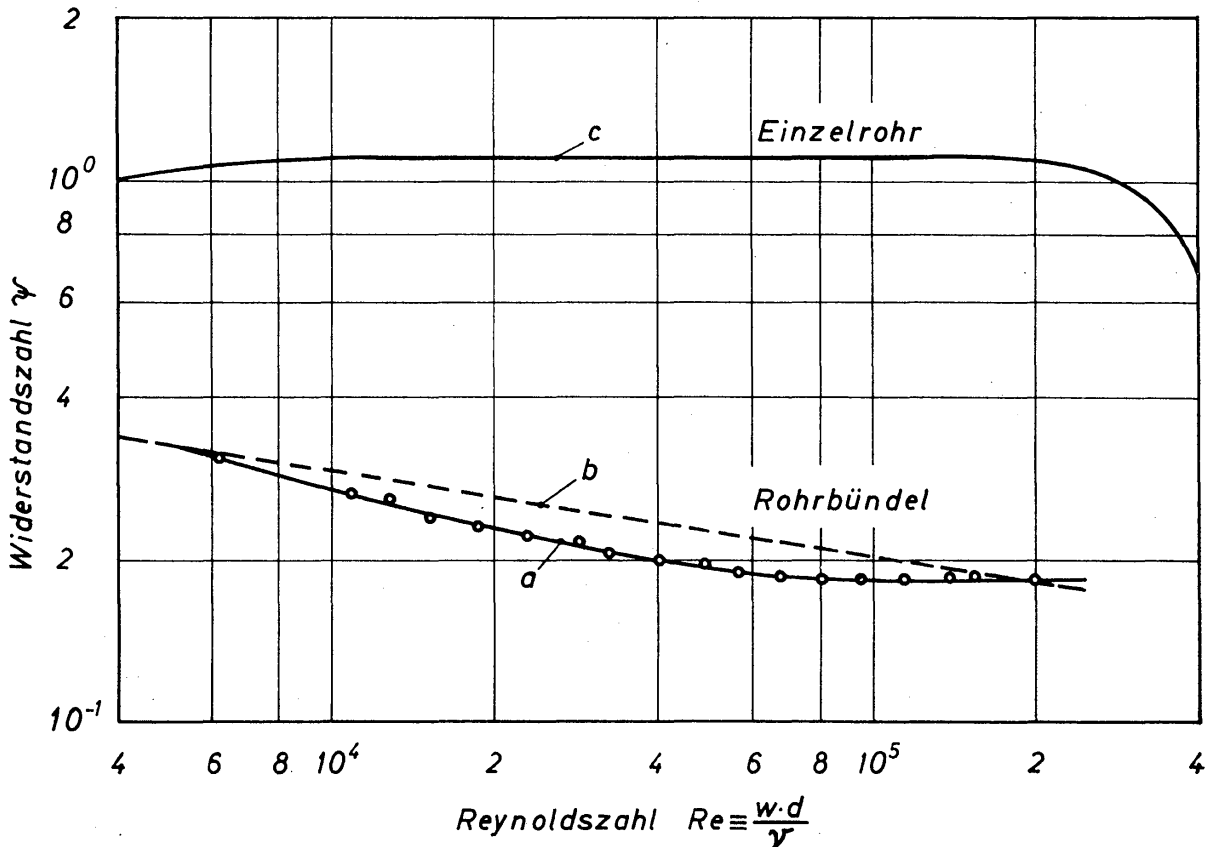
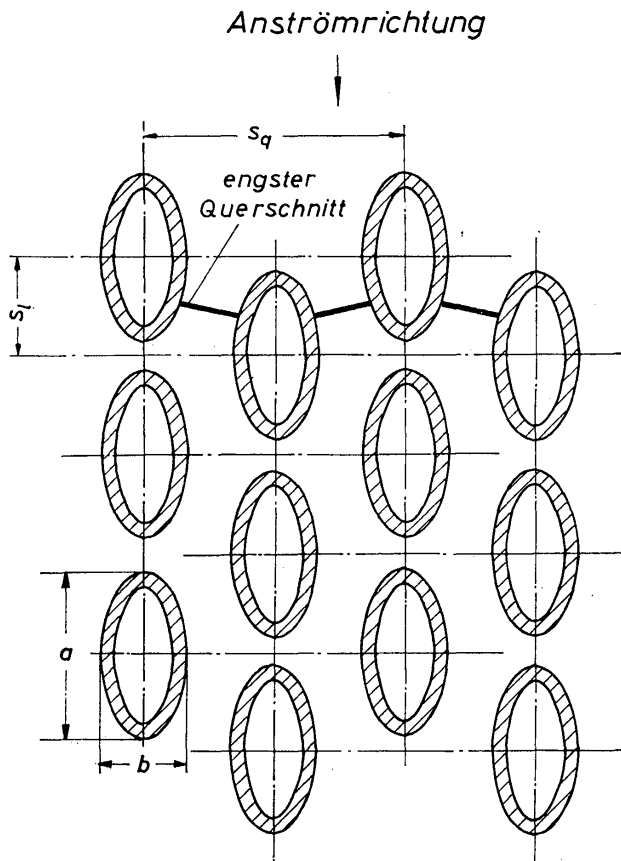


Bild 2.41. Widerstandszahl für ein Bündel mit versetzter Rohranordnung; a Ausgleichskurve durch Meßwerte, b nach Gl.(2.72) berechnete Kurve und c Kurve für den Widerstandsbeiwert eines Einzelrohres

durch Kurve *a* ausgeglichen [2.38]. Die zum Vergleich eingezeichnete Kurve *b* wurde nach Gl.(2.72) berechnet. Die größte Abweichung zwischen den beiden Kurven beträgt etwa 17%. Tatsächlich muß man im allgemeinen damit rechnen, daß den von JAKOB mitgeteilten Gleichungen eine Ungenauigkeit in der Größenordnung von $\pm 20\%$ anhaftet. Um den Widerstand von Rohrbündeln mit dem eines Einzelrohres vergleichen zu können, ist in *Bild 2.41* Kurve *c* angegeben. Die erheblich niedrigere Widerstandszahl für Rohrbündel ist vornehmlich darauf zurückzuführen, daß sich hinter jedem Rohr nur ein sehr kleines, von der Längsteilung abhängiges Wirbelgebiet ausbilden kann.



Bei nicht zu hohen Betriebsdrücken lassen sich oft vorteilhaft Rohre mit elliptischer Querschnittsfläche verwenden. Parallelgitter mit solchen Rohren hat BRAUER [2.38] näher untersucht. Einige der Ergebnisse sollen hier erwähnt werden. Der Aufbau der Rohrbündel geht aus *Bild 2.42* hervor, und die Abmessungen sind in Tabelle 2.5 zusammengestellt. Obgleich die Rohrabmessungen recht unterschiedlich sind, sind die für die Anordnung der Rohre maßgebenden Teilungsverhältnisse nahezu gleich.

Bild 2.42
Bezeichnungen bei der Anordnung von Rohren mit elliptischer Querschnittsfläche

Tabelle 2.5: Abmessungen der Rohrbündel mit Ovalrohren

Bündel	Große Achse <i>a</i> (mm)	Kleine Achse <i>b</i> (mm)	<i>a/b</i>	d_h (mm)	s_q (mm)	s_l (mm)	s_q/b	s_l/a
1	36	14	2,57	19,2	44	22	3,64	0,61
2	38	19	2,00	23,5	60	23	3,16	0,61
3	46	25	1,84	30,6	78	28	3,12	0,61

Die Rohrbündel bestanden in Längsrichtung aus mindestens $n_l = 10$ Rohrreihen und in Querrichtung aus 5 Reihen für Rohrbündel Nr. 1 bzw. aus 7 Reihen für die anderen Bündel. Als charakteristische Länge wurde in der Reynoldszahl der in Tabelle 2.5 vermerkte hydraulische Durchmesser $d_h = 4 F/U$ genommen; *F* ist die Querschnittsfläche und *U* der äußere Umfang des ovalen Rohres.

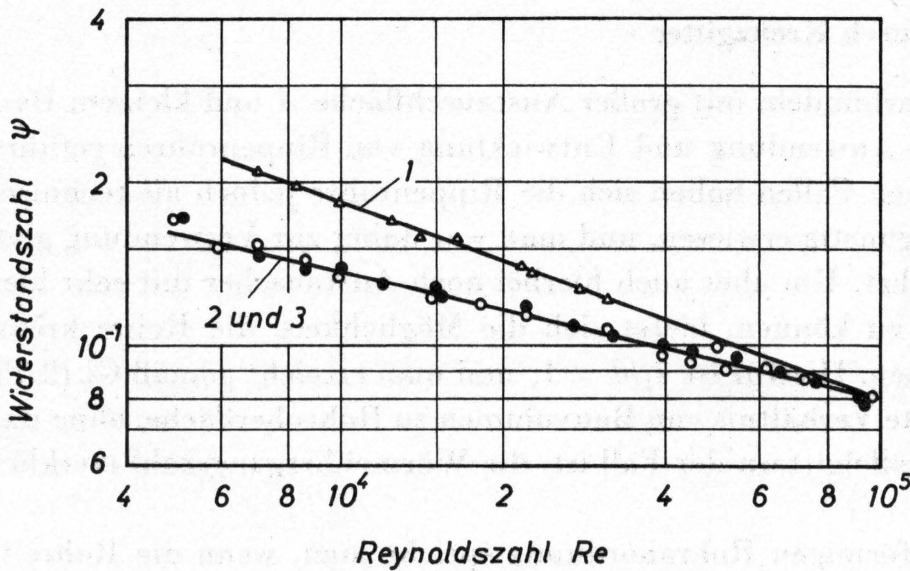


Bild 2.43. Meßwerte für den Widerstand von Bündeln mit Ovalrohren; Angaben über die Abmessungen siehe Tabelle 2.5

Die Versuchsergebnisse für den Strömungswiderstand sind in *Bild 2.43* dargestellt. Für die Bündel 2 und 3 ließen sich die Meßwerte durch eine gemeinsame Gerade ausgleichen, für die folgende Beziehung gilt:

$$\psi = \frac{1,24}{Re^{0,24}} \quad (2.75)$$

Für das Bündel 1 ergibt sich eine stärkere Abhängigkeit von der Reynoldszahl. Der größere Widerstand von Bündel 1 ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß es in Querrichtung zu wenig Rohrreihen aufwies und sich somit ein stärkerer Randeinfluß bemerkbar machte.

Der Strömungswiderstand von Bündeln aus ovalen Rohren ist im allgemeinen erheblich niedriger als für Bündel aus Kreisrohren. Bei einer Reynoldszahl von 10⁴ ergibt sich aus *Bild 2.43* $\psi = 0,137$, während die Widerstandszahl für Bündel aus Kreisrohren in der Größenordnung von 0,3 liegt und somit mehr als doppelt so groß ist. Der geringe Widerstand von Bündeln aus Rohren mit ovaler Querschnittsfläche ist, wie *Bild 2.44* erkennen läßt, auf die nur sehr kleinen Wirbelgebiete zwischen hintereinander liegenden Rohren zurückzuführen.

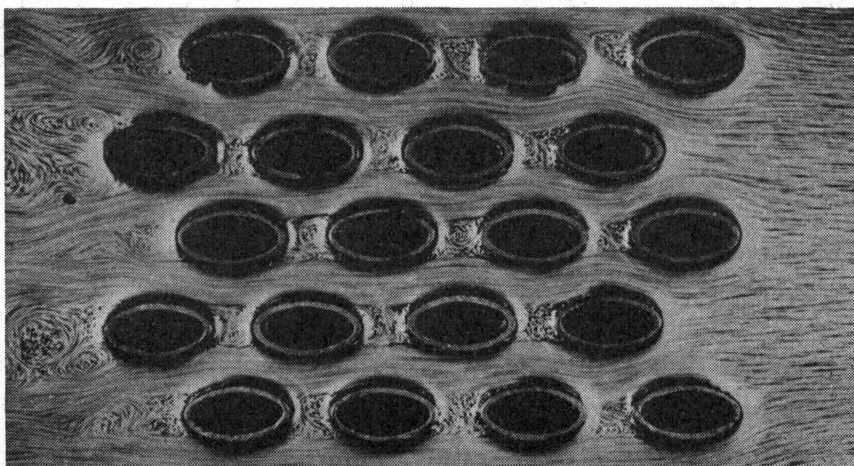


Bild 2.44. Photographische Aufnahme von der Strömung durch ein Bündel mit Ovalrohren

2.412 Querstrom durch Kreuzgitter

Das Streben nach Rohrbündeln mit großer Austauschfläche A und kleinem Bauvolumen V_a hatte zur Anwendung und Entwicklung von Rippenrohren geführt. In manchen praktischen Fällen haben sich die Rippenrohre jedoch als technisch und wirtschaftlich ungünstig erwiesen, und man war daher zur Verwendung glatter Rohre zurückgekehrt. Um aber auch hierbei noch Austauscher mit sehr kleinem Volumen bauen zu können, bietet sich die Möglichkeit, die Rohre kreuzgitterförmig anzuordnen. Hierfür ist $s_l/d = 1$, und man erreicht gemäß Gl. (2.70) das theoretisch kleinste Verhältnis von Bauvolumen zu Rohroberfläche, ohne daß jedoch, wie es bei Parallelgittern der Fall ist, die Wärmeübergangszahl merklich herabgesetzt wird.

Von einer kreuzgitterförmigen Rohranordnung spricht man, wenn die Rohre in hintereinander liegenden Reihen um den Kreuzungswinkel β gegeneinander verdreht sind. Zwei hintereinander liegende Rohrreihen bilden ein Kreuzgitter. Für $\beta = 90^\circ$ ist in *Bild 2.45* ein Rohrbündel schematisch dargestellt. Auch beim Kreuzgitterverband können die Rohre jeder zweiten Reihe fluchtend, wie in *Bild 2.45*, oder versetzt, wie in *Bild 2.46*, angeordnet werden. Man unterscheidet daher zwischen fluchtenden und versetzten Kreuzgittern. Die Rohranordnung bei beliebigem Kreuzungswinkel β zeigt *Bild 2.47*.

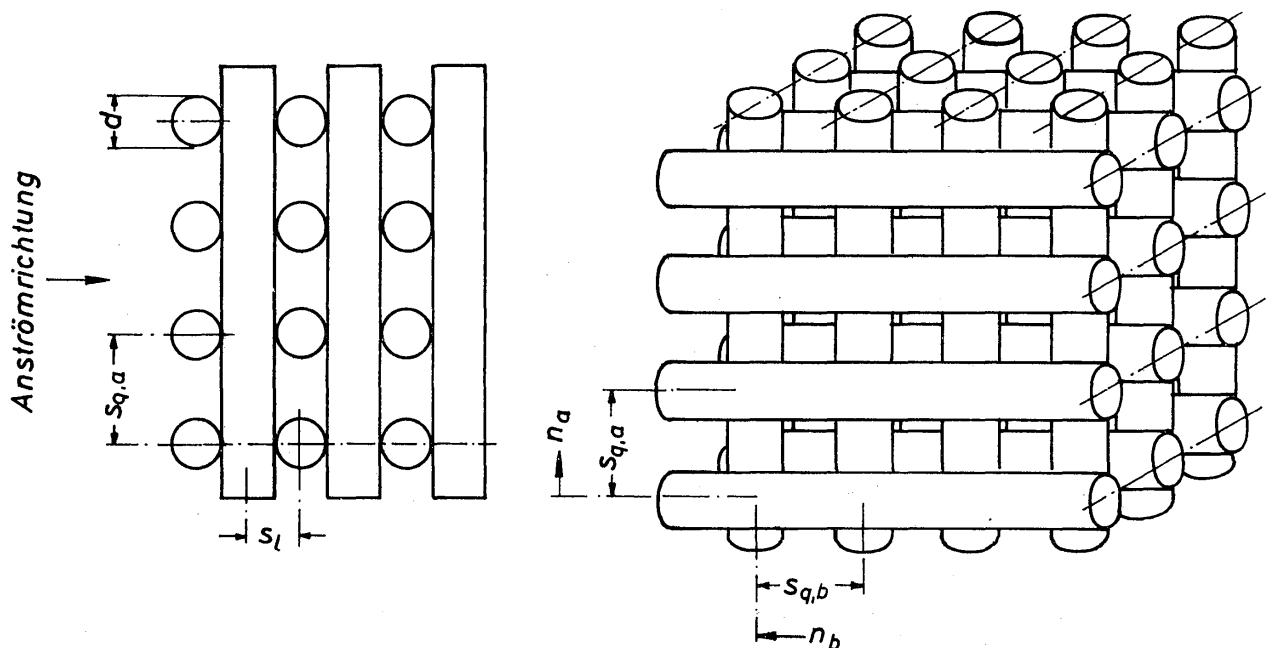


Bild 2.45. Fluchtende Rohranordnung im Kreuzgitterbündel mit $\beta = 90^\circ$

Bei allen Kreuzgittern ist das Längsteilungsverhältnis $s_l/d = 1$. Für das Querteilungsverhältnis ergeben sich, wie in *Bild 2.45* angedeutet, für zwei hintereinander liegende Rohrreihen a und b die beiden Werte $s_{q,a}$ und $s_{q,b}$. Es ist sinnvoll, $s_{q,a} = s_{q,b} = s_q$ zu setzen. Nur für diesen Fall gelten die weiteren Ausführungen. Ferner sind n_a und n_b die Zahl der Rohre in den Reihen a und b .

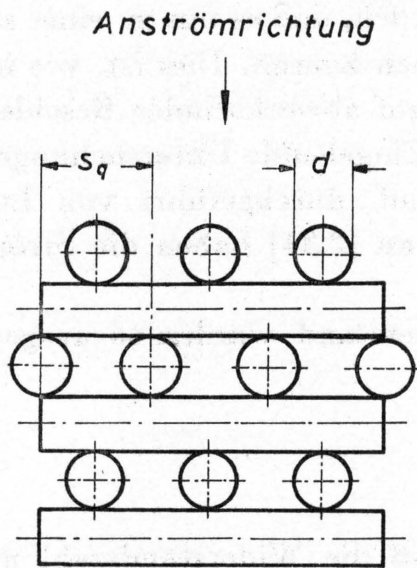


Bild 2.46. Versetzte Rohranordnung im Kreuzgitterbündel mit $\beta = 90^\circ$

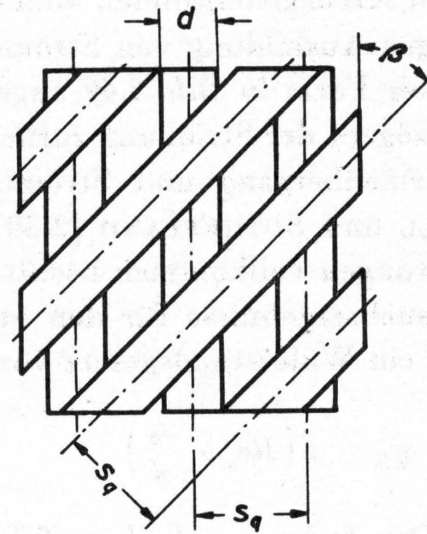


Bild 2.47. Kreuzgitterbündel mit Kreuzungswinkel $\beta < 90^\circ$

In wärmetechnischer Hinsicht wird sich das Kreuzgitterbündel nur dann als günstig erweisen, wenn die in der Volumeinheit untergebrachte Oberfläche auch tatsächlich für den Wärmeaustausch verfügbar ist. Bei einer Anordnung der Rohre wie in *Bild 2.45* sollte man zunächst erwarten, daß ein Teil des Umfanges jedes Rohres durch die Rohre der vorhergehenden Reihe verdeckt wird und somit nicht vollständig am Wärmeaustausch teilnehmen kann. Strömungsuntersuchungen ergaben aber, daß das in nur sehr geringem Maße der Fall ist. *Bild 2.48* zeigt die photographische Aufnahme von dem Verlauf angefärbter Stromfäden

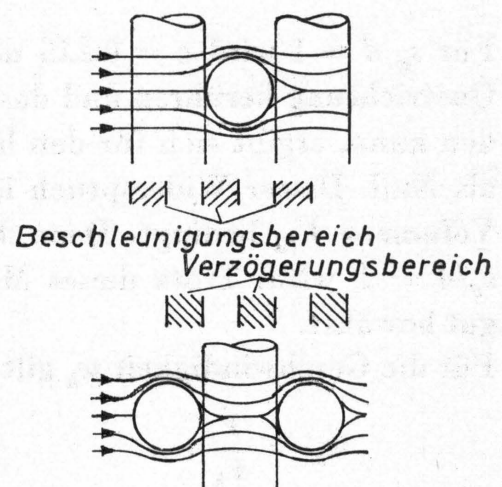
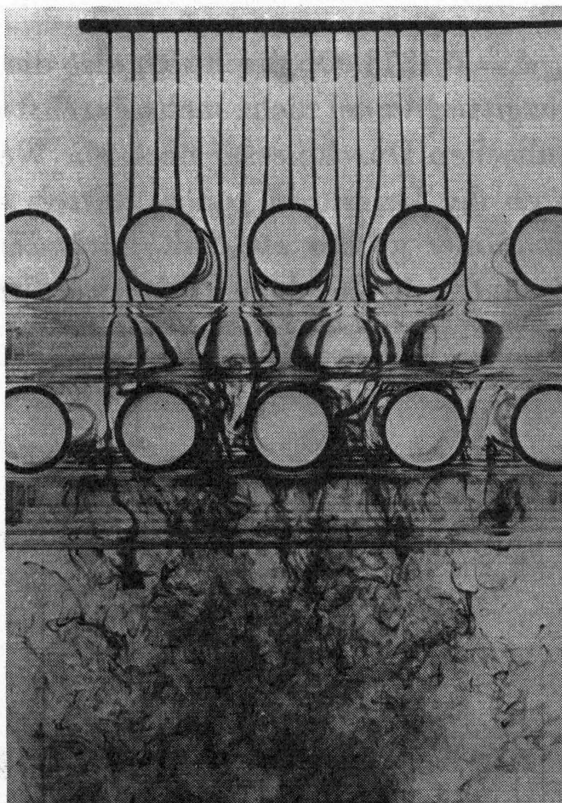


Bild 2.49. Schematisierter Verlauf der Stromfäden durch ein Kreuzgitterbündel

Bild 2.48. Photographische Aufnahme vom Verlauf der Stromfäden durch ein

durch ein Kreuzgitterbündel. Man erkennt deutlich, daß es nur zu einer sehr geringfügigen Ausbildung von Strömungstoträumen kommt. Dies ist, wie in schematisierter Form in *Bild 2.49* angedeutet ist, auf abwechselndes Beschleunigen und Verzögern der Strömung zurückzuführen. Eingehende Untersuchungen über den Wärmeübergang und Strömungswiderstand, durchgeführt von LONDON, MITCHELL und SUTHERLAND [2.39] und BRAUER [2.34] haben die Strömungsbeobachtungen vollkommen bestätigt.

Die Versuchsergebnisse für den Strömungswiderstand wurden so ausgewertet, daß sich ein Widerstandsgesetz von der Form

$$\psi_h = f\left(Re_h; \frac{s_q}{d}\right) \quad (2.76)$$

ergibt. Der Index h soll darauf hinweisen, daß die Widerstandszahl und die Reynoldszahl mit einem hydraulischen Durchmesser gebildet werden. Dieser ist wie folgt definiert:

$$d_h = 4 \frac{V_{fa}}{A} = \frac{4s_q}{\pi} \left(1 - \frac{d}{s_q} \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4s_q}{\pi} \varepsilon. \quad (2.77)$$

Hierin sind V_{fa} das freie Volumen und A die Rohroberfläche im Bündel. Der Ausdruck in der runden Klammer ist gleich dem Lückengrad $\varepsilon = V_{fa}/V_a$ des Rohrbündels, der sich zwischen 0,215 und 1,0 ändern kann. Bei den bisherigen Versuchen lag ε zwischen 0,37 und 0,8. Für den Zusammenhang zwischen dem hydraulischen Durchmesser d_h des Bündels und dem Rohrdurchmesser d gilt die Beziehung

$$\frac{d_h}{d} = \frac{4}{\pi} \frac{s_q}{d} \varepsilon. \quad (2.78)$$

Für $s_q/d = 1$ wird $\varepsilon = 0,215$ und $d_h/d = 0,1273$. Obgleich sich also die Rohre in Querrichtung berühren und das Kreuzgitterbündel nicht mehr durchströmt werden kann, ergibt sich für den hydraulischen Durchmesser noch ein Wert größer als Null. Dieser Widerspruch ist durch die Definition von d_h mittels des freien Volumens V_{fa} bedingt. Denn V_{fa} ist immer größer als Null, auch dann, wenn $s_q/d = 1$ wird. Trotz dieses Mangels hat sich die obige Definition für d_h recht gut bewährt.

Für die Geschwindigkeit w_h gilt die Beziehung

$$w_h = \frac{\dot{V}}{F_h}, \quad (2.79)$$

wobei \dot{V} der Volumstrom des Fluids und F_h die hydraulische Querschnittsfläche der Kreuzgitter sind:

$$F_h = F \frac{V_{fa}}{V_a} = n_a n_b s_q^2 \left(1 - \frac{d}{s_q} \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.80)$$

Hierin bedeutet F die Anströmfläche des Kreuzgitterbündels. Für F_h gelten die gleichen Bemerkungen wie zum hydraulischen Durchmesser.

Die Reynoldszahl Re_h und die Widerstandszahl ψ_h sind wie folgt definiert:

$$Re_h \equiv \frac{w_h d_h}{\nu} = \frac{4\dot{V}}{\pi n_a n_b s_q \nu}, \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} \psi_h &\equiv \frac{\Delta P}{\rho w_h^2/2} \frac{d_h/4}{L} = \frac{\Delta P}{\rho w_h^2/2} \frac{F_h}{A} \\ &= \frac{\Delta P s_q^4}{\pi \rho \dot{V}^2} (n_a \cdot n_b)^2 \frac{s_q}{d} \left(1 - \frac{d}{s_q} \frac{\pi}{4}\right)^3. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Außer den bereits bekannten Größen bedeutet hierin L die Länge des Austauschers.

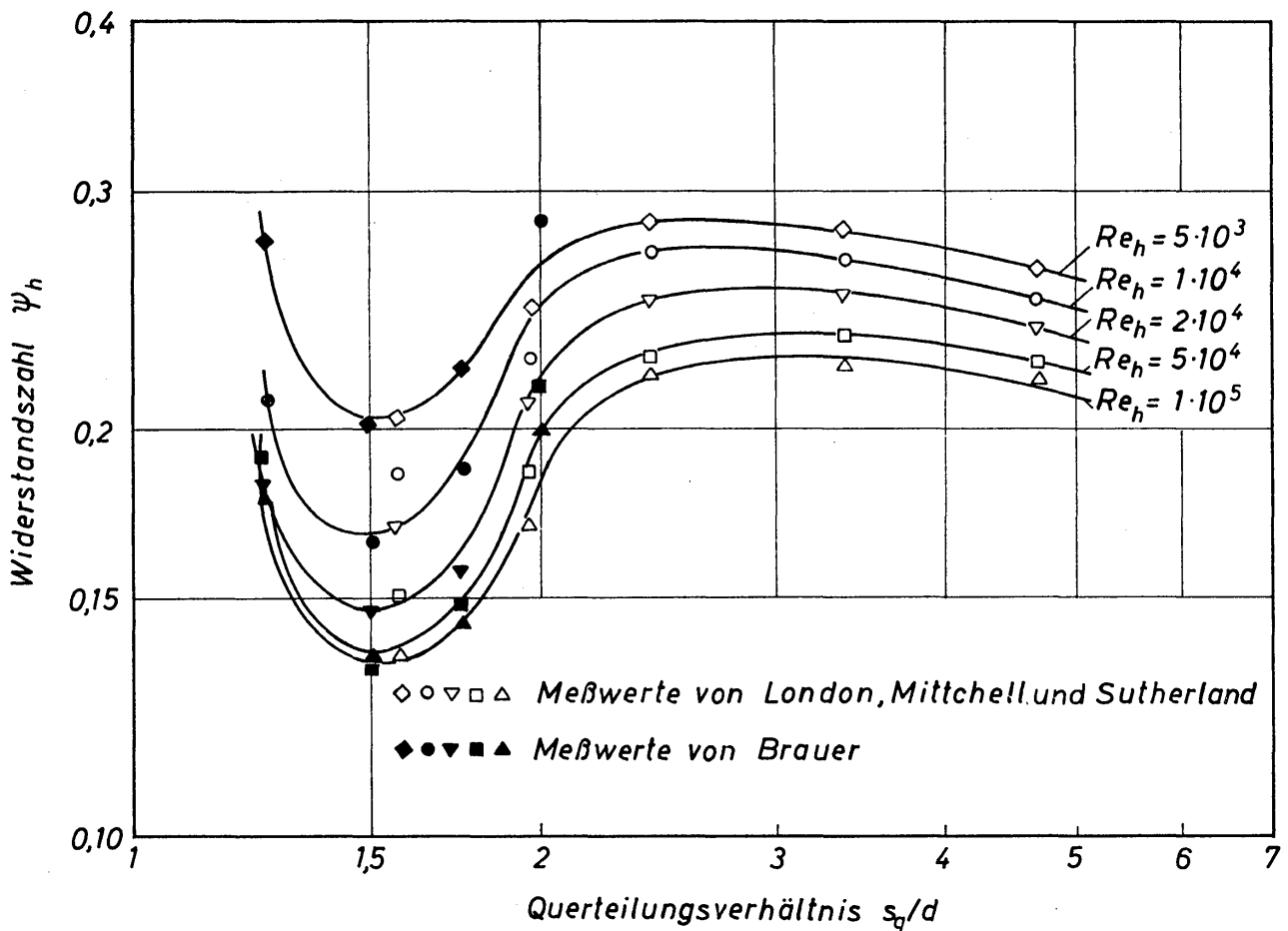


Bild 2.50. Widerstandszahlen für fluchtende Kreuzgitter mit $\beta = 90^\circ$, abhängig vom Querteilungsverhältnis s_q/d für verschiedene Werte der Reynoldszahl

Für fluchtende Kreuzgitterbündel sind in *Bild 2.50* die aus Meßwerten berechneten Widerstandszahlen für einige Werte der Reynoldszahl über dem Querteilungsverhältnis s_q/d aufgetragen. Eine größere Streuung der Meßwerte tritt nur im Bereich $s_q/d = 1,5$ bis 2 auf. Mit größer werdendem Querteilungsverhältnis sinkt die Widerstandszahl zunächst sehr stark, durchläuft bei $s_q/d = 1,5$ ein Minimum, steigt wieder sehr steil an und fällt dann nach Durchlaufen eines Maximums in der Nähe von $s_q/d = 3$ wieder geringfügig ab. Für $s_q/d > 2,5$ lassen sich die Meßwerte näherungsweise durch eine zur Abszisse parallel verlaufende Kurve ausgleichen, so daß ψ_h in diesem Bereich unabhängig von s_q/d ist.

Wegen der Unsicherheit der Meßwerte im Bereich kleiner Querteilungsverhältnisse, besonders bei niedrigen Reynoldszahlen, scheint es zulässig zu sein, eine einheitliche Abhängigkeit von der Reynoldszahl anzunehmen und ein Widerstandsgesetz in der Form

$$\psi_h Re_h^{0,09} = f(s_q/d) \quad (2.83)$$

aufzustellen. In *Bild 2.51* sind die Versuchswerte in dieser Form dargestellt und durch einen Kurvenzug ausgeglichen. Die Abweichung der Meßwerte von der Ausgleichskurve beträgt im Bereich kleiner Querteilungsverhältnisse maximal 15% und ist somit kleiner als bei Parallelgittern.

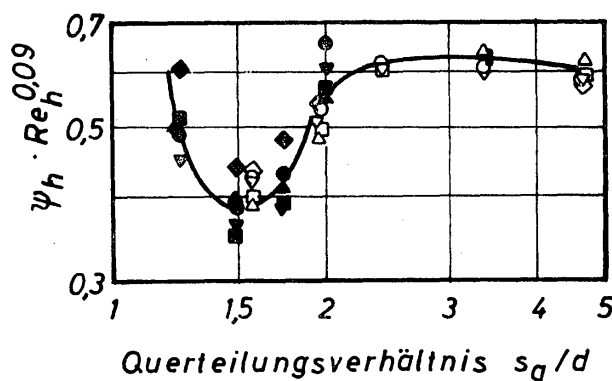


Bild 2.51
Angenähertes Widerstandsgesetz
für fluchtende Kreuzgitter mit $\beta = 90^\circ$;
Bezeichnungen wie in Bild 2.50

Für die Praxis ist insbesondere der Bereich kleiner Querteilungsverhältnisse von Bedeutung. Dabei stellt sich dann die Frage, in welcher Weise sich das Minimum der Widerstandszahl ψ_h bei $s_q/d = 1,5$ auf den Druckverlust auswirkt. Aus Gl. (2.82) folgt für den Druckverlust die Beziehung

$$\Delta P = \psi_h \frac{\rho \dot{V}^2 \pi}{s_q^4 (n_a \cdot n_b)^2 \frac{s_q}{d} \left(1 - \frac{d}{s_q} \frac{\pi}{4}\right)^3} \quad (2.84)$$

Da die Anströmfläche F des Rohrbündels gleich $n_a \cdot n_b \cdot s_q^2$ ist, folgt, so man den Volumstrom \dot{V} auf die Anströmfläche bezieht,

$$\frac{\Delta P}{\rho (\dot{V}/F)^2} = \frac{\pi \cdot \psi_h}{\frac{s_q}{d} \left(1 - \frac{\pi/4}{s_q/d}\right)^3} \quad (2.85)$$

Der Nenner auf der rechten Seite dieser Gleichung ändert sich für s_q/d von 1,24 bis 2,0 näherungsweise mit $(s_q/d)^4$ und für s_q/d von 2 bis 5 näherungsweise mit $(s_q/d)^2$. Dieser starke Einfluß des Querteilungsverhältnisses führt dazu, daß das Minimum in der Widerstandszahl nicht zu einem Minimum im Druckverlust führt. Diese Überlegung läßt gleichzeitig aber auch erkennen, daß die Streuung in den Meßwerten wahrscheinlich vor allem auf ungenau bestimmte Querteilungsverhältnisse zurückzuführen ist.

Der Einfluß des Kreuzungswinkels β auf die Widerstandszahl für ein Querteilungsverhältnis von $s_q/d = 1,5$ und eine Reynoldszahl $Re_h = 2 \cdot 10^4$ geht aus *Bild 2.52* hervor. Bei $\beta \approx 60^\circ$ ergibt sich für die Widerstandszahl ein Maximum.

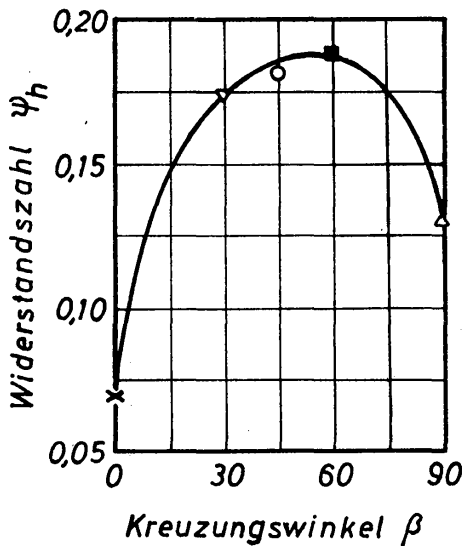


Bild 2.52. Abhängigkeit der Widerstandszahl vom Kreuzungswinkel β für fluchtende Kreuzgitter bei $Re_h = 2 \cdot 10^4$ und einem Querteilungsverhältnis von $s_q/d = 1,5$

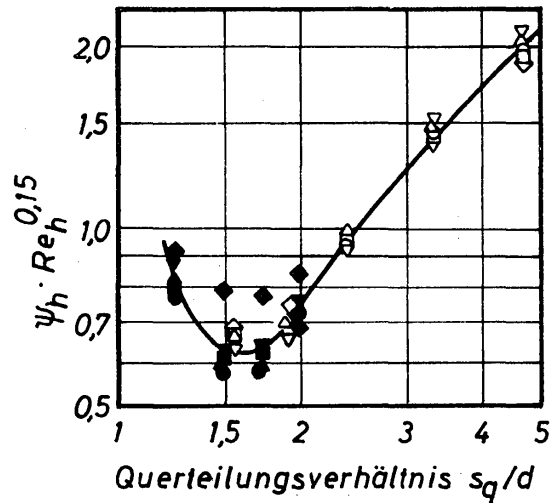


Bild 2.53. Angenähertes Widerstandsgesetz für versetzte Kreuzgitter mit $\beta = 90^\circ$; Bezeichnungen wie in Bild 2.50

Der günstigste Kreuzungswinkel für Kreuzgitter ist nach Bild 2.52 offensichtlich $\beta = 90^\circ$.

Für versetzte Kreuzgitter sind die Meßwerte für den Strömungswiderstand in Bild 2.53 dargestellt. Im Gegensatz zu den in Bild 2.51 für fluchtende Kreuzgitter dargestellten Ergebnissen steigt die Widerstandszahl für versetzte Kreuzgitter im Bereich großer Querteilungsverhältnisse s_q/d stetig an und erreicht noch kein Maximum. Für kleine Werte s_q/d ergibt sich für den Widerstand versetzter und fluchtender Kreuzgitter das gleiche Verhalten. Erwähnt sei, daß der Wärmeübergang bei fluchtenden Kreuzgittern besser ist als bei versetzten, so daß die fluchtende Anordnung zu bevorzugen ist.

2.42 Längsstrom durch Rohrbündel

Der im Abschnitt 2.25 unter anderem behandelte längs durchströmte Rohrkanal mit vier Rohren stellt ein sehr kleines Rohrbündel dar. Es ergab sich, daß im turbulenten Strömungsbereich näherungsweise das Widerstandsgesetz für durchströmte Rohre mit kreisförmiger Querschnittsfläche gilt, wenn man den Rohrdurchmesser d durch den hydraulischen Durchmesser $d_h = 4 F/U$ ersetzt. Dabei sind U der von der Strömung berührte Umfang der Rohre und Kanalwände und F die Querschnittsfläche, durch die das Fluid hindurchtritt.

Untersuchungen über den Widerstand längs durchströmter Bündel, die aus bis zu 64 Rohren bestanden, haben LE TOURNEAU, GRIMBLE und ZERBE [2.40] durchgeführt. Die Rohre waren entweder in den Eckpunkten eines Quadrates, wobei $s_q/d = 1,20$ und $1,12$ war, oder eines gleichschenkligen Dreieckes mit $s_q/d = 1,12$ angeordnet. Die Rohrbündel wurden von Wasser durchströmt. In Bild 2.54 sind die Meßwerte für die drei untersuchten Rohrbündel dargestellt. Die Widerstandszahl und die Reynoldszahl sind wie bei einer Kanalströmung

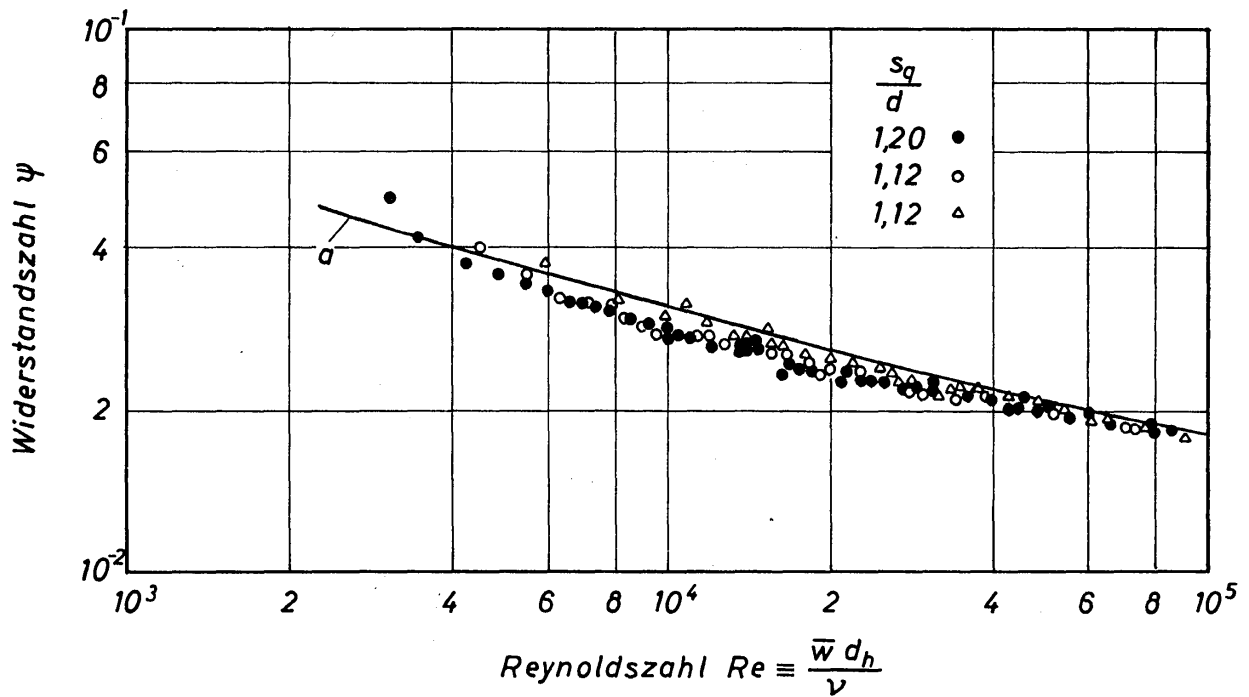


Bild 2.54. Widerstandsgesetz für längs durchströmte Rohrbündel

definiert. Bei den Versuchen änderte sich die Reynoldszahl etwa zwischen $3 \cdot 10^3$ und 10^5 . Die Meßwerte liegen bis etwa 10% unterhalb des Widerstandsgesetzes von PRANDTL, das durch Kurve *a* wiedergegeben wird. Damit besteht also weitgehende Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen von GUNN und DARLING [2.29], die in *Bild 2.33* durch Kurve *f* ausgeglichen werden. Im Gegensatz zu diesen übereinstimmenden Ergebnissen liegen Meßwerte von MILLER, BYRNES und BENFORADO [2.41] im Mittel um einen Faktor 1,65 oberhalb der in *Bild 2.54* eingezeichneten Kurve *a*.

Schrifttum

- [2.1] J. NIKURADSE, Turbulente Strömung in nicht kreisförmigen Rohren, *Ing.-Arch.* 1 (1930) 306–32
- [2.2] L. SCHILLER, Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauigkeitsgrades, *Z. angew. Math. Mech.* 3 (1923) 2–13
- [2.3] ● H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover Publications, New York 1932
- [2.4] ● J. G. KNUDSEN und D. L. KATZ, *Fluid dynamics and heat transfer*, McGraw-Hill, New York/Toronto/London 1958
- [2.5] R. KOCH und K. FEIND, Druckverlust und Wärmeübergang in Ringspalten, *Chem.-Ing.-Techn.* 30 (1958) 577–84
- [2.6] H. BRAUER, Strömungswiderstand und Wärmeübergang bei Ringspalten mit rauhen Kernrohren, *Atomkernenergie* 6 (1961) 153–61 und 207–11
- [2.7] J. E. WALKER, G. A. WHAN und R. R. ROTHFUS, Fluid friction in noncircular ducts, *AICHE J.* 3 (1957) 4, 484–9
- [2.8] R. W. HANKS, The laminar-turbulent transition for flow in pipes, concentric annuli, and parallel plates, *AICHE J.* 9 (1963) 45–8
- [2.9] D. M. METER und R. B. BIRD, Turbulent Newtonian flow in annuli, *AICHE J.* 7 (1961) 1, 41–5

- [2.10] H. ULLRICH, Druckverlust und Wärmeübergang in laminar durchströmten Ringspalten mit beliebig geformtem Kern, *Chem.-Ing.-Techn.* 33 (1961) 9, 606–8
- [2.11] W. T. SNYDER und G. A. GOLDSTEIN, An analysis of fully developed laminar flow in an eccentric annulus, *AIChE J.* 11 (1965) 3, 462–7
- [2.12] P. J. REDBERGER und M. E. CHARLES, Axial laminar flow in a circular pipe containing a fixed eccentric core, *Can. J. Chem. Eng.* 40 (1962) 4, 148–51
- [2.13] R. G. DEISSLER und M. F. TAYLOR, Analysis of fully developed turbulent heat transfer and flow in an annulus with various eccentricities, *NACA Technical Note 3451* (1955)
- [2.14] E. SKUPINSKI, Wärmeübergang und Druckverlust bei Flüssigkeiten in verwirbelter Strömung, Dissertation TH Aachen 1961
- [2.15] J. G. KNUDSEN und D. L. KATZ, Heat transfer and pressure drop in annuli, *Chem. Eng. Progr.* 46 (1950) 490–500
- [2.16] B. DE LORENZO und E. D. ANDERSON, Heat transfer and pressure drop of liquids in double pipe fin-tube exchangers, *Trans. ASME* 67 (1945) 11, 697–702
- [2.17] R. J. CORNISH, Flow in a pipe of rectangular cross-section, *Proc. Roy. Soc. London (A)* 120 (1928) 691–700
- [2.18] K. STEPHAN, Wärmeübergang und Druckabfall bei nicht ausgebildeter Laminarströmung in Rohren und in ebenen Spalten, *Chem.-Ing.-Techn.* 31 (1959) 12, 773–8
- [2.19] Y. L. WANG und P. A. LONGWELL, Laminar flow in the inlet section of parallel plates, *AIChE J.* 10 (1964) 3, 323–9
- [2.20] J. P. HARTNETT, J. C. Y. KOH und S. T. MCCOMAS, A comparison of predicted and measured friction factors for turbulent flow through rectangular ducts, *Trans. ASME Ser. C, J. Heat Transfer* 84 (1962) 1, 82–8
- [2.21] A. RAESFELD, Wärmeübergang und Druckabfall im Anlaufgebiet von luftdurchströmten Spalten, *Chem.-Ing.-Techn.* 25 (1953) 5, 249–52
- [2.22] G. HOFMANN, *Strömung durch Kanäle mit nicht kreisförmigen Querschnittsflächen*, Dipl.-Arbeit, Technische Universität Berlin 1966
- [2.23] K. KARAS, Stationäre Laminarströmungen durch Kanäle von elliptischem Querschnitt bei konstantem Druck oder statischer Druckverteilung, *Ing.-Arch.* 28 (1959) 117–53
- [2.24] H. GLASER, Neuere Ergebnisse wärmetechnischer Grundlagenforschung, *Chem.-Ing.-Techn.* 29 (1957) 3, 176–86
- [2.25] L. W. CARLSON und T. F. IRVINE, Fully developed pressure drop in triangular shaped ducts, *Trans. ASME Ser. C, J. Heat Transfer* 83 (1961) 4, 441–4
- [2.26] E. R. G. ECKERT, T. F. IRVINE und J. T. YEN, Local laminar heat transfer in wedge-shaped passages, *Trans. ASME* 80 (1958) 10, 1433–8
- [2.27] H. NUTTAL, Flow of a viscous incompressible fluid, Expression for a uniform triangular duct, *Engineering* 178 (1954) 298–300
- [2.28] E. M. SPARROW, Laminar flow in isosceles triangular duct, *AIChE J.* 8 (1962) 5, 599–604
- [2.29] D. J. GUNN und C. W. W. DARLING, Fluid flow and energy losses in non-circular conduits, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 41 (1963) 163–73
- [2.30] E. M. SPARROW und A. L. LOEFFLER, Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in regular array, *AIChE J.* 5 (1959) 3, 325–30
- [2.31] E. R. G. ECKERT und T. F. IRVINE, Flow in corners of passages with noncircular cross sections, *Trans. ASME* 78 (1956) 4, 709–18
- [2.32] R. G. DEISSLER und H. F. TAYLOR, Analysis of turbulent flow and heat transfer in noncircular ducts, *NACA Techn. Note 4384* (1958)
- [2.33] R. BRESSLER, Die Wärmeübertragung einzelner Rohrreihen in quer angeströmten Rohrbündeln mit kleinen Versetzungsverhältnissen, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 24 (1958) 90–103

- [2.34] H. BRAUER, Strömungswiderstand und Wärmeübergang bei quer angeströmten Wärmeaustauschern mit kreuzgitterförmig angeordneten glatten und berippten Rohren, *Chem.-Ing.-Techn.* 36 (1964) 3, 247–60
- [2.35] E. D. GRIMSON, Correlation and utilization of new data on flow resistance and heat transfer for cross flow of gases over tube banks, *Trans. ASME* 59 (1937) 8, 583–94
- [2.36] M. JAKOB, Flow resistance of cross flow of gases over tube banks, *Trans. ASME* 60 (1938) 384–6
- [2.37] R. ZAMANN, Druckverlust bei quer angeströmten Glattrohrbündeln, *Chemiker-Ztg. Chem. Apparatur* 86 (1962) 8, 275–81
- [2.38] H. BRAUER, Untersuchungen an Querstrom-Wärmeaustauschern mit verschiedenen Rohrformen, *Mitteilungen VGB Heft* 73 (August 1961)
- [2.39] A. L. LONDON, J. W. MITCHELL und W. A. SUTHERLAND, Heat transfer and flow friction characteristics of crossed-rod matrices, *Trans. ASME Ser. C, J. Heat Transfer* 82 (1960) 3, 199–213
- [2.40] B. W. LE TOURNEAU, R. E. GRIMBLE und J. E. ZERBE, Pressure drop for parallel flow through rod bundles, *Trans. ASME* 79 (1957) 11, 1751–8
- [2.41] P. MILLER, J. J. BYRNES und D. M. BENFORADO, Heat transfer to water flowing parallel to a rod bundle, *AIChE J.* 2 (1956) 2, 226–34

3 Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten durch Rohre und Kanäle

Alle Flüssigkeiten, deren Fließverhalten sich nicht durch den Newtonschen Schubspannungsansatz $\tau = -\eta dw/dy$ beschreiben läßt, werden nicht-Newtonsche Flüssigkeiten genannt. Als Beispiele seien hierfür die Farben und Lacke, die Lösungen und Schmelzen von Hochpolymeren, eine große Zahl fließfähiger Lebensmittel, darunter Honig, Sirup, Schokolade und Kuchenteig, viele Suspensionen und Emulsionen, Schlämme, Teere, Bitumina, Kitte, Glasschmelzen und Mörtel angeführt. Die Fließeigenschaften dieser Flüssigkeiten sind sehr unterschiedlich, und es gibt daher keinen für alle verbindlichen Schubspannungsansatz. Die allen nicht-Newtonschen Flüssigkeiten gemeinsame Eigenschaft besteht darin, daß ihre Viskosität von der Schubspannung abhängt. Somit gilt

$$\tau = -\eta(\tau) \frac{dw}{dy}. \quad (3.1)$$

Hierin sind die möglichen Einflüsse von Zeit, Elastizität und andere noch nicht berücksichtigt. Es läßt sich mittels der kinetischen Theorie für dichte Gase nachweisen, daß dieser Ansatz nicht nur für die nicht-Newtonschen, sondern auch für die Newtonschen Flüssigkeiten gilt [3.1]. Nur ist bei den Newtonschen Flüssigkeiten die Abhängigkeit der Viskosität η von der Schubspannung so gering, daß sie für technische Probleme bedeutungslos ist. Die Abhängigkeit der Viskosität von der Schubspannung ist für alle Flüssigkeiten verschieden. Dazu kommt häufig noch die Einwirkungsdauer der Schubkraft, also die Zeit, als weitere Einflußgröße. Resignierend könnte man sagen, daß jede einzelne nicht-Newtonsche Flüssigkeit ihr eigenes Schubspannungsgesetz hat. Die Forschung hat sich jedoch teilweise recht erfolgreich darum bemüht, Schubspannungsansätze zu entwickeln, die geeignet sind, das Fließverhalten möglichst großer Gruppen der nicht-Newtonschen Flüssigkeiten zu beschreiben. Im folgenden wird daher zunächst eine Einteilung dieser Flüssigkeiten vorgenommen. Anschließend werden die den Ingenieur interessierenden Schubspannungsansätze erläutert, mit deren Hilfe die Strömung in Rohren und Kanälen behandelt werden kann.

3.1 Einteilung der nicht-Newtonschen Flüssigkeiten

Die nicht-Newtonschen Flüssigkeiten lassen sich, so man aus der Vielzahl der Eigenschaftsmerkmale nur die wichtigsten herausgreift, in drei große Gruppen unterteilen. Diese sind:

a) Viskose Flüssigkeiten. Bei diesen hängt die Schubspannung allein vom Geschwindigkeitsgradienten ab. Im Gegensatz zu den Newtonschen Flüssigkeiten ist der Zusammenhang zwischen Schubspannung und Geschwindigkeitsgradient

aber nicht mehr linear. Man unterteilt die viskosen nicht-Newtonschen Flüssigkeiten wieder in drei Gruppen, und zwar in

- a₁) strukturviskose Flüssigkeiten,
- a₂) dilatante Flüssigkeiten und
- a₃) Bingham-Flüssigkeiten.

Bei den strukturviskosen Flüssigkeiten wird die Fließfähigkeit, die man als Kehrwert der Viskosität auffassen kann, mit zunehmendem Schergefälle erhöht. Man stellt sich vor, daß die teilweise langkettigen und oft auch unsymmetrischen Moleküle oder Flüssigkeitselemente im Ruhezustand der Flüssigkeit ineinander verknäuel sind. Mit Einsetzen der Schubwirkung werden die Moleküle in zunehmendem Maße entflochten und in Strömungsrichtung orientiert. Es bilden sich also Fließstrukturen aus. Darüber hinaus vermögen sich ursprünglich sehr große Elemente unter der Wirkung der Schubspannung in kleinere aufzulösen. Eine der ersten grundlegenden Untersuchungen über strukturviskose Flüssigkeiten hat OSTWALD [3.2] durchgeführt.

Die dilatanten Flüssigkeiten zeichnen sich dadurch aus, daß ihre Fließfähigkeit mit zunehmendem Geschwindigkeitsgradienten herabgesetzt wird. Das heißt also, daß ihre Viskosität zunimmt. Die dilatanten Flüssigkeiten zeigen das entgegengesetzte Verhalten der strukturviskosen Flüssigkeiten. Den Begriff «dilatante Flüssigkeit» benutzte erstmals REYNOLDS [3.3] in Zusammenhang mit Suspensionen fester Teilchen in Flüssigkeiten. Er erklärte die Abnahme der Fließfähigkeit der Suspensionen mit wachsendem Schergefälle folgendermaßen: Im Ruhezustand bilden die festen Körper die dichteste Packung, deren Zwischenräume gerade von der Flüssigkeit ausgefüllt werden. Bei einsetzender Bewegung wirkt die Flüssigkeit wie ein Schmiermittel zwischen den festen Teilchen. Mit steigender Scherbeanspruchung wird die Packung aufgelockert; es tritt eine Dilatation ein. Da jedoch das Flüssigkeitsvolumen zwischen den Teilchen unverändert bleibt, wird ihre Schmierwirkung geringer. Die Reibung zwischen den Teilchen wird demgemäß größer, und die Fließfähigkeit der Suspension sinkt. Mit dilatant werden heute alle Flüssigkeiten mit dem genannten Verhalten der Viskosität bezeichnet, auch dann, wenn nicht eine Dilatation der Struktur die Ursache ist.

Die bemerkenswerteste Eigenschaft der nach BINGHAM [3.4] benannten Flüssigkeit ist eine Anfangsschubspannung τ_0 , die überwunden werden muß, damit die Flüssigkeit zu fließen beginnt. Im Gegensatz dazu bewirkte bei den strukturviskosen und dilatanten Flüssigkeiten eine auch noch so kleine Schubspannung stets ein Fließen des Stoffes. Ein typisches Beispiel für Bingham-Flüssigkeiten ist die Zahnpasta. Man muß einen bereits merklichen Druck auf die Tube ausüben, damit die Paste austritt. Aber auch von Farben und Lacken fordert man in gewissem Maße die Eigenschaften der Bingham-Flüssigkeit, damit sie nicht in unerwünschter Weise verlaufen.

b) Flüssigkeiten, deren Viskosität zeitabhängig ist. Sie ist also eine Funktion der Einwirkungsdauer der Schubspannung. Die zeitlichen Änderungen müssen jedoch

reversibel sein. Wird die Viskosität mit andauernder Einwirkung geringer, so spricht man von thixotropen Flüssigkeiten. Hierfür geben Farben ebenfalls ein gutes Beispiel ab, wie man sich durch Umrühren der Farbe leicht überzeugen kann. Wird im Gegensatz dazu die Viskosität der Flüssigkeit mit zunehmender Zeit größer, dann spricht man von rheopekten Flüssigkeiten. Hierzu zählen manche Suspensionen, wie z. B. in Wasser gelöster Gips.

c) Viskoelastische Flüssigkeiten. Hierunter faßt man jene Flüssigkeiten zusammen, die teilweise viskoses und teilweise elastisches Verhalten zeigen. Die Moleküle dieser Flüssigkeiten weisen häufig einen langkettigen, schrauben- oder spiralförmigen Aufbau auf. Als Schubspannungsansatz kommt eine Verbindung von NEWTONS Ansatz für das viskose Verhalten und von HOOKES Ansatz für das elastische Verhalten in Frage. Als Beispiel für viskoelastisches Verhalten sei die Polyäthylenschmelze genannt.

Diese Einteilung der nicht-Newtonschen Flüssigkeiten kann keineswegs als vollständig und verbindlich angesehen werden. Viele Flüssigkeiten weisen gleichzeitig die Eigenschaften von zwei oder auch aller drei Gruppen auf. Insofern ist die obige Einteilung also auch nur dazu geeignet, einen ersten Überblick über das Verhalten der nicht-Newtonschen Flüssigkeiten zu vermitteln. Zur weiteren Information sei auf die Bücher von REINER [3.5], PHILIPPOFF [3.6], EIRICH [3.7], STUART [3.8], GREENE [3.9] und FREDRICKSON [3.10] verwiesen, in denen nicht nur die Grundlagen der Rheologie, sondern auch die Eigenschaften vieler einzelner Stoffe ausführlich behandelt werden. Eingehender werden im folgenden Abschnitt nur noch die viskosen Flüssigkeiten behandelt.

3.2 Schubspannungsansätze für rein viskose nicht-Newtonsche Flüssigkeiten

Aus der Vielzahl der Schubspannungsansätze, die für rein viskose nicht-Newtonsche Flüssigkeiten bekanntgeworden sind, sollen nur jene erörtert werden, die für die technische Praxis bedeutsam sind. Das heißt also, daß der Ingenieur in der Lage sein muß, mittels dieser Ansätze die Strömung solcher Flüssigkeiten und die damit etwa gleichzeitig verbundene Wärme- und Stoffübertragung zu berechnen. Somit kann sich sehr wohl ein physikalisch sinnvoller, mathematisch aber sehr verwickelter Ansatz für ingenieurmäßige Aufgaben als ungeeignet erweisen. Berücksichtigt man die Forderung nach einer möglichst einfachen mathematischen Form des Schubspannungsansatzes, dann muß man aber stets die Grenzen seines Gültigkeitsbereiches besonders sorgfältig beachten. Drei Schubspannungsansätze, und zwar der Potenzansatz, der Ansatz von PRANDTL und EYRING und der von BINGHAM, sollen mitgeteilt werden.

3.21 Potenzansatz von Ostwald

Ein Potenzansatz für die Schubspannung ist geeignet, innerhalb bestimmter Grenzen des Geschwindigkeitsgradienten das Fließverhalten strukturviskoser

und dilatanter Flüssigkeiten zu beschreiben. Dieser Ansatz wurde unabhängig von OSTWALD und DE WAELE im Verlauf von Untersuchungen über das Fließverhalten strukturviskoser Stoffe aufgestellt. Ein solcher Ansatz lautet:

$$\tau = K \left(-\frac{dw}{dy} \right)^n. \quad (3.2)$$

Hierin bedeuten τ Schubspannung, dw/dy Geschwindigkeitsgradient (auch Scherfälle genannt), w örtliche Geschwindigkeit, y Ortskoordinate und K einen empirischen Zahlenwert, der Ostwald-Faktor genannt wird. Dieser ist unabhängig von der Schubspannung und nur eine Funktion der Temperatur und des Druckes. Den Exponenten n des Geschwindigkeitsgradienten nennt man Flüssigkeitsindex. Ist $n = 1$, so geht der Potenzansatz in den Newtonschen Ansatz über, da dann K zur Viskosität η wird. Flüssigkeiten, deren Fließverhalten durch den Potenzansatz beschrieben wird, sollen Ostwald-Flüssigkeiten heißen.

Mit Gl.(3.2) wird der Potenzansatz in der am häufigsten gewählten Form angegeben. Diese Form ist mathematisch aber nicht einwandfrei, da bei positivem Geschwindigkeitsgradienten eine negative Größe mit einem Exponenten versehen ist, der theoretisch beliebige ganzzahlige und gebrochene Werte annehmen kann. Um die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten zu vermeiden, wählt man die positive Richtung der Ortskoordinate stets so, daß sich ein negativer Geschwindigkeitsgradient ergibt.

BIRD [3.11] konnte nachweisen, daß der Potenzansatz in der Schreibweise

$$\tau = -K \left[\left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{dw}{dy} \quad (3.3)$$

eine Komponente des für Ostwaldsche Flüssigkeiten aufgestellten Spannungstensors darstellt. Das heißt also, daß der Potenzansatz streng genommen nur für eindimensionale Strömungen verwendet werden darf. Räumliche Strömungen lassen sich mit dem Potenzansatz nicht behandeln. Die Schreibweise von BIRD hat gleichzeitig den Vorteil, daß keinerlei mathematische Vorschriften über das Vorzeichen des Geschwindigkeitsgradienten beachtet werden müssen.

Definiert man die Viskosität ganz allgemein als Verhältnis von Schubspannung τ zu Geschwindigkeitsgradient dw/dy , dann erhält man für Ostwald-Flüssigkeiten gemäß Gl.(3.3) die Beziehung:

$$\eta_{n-N} = K \left[\left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (3.4)$$

Der Index $n-N$ soll auf nicht-Newtonsche Flüssigkeiten hinweisen.

Hieraus erkennt man sehr deutlich, daß die Viskosität eine Funktion des Scherfalles und somit der Schubspannung ist. Der Ostwald-Faktor K ist indes unabhängig von der Schubspannung.

Theoretisch kann der Flüssigkeitsindex n beliebige Werte zwischen 0 und ∞ annehmen. Der Wert von n läßt somit das Abweichen vom Verhalten einer Newtonschen Flüssigkeit erkennen. Die Einheit des Ostwald-Faktors K hängt vom

Wert des Flüssigkeitsindexes ab. Das ist eine Schwäche des Potenzansatzes, die sich indes durch Wahl einer geeigneten dimensionslosen Schreibweise vermeiden läßt, wie REINER [3.5] nachgewiesen hat. Die Schreibweise des Potenzansatzes gemäß Gl.(3.2) bzw. (3.3) hat sich aber bereits so stark verbreitet, daß sie beibehalten werden soll.

Aus dem obigen Potenzansatz ergeben sich einige Schlußfolgerungen, die für die Strömung der Flüssigkeiten von grundsätzlicher Bedeutung sind:

- Für $dw/dy = 0$ ist auch $\tau = 0$, unabhängig davon, wie groß der Ostwald-Faktor K ist. In ruhenden Medien können daher keine Schubspannungen auftreten.
- Der Ostwald-Faktor K ist unabhängig von der Schubspannung.
- Die Schubspannung ist im allgemeinen ($n \neq 1$) eine nichtlineare Funktion des Geschwindigkeitsgradienten.
- Für $n \geq 1$ leitet eine auch noch so kleine Schubspannung eine Bewegung ein. Für $n < 1$ ist dies nicht der Fall.

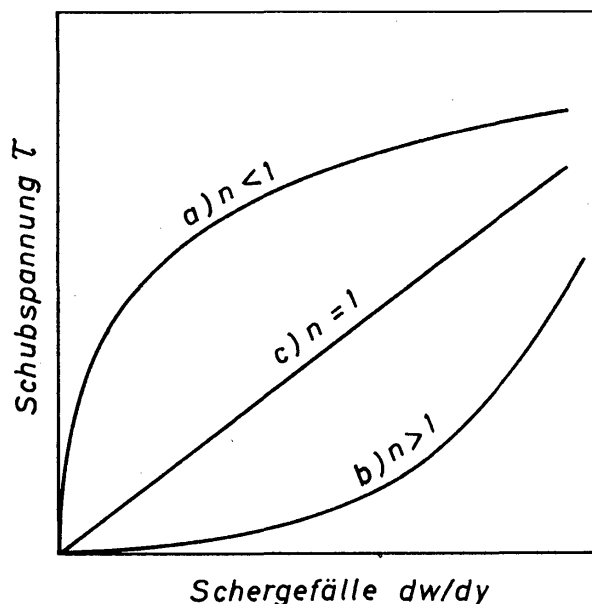


Bild 3.1
Abhängigkeit der Schubspannung vom Schergefälle für strukturviskose ($n < 1$), für Newtonsche ($n = 1$) und für dilatante Flüssigkeiten ($n > 1$) nach Gl.(3.2)

Mittels des Potenzansatzes läßt sich das Fließverhalten der strukturviskosen und der dilatanten Flüssigkeiten beschreiben. Ist nämlich $0 \leq n < 1$, dann handelt es sich

um strukturviskose Stoffe, ist $1 < n \leq \infty$, dann handelt es sich um dilatante. In Bild 3.1 ist für strukturviskose Flüssigkeiten die Abhängigkeit der Schubspannung τ vom Schergefälle dw/dy durch Kurve a, für dilatante Flüssigkeiten durch Kurve b und zum Vergleich für Newtonsche Flüssigkeiten durch Kurve c dargestellt. Diese durch Gl. (3.2) beschriebenen Kurven zeigen, daß bei $dw/dy = 0$ die Kurve für strukturviskose Flüssigkeiten eine senkrechte Tangente und die für dilatante Flüssigkeiten eine waagrechte Tangente aufweist. Bei strukturviskosen Stoffen wäre daher eine unendlich große Schubspannung erforderlich, um eine Bewegung einzuleiten. Umgekehrt ist es bei den dilatanten Flüssigkeiten, bei denen eine differentiell kleine Schubspannung bereits ausreichen sollte, sie in Bewegung zu versetzen. Dieser Sachverhalt folgt auch unmittelbar aus Gl.(3.2):

$$\frac{d\tau}{d(dw/dy)} = n K \left(- \frac{dw}{dy} \right)^{n-1}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
 n < 1: & \quad -dw/dy \rightarrow 0, & \quad d\tau/d(dw/dy) \rightarrow \infty, \\
 n > 1: & \quad -dw/dy \rightarrow 0, & \quad d\tau/d(dw/dy) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft des Potenzansatzes würde für reale Flüssigkeiten bedeuten, daß die strukturviskosen nicht aus dem Zustand der Ruhe und die dilatanten nicht aus dem Zustand der Bewegung herauszubringen wären. Derartige Eigenschaften weisen die realen Flüssigkeiten aber nicht auf. Somit kann der Potenzansatz also auch nicht geeignet sein, das Fließverhalten realer nicht-Newtonscher Flüssigkeiten in der Nähe von $dw/dy = 0$ zu beschreiben. Diese Einschränkung ist für die Behandlung von Strömungen in vielen Fällen belanglos, da beispielsweise bei der Rohrströmung der Geschwindigkeitsgradient nur in der Rohrachse den Wert Null annimmt. Nur in unmittelbarer Nähe der Rohrachse wird dann mittels des Potenzansatzes das Geschwindigkeitsprofil falsch berechnet. Für den Druckverlust der Strömung in Rohren ist dieser Fehler unbedeutend. Bei der Strömung durch Kanäle mit anderen Querschnittsformen kann jedoch durch das Versagen des Ostwald-Ansatzes bei $dw/dr = 0$ ein merklicher Fehler in der Berechnung von Geschwindigkeitsprofil und Druckverlust entstehen.

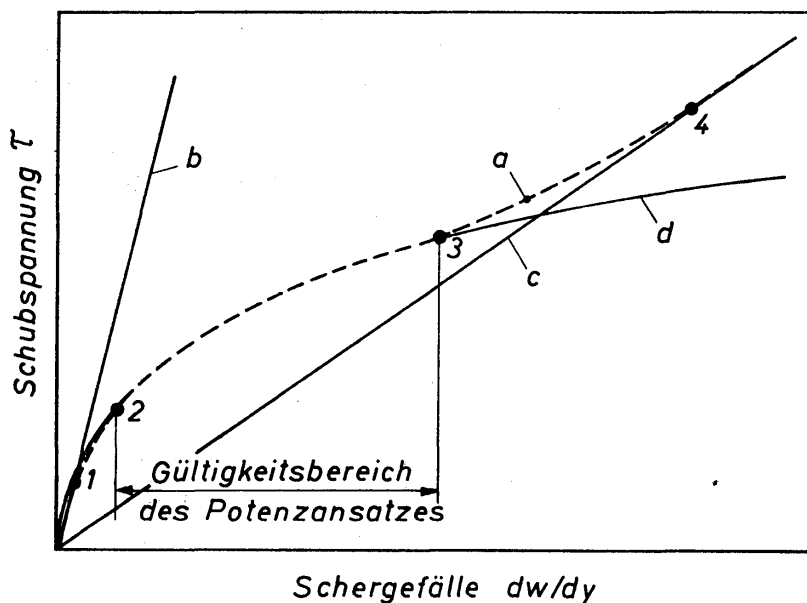


Bild 3.2. Fließkurve einer strukturviskosen Flüssigkeit (Kurve a) innerhalb eines sehr großen Bereiches des Schergefälles; Kurve b und c für Newtonsche Flüssigkeiten, Kurve d nach Potenzansatz Gl.(3.2)

Um einen Eindruck von der Brauchbarkeit des Potenzansatzes zur Beschreibung des Fließverhaltens nicht-Newtonscher Flüssigkeiten zu erhalten, soll *Bild 3.2* betrachtet werden. Die gestrichelte Kurve a möge die durch Messungen bestimmte Abhängigkeit der Schubspannung vom Schergefälle für eine strukturviskose Flüssigkeit wiedergeben. Ausgehend vom Koordinatennullpunkt verläuft Kurve a bis zum Punkt 1 näherungsweise auf der geraden Fließkurve b , die Newtonsches Verhalten der Flüssigkeit anzeigt. Im weiteren Verlauf erreicht Kurve a den Punkt 2, der auf der Kurve d liegt. Diese wird durch den Potenzansatz mit einem festen Wert von n beschrieben. Zwischen den Punkten 2 und 3 wird die reale Flüssigkeit durch den Potenzansatz wiedergegeben. Überschreitet das Schergefälle den Wert bei Punkt 3, dann entfernt sich die reale Fließkurve a von der Kurve d und erreicht im Punkt 4 die gerade Fließkurve c , die wiederum Newtonsches Verhalten

der Flüssigkeit kennzeichnet. Somit zeigt die reale Fließkurve in den Bereichen sehr niedriger und sehr hoher Schergefälle Newtonsches und im Bereich zwischen den Punkten 1 und 4 nicht-Newtonsches Verhalten der Flüssigkeit an. Innerhalb des Bereiches nicht-Newtonschen Verhaltens wird nur der zwischen den Punkten 2 und 3 liegende Bereich durch den Potenzansatz beschrieben. Die Bereiche zwischen den Punkten 1 und 2 sowie 3 und 4 sind zunächst durch kein Gesetz ausgedrückt worden. Reicht die Beschreibung der realen Fließkurve a mittels der nach dem Potenzansatz berechneten Kurve d für das vorliegende Strömungsproblem nicht aus, dann muß Kurve a durch Wahl verschiedener Werte für den Flüssigkeitsindex durch mehrere Potenzgleichungen angenähert werden. Auf diese Weise ist es dann in jedem Falle möglich, die reale Fließkurve in ausreichender Weise durch den Potenzansatz zu beschreiben. Diese am Beispiel einer strukturviskosen Flüssigkeit angestellten Betrachtungen gelten in entsprechender Form auch für dilatante Flüssigkeiten.

Aus dieser Erörterung ergeben sich folgende Hinweise, die für die praktische Anwendung des Potenzansatzes von Bedeutung sind:

- a) Mittels eines festen Wertes für den Flüssigkeitsindex n läßt sich durch den Potenzansatz stets nur ein begrenzter Bereich einer realen Fließkurve ausdrücken.
- b) Die bestmögliche Annäherung der realen Fließkurve durch den Potenzansatz läßt sich mittels verschiedener Werte des Flüssigkeitsindex n erreichen.
- c) Der Potenzansatz ist eine Interpolationsformel, deren Gültigkeitsgrenzen stets angegeben werden müssen.

Bei Beachtung dieser Hinweise bietet der Potenzansatz eine sehr gute Möglichkeit zur Beschreibung des Fließverhaltens strukturviskoser und dilatanter Flüssigkeiten. Der Potenzansatz weist von allen verfügbaren Schubspannungsansätzen die einfachste mathematische Form auf. Er wird daher besonders gern angewendet, wenn nicht nur die strömende Bewegung der nicht-Newtonschen Flüssigkeit berechnet werden soll, sondern zusätzlich noch Wärme- und Stoffübertragung. Der hierfür erforderliche mathematische Aufwand ist teilweise außerordentlich groß. Bietet sich dann durch Wahl eines einfach formulierten Schubspannungsansatzes die Möglichkeit, diesen Aufwand in erträglichen Grenzen zu halten, dann wird davon stets Gebrauch gemacht.

Zur zahlenmäßigen Bestimmung des Flüssigkeitsindex n und des Ostwald-Faktors K trägt man die beispielsweise mit einem Rotationsviskosimeter bestimmten Werte für τ und dw/dy in ein Diagramm mit logarithmisch geteilten Koordinaten ein. In sehr vielen Fällen ist es dann möglich, die Meßwerte durch eine gerade Linie mit hinreichender Genauigkeit auszugleichen. *Bild 3.3* zeigt eine solche Ausgleichskurve, die durch eine einfache Potenzgleichung ausgedrückt werden kann. Ist α der Steigungswinkel der Geraden, dann liefert $\operatorname{tg} \alpha$ den Flüssigkeitsindex n . Den Wert des Ostwald-Faktors K liest man auf der Ordinate für $dw/dy = 1$ ab.

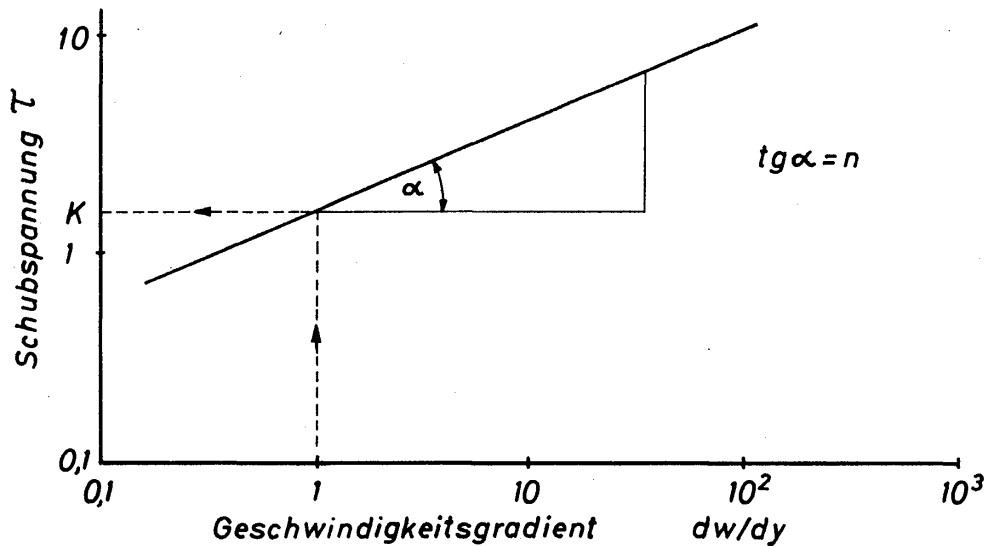


Bild 3.3. Ermittlung der Werte des Flüssigkeitsindex n und der scheinbaren Viskosität K aus der Fließkurve

Häufig wird von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, das Fließverhalten aus dem Druckverlustgesetz zu bestimmen. Dieses läßt sich in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\Delta P}{L} \frac{d}{4} = f\left(8 \frac{\bar{w}}{d}\right) = f\left(\frac{32}{\pi} \frac{\dot{V}}{d^3}\right). \quad (3.6)$$

Diese Auftragung wird dann bevorzugt, wenn das Fließverhalten der nicht-Newtonschen Flüssigkeit mittels eines Kapillarviskosimeters untersucht wird. Dann mißt man den Druckverlust ΔP und den Volumstrom \dot{V} . Ferner bedeuten in Gl.(3.6) d und L Durchmesser und Länge der Kapillare und \bar{w} die mittlere Geschwindigkeit. RABINOWITSCH [3.12] und MOONEY [3.13] haben gezeigt, daß der Zusammenhang zwischen $\Delta P \cdot d/4 \cdot L$ und $8 \bar{w}/d$ unabhängig vom Durchmesser der Kapillare ist, was stets dann zutrifft, wenn die Schubspannung allein eine Funktion des Geschwindigkeitsgradienten ist. Somit muß Gl.(3.6) nicht nur für strukturviskose und dilatante Flüssigkeiten gültig sein, sondern auch für Bingham-Flüssigkeiten. Die Bedeutung der in Gl.(3.6) auftretenden Glieder wird sofort klar, wenn man folgende für die Rohrströmung geltende Zusammenhänge beachtet:

$$\tau_w = \frac{\Delta P}{L} \frac{d}{4}, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)_w = -8 \frac{\bar{w}}{d} \delta, \quad (3.8)$$

mit
$$\delta = \frac{1+3n}{4n}. \quad (3.9)$$

Hierin sind τ_w die Wandschubspannung, $(dw/dy)_w$ der Geschwindigkeitsgradient an der Wand und δ , wie sich später noch zeigen wird, das Verhältnis der Geschwindigkeitsgradienten an der Wand bei nicht-Newtonschen und Newtonschen

Flüssigkeiten. Die Abhängigkeit der Größe δ vom Flüssigkeitsindex n ist in *Bild 3.4* dargestellt. Für $n = 0$ gilt $\delta = \infty$ und für $n = \infty$ gilt $\delta = 3/4$.

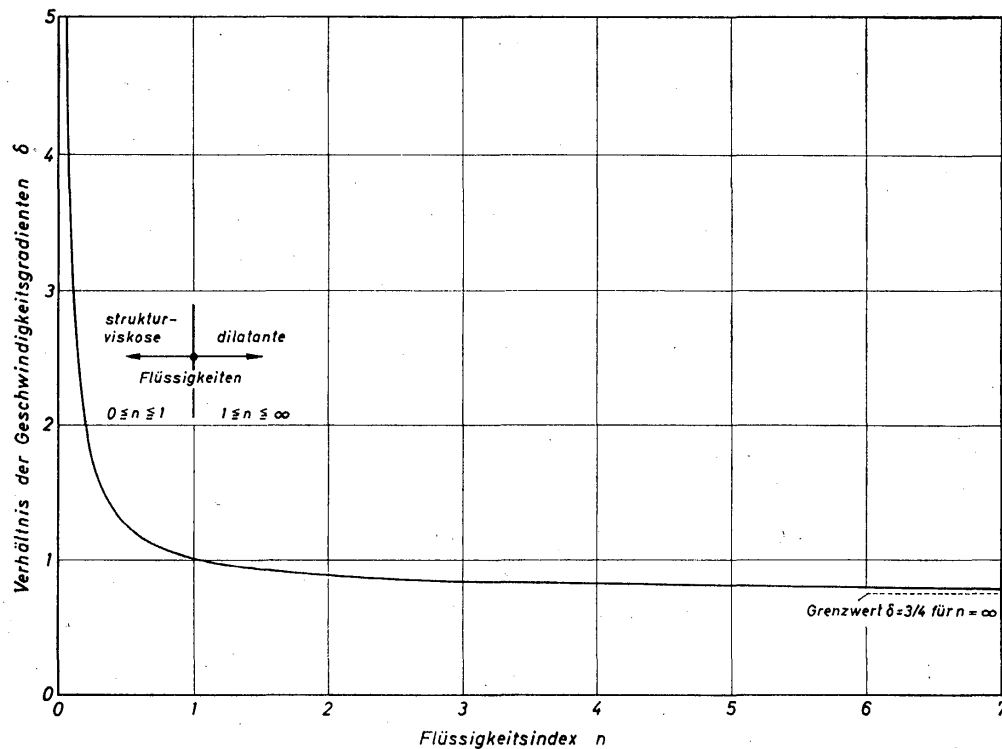


Bild 3.4. Abhängigkeit des Verhältnisses δ der Geschwindigkeitsgradienten für nicht-Newton'sche und Newton'sche Flüssigkeiten vom Flüssigkeitsindex n

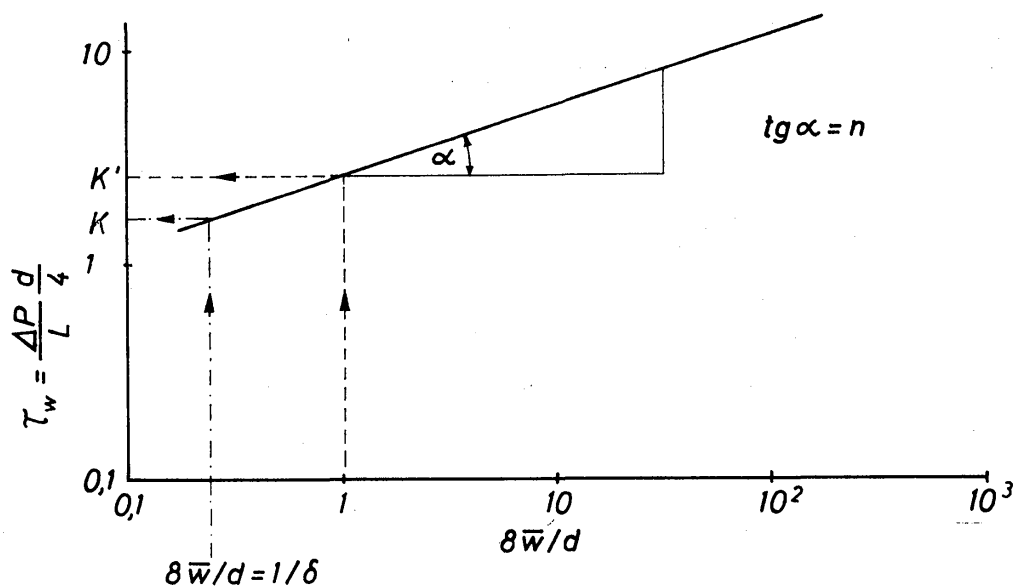


Bild 3.5. Ermittlung der Werte des Flüssigkeitsindex n und der scheinbaren Viskosität K aus der Fließkurve

Bei Verwendung der durch Gl. (3.6) gegebenen Koordinaten erhält man die Fließkurve gemäß *Bild 3.5*. Hieraus wird der Flüssigkeitsindex n in der schon bekannten Weise ermittelt. Die Bestimmung des Ostwald-Faktors K erfolgt jedoch nach der Beziehung

$$K = \frac{K'}{\delta^n}, \quad (3.10)$$

wozu K' aus dem Diagramm bei $8 \bar{w}/d = 1$ entnommen wird. Selbstverständlich läßt sich K auch unmittelbar auf der Ordinate ablesen, wenn der Abszissenwert $8 \bar{w}/d = 1/\delta$ gewählt wird.

Es wurde bereits erwähnt, daß eine große Zahl von nicht-Newtonschen Flüssigkeiten Fließkurven aufweisen, die im logarithmischen Koordinatennetz gerade Linien ergeben. Für die Flüssigkeiten ist über einen größeren Bereich des Geschwindigkeitsgradienten der Flüssigkeitsindex n konstant, und der Potenzansatz gemäß Gl.(3.2) kann ohne jede Schwierigkeit angewendet werden. Zeigt die Fließkurve im logarithmischen Koordinatennetz einen gekrümmten Verlauf, dann ist mittels des Potenzansatzes eine abschnittsweise Wiedergabe erforderlich. Zahlreiche theoretische und experimentelle Untersuchungen an nicht-Newtonschen Flüssigkeiten haben ergeben, daß die mittels Viskosimetern ermittelten Fließkurven zwar unabhängig von den geometrischen Abmessungen des Gerätes sind, aber doch eine Abhängigkeit vom verwendeten Gerätetyp aufweisen. Es ist daher nicht zu erwarten, daß Reibungsgesetze, die aus Messungen mit dem Rotationsviskosimeter ermittelt werden, mit denen übereinstimmen, die man aus Messungen mittels eines Kapillarviskosimeters erhielt. Das bedeutet dann aber auch, daß man zur Ermittlung des Reibungsgesetzes nach Möglichkeit eine Apparatur verwenden soll, die im Aufbau mit der technischen Anlage vergleichbar ist, in welche die Strömung der nicht-Newtonschen Flüssigkeit später erfolgt. Zur Berechnung der Rohr- und Kanalströmung wählt man daher vorzugsweise ein Reibungsgesetz, welches aus Messungen mittels eines Kapillarviskosimeters erhalten wurde [3.13]. Die Anwendung des Rotationsviskosimeters zur Bestimmung von Reibungsgesetzen, die unabhängig vom Meßgerät sind, beschrieb PAWLOWSKI [3.14].

3.22 Ansatz von Prandtl und Eyring

Aus physikalischen Überlegungen von PRANDTL [3.15] und EYRING [3.16] über Struktur und Verhalten nicht-Newtonscher Flüssigkeiten hat sich der nach diesen Forschern benannte Ansatz ergeben, der zumeist in der folgenden, verkürzten Form verwendet wird:

$$\frac{dw}{dy} = -C \sinh\left(\frac{\tau}{A}\right). \quad (3.11)$$

Hierin sind A und C Stoffgrößen, die von der Temperatur, nicht aber von der Schubspannung abhängen. Flüssigkeiten, deren Reibungsverhalten durch den Ansatz von PRANDTL und EYRING beschrieben wird, sollen Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten heißen.

Aus den Betrachtungen von WEYMANN [3.17] ergibt sich eine Möglichkeit, A und C physikalisch zu deuten. A läßt sich wie die Schubspannung τ als Impulsstromdichte auffassen, d. h. als der je Zeit- und Flächeneinheit von den Fließeinheiten transportierte Impuls. Während bei τ der Impuls von der Strömungsgeschwindigkeit w herrührt, ist A proportional derjenigen Impulsstromdichte, deren Ursache

die thermische Bewegung der Fließeinheiten ist. Das Verhältnis τ/A ist dimensionslos. Die Größe C hat die Dimension eines Geschwindigkeitsgradienten, also s^{-1} , und läßt sich als die auf die Zeiteinheit bezogene Wahrscheinlichkeit deuten, mit der eine Fließeinheit auf Grund ihrer thermischen Bewegung ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage verläßt und eine andere einnimmt. Fließeinheiten können sowohl einzelne Moleküle als auch Molekülgruppen sein.

Für sehr kleine Werte der Schubspannung geht der Ansatz von PRANDTL und EYRING in den von NEWTON über. Entwickelt man die hyperbolische Sinusfunktion $\sinh(\tau/A)$ in Reihe gemäß

$$\sinh\left(\frac{\tau}{A}\right) = \frac{1}{1!} \frac{\tau}{A} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\tau}{A}\right)^3 + \dots \quad (3.12)$$

und berücksichtigt allein das erste Glied, so erhält man

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{C}{A} \tau \quad (3.13)$$

bzw.

$$\tau = -\frac{A}{C} \frac{dw}{dy}. \quad (3.14)$$

Dieses ist der Newtonsche Ansatz, wenn man $A/C = \eta$ setzt. Das heißt, daß der Ansatz von PRANDTL und EYRING das Verhalten nicht-Newtonscher Flüssigkeiten auch im Bereich kleinster Werte des Geschwindigkeitsgradienten richtig wiedergibt. Insofern ist er dem Potenzansatz überlegen. Während mittels des Potenzansatzes jedoch das Reibungsverhalten strukturviskoser und dilatanter Flüssigkeiten mit der oben erwähnten Einschränkung beschrieben werden kann, ist der Ansatz von PRANDTL und EYRING allein für strukturviskose Stoffe anwendbar. Mittels dieses Ansatzes ließe sich also die in *Bild 3.2* gestrichelt dargestellte Kurve für eine reale nicht-Newtonsche Flüssigkeit vom Koordinatenursprung bis zu Punkt 3 ausdrücken. Über diesen Punkt hinaus versagt auch der Ansatz gemäß Gl.(3.11). Sowohl der Potenzansatz als auch dieser Ansatz von PRANDTL und EYRING haben eine obere Gültigkeitsgrenze, die nicht überschritten werden darf. Daher hat auch der Prandtl-Eyring-Ansatz schließlich nur die Bedeutung einer Interpolationsformel. Nebst den Stoffgrößen A und C muß stets die obere Gültigkeitsgrenze angegeben werden. Es sei jedoch erwähnt, daß es mittels der vollständigen Form des Ansatzes sehr wohl gelingt, die gesamte Fließkurve strukturviskoser Stoffe richtig wiederzugeben [3.7]. Die vollständige Form führt aber bei der Untersuchung von Strömungs- und Wärmeübergangsproblemen zu unerträglich hohem mathematischen Aufwand und wird aus diesem Grunde kaum verwendet. Darüber hinaus ist es bei technischen Problemen zumeist auch vollkommen ausreichend, wenn man die Fließkurve gemäß *Bild 3.2* bis zum Punkt 3 mathematisch beschreiben kann.

Bild 3.6 zeigt die Abhängigkeit der Schubspannung τ vom Geschwindigkeitsgradienten dw/dy in logarithmischer Darstellungsweise. Der Prandtl-Eyring-Ansatz wird durch Kurve *a* und der Potenzansatz durch Kurve *b* wiedergegeben.

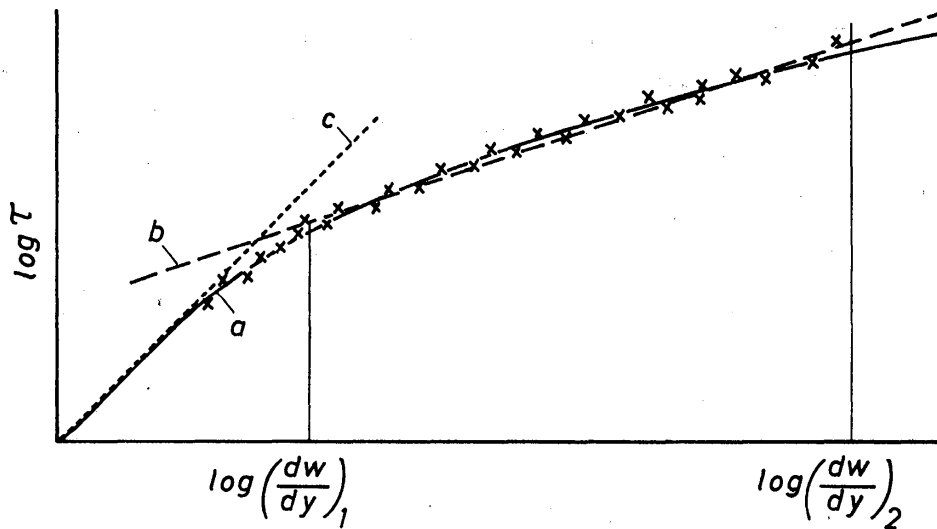


Bild 3.6. Zum Vergleich der Schubspannungsansätze von PRANDTL und EYRING (Kurve *a*) und von OSTWALD (Kurve *b*)

Kurve *a* weist im Bereich sehr kleiner Werte des Geschwindigkeitsgradienten (punktierter Verlauf *c*) einen geradlinigen Verlauf mit der Steigung 1 auf, da die Flüssigkeit in diesem Bereich Newtonsches Verhalten zeigt. Die eingetragenen Kreuze sollen Meßwerte darstellen, die durch beide Ansätze innerhalb des Bereiches von $(dw/dy)_1$ bis $(dw/dy)_2$ etwa gleich gut wiedergegeben werden. Auf diese Möglichkeit, innerhalb eines begrenzten Bereiches die Fließkurve durch beide Ansätze wiedergeben zu können, wird später im Zusammenhang mit dem Widerstand nochmals eingegangen.

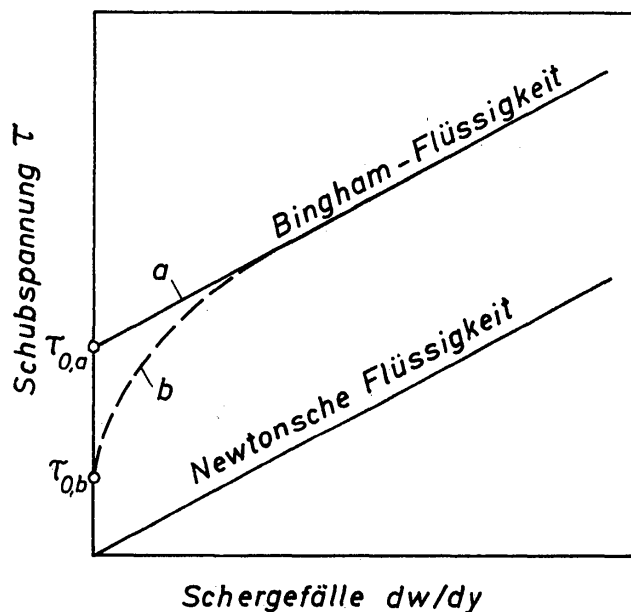
Der Vorteil des verkürzten Ansatzes nach Gl. (3.11), das Fließverhalten strukturviskoser Stoffe auch im Bereich kleiner Werte des Schergefalles richtig wiederzugeben, ist natürlich mit einem im Vergleich zum Potenzansatz größeren mathematischen Aufwand verbunden. Dieser macht sich aber kaum noch bemerkbar, wenn bei der Berechnung verwickelter Strömungsprobleme oder Probleme des Wärme- und Stoffüberganges Rechenautomaten eingesetzt werden. Ingenieure sind in zunehmendem Maße mit der Handhabung von Rechenautomaten vertraut und werden daher auch diesen Ansatz in Zukunft häufiger verwenden.

3.23 Ansatz von Bingham

Der Ansatz von BINGHAM [3.4] dient zur Beschreibung des Reibungsverhaltens jener Gruppe nicht-Newtonscher Flüssigkeiten, die Bingham-Flüssigkeiten genannt werden. Bild 3.7 gibt mit Kurve *a* das Verhalten der idealen Bingham-Flüssigkeiten wieder. Hierfür gilt der Ansatz:

$$\tau = \pm \tau_{0,a} + \eta_B \left(- \frac{dw}{dy} \right). \quad (3.15)$$

Für $\tau_{0,a}$ ist das positive Vorzeichen zu wählen, wenn τ positiv ist, und das negative Vorzeichen, wenn τ negativ ist. Das charakteristische Kennzeichen einer Bingham-



Flüssigkeit ist eine Fließgrenze mit der Anfangsschubspannung $\tau_{0,a}$. Erst nachdem die Schubspannung diesen Wert überschritten hat, beginnt die Bingham-Flüssigkeit zu fließen. Während des Fließens zeigt sie Newtonsches Verhalten mit der Viskosität η_B .

Bild 3.7
Fließkurven für Bingham-Flüssigkeiten

Die Mehrzahl von Flüssigkeiten, die eine Fließgrenze aufweisen, haben eine Fließkurve, die nach der in *Bild 3.7* gestrichelt eingezeichneten Kurve *b* verlaufen. Hierbei tritt an der Fließgrenze die Schubspannung $\tau_{0,b}$ auf. Überlegt man sich, daß sehr kleine Werte des Schergefalles außerordentlich schwierig zu messen sind, dann versteht man unmittelbar, daß die Angabe von Fließgrenzen unsicher ist. Es kann daher sehr wohl sein, daß die Fließgrenze gar nicht existiert. Ihr Wert wurde allein durch sinnvolle Extrapolation der Fließkurve in Richtung $dw/dy = 0$ erhalten.

Praktisch ist die Fließgrenze auch nicht von der Bedeutung, die man ihr theoretisch häufig beimißt. Ist durch Experimente gesichert, daß die Fließkurve in der Nähe von $dw/dy = 0$ einen sehr steilen Verlauf oder aber eine Fließgrenze aufweist, dann ist in jedem Falle eine endlich große Schubspannung erforderlich, um die Flüssigkeit in Bewegung zu setzen.

Wie man leicht einsieht, läßt sich eine Fließkurve vom Verlauf der Kurve *b* in *Bild 3.7* recht gut durch den Potenzansatz annähern. Das weist also nochmals darauf hin, wie nützlich der Potenzansatz für die ingenieurmäßige Behandlung von Problemen der Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten ist. Auf diesen Ansatz stützten sich auch alle Untersuchungen von METZNER und seinen Mitarbeitern [3.18], dem es zu verdanken ist, daß die Berechnung von allen mit nicht-Newtonschen Flüssigkeiten zusammenhängenden Fragen der Strömung und des Wärmeüberganges einem größeren Kreis von Ingenieuren zugänglich wurde. Im folgenden wird die laminare Strömung durch Rohre und Kanäle mittels des Potenzansatzes und anschließend mittels der Ansätze von PRANDTL und EYRING sowie von BINGHAM behandelt.

3.3 Berechnung der laminaren Rohrströmung mittels des Potenzansatzes

3.31 Geschwindigkeitsverteilung

Das Gleichgewicht von Druck- und Reibungskräften an einem Flüssigkeitszylinder mit dem Radius r und der Länge L liefert die Beziehung:

$$\tau = \frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2}. \quad (3.16)$$

Mit ΔP wird der Druckabfall bezeichnet. Mit der Annahme, daß der statische Druck über den Querschnitt konstant ist, ändert sich die Schubspannung τ linear mit dem Radius r [3.19]. Führt man für die Schubspannung den Potenzansatz

$$\tau = K \left(-\frac{dw}{dr} \right)^n \quad (3.17)$$

ein, so folgt als Differentialgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung:

$$\frac{dw}{dr} = -\left(\frac{\Delta P/L}{2K} \right)^{1/n} \cdot r^{1/n}. \quad (3.18)$$

Bei der Integration wird die Haftbedingung $w = 0$ für $r = R$ berücksichtigt. Dann erhält man die örtliche Geschwindigkeit w zu

$$w = \left(\frac{\Delta P/L}{2K} \right)^{1/n} \cdot \frac{R^{1+1/n}}{1+1/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1+1/n} \right]. \quad (3.19)$$

Zu einer etwas einfacheren Schreibweise gelangt man durch den Zusammenhang zwischen Wandschubspannung τ_w und Druckabfall ΔP . Mit $\tau = \tau_w$ für $r = R$ ergibt sich

$$\tau_w = \frac{\Delta P}{L} \frac{R}{2}. \quad (3.20)$$

Nach Einsetzen in Gl.(3.19) erhält man

$$w = \frac{(\tau_w/K)^{1/n} \cdot R}{1+1/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1+1/n} \right]. \quad (3.21)$$

Für einige Werte von n sind hiernach Geschwindigkeitsverteilungen berechnet und in *Bild 3.8* dargestellt, wobei in allen Fällen die gleiche mittlere Geschwindigkeit angenommen wurde. Von besonderem Interesse sind dabei die Profile für die Grenzwerte des Flüssigkeitsindex. Für $n = 0$, d.h. für den Grenzfall der struk-

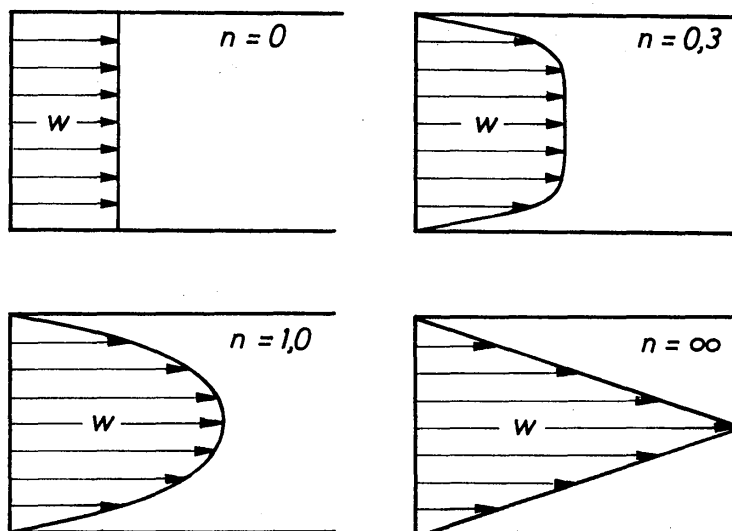


Bild 3.8
Geschwindigkeitsprofile
für Ostwald-Flüssigkeiten
mit verschiedenen
Werten des Flüssigkeits-
index n

turviskosen Flüssigkeiten, ergibt sich das Kolbenprofil; die Geschwindigkeit ist über den Rohrquerschnitt konstant. Der andere Grenzfall mit $n = \infty$ betrifft die dilatanten Flüssigkeiten, bei denen sich ein kegelförmiges Geschwindigkeitsprofil einstellt; die örtliche Geschwindigkeit ändert sich linear mit dem Radius r . Für alle anderen Werte von n stellen sich gekrümmte Geschwindigkeitsprofile ein. Als Sonderfall wurde für $n = 1$ das bekannte Parabelprofil für Newtonsche Flüssigkeiten dargestellt.

Setzt man Gl.(3.21) $r = 0$, so folgt für die in Rohrmitte auftretende maximale Geschwindigkeit die Beziehung:

$$w_{\max} = \frac{(\tau_w/K)^{1/n} \cdot R}{1 + 1/n}. \quad (3.22)$$

Die mittels der Definitionsgleichung

$$\bar{w} = \frac{1}{R^2 \pi} \int_0^R 2 \eta w r dr \quad (3.23)$$

berechnete mittlere Geschwindigkeit \bar{w} ergibt sich mit Gl.(3.21) zu

$$\bar{w} = \frac{(\tau_w/K)^{1/n} \cdot R}{3 + 1/n}. \quad (3.24)$$

Damit ist es möglich, das Verhältnis aus maximaler und mittlerer Geschwindigkeit zu berechnen:

$$\frac{w_{\max}}{\bar{w}} = \frac{1 + 3n}{1 + n}. \quad (3.25)$$

Für die Kolbenströmung mit $n = 0$ wird $w_{\max}/\bar{w} = 1$, für Newtonsche Flüssigkeiten mit $n = 1$ wird $w_{\max} = 2$ und für die Kegelströmung mit $n = \infty$ wird $w_{\max}/\bar{w} = 3$.

Für die Darstellung der Fließkurven war mit Gl.(3.8) bereits eine Beziehung für den Geschwindigkeitsgradienten an der Wand verwendet worden, deren Herleitung an dieser Stelle nachgeholt sei. Aus Gl.(3.18) folgt für $r = R$ zunächst

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_w = -\left(\frac{\Delta P/L}{2K}\right)^{1/n} R^{1/n}. \quad (3.26)$$

Mit $\Delta P/L = 4 \cdot \tau_w/d$ und $r = d/2$ wird hieraus:

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_w = -\left(\frac{\tau_w}{K}\right)^{1/n}. \quad (3.27)$$

Setzt man hierin den aus Gl.(3.24) folgenden Ausdruck für die Wandschubspannung

$$\tau_w = K \left(8 \frac{w}{d} \frac{1 + 3n}{4n}\right)^n \quad (3.28)$$

ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_w = -8 \frac{\bar{w}}{d} \frac{1+3n}{4n}. \quad (3.29)$$

Für Newtonsche Flüssigkeiten mit $n = 1$ wird der Wandgradient gleich $-8\bar{w}/d$. Das aus beiden Gradienten gebildete Verhältnis ist in Gl.(3.9) mit δ bezeichnet worden.

3.32 Widerstandsgesetz

METZNER und REED [3.20] haben ein Widerstandsgesetz aufgestellt, das sowohl für Newtonsche als auch für viskose, nicht-Newtonsche Flüssigkeiten gültig ist. Dieses Gesetz wurde für Newtonsche Flüssigkeiten bereits hergeleitet und lautet:

$$\psi = \frac{64}{Re_M}. \quad (3.30)$$

Hierin ist ψ die Widerstandszahl mit der Definition

$$\psi \equiv \frac{4\tau_w}{\rho \bar{w}^2/2} = \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2/2} \cdot \frac{d}{L}. \quad (3.31)$$

Neben den bereits bekannten Größen bezeichnen ρ die Dichte der Flüssigkeit und d den Rohrdurchmesser. Da das Widerstandsgesetz und die Definition der Widerstandszahl vorgeschrieben werden, muß die Reynoldszahl aus Gl.(3.30) berechnet werden. Unter Berücksichtigung von Gl.(3.31) erhält man für Re_M den folgenden Ausdruck

$$Re_M \equiv \frac{8\rho \bar{w}^2}{\tau_w}. \quad (3.32)$$

Hierin ist die Wandschubspannung τ_w durch Gl.(3.28) gegeben. Nach Einsetzen erhält man also

$$Re_M \equiv \frac{\bar{w}^{2-n} d^n \rho}{\frac{1}{8} K \left(8 \frac{1+3n}{4n}\right)^n}. \quad (3.33)$$

Für Newtonsche Flüssigkeiten mit $n = 1$ geht Gl.(3.33) in die bekannte Definitionsgleichung $Re \equiv \bar{w} d \rho / \eta$ über. Somit stellt Gl.(3.33) eine verallgemeinerte Definitionsgleichung dar, die sowohl für Newtonsche als auch für viskose nicht-Newtonsche Flüssigkeiten, die dem Potenzansatz gehorchen, anzuwenden ist. Diese Reynoldszahl wird, zur Unterscheidung von anders definierten Reynoldszahlen, mit dem Index M versehen, da ihre Definition auf METZNER zurückgeht.

METZNER und REED haben das Widerstandsgesetz gemäß Gl.(3.30) in umfassender Form überprüft. Das Ergebnis ist in *Bild 3.9* dargestellt, in dem die eingezeichneten Kreise Meßwerte bedeuten, die von acht verschiedenen Forschern stammen. Die gerade Linie gibt Gl.(3.30) wieder. Man entnimmt dem Bild, daß das Widerstandsgesetz durch die Meßwerte in ausgezeichneter Weise bestätigt

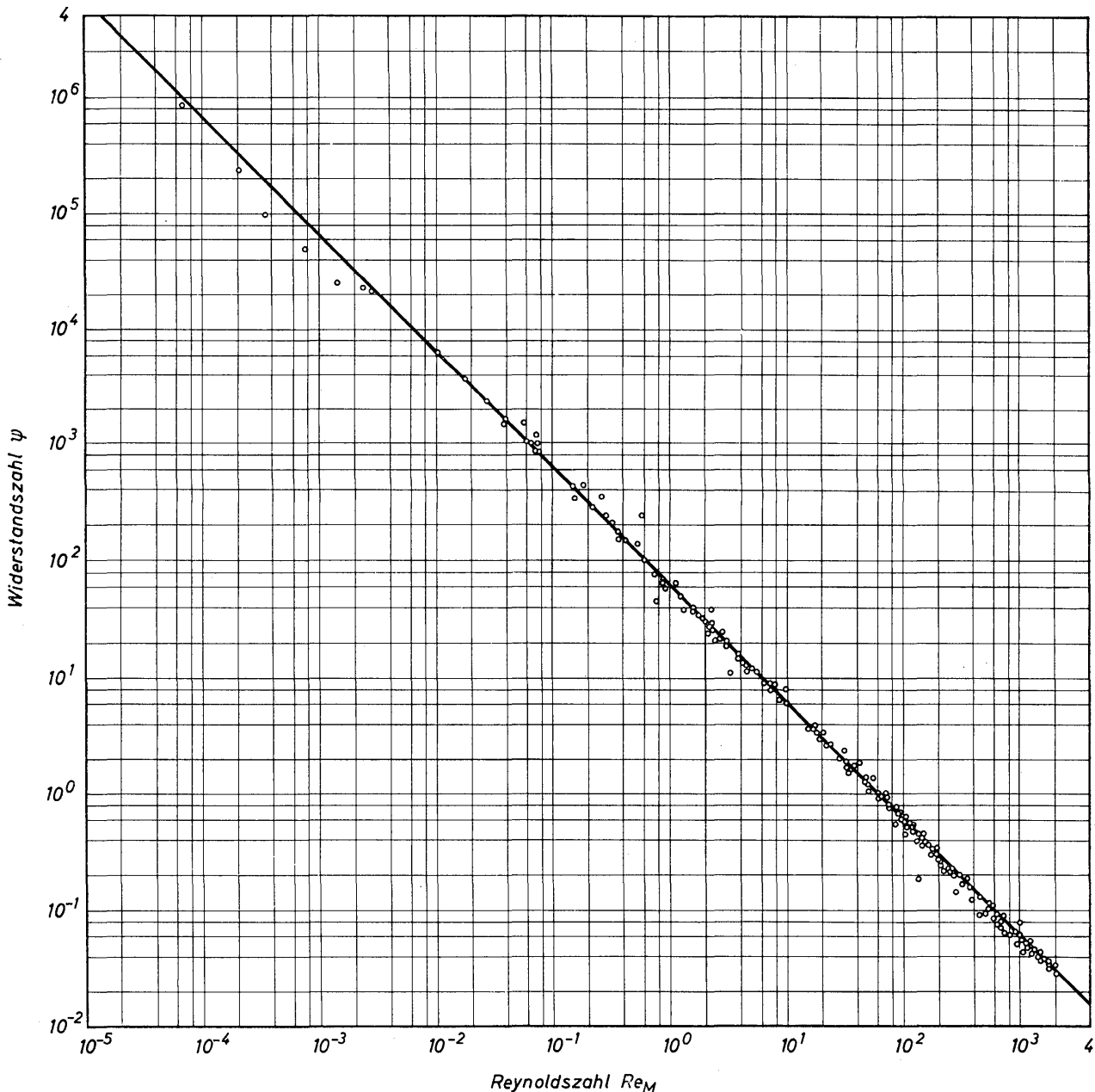


Bild 3.9. Widerstandsgesetz für strukturviskose Flüssigkeiten nach METZNER und REED [3.20]. Ausgezogene Kurve nach Gl.(3.30)

wird. Die experimentellen Ergebnisse erstrecken sich über einen Bereich der Reynoldszahl von 10^{-5} bis 10^{+3} , also über acht Zehnerpotenzen. Die bei den Versuchen verwendeten Flüssigkeiten zeigten alle strukturviskoses Verhalten mit Werten des Flüssigkeitsindexes zwischen $n = 0,022$ und $n = 0,716$. Die Durchmesser der Versuchsrohre lagen zwischen etwa 3 mm und 300 mm. Alle Versuche wurden bei isothermer Strömung durchgeführt. Für nichtisotherme Strömung haben HANKS und CHRISTIANSEN [3.21] ein theoretisches Widerstandsgesetz aufgestellt, welches ebenfalls mit Meßwerten sehr gut übereinstimmt.

3.33 Deutung der verallgemeinerten Definitionsgleichung für die Reynoldszahl

Für Newtonsche Flüssigkeiten ist es üblich, die Reynoldszahl als Verhältnis von Trägheitskraft zu Reibungskraft zu deuten. Diese Deutung soll auf die Reynolds-

zahl für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten übertragen werden. Die auf die Volumeneinheit bezogene Trägheitskraft T ist proportional zu

$$\rho \bar{w}^2 / d$$

und die ebenfalls auf die Volumeinheit bezogene Reibungskraft τ_w / d , ausgedrückt mittels der Wandschubspannung nach Gl.(3.28), proportional zu

$$\frac{K 8^n \bar{w}^n}{d^{1+n}} \left(\frac{1+3n}{4n} \right)^n.$$

Das Verhältnis beider Größen liefert die Reynoldszahl:

$$Re_M = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = \frac{\bar{w}^{2-n} d \rho^n}{K \left(8 \frac{1+3n}{4n} \right)^n}. \quad (3.34)$$

Diese Beziehung stimmt bis auf den Zahlenwert $1/8$ mit Gl.(3.33) überein, die sich aus der Definition eines allgemeinen Widerstandsgesetzes für Newtonsche und nicht-Newtonsche Flüssigkeiten ergab. Die Deutung der Reynoldszahl als Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskraft führt also zu der gleichen Definitionsgleichung.

Für die Trägheitskräfte gelten bei Newtonschen und nicht-Newtonschen Flüssigkeiten die gleichen Beziehungen. Unterschiede treten allein in den Ausdrücken für die Reibungskräfte auf. Ersetzt man die Reibungskräfte durch die Wandschubspannungen, so erhält man für Newtonsche Flüssigkeiten

$$\tau_{w,N} = \eta 8 \cdot \frac{\bar{w}}{d} \quad (3.35)$$

und für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten

$$\tau_{w,n-N} = K \left(8 \cdot \frac{\bar{w}}{d} \right)^n \delta^n. \quad (3.36)$$

Hierin ist $\delta = (1+3n)/4n$ das bereits früher erwähnte Verhältnis der Geschwindigkeitsgradienten an der Wand. Das Verhältnis der Wandschubspannungen folgt mit den beiden letzten Gleichungen zu

$$\frac{\tau_{w,n-N}}{\tau_{w,N}} = \frac{K}{\eta} \cdot \frac{\delta^n}{(8 \bar{w}/d)^{1-n}}. \quad (3.37)$$

Damit läßt sich die allgemeine Definitionsgleichung (3.33) in die folgende Form bringen:

$$Re_M = \frac{\bar{w} d \rho}{\eta} \cdot \frac{\tau_{w,N}}{\tau_{w,n-N}}. \quad (3.38)$$

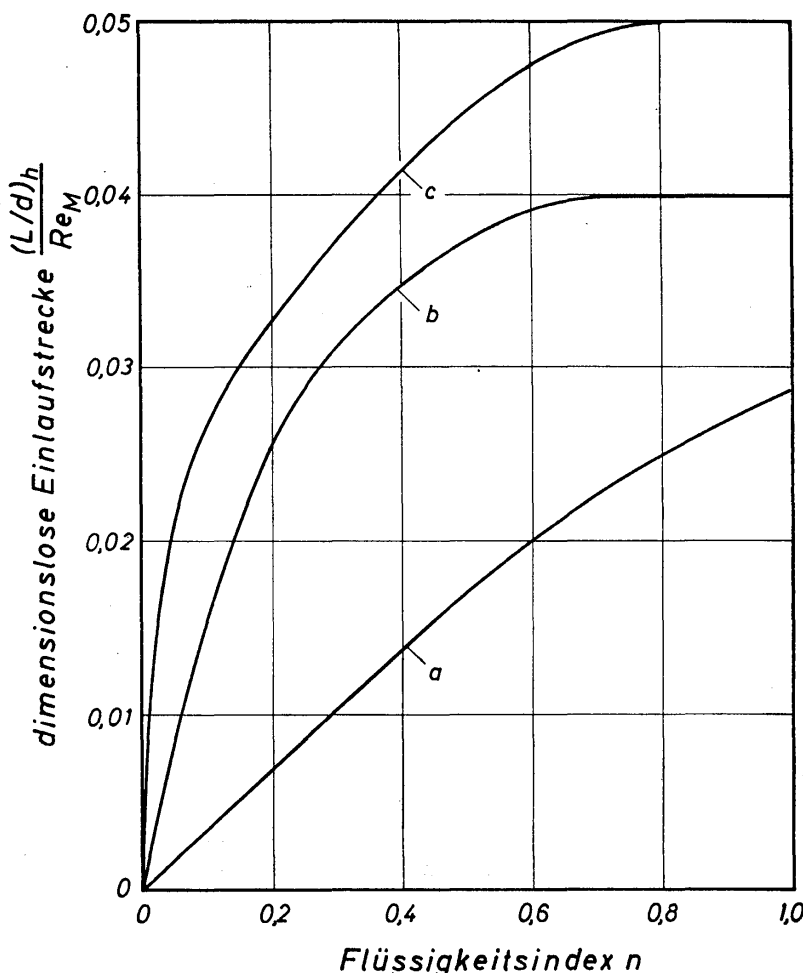
Hierin ist $\bar{w} d \rho / \eta$ die für Newtonsche Flüssigkeiten übliche Definition der Reynoldszahl. Die Reynoldszahl der Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten ist somit gleich derjenigen von Newtonschen, multipliziert mit dem Wandschubspannungsverhältnis. Damit ist auch in physikalischer Hinsicht die für Newtonsche und nicht-Newtonsche Flüssigkeiten gültige Definition der Reynoldszahl gedeutet.

3.34 Nicht ausgebildete Strömung

Tritt die Flüssigkeit mit einer über den Querschnitt konstanten Geschwindigkeit in das Rohr ein, so benötigt die Strömung bis zur Ausbildung des endgültigen Geschwindigkeitsprofils die hydrodynamische Einlaufstrecke L_h . Diese wird häufig dann als erreicht angesehen, wenn die in Kanalmitte auftretende maximale Geschwindigkeit 98% des theoretischen Endwertes erreicht hat. Bislang ist es für strukturviskose Flüssigkeiten nur mittels Näherungsverfahren gelungen, die Einlaufstrecke zu berechnen. In dimensionsloser Form ergibt sich die Beziehung:

$$\frac{(L/d)_h}{Re_M} = f(n). \quad (3.39)$$

Hierin bedeuten d Rohrdurchmesser, n Flüssigkeitsindex und Re_M die für nicht-Newton'sche Flüssigkeiten definierte Reynoldszahl gemäß Gl. (3.33). Die Funktion $f(n)$ wurde von BOGUE [3.22] und von COLLINS und SCHOWALTER [3.23] berechnet. Die Rechnungen der letztgenannten Autoren dürften die zur Zeit zuverlässigsten sein. Die Ergebnisse sind in *Bild 3.10* dargestellt; Kurve *a* nach BOGUE, Kurve *b* nach TOMITA (zitiert nach [3.23]) und Kurve *c* nach COLLINS und SCHOWALTER. Offensichtlich führt eine Verbesserung des Rechenverfahrens zu einer längeren Anlaufstrecke. Bei $n = 1$ liefert Kurve *a* beispielsweise nur eine etwa halb so lange Anlaufstrecke wie Kurve *c*. Wie bereits in Zusammenhang mit der Einlaufstrecke für Newton'sche Flüssigkeiten ausgeführt wurde, darf man den theoretischen



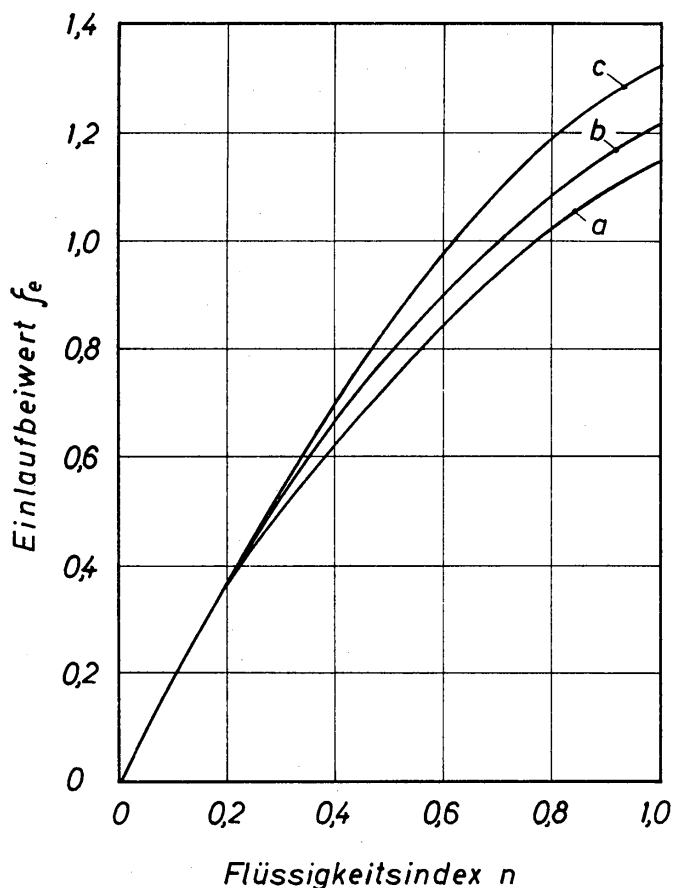
Rechnungen in diesem Falle keine sehr große praktische Bedeutung beimessen, da sie vom Geschwindigkeitsprofil im Eintrittsquerschnitt abhängen, welches jedoch nur in Ausnahmefällen den theoretischen Anforderungen entsprechen wird. Die in *Bild 3.10* dargestellten Ergebnisse dürfen daher nur als Anhaltswerte für praktische Fälle angesehen werden.

Bild 3.10
Dimensionslose Einlauflänge,
abhängig vom Flüssigkeitsindex;
Kurve *a* nach BOGUE,
Kurve *b* nach TOMITA,
Kurve *c* nach COLLINS und
SCHOWALTER

Im Bereich der Einlaufstrecke ist der Druckverlust stets größer als im Bereich der ausgebildeten Strömung, da zusätzliche Verluste durch die Beschleunigung der Strömung und die erhöhte Reibung auftreten. Der größte Anteil des Druckverlustes ist auf die Beschleunigung zurückzuführen. Die erhöhten Reibungsverluste machen sich erst nach größeren Lauflängen bemerkbar. Die bereits oben zitierten Forscher haben auch den Druckverlust für die gesamte Einlaufstrecke L_h berechnet. Sie gehen dabei von der Beziehung

$$\frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2/2} = \frac{64}{Re_M} \frac{L}{d} + \zeta_e \quad (3.40)$$

aus, in der der Einlaufbeiwert ζ_e den in der gesamten Einlaufstrecke zusätzlich auftretenden Druckverlust in dimensionsloser Form darstellt. Die Lauflänge L muß stets größer sein als die Einlaufstrecke L_h ; nur im Grenzfall darf $L_h = L$ sein. Unter diesen Bedingungen ist ζ_e allein eine Funktion des Flüssigkeitsindex n , die in *Bild 3.11* dargestellt ist. Kurve *a* gibt die Rechnung von BOGUE wieder, Kurve *b* die von TOMITA und Kurve *c* die von COLLINS und SCHOWALTER. Die Kurven staffeln sich in der gleichen Weise wie die für die Einlaufstrecke in *Bild 3.10*. Je kürzer die Einlaufstrecke ist, desto kleiner muß auch der Einlaufbeiwert sein. Für $n = 0$ ist $\zeta_e = 0$, da das im Eintrittsquerschnitt vorhandene Kolbenprofil erhalten bleibt. *Bild 3.12* veranschaulicht die Gl. (3.40) in qualitativer Form. Sowohl BOGUE als auch COLLINS und SCHOWALTER konnten nachweisen, daß die Ergebnisse ihrer theoretischen Untersuchungen mit Meßwerten sehr gut übereinstimmen. Da die theoretischen Ergebnisse indes recht unterschiedlich sind, können die Versuchsbedingungen nicht übereingestimmt haben.



Um die praktische Bedeutung des zusätzlichen Druckverlustes richtig einschätzen zu können, sei ein Beispiel gerechnet. Für $Re_M = 10$ und $n = 0,5$ ergibt sich nach Kurve *c* *Bild 3.10* die Einlaufstrecke zu $(L/d)_h = 0,45$. Aus *Bild 3.11* Kurve *c* entnimmt man für $n = 0,5$ den Wert $\zeta_e = 0,85$.

Bild 3.11. Einlaufbeiwert ζ_e für den zusätzlichen Druckverlust in der Einlaufstrecke von Rohren; Kurve *a* nach BOGUE, Kurve *b* nach TOMITA, Kurve *c* nach COLLINS und SCHOWALTER

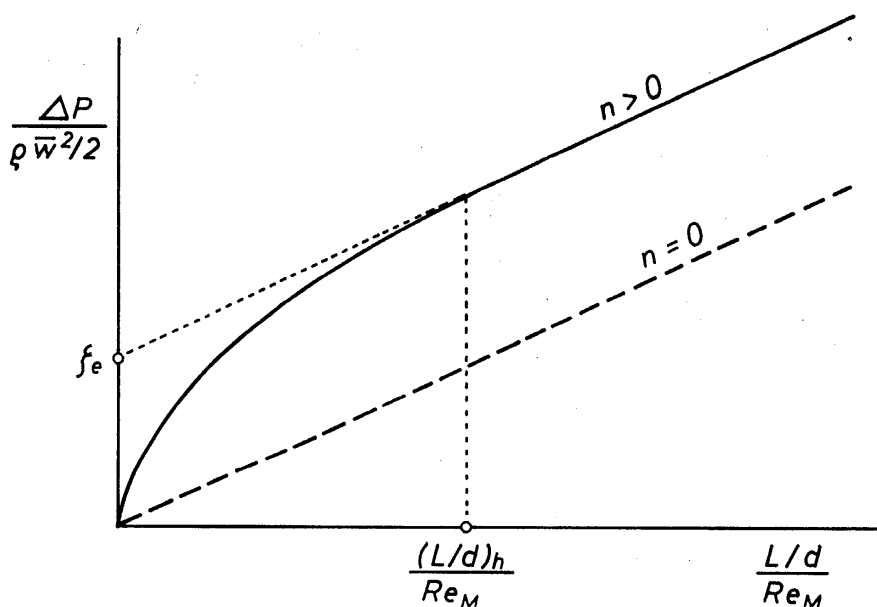


Bild 3.12
Zur Erläuterung des
Einlaufbeiwertes nach
Gl. (3.40)

Ist die gesamte Lauflänge $L/d = 10$, dann wird mit Gl. (3.40) $2 \cdot \Delta P / \rho \bar{w}^2 = 64 + 0,85$. Der zusätzliche Druckverlust beträgt mithin nur etwa 1,3% des gesamten Druckverlustes.

3.4 Berechnung der laminaren Rohrströmung mittels des Ansatzes von Prandtl und Eyring

Zum Vergleich mit den Ergebnissen, die mittels des Potenzansatzes erhalten werden, soll im folgenden die Geschwindigkeitsverteilung und das Widerstandsgesetz für den Ansatz von PRANDTL und EYRING berechnet werden.

3.4.1 Geschwindigkeitsverteilung

Führt man in den Ansatz von PRANDTL und EYRING gemäß Gl. (3.11) für die Schubspannung $\tau = \tau_w r/R$ ein, so ergibt sich für die Geschwindigkeitsverteilung die Differentialgleichung:

$$\frac{dw}{dr} = -C \sinh\left(\frac{\tau_w}{A} \cdot \frac{r}{R}\right). \quad (3.41)$$

Mit der Haftbedingung an der Rohrwand, $w = 0$ für $r = R$, liefert die Integration das Ergebnis:

$$w = C \frac{A}{\tau_w} \frac{d}{2} \left[\cosh\left(\frac{\tau_w}{A}\right) - \cosh\left(\frac{\tau_w}{A} \cdot \frac{r}{R}\right) \right]. \quad (3.42)$$

Hieraus folgt für $r = 0$ die maximale Geschwindigkeit in Rohrmitte zu

$$w_{\max} = C \frac{A}{\tau_w} \frac{d}{2} \left[\cosh\left(\frac{\tau_w}{A}\right) - 1 \right]. \quad (3.43)$$

Eine weitere Integration von Gl. (3.42) über den Rohrquerschnitt ergibt die mittlere Strömungsgeschwindigkeit

$$\bar{w} = C \frac{A}{\tau_w} d \left[\left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{A}{\tau_w} \right)^2 \right\} \cosh \left(\frac{\tau_w}{A} \right) - \frac{A}{\tau_w} \sinh \left(\frac{\tau_w}{A} \right) - \left(\frac{A}{\tau_w} \right)^2 \right]. \quad (3.44)$$

Hiermit läßt sich die bezogene örtliche Geschwindigkeit

$$\frac{w}{\bar{w}} = \frac{1}{2} \frac{\cosh \left(\frac{\tau_w}{A} \right) - \cosh \left(\frac{\tau_w}{A} \frac{r}{R} \right)}{\left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{A}{\tau_w} \right)^2 \right\} \cosh \left(\frac{\tau_w}{A} \right) - \frac{A}{\tau_w} \sinh \left(\frac{\tau_w}{A} \right) - \left(\frac{A}{\tau_w} \right)^2} \quad (3.45)$$

und das Verhältnis der maximalen zur mittleren bilden:

$$\frac{w_{\max}}{\bar{w}} = \frac{1}{2} \frac{\cosh \left(\frac{\tau_w}{A} \right) - 1}{\left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{A}{\tau_w} \right)^2 \right\} \cosh \left(\frac{\tau_w}{A} \right) - \frac{A}{\tau_w} \sinh \left(\frac{\tau_w}{A} \right) - \left(\frac{A}{\tau_w} \right)^2}. \quad (3.46)$$

Die bezogene örtliche Geschwindigkeit w/\bar{w} ist in *Bild 3.13a* für einige Werte von τ_w/A dargestellt. Zum Vergleich sind in *Bild 3.13b* auch einige mit dem Potenzansatz berechneten Profile angegeben. Damit die Geschwindigkeitsprofile in den beiden Bildern vergleichbar sind, wurden die entsprechenden Parameterpaare τ_w/A und n so gewählt, daß sich der gleiche Wert für das Geschwindigkeitsverhältnis w_{\max}/\bar{w} in Rohrmitte ergibt. Man stellt fest, daß die nach dem Prandtl-Eyring-Ansatz berechneten Profile im Kernstrom eine noch recht starke Krümmung aufweisen, wohingegen die nach dem Potenzansatz berechneten Profile flach sind. Das ist darauf zurückzuführen, daß der Potenzansatz das Fließverhalten der Flüssigkeiten in der Nähe von $dw/dr = 0$ nicht richtig wiedergibt. Diese Eigenschaft des Potenzansatzes wirkt sich aber nur in der Umgebung der Rohr-

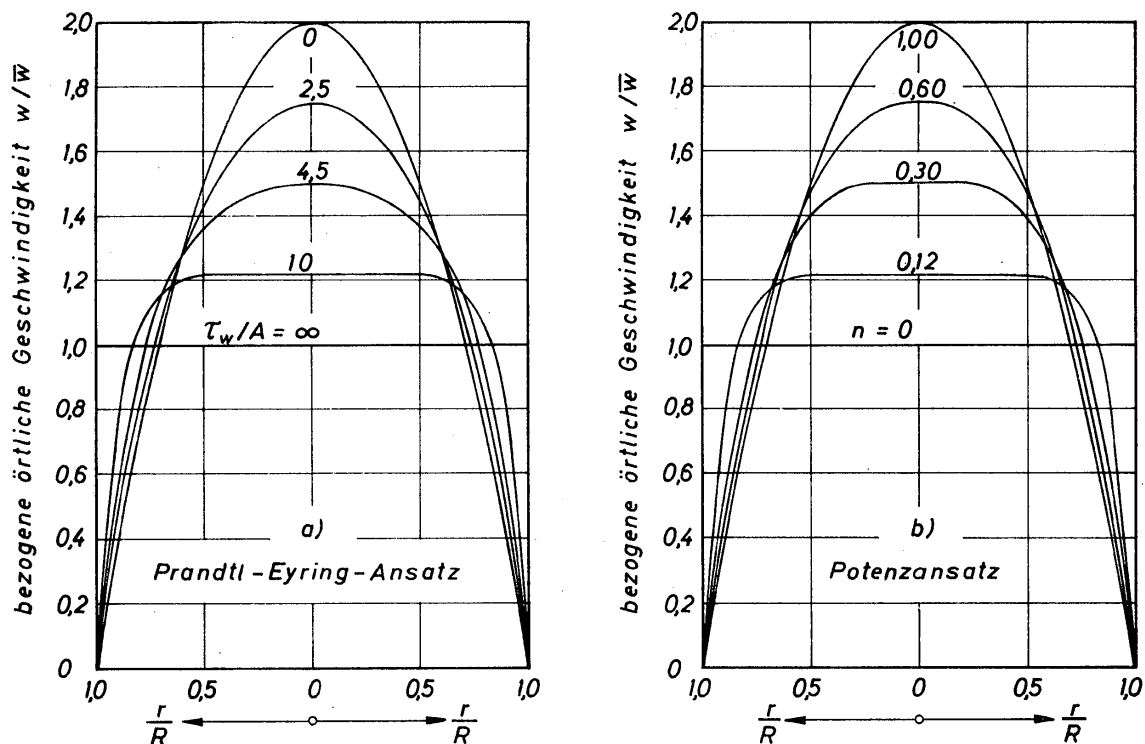


Bild 3.13. Geschwindigkeitsprofile für strukturoviskose Flüssigkeiten; a) nach Prandtl-Eyring-Ansatz und b) nach Potenzansatz

achse aus. In größerem Abstand von der Rohrachse liefern Potenz- und Prandtl-Eyring-Ansatz nahezu die gleichen Profilformen. Hierauf kommt es im Zusammenhang mit dem Strömungswiderstand und dem Wärmeübergang im wesentlichen an.

Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, läßt sich das Schubspannungsverhältnis τ_w/A als Funktion von Re_P/K_P ausdrücken. Hierin sind Re_P die durch Gl. (3.49) definierte Reynoldszahl und K_P eine durch Gl. (3.50) definierte Kennzahl, die nur die Stoffeigenschaften A , C und ρ und den Rohrdurchmesser d enthält. Mit zunehmenden Werten für τ_w/A wächst das Verhältnis Re_P/K_P . Die in *Bild 3.13 a* dargestellten Geschwindigkeitsprofile können z. B. unter folgenden Bedingungen

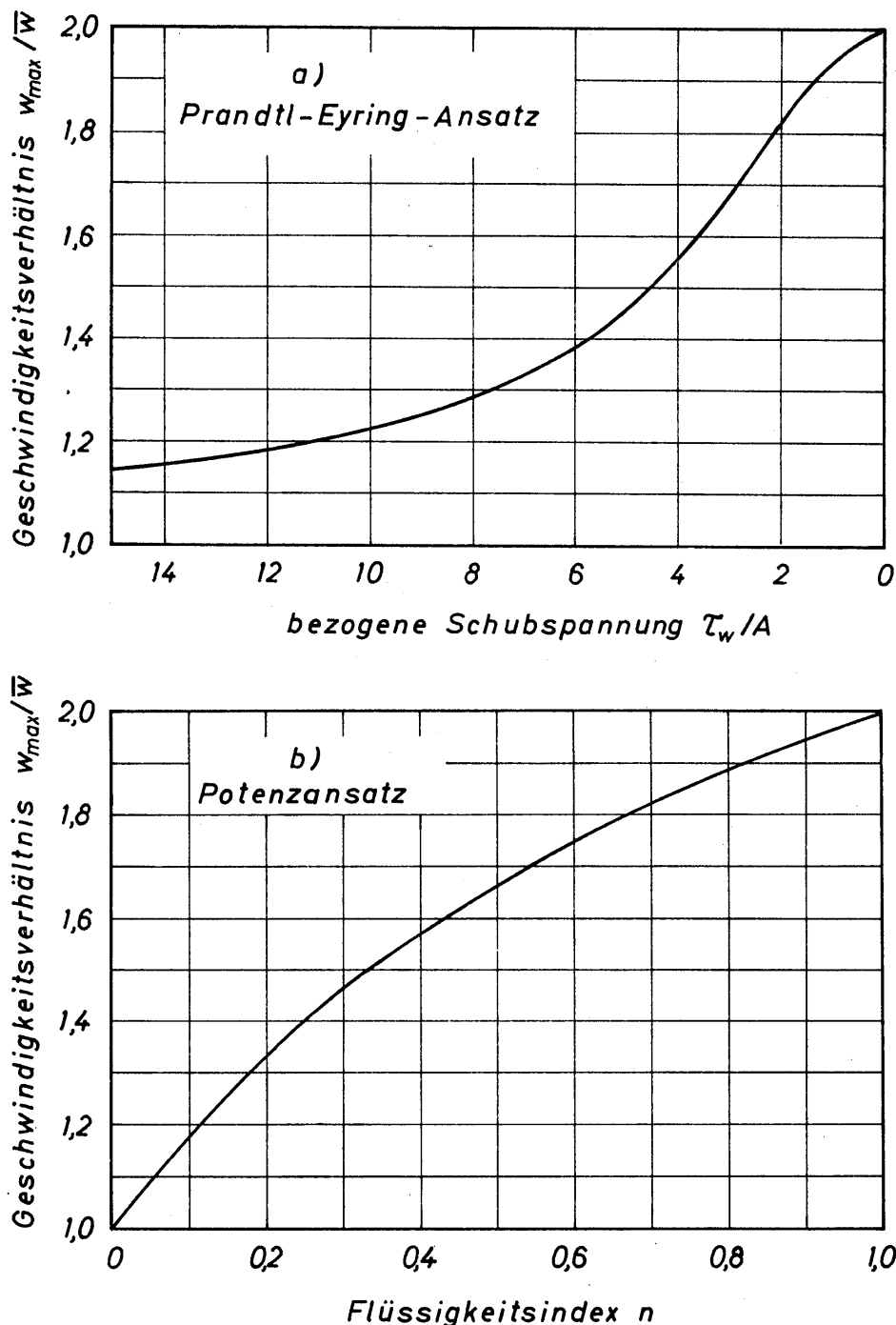


Bild 3.14. Verhältnis der maximalen zur mittleren Geschwindigkeit für strukturviskose Flüssigkeiten; a) nach Prandtl-Eyring-Ansatz und b) nach Potenzansatz

entstehen: Die Eigenschaften der Flüssigkeit bleiben unverändert, und nur der Rohrdurchmesser wird als veränderlich angesehen. Dann bedeutet $\tau_w/A \rightarrow \infty$ $d \rightarrow 0$ und $\tau_w/A \rightarrow 0$ bedeutet $d \rightarrow \infty$. Das heißt also, daß die gleiche Flüssigkeit in einer Kapillare ein stark nicht-Newtonsches und in einem sehr weiten Rohr Newtonsches Verhalten zeigt. Dieses mit den physikalischen Vorstellungen vom Fließen der nicht-Newtonschen Fluide vollkommen übereinstimmende Verhalten kann durch den Potenzansatz nicht ausgedrückt werden. Eine Ostwald-Flüssigkeit müßte in einer Kapillare das gleiche Verhalten zeigen wie in einem Rohr mit sehr großem Durchmesser. Weiterhin sind zum Vergleich der beiden Schubspannungsansätze in *Bild 3.14* das Verhältnis aus der maximalen zur mittleren Geschwindigkeit abhängig von der bezogenen Schubspannung τ_w/A (*Bild 3.14a*) und dem Flüssigkeitsindex n (*Bild 3.14b*) dargestellt.

3.42 Widerstandsgesetz

Das Widerstandsgesetz ist die dimensionslose Schreibweise für ein Druckverlustgesetz. Ein solches Gesetz läßt sich unmittelbar aus der Gl. (3.44) für die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} entwickeln, wenn man den zwischen Wandschubspannung τ_w und Druckverlust $\Delta P/L$ bestehenden Zusammenhang $\tau_w = (\Delta P/L)/(4/d)$ beachtet. Man erhält dann:

$$\frac{\bar{w}}{Cd} = A \frac{4/d}{\Delta P/L} \left[\left\{ \frac{1}{2} + \left(A \frac{4/d}{\Delta P/L} \right)^2 \right\} \cosh \left(\frac{1}{A} \frac{\Delta P/L}{4/d} \right) - A \frac{4/d}{\Delta P/L} \sinh \left(\frac{1}{A} \frac{\Delta P/L}{4/d} \right) - \left(A \frac{4/d}{\Delta P/L} \right)^2 \right]. \quad (3.47)$$

Die rechte Seite ist allein eine Funktion der dimensionslosen Größe $d \cdot \Delta P/4 AL = \tau_w/A$. Dieses Gesetz darf nur im Bereich der laminaren Strömung angewendet werden, deren obere Grenze durch die kritische Reynoldszahl ausgedrückt wird. Um diese Grenze bei Anwendung von Gl. (3.47) beachten zu können, ist es zweckmäßig, den Ausdruck auf der linken Seite wie folgt umzuformen:

$$\frac{\bar{w}}{Cd} = \frac{Re_P}{K_P}. \quad (3.48)$$

Hierin sind

$$Re_P \equiv \frac{\bar{w} d \rho}{A/C} \quad (3.49)$$

die für Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten definierte Reynoldszahl und

$$K_P \equiv \frac{A d^2 \rho}{(A/C)^2} \quad (3.50)$$

eine weitere, diese Gruppe von Flüssigkeiten charakterisierende dimensionslose Kennzahl. Sie hängt außer vom Rohrdurchmesser d nur noch von den Stoff-

werten A , C und ρ ab. Da A die Bedeutung einer Schubspannung und A/C die Bedeutung einer Viskosität haben, ist diese Kennzahl mit der für Bingham-Flüssigkeiten charakteristischen Hedströmzahl vergleichbar.

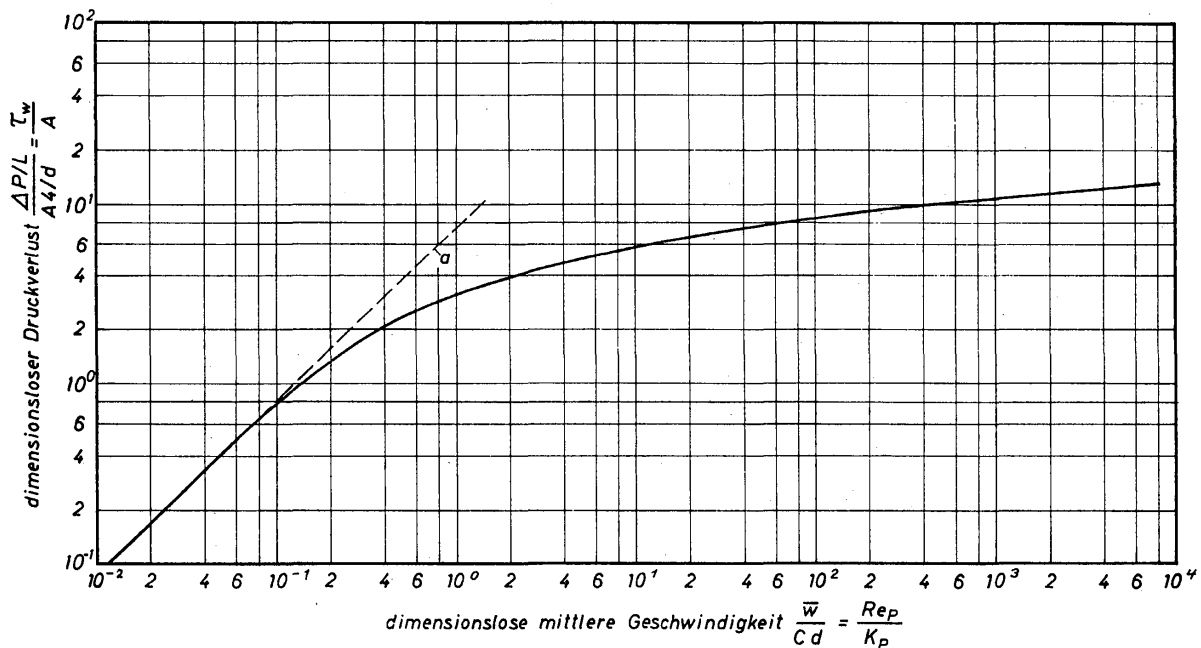


Bild 3.15. Abhängigkeit des dimensionslosen Druckverlustes der Rohrströmung von der dimensionslosen mittleren Geschwindigkeit für Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten, Kurve a Grenzfall für Newtonsche Flüssigkeiten

In Bild 3.15 ist Gl.(3.47) graphisch dargestellt. Es ergibt sich eine stetig gekrümmte Kurve, die in Richtung sehr kleiner Werte von Re_p/K_p in die gestrichelte Kurve a einläuft. Hierdurch wird das Grenzgesetz wiedergegeben, das für Newtonsche Flüssigkeiten gilt. Bildet man den Wert von Gl.(3.47) für $d \Delta P / 4 A L \rightarrow 0$, dann folgt

$$\frac{\Delta P/L}{A 4/d} = 8 \frac{\bar{w}}{C d} = 8 \frac{Re_p}{K_p}. \quad (3.51)$$

Da für diesen Grenzfall $A/C = \eta$ gesetzt werden kann, gibt Gl.(3.51) das Druckverlustgesetz für Newtonsche Flüssigkeiten wieder.

Die Gl.(3.47) stellt die einfachste Form eines dimensionslosen Druckverlustgesetzes für strukturviskose nicht-Newtonsche Flüssigkeiten dar, deren Fließverhalten durch den Schubspannungsansatz von PRANDTL-EYRING beschrieben wird. Der Nachteil dieses Gesetzes besteht aber darin, daß es nicht in einfacher Weise den Übergang zu dem für die turbulente Strömung geltenden Gesetz herzustellen ermöglicht. Aus diesem Grund ist ein Widerstandsgesetz zu bevorzugen, durch das die Widerstandszahl ψ als Funktion der maßgebenden Kennzahlen angegeben wird. Führt man in die Definitionsgleichung (3.31) für die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} die Gl.(3.44) ein, so erhält man in abgekürzter Schreibweise:

$$\psi = \frac{64}{Re_p} f_1(\tau_w/A). \quad (3.52)$$

Hierin bedeutet $f_1(\tau_w/A)$ die folgende Funktion:

$$f_1(\tau_w/A) = \frac{\left(\frac{\tau_w}{A}\right)^2}{8 \left[\left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{A}{\tau_w}\right)^2 \right\} \cosh\left(\frac{\tau_w}{A}\right) - \frac{A}{\tau_w} \sinh\left(\frac{\tau_w}{A}\right) - \left(\frac{A}{\tau_w}\right)^2 \right]}. \quad (3.53)$$

Gl. (3.52) ist nicht unmittelbar zur Berechnung von τ_w bzw. ΔP geeignet, da diese Größen auch in der Widerstandszahl enthalten sind. Es ist daher notwendig, τ_w bzw. ΔP mittels Gl. (3.47) und Gl. (3.48) als Funktion von Re_p und K_p auszudrücken. Man erhält dann ein Widerstandsgesetz von der Form

$$\psi = f_2(Re_p; K_p). \quad (3.54)$$

Dieses Gesetz ist in *Bild 3.16* graphisch dargestellt. Für $K_p = \infty$ geht Gl. (3.54) in $\psi = 64/Re_p$ über. Das heißt, die Flüssigkeit zeigt Newtonsches Verhalten. Sehr große Werte für K_p können sich dann ergeben, wenn der Rohrdurchmesser sehr groß ist. Dann sind die in der Strömung auftretenden Schergefälle sehr klein, und die Flüssigkeit verhält sich wie eine Newtonsche. Die gleiche Flüssigkeit wird aber sehr ausgeprägtes nicht-Newtonsches Verhalten aufweisen, wenn sie durch ein

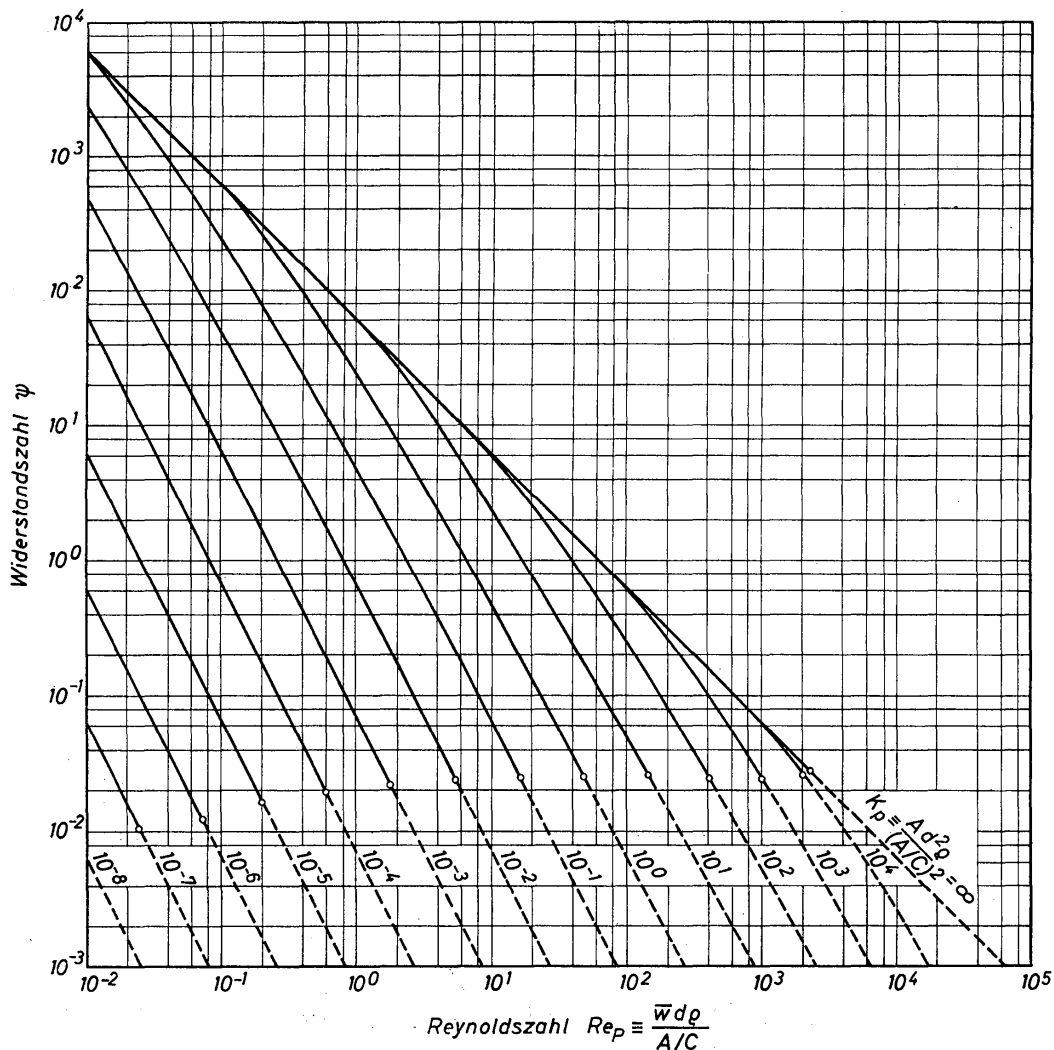


Bild 3.16. Abhängigkeit der Widerstandszahl von der Reynoldszahl und der Kennzahl K_p für die Rohrströmung von Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten

Rohr mit sehr kleinem Durchmesser strömt, da dann ein großes Schergefälle auftritt. Das heißt also, daß das Verhalten der Strömung einer nicht-Newtonschen Flüssigkeit durch deren Stoffwerte A , C und ρ und zusätzlich durch den Rohrdurchmesser bestimmt wird. Diese Größen bilden die mit K_P bezeichnete Kennzahl, die daher geeignet ist, die Strömung einer Prandtl-Eyring-Flüssigkeit zu beschreiben. Große Werte von K_P bedeuten also Newtonsches und sehr kleine Werte nicht-Newtonsches Verhalten. Aus *Bild 3.16* geht hervor, daß sich für $K_P < \infty$ und $Re_P > 0$ stets kleinere Werte für die Widerstandszahl ergeben als für den Grenzfall der Newtonschen Flüssigkeit mit $K_P = \infty$ und $\psi = 64/Re_P$. Alle für verschiedene Werte von K_P eingezeichneten Kurven nähern sich mit kleiner werdender Reynoldszahl der Grenzkurve. In großem Abstand von der Grenzkurve gilt

$$\psi = \frac{64}{Re_P^2} K_P, \quad (3.55)$$

wonach die Widerstandszahl umgekehrt proportional dem Quadrat der Reynoldszahl ist. Diese Abhängigkeit tritt ebenfalls im Widerstandsgesetz für Bingham-Flüssigkeiten und für mehrphasige Strömungen auf. Die Strömung von Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten läßt sich näherungsweise als zweiphasig ansehen. Die eine Phase hat Newtonsche und die andere nicht-Newtonsche Eigenschaften. Wechselnde Anteile beider Phasen führen jedoch zu kontinuierlichem Übergang. Das durch Gl. (3.54) ausgedrückte Widerstandsgesetz gilt seiner Herleitung nach nur für laminare Strömung. Überschreitet die Reynoldszahl ihren kritischen Wert, dann wird die Strömung turbulent. In *Bild 3.16* ist für jede Kurve der Wert der kritischen Reynoldszahl durch einen Kreis angedeutet. Die gestrichelten Teile der Kurven haben daher keine praktische Bedeutung. Die kritische Reynoldszahl und das Widerstandsgesetz im turbulenten Strömungsbereich werden in späteren Abschnitten behandelt.

In diesem Abschnitt 3.4 wurden für strukturviskose Flüssigkeiten Rechnungen durchgeführt, die den Schubspannungsansatz von PRANDTL und EYRING als Grundlage haben. Entsprechende Rechnungen, ausgehend vom Potenzansatz, wurden in 3.3 erörtert. Damit stellt sich die Frage, wann es sinnvoll ist, den einen oder andern Ansatz für die Berechnung des Druckverlustes zu verwenden. Eine erste Antwort erhält man aus *Bild 3.6*. Die hier durch Kreuze angedeuteten Meßwerte weisen eine Streubreite auf, die es gestattet, sie innerhalb eines begrenzten Bereiches sowohl durch den Potenzansatz (Kurve *b*) als auch durch den Prandtl-Eyring-Ansatz (Kurve *a*) auszugleichen. Ist der zwischen $(dw/dy)_1$ und $(dw/dy)_2$ liegende Bereich für das Strömungsproblem ausreichend, dann lassen sich beide Ansätze mit gleicher Berechtigung anwenden. Trotzdem ist die mit dem Prandtl-Eyring-Ansatz durchgeführte Rechnung möglicherweise genauer. Denn dieser Ansatz vermag auch den Bereich sehr kleiner Werte des Geschwindigkeitsgradienten zu erfassen. Allerdings liegen für diesen Bereich wegen der Schwierigkeit der Messungen meist keine Meßwerte vor, und die Gültigkeit des Ansatzes kann nicht überprüft werden. Die genaue Beschreibung in der Nähe $dw/dy = 0$ wirkt sich

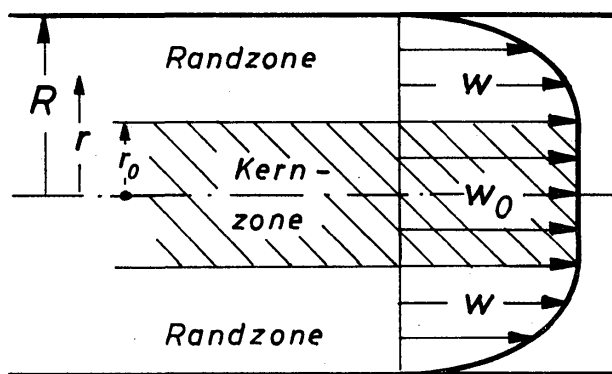
allein auf die Geschwindigkeitsverteilung in Rohrmitte aus. Dieser Strömungsbereich ist für den Druckverlust aber ziemlich unbedeutend. Bei geschickter Handhabung des Potenzansatzes wird man hiermit ebenso zuverlässig rechnen wie mit dem Prandtl-Eyring-Ansatz.

3.5 Berechnung der laminaren Rohrströmung mittels des Bingham-Ansatzes

Bingham-Flüssigkeiten zeichnen sich durch eine Fließgrenze τ_0 aus, die durch von außen aufgezwungene Kräfte überwunden werden muß, damit ein Schwerkgefälle auftritt. Auch für diese Gruppe von Flüssigkeiten sollen die Geschwindigkeitsverteilung und das Widerstandsgesetz berechnet werden.

3.51 Geschwindigkeitsverteilung

Die Fließgrenze τ_0 hat zur Folge, daß sich in der Umgebung der Rohrachse eine Kernzone ausbildet, in der noch kein Schergefälle auftritt. Die hierfür erforderliche Schubspannung τ müßte größer sein als die Fließgrenze τ_0 . Innerhalb der Kernzone ist die Schubspannung kleiner als τ_0 und die Flüssigkeit verhält sich wie ein starrer Körper, der sich mit der Geschwindigkeit w_0 fortbewegt. *Bild 3.17* zeigt das für Bingham-Flüssigkeiten charakteristische Geschwindigkeitsprofil. Die scherungsfreie Kernzone erstreckt sich bis zu dem Radius $r = r_0$, der durch die Bedingung $\tau = \tau_0$ festgelegt ist. Erst in der die Kernzone umschließenden Randzone tritt ein Schergefälle auf,



und die Geschwindigkeit ändert sich von $w = w_0$ bei $r = r_0$ auf $w = 0$ bei $r = R$ an der Wand.

Bild 3.17

Zur Erläuterung der Bewegung von Bingham-Flüssigkeiten

Die Geschwindigkeitsverteilung muß für beide Zonen getrennt berechnet werden. Aus dem Gleichgewicht von Druck- und Reibungskräften folgt die bereits bekannte Gl.(3.16). Setzt man hierin $r = r_0$, so erhält man eine Beziehung für die Fließgrenze:

$$\tau_0 = \frac{\Delta P}{L} \frac{r_0}{2} \quad (3.56)$$

Führt man diese in den Schubspannungsansatz von BINGHAM nach Gl.(3.15) ein und berücksichtigt ferner Gl.(3.16), dann ergibt sich als Differentialgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung in der Randzone:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\Delta P/L}{2 \eta_B} (r_0 - r). \quad (3.57)$$

Die Integration liefert unter Berücksichtigung der Haftbedingung $w = 0$ für $r = R$:

$$w = \frac{(\Delta P/L) R^2}{4 \eta_B} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2 \frac{r_0}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right) \right]. \quad (3.58)$$

Diese Gleichung darf voraussetzungsgemäß nur für $r \geq r_0$ angewendet werden. Für $r < r_0$ ergäben sich kleinere Werte als für $r = r_0$, was physikalisch unsinnig ist. Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck $(2 r_0/R) (1 - r/R)$ berücksichtigt die für Bingham-Flüssigkeiten charakteristische Eigenschaft einer scherungsfreien Kernzone. Für $r_0/R = 0$ geht Gl.(3.58) daher in die bekannte Form für Newtonsche Flüssigkeiten über. Wird $r = r_0$, so erhält man die maximale Geschwindigkeit, die im Kern von $r = 0$ bis $r = r_0$ konstant ist:

$$w_0 = \frac{(\Delta P/L) R^2}{4 \eta_B} \left[1 - 2 \frac{r_0}{R} + \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 \right]. \quad (3.59)$$

Die mittlere Geschwindigkeit erhält man durch Integrieren über Rand- und Kernzone. Das Ergebnis ist die nach BUCKINGHAM benannte Beziehung:

$$\bar{w} = \frac{(\Delta P/L) R^2}{8 \eta_B} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{r_0}{R} + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^4 \right]. \quad (3.60)$$

Zur Auswertung ist es sinnvoll, das Radienverhältnis r_0/R durch das Schubspannungsverhältnis auszudrücken; es gilt:

$$\frac{r_0}{R} = \frac{\tau_0}{\tau_w} = \tau_0 \frac{4/d}{\Delta P/L}. \quad (3.61)$$

Die Anfangsschubspannung τ_0 erhält man aus der Fließkurve.

Zur dimensionslosen Darstellung der Geschwindigkeitsprofile wird die örtliche auf die mittlere Geschwindigkeit bezogen. Mit den Gleichungen (3.58) und (3.60) folgt

$$\frac{w}{\bar{w}} = 2 \frac{1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2 \frac{r_0}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right)}{1 - \frac{4}{3} \frac{r_0}{R} + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^4}. \quad (3.62)$$

Bild 3.18 zeigt für verschiedene Werte von r_0/R den Verlauf der bezogenen örtlichen Geschwindigkeit. Die Änderung der scherungsfreien Kernzone ist durch gestrichelte Kurven angedeutet. Ferner sei empfohlen, die hier dargestellten Profile mit denen von *Bild 3.13b* zu vergleichen, die mittels des Potenzansatzes berechnet wurden. Die Profilformen stimmen weitgehend überein. Man darf daraus schließen, daß das Fließverhalten von Bingham-Flüssigkeiten näherungsweise auch durch den Potenzansatz wiedergegeben werden kann.

Um einen Eindruck von der Änderung des scherungsfreien Kernes zu erhalten, soll das Radienverhältnis r_0/R abhängig von der mittleren Geschwindigkeit \bar{w} ermittelt werden. Aus den Gleichungen (3.16) und (3.60) ergibt sich nach Elimination des Druckverlustes $\Delta P/L$:

$$\frac{1 - \frac{4}{3} \frac{r_0}{R} + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^4}{r_0/R} = \frac{8 \bar{w} \eta_B}{\tau_0 d}. \quad (3.63)$$

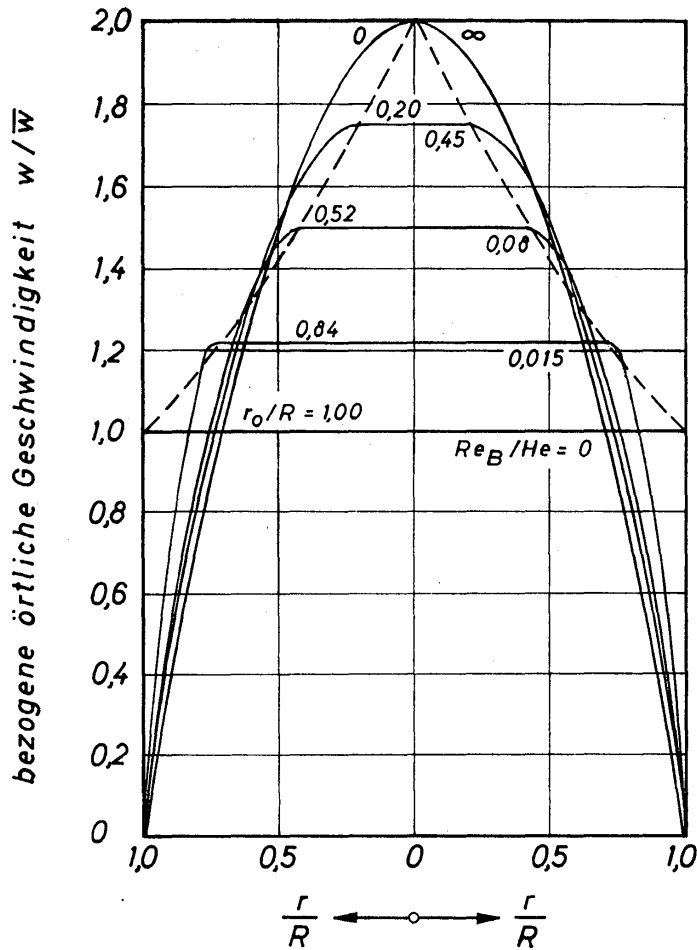


Bild 3.18. Geschwindigkeitsprofile für Bingham-Flüssigkeiten mit verschiedenen Werten von r_0/R

Hierin ist die auf der rechten Seite stehende dimensionslose Größe der Quotient zweier bereits bekannter Kennzahlen:

$$\frac{8 \bar{w} \eta_B}{\tau_0 d} = 8 \frac{Re_B}{He} \quad (3.64)$$

Mit Re_B wird die für Bingham-Flüssigkeiten definierte Reynoldszahl

$$Re_B \equiv \frac{\bar{w} d \rho}{\eta_B} \quad (3.65)$$

und mit He die Hedströmzahl

$$He \equiv \frac{\tau_0 d^2 \rho}{\eta_B^2} \quad (3.66)$$

bezeichnet. Die Hedströmzahl enthält allein den Rohrdurchmesser d und Stoffgrößen der jeweiligen Flüssigkeit. In Bild 3.19 ist das Radienverhältnis r_0/R über Re_B/He aufgetragen. Für eine bestimmte Flüssigkeit und einen festen Rohrdurchmesser ist die Hedströmzahl konstant, und die in Bild 3.19 dargestellte Kurve gibt die Änderung des Radienverhältnisses mit der Reynoldszahl wieder.

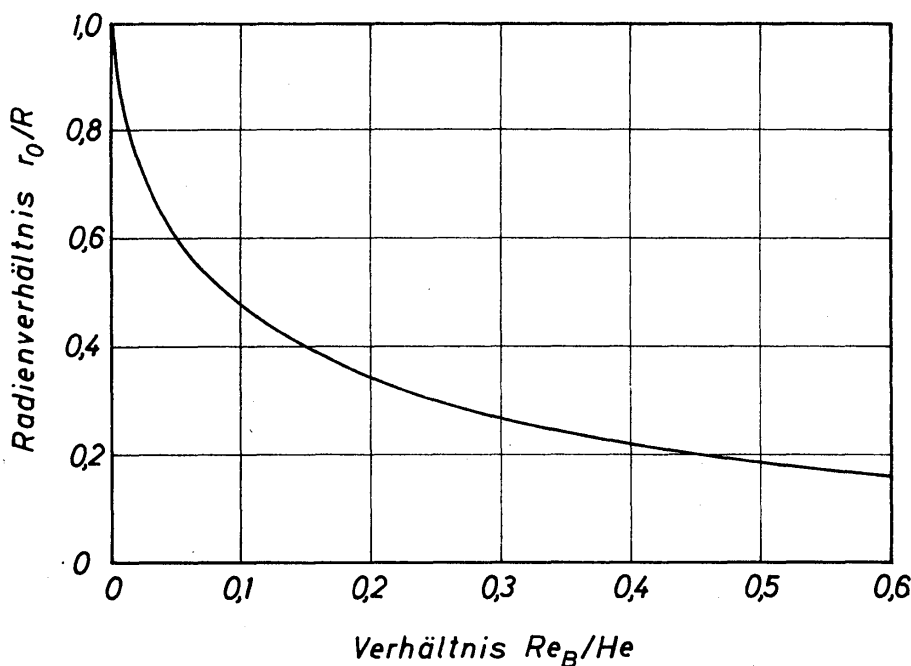


Bild 3.19. Abhängigkeit des Radienverhältnisses r_0/R für die Kernzone von der Kennzahlengruppe Re_B/He

Die Hedströmzahl kann Werte bis etwa 10^7 annehmen. Bei einem Verhältniswert von $Re_B/He = 0,5$ wird mit $He = 10^4$ die Reynoldszahl $Re_B = 5 \cdot 10^3$. Hierbei ist $r_0/R \approx 0,19$. Hat die Reynoldszahl den Wert $5 \cdot 10^2$, dann steigt r_0/R auf etwa 0,6 an. Die Ausdehnung des scherungsfreien Kernes kann für die Wärmeübertragung sehr wichtig werden.

3.52 Widerstandsgesetz

Das Widerstandsgesetz wird in der Form $\psi = f(Re_B; He)$ aufgestellt. Für die Widerstandszahl ψ gilt die für alle Rohrströmungen verbindliche Definitionsgleichung (3.31). Die Reynolds- und Hedströmzahl sind durch die Gleichungen (3.65) und (3.66) definiert. Führt man in Gl.(3.31) für die Widerstandszahl die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} gemäß Gl. (3.60) ein und berücksichtigt dabei Gl. (3.61), so erhält man nach Umformung

$$\frac{1}{Re_B} = \frac{\psi}{64} - \frac{1}{6} \frac{He}{Re_B^2} + \frac{64/3}{\psi^3} \left(\frac{He}{Re_B^2} \right)^4. \quad (3.67)$$

Diese Form des Widerstandsgesetzes haben PERKINS und GLICK, zitiert in [3.18], erstmalig angegeben. Die darin auftretenden Kennzahlen wurden bereits früher

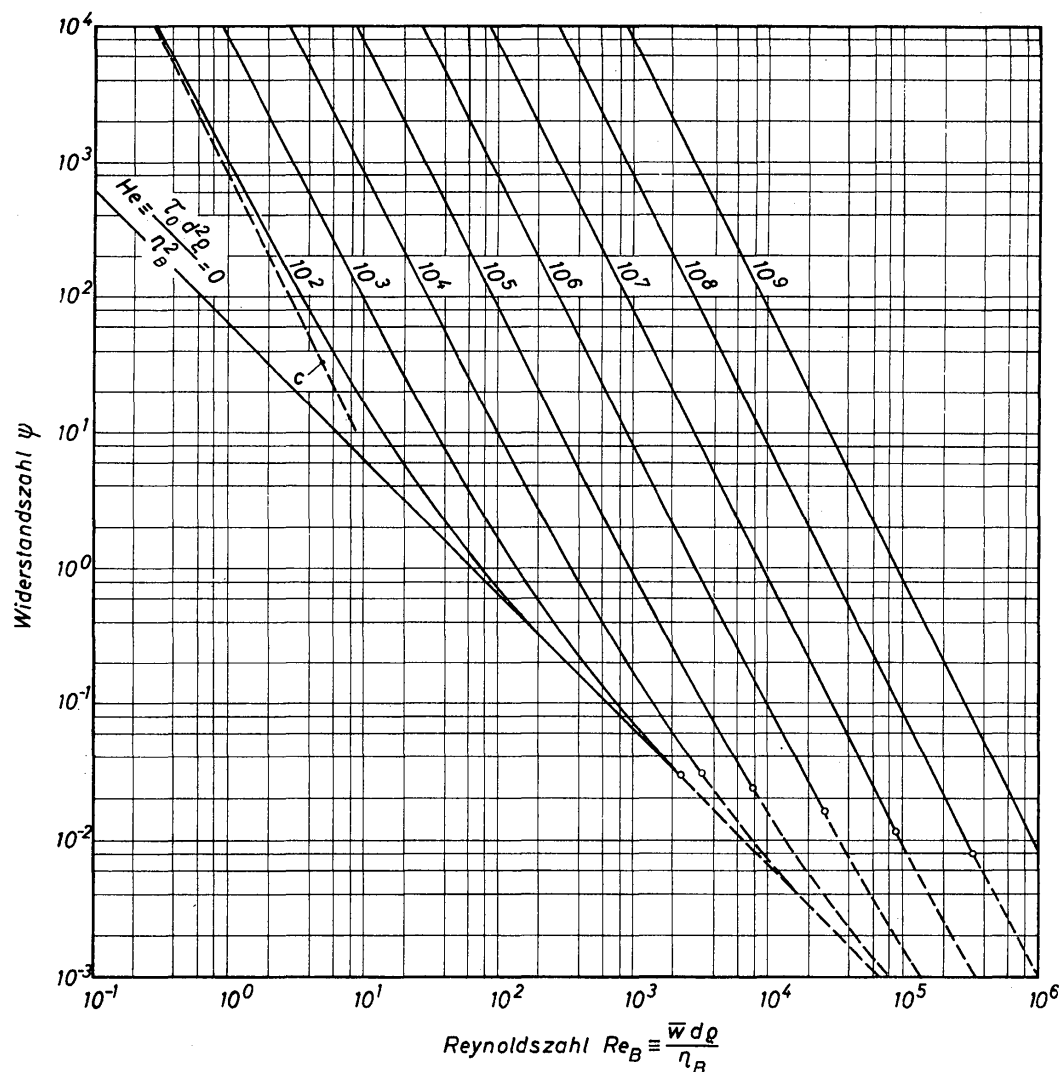


Bild 3.20. Widerstandsgesetz für die Rohrströmung von Bingham-Flüssigkeiten

in einer Arbeit von HEDSTRÖM [3.24] verwendet. Gl. (3.67) macht auf den ersten Blick den Eindruck, als ob sie nur mit großem Aufwand auszuwerten wäre. Eine nähere Betrachtung läßt erkennen, daß das dritte Glied auf der rechten Seite als Korrekturglied aufgefaßt werden darf, welches man für die erste Näherungsrechnung vernachlässigen kann. *Bild 3.20* ist eine graphische Darstellung des Widerstandsgesetzes, die nach dem Vorbild von HEDSTRÖM angefertigt wurde. Aus Gl. (3.67) läßt sich entnehmen, daß für große Werte der Reynoldszahl das Gesetz $\psi = 64/Re_B$ erfüllt ist, das auch für Newtonsche Flüssigkeiten gilt, denn dann ist $Re_B = Re$. In Richtung großer Werte von Re_B laufen daher alle Kurven für $He = \text{const}$ in die für $He = 0$, ein, die identisch mit $\psi = 64/Re_B$ ist. Umfassende experimentelle Bestimmungen des Druckverlustes von Bingham-Flüssigkeiten haben HEDSTRÖM [3.24] sowie GOVIER und WINNING, zitiert in [3.18], durchgeführt. Es ergab sich eine recht gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Gesetz.

Bringt man Gl. (3.67) in die Form

$$\frac{\psi Re_B}{64} = 1 + \frac{1}{6} \frac{He}{Re_B} - 8,13 \cdot 10^{-5} \left(\frac{64}{\psi Re_B} \right)^3 \left(\frac{He}{Re_B} \right)^4, \quad (3.68)$$

so hat man eine Gleichung mit nur zwei Variablen, nämlich ψRe_B und He/Re_B . Damit läßt sich also eine sehr einfache Darstellung gemäß *Bild 3.21* erreichen, in

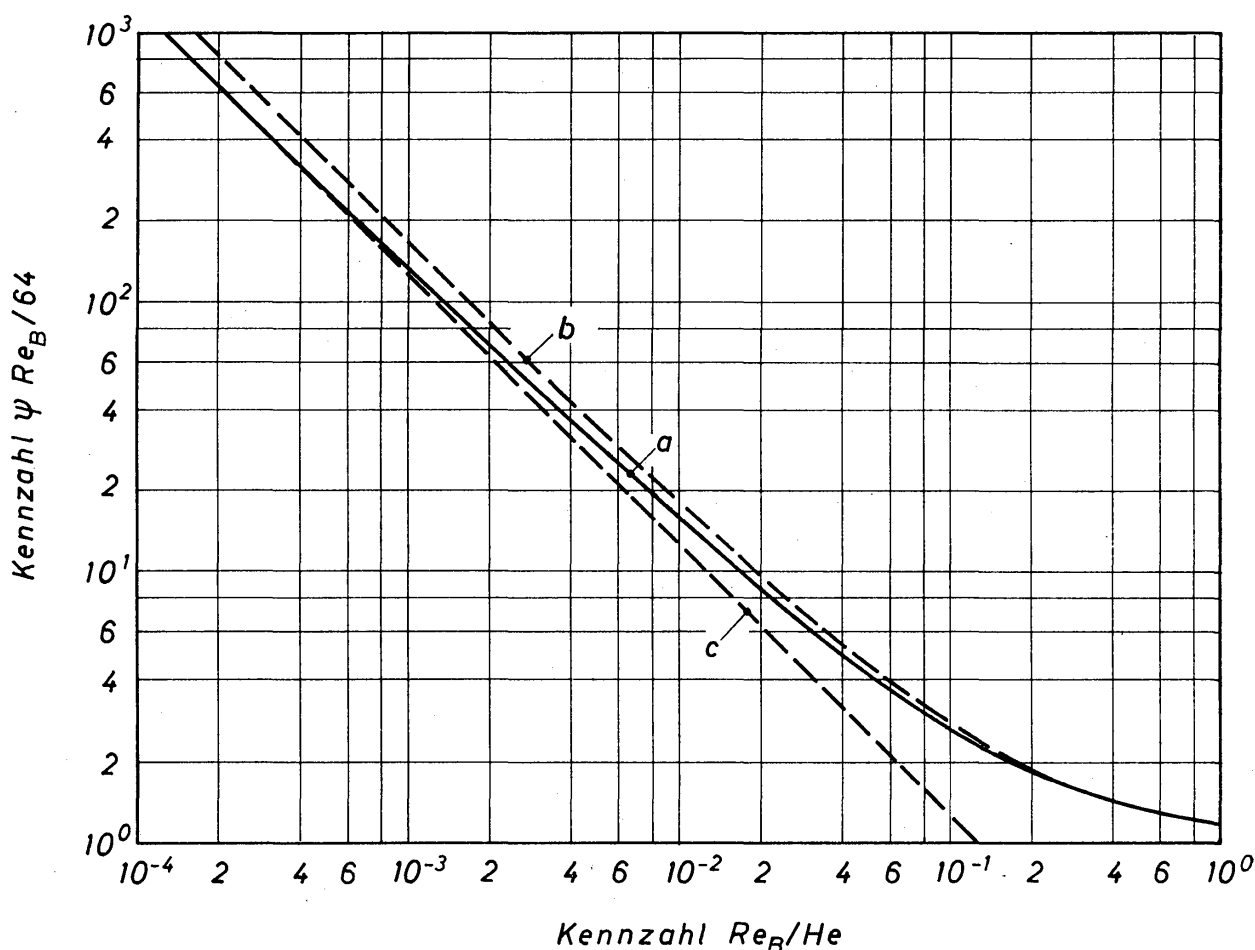


Bild 3.21. Widerstandsgesetz für die Rohrströmung von Bingham-Flüssigkeiten; andere Darstellungsweise als in Bild 3.20

welcher $\psi Re_B/64$ über Re_B/He aufgetragen ist. Das dritte Glied auf der rechten Seite von Gl. (3.68) ist wieder nur ein Korrekturglied und kann in erster Näherung vernachlässigt werden. Diese erste Näherung wird in *Bild 3.21* durch Kurve *b* mit der Gleichung

$$\frac{\psi Re_B}{64} = 1 + \frac{1}{6} \frac{He}{Re_B} \quad (3.69)$$

dargestellt und die vollständige Gl. (3.68) durch Kurve *a*. Im Bereich großer Werte von Re_B/He stimmen die Kurven *a* und *b* sehr gut überein. In Richtung abnehmender Werte für Re_B/He weicht Kurve *a* jedoch in zunehmendem Maße von Kurve *b* ab und schmiegt sich asymptotisch der Näherungskurve *c* an, für die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{\psi Re_B}{64} = \frac{1}{8} \cdot \frac{He}{Re_B}. \quad (3.70)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ersieht man, daß die Widerstandszahl ψ im Bereich kleiner Werte von Re_B/He umgekehrt proportional dem Quadrat der Reynoldszahl ist. Diese Abhängigkeit läßt sich auch in *Bild 3.20* erkennen, in dem Gl. (3.70) für $He = 10^2$ durch die gestrichelte Kurve *c* wiedergegeben ist. Die Form des Widerstandsgesetzes für Bingham-Flüssigkeiten gemäß Gl. (3.70) ist ebenfalls charakteristisch für bestimmte Arten der Zweiphasenströmungen. Bei der Bewegung von Bingham-Flüssigkeiten lassen sich die Kern- und Randzone als zwei verschiedene Phasen deuten.

3.6 Laminare Strömung durch ebene Kanäle

Nachdem die Rohrströmung ausführlich behandelt wurde, sollen für die Strömung durch ebene Kanäle nur jeweils die wichtigsten Gesetze erörtert werden. Sind weitere Einzelheiten erforderlich, dann lassen sich diese nach den bei der Rohrströmung besprochenen Verfahren leicht erarbeiten. Ein Kanal wird als eben bezeichnet, wenn er unendlich breit ist. Dann entfällt der Einfluß seiner Seitenwände, und die Strömung in ihm ist zweidimensional, also eben.

3.61 Strömung von Ostwald-Flüssigkeiten

Die Abmessungen des ebenen Kanals sind seine Länge L und seine Höhe s . Bei konstanter Höhe s des Kanals hängt die Geschwindigkeit von nur einer Ortskoordinate ab. Sie wird y genannt und gibt den Abstand ausgehend von der Kanalachse an. Aus dem Gleichgewicht von Druck- und Reibungskräften ergibt sich mit dem Potenzansatz die örtliche Geschwindigkeit zu

$$w = \frac{(\tau_w/K)^{1/n} s/2}{1 + 1/n} \left[1 - \left(\frac{y}{s/2} \right)^{1+1/n} \right] \quad (3.71)$$

und die mittlere zu

$$\bar{w} = \frac{(\tau_w/K)^{1/n} s/2}{2 + 1/n}. \quad (3.72)$$

Das Widerstandsgesetz hat die Form

$$\psi = \varphi \frac{64}{Re_M}, \quad (3.73)$$

wobei die Widerstandszahl ψ nach Gl.(3.31) und die Reynoldszahl Re_M nach Gl.(3.33) definiert ist. In beiden Kennzahlen ist der hydraulische Durchmesser $d_h = 2s$ als charakteristische Länge einzuführen. Mit

$$\varphi = \left(\frac{2 + 4n}{1 + 3n} \right)^n \quad (3.74)$$

wird ein Korrekturfaktor bezeichnet, der in *Bild 3.22* über dem Flüssigkeitsindex n aufgetragen ist. Für Newtonsche Flüssigkeiten mit $n = 1$ wird $\varphi = 1,5$, und das Widerstandsgesetz lautet daher $\psi = 96/Re_M$.

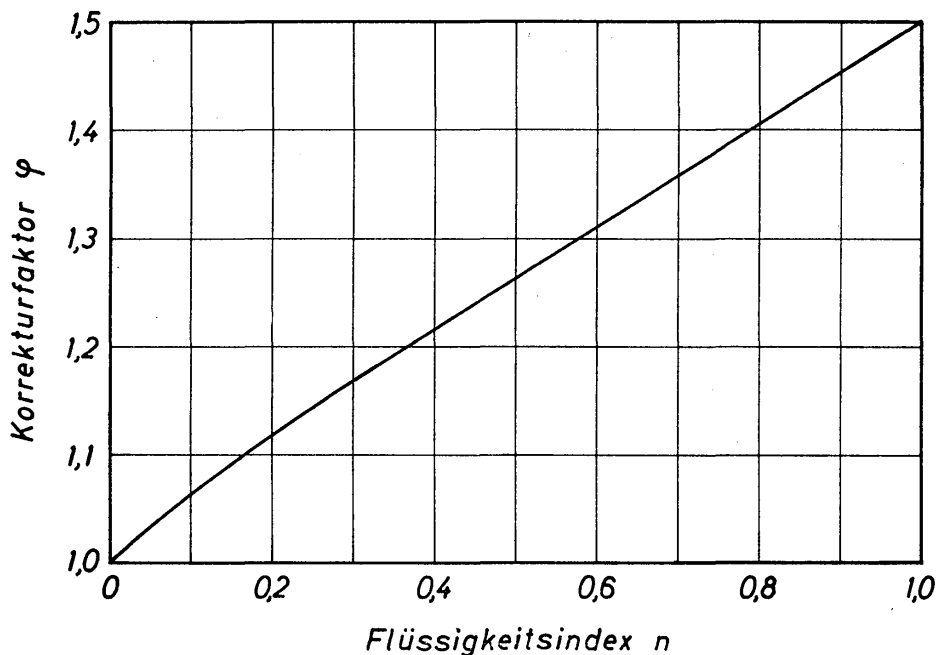


Bild 3.22. Abhängigkeit des Korrekturfaktors φ im Widerstandsgesetz für ebene Kanäle nach Gl.(3.74) vom Flüssigkeitsindex n

Das mitgeteilte Widerstandsgesetz ist ein Sonderfall für den allgemeinen Fall des Kanals mit rechteckigem Querschnitt, der von WHEELER und WISSLER (3.25) theoretisch behandelt wurde. Die gleichen Verfasser haben den Strömungswiderstand in einem Kanal mit quadratischem Querschnitt experimentell untersucht und gute Übereinstimmung mit der Theorie gefunden.

3.62 Strömung von Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten

Das Gleichgewicht von Druck- und Reibungskräften führt zu folgender Beziehung für die örtliche Geschwindigkeit:

$$w = C \frac{A}{\tau_w} \frac{s}{2} \left[\cosh\left(\frac{\tau_w}{A}\right) - \cosh\left(\frac{\tau_w}{A} \frac{y}{s/2}\right) \right]. \quad (3.75)$$

Nochmalige Integration liefert die mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{w} = C \frac{A}{\tau_w} \frac{s}{2} \left[\cosh\left(\frac{\tau_w}{A}\right) - \frac{A}{\tau_w} \sinh\left(\frac{\tau_w}{A}\right) \right]. \quad (3.76)$$

Hiermit erhält das dimensionslose Druckverlustgesetz die Form:

$$\frac{Re_P}{K_P} = \frac{A/d_h}{\Delta P/L} \left[\cosh\left(\frac{\Delta P/L}{A/d_h}\right) - \frac{A/d_h}{\Delta P/L} \sinh\left(\frac{\Delta P/L}{A/d_h}\right) \right]. \quad (3.77)$$

Es bedeuten $d_h = 2s$ den hydraulischen Durchmesser sowie $Re_P \equiv \bar{w} d_h \rho / (A/C)$ und $K_P \equiv A d_h^2 \rho / (A/C)^2$ die für Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten durch die Gleichungen (3.49) und (3.50) definierten Kennzahlen. Ferner ist τ_w die Wand Schubspannung, die mit dem Druckverlust ΔP wie folgt verknüpft ist:

$$\tau_w = \frac{\Delta P}{L} \frac{s}{2} = \frac{\Delta P/L}{4/d_h}. \quad (3.78)$$

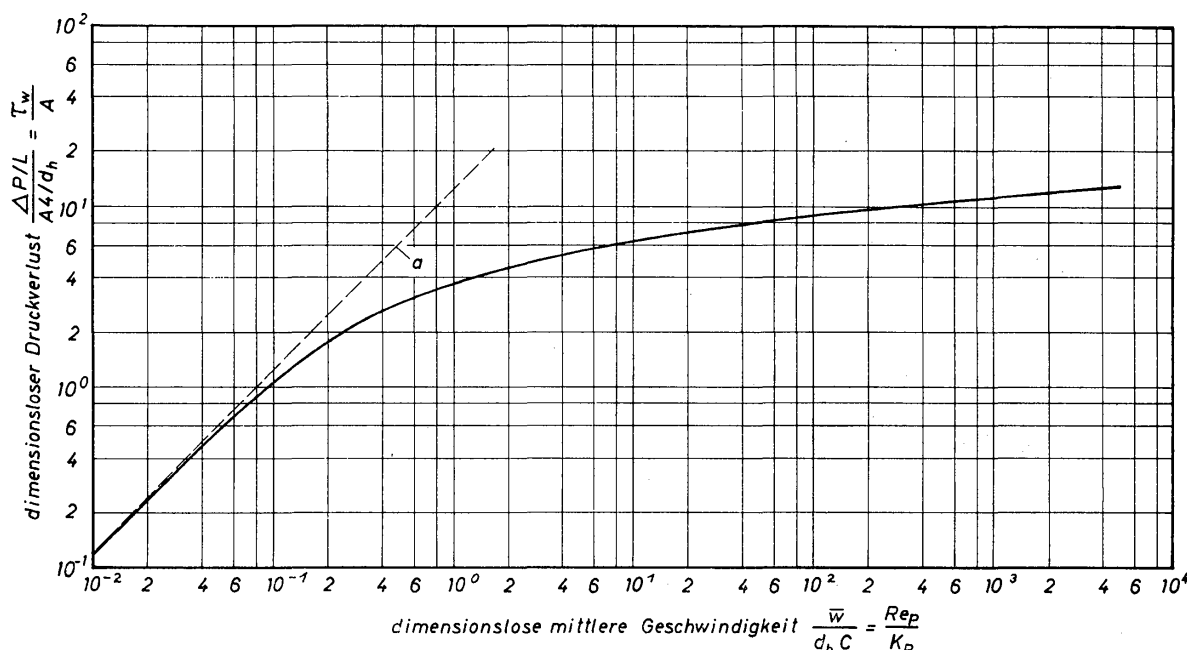


Bild 3.23. Abhängigkeit des dimensionslosen Druckverlustes von Re_P/K_P für Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten, die durch ebene Kanäle strömen

Wie bereits im Zusammenhang mit der Rohrströmung erörtert wurde, gibt Gl. (3.77) die einfachste Form eines Druckverlustgesetzes wieder. In Bild 3.23 ist Gl. (3.77) graphisch dargestellt. In Richtung sehr kleiner Werte für Re_P/K_P nähert sich die ausgezogene Kurve der gestrichelten Kurve *a*. Diese gilt für den Grenzfall der Newtonschen Flüssigkeiten und wird durch die folgende Beziehung wiedergegeben:

$$\frac{\Delta P/L}{A 4 d_h} = 12 \frac{\bar{w}}{d_h C} = \frac{Re_P}{K_P}. \quad (3.79)$$

Bei Annäherung an Newtonsches Verhalten geht das Verhältnis A/C in die Viskosität η über.

Wie bereits für die Rohrströmung soll auch für die Kanalströmung ein Widerstandsgesetz der Form

$$\psi = f(Re_P; K_P) \quad (3.80)$$

angegeben werden. Re_P und K_P sind durch die Gleichungen (3.49) und (3.50) bereits definiert. Der funktionelle Zusammenhang zwischen ψ , Re_P und K_P wurde in der gleichen Weise wie für die Rohrströmung ermittelt und in *Bild 3.24* graphisch dargestellt. Für $K_P = \infty$ gilt $\psi = 96/Re_P$, d.h. die Flüssigkeit zeigt Newtonsches Verhalten. Der laminare Strömungsbereich und somit der Gültigkeitsbereich von Gl. (3.80) erstreckt sich für jede Kurve bis zu dem eingezeichneten Kreis. Unterhalb des Kreises wurden die berechneten Kurven gestrichelt, um anzudeuten, daß sie keine praktische Bedeutung mehr haben. Auf die kritische Reynoldszahl und das Widerstandsgesetz im turbulenten Strömungsbereich wird in den Abschnitten 3.8 und 3.9 eingegangen.

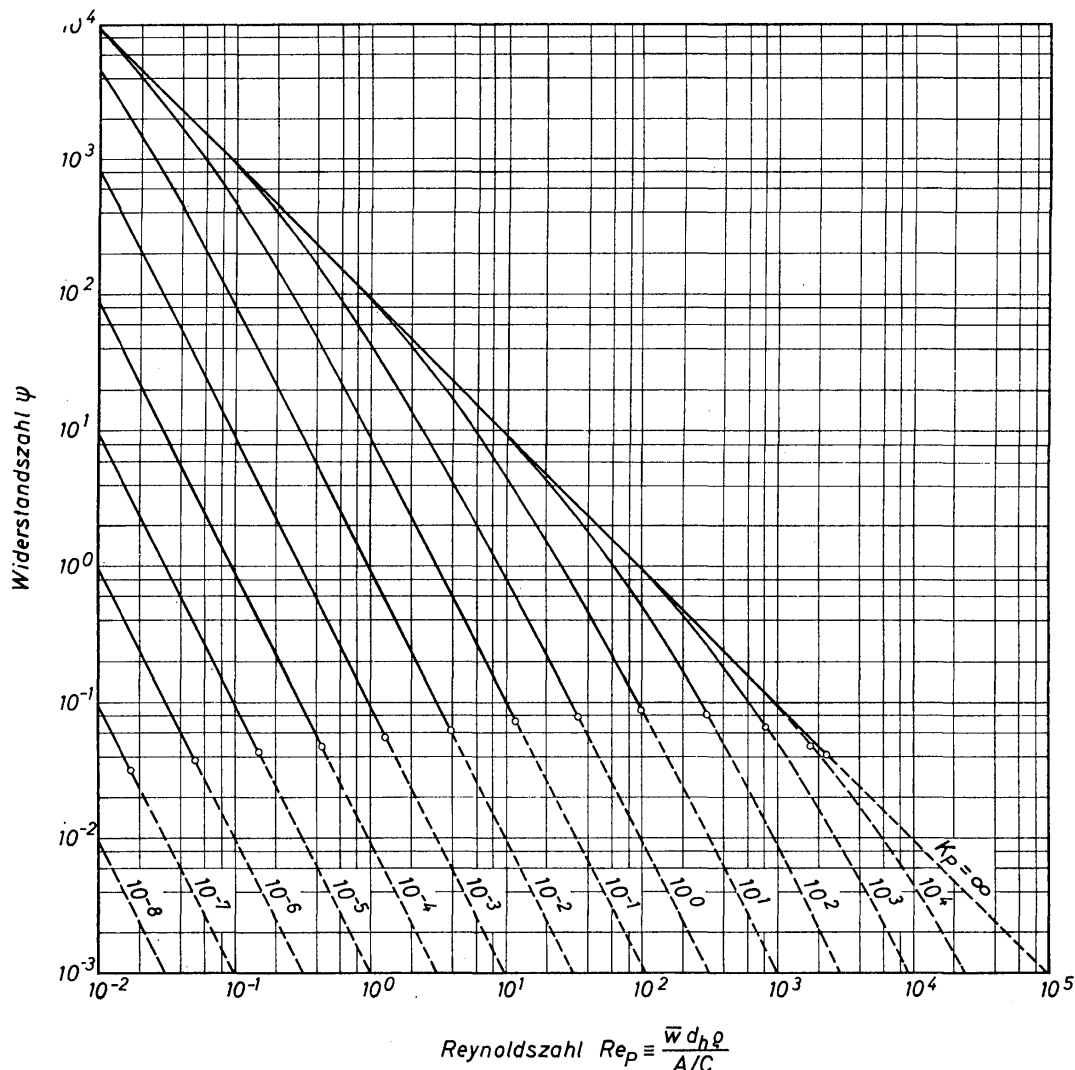


Bild 3.24. Abhängigkeit der Widerstandszahl von der Reynoldszahl und der Kennzahl K_P für die Kanalströmung von Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten

3.63 Strömung von Bingham-Flüssigkeiten

Für die Strömung von Bingham-Flüssigkeiten, die dem Reibungsgesetz nach Gl.(3.15) gehorchen, erhält man die örtliche Geschwindigkeit im ebenen Kanal zu

$$w = \frac{(\Delta P/L) s^2}{8 \eta_B} \left[1 - 2 \frac{y_0}{s/2} + 2 \frac{y_0}{s/2} \frac{y}{s/2} - \left(\frac{y}{s/2} \right)^2 \right]. \quad (3.81)$$

Diese Gleichung gilt nur für die Randzone, also für $y \geq y_0$. Mit y_0 wird der Abstand von der Kanalachse bis zur Grenze der scherungsfreien Kernzone bezeichnet. Die Geschwindigkeit in der Kernzone ist konstant und ergibt sich aus Gl.(3.81) mit $y = y_0$ zu

$$w_0 = \frac{(\Delta P/L) s^2}{8 \eta_B} \left[1 - \frac{y_0}{s/2} \right]^2. \quad (3.82)$$

Durch Integration ergibt sich aus Gl.(3.81) für die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} die Beziehung

$$\bar{w} = \frac{(\Delta P/L) s^2}{12 \eta_B} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y_0}{s/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0}{s/2} \right)^3 \right]. \quad (3.83)$$

Das hierin auftretende Längenverhältnis $y_0/(s/2)$ wird durch

$$\frac{y_0}{s/2} = \frac{\tau_0}{\tau_w} = \tau_0 \frac{2/s}{\Delta P/L} \quad (3.84)$$

ausgedrückt. Damit läßt sich ein Widerstandsgesetz aufstellen, dem die folgende Form gegeben wird:

$$\frac{\psi Re_B}{96} = 1 + \frac{1}{8} \frac{He}{Re_B} - 2,9 \cdot 10^{-4} \left(\frac{96}{\psi Re_B} \right)^2 \left(\frac{He}{Re_B} \right)^3. \quad (3.85)$$

Die Widerstandszahl ψ ist durch Gl. (3.31), die Reynoldszahl Re_B durch Gl.(3.65) und die Hedströmzahl He durch Gl.(3.66) definiert. In allen drei Kennzahlen ist als charakteristische Länge der hydraulische Durchmesser $d_h = 2 s$ einzuführen. *Bild 3.25* zeigt die graphische Darstellung von Gl.(3.85). Kurve *a* gibt die vollständige Gleichung wieder. Obgleich diese auf den ersten Blick etwas verwickelt aussieht, läßt sie sich jedoch ohne zu großen Aufwand auswerten. Das letzte Glied der rechten Seite stellt eine Korrektur dar, die für eine erste Näherung vernachlässigt werden kann. Diese Näherungslösung ist in *Bild 3.25* durch Kurve *b* dargestellt. Beide Kurven stimmen für $Re_B/He > 5 \cdot 10^{-2}$ genügend gut überein, so daß in diesem Bereich die Gleichung

$$\frac{\psi Re_B}{96} = 1 + \frac{1}{8} \frac{He}{Re_B} \quad (3.86)$$

die vollständige Gl.(3.85) ersetzen kann. Im Bereich kleiner Werte für Re_B/He nähert sich Kurve *a* der Kurve *c*, für die die Näherungsgleichung

$$\frac{\psi Re_B}{96} = \frac{1}{12} \frac{He}{Re_B} \quad (3.87)$$

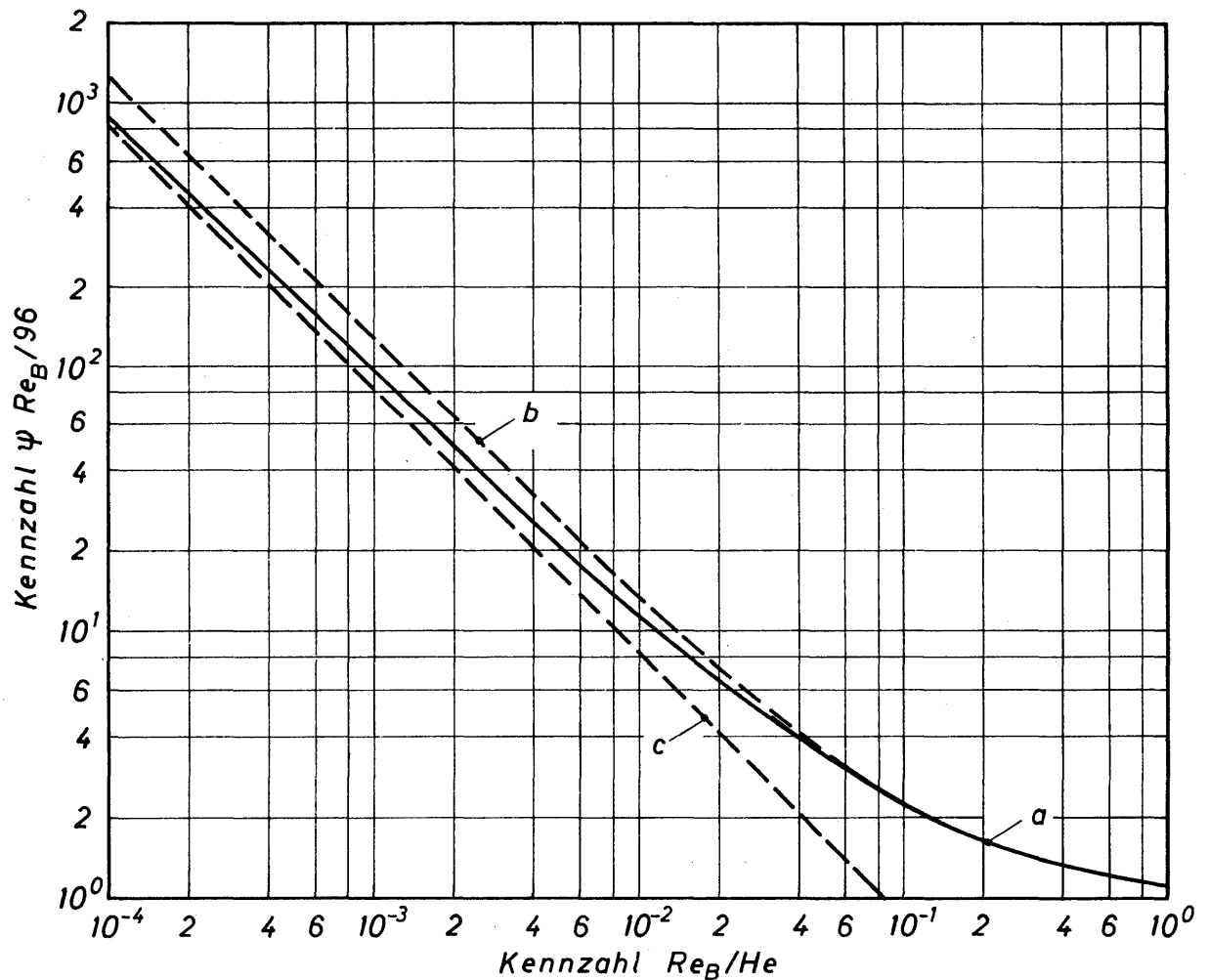


Bild 3.25. Widerstandsgesetz für Bingham-Flüssigkeiten, die durch ebene Kanäle strömen

gilt. Hiernach ist die Widerstandszahl umgekehrt proportional dem Quadrat der Reynoldszahl. Auf diese Abhängigkeit war auch im Zusammenhang mit der Rohrströmung hingewiesen worden.

3.7 Laminare Strömung durch Ringkanäle

Ogleich die Strömung durch Ringkanäle technisch von großer Bedeutung ist, haben die bisher vorliegenden Untersuchungen noch nicht zu einem so abgerundeten Wissen geführt, wie es für die Strömung in Rohren und ebenen Kanälen vorliegt. Zum Teil ist das darauf zurückzuführen, daß für die Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten in Ringkanälen keine geschlossenen, sondern nur noch numerische Lösungen möglich sind. Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt in graphischer Form. FREDRICKSON und BIRD [3.26] haben die Strömung von Bingham- und Ostwald-Flüssigkeiten im Ringkanal untersucht. Von den mitgeteilten Ergebnissen soll nur die für Ostwald-Flüssigkeiten erörtert werden. Für die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} erhielten FREDRICKSON und BIRD die Beziehung

$$\bar{w} = r_a \left(1 - \frac{r_i}{r_a}\right)^{1+1/n} \left(\frac{\Delta P}{L} \frac{r_a}{2K} \frac{1}{\varphi_s}\right)^{1/n} \frac{n}{1+3n}. \quad (3.88)$$

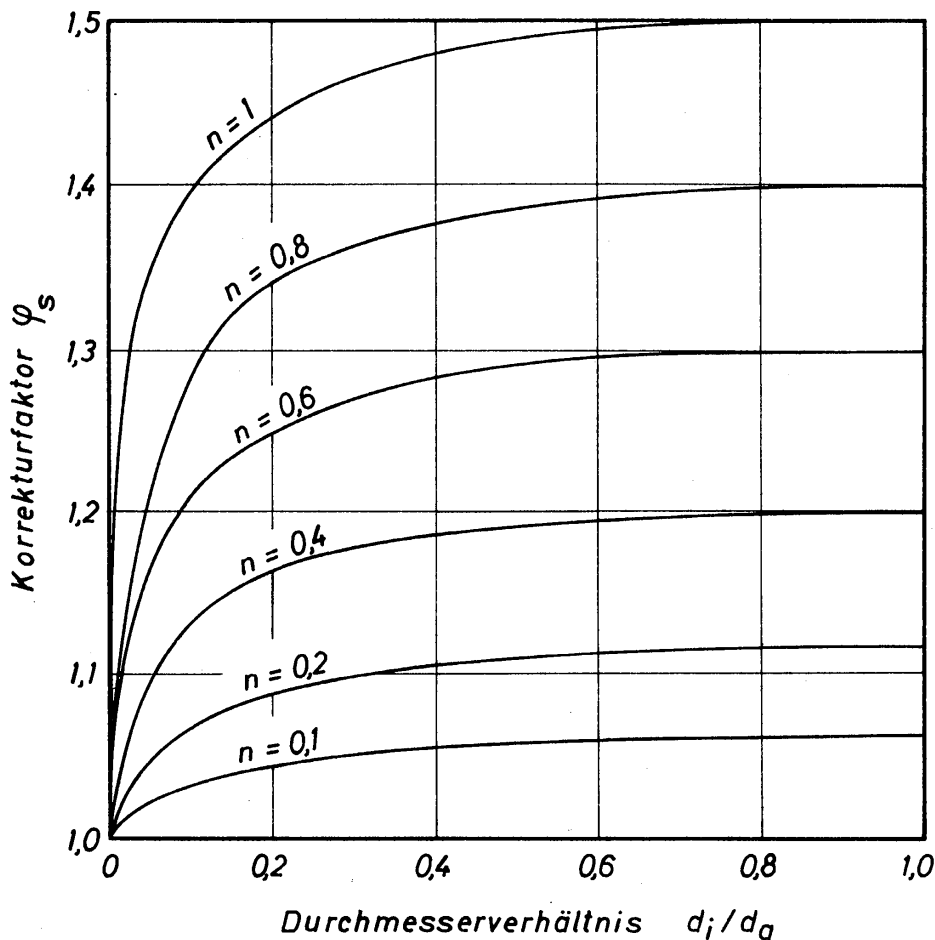


Bild 3.26. Abhängigkeit des Korrekturfaktors φ im Widerstandsgesetz für Ringkanäle vom Flüssigkeitsindex n

Hiermit ist es möglich, ein Widerstandsgesetz aufzustellen, das die gleiche Form aufweist wie das für Newtonsche Flüssigkeiten:

$$\psi = \varphi_s \frac{64}{Re_M} \quad (3.89)$$

Der Korrekturfaktor φ_s ist in *Bild 3.26* abhängig vom Flüssigkeitsindex n und vom Durchmesser Verhältnis d_i/d_a dargestellt. Die Kurven für $n = 0,1$ und $n = 0,2$ ließen sich nach Angaben von FREDRICKSON und BIRD [3.26] berechnen. Die anderen Kurven wurden einer neuen Arbeit von LADENDORF [3.27] entnommen. Für Werte des Flüssigkeitsindex kleiner als 1 läßt sich der Korrekturfaktor nach der empirischen Gleichung

$$\varphi_s = 1 + n (\varphi_{s,N} - 1) \quad (3.90)$$

berechnen. Die sich dabei ergebenden Abweichungen von den numerisch bestimmten Werten beträgt nur etwa $\pm 2\%$ und ist für technische Aufgaben unbedeutend. Mit $\varphi_{s,N}$ wird in Gl.(3.90) der Korrekturfaktor für Newtonsche Flüssigkeiten ($n = 1$) bezeichnet, für den die Gl.(2.17) gilt.

Gl.(3.89) schließt die beiden Grenzfälle des Ringkanales mit ein. Für das Kreisrohr ist mit $d_i/d_a = 0$ $\varphi_s = 1$ für alle Werte von n . Für den ebenen Kanal mit $d_i/d_a = 1$ hängt φ_s vom Flüssigkeitsindex ab. Diese Abhängigkeit ist bereits in

Bild 3.22 angegeben worden. Die Widerstandszahl ψ ist durch Gl. (3.31) und die Reynoldszahl Re_M durch Gl. (3.33) definiert. Als charakteristische Länge dient in beiden Kennzahlen der hydraulische Durchmesser $d_h = d_a - d_i$. Das Widerstandsgesetz nach Gl. (3.89) gilt bis zum kritischen Wert von Re_M . Da hierüber noch keine genaueren Angaben gemacht werden können, wird der Wert 2300 empfohlen. Bei Rotation des Kernrohres wird der Strömungswiderstand erniedrigt, d. h. der für diesen Fall zutreffende Korrekturfaktor zum Widerstandsgesetz ist kleiner als φ_s . LADENDORF (3.27) hat den Korrekturfaktor berechnet und die Ergebnisse graphisch dargestellt.

3.8 Kritische Reynoldszahlen für die Rohr- und Kanalströmung

Unterhalb des kritischen Wertes der Reynoldszahl ist die Strömung stets laminar; oberhalb des kritischen Wertes muß man damit rechnen, daß die Strömung in den turbulenten Zustand übergeht. Die kritische Reynoldszahl gibt damit die Gültigkeitsgrenze für die in den vorangegangenen Abschnitten behandelten Widerstandsgesetze an. Diese Grenze möglichst genau zu kennen, ist für den Ingenieur deshalb so wichtig, weil der Strömungswiderstand bei turbulenter Strömung sehr viel größer ist als bei laminarer.

Eine große Zahl experimenteller Untersuchungen bestätigt, daß die Strömung Newtonscher Flüssigkeiten durch Rohre und ebene Kanäle bei einem Wert der Reynoldszahl von etwa 2320 in den turbulenten Zustand übergeht. Da die Definition der Reynoldszahl an die Definition der Viskosität gebunden ist, darf man nicht erwarten, daß der für die Strömung Newtonscher Flüssigkeiten als gesichert angenommene Wert auch für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten gilt.

RYAN und JOHNSON [3.28] nahmen an, daß es eine für die Stabilität der Flüssigkeitsströmung maßgebende Größe, die Stabilitätszahl genannt wird, geben muß, die unabhängig von der Definition der Viskosität ist. Diese Stabilitätszahl wird im folgenden erörtert und dann zur Berechnung der kritischen Reynoldszahl für die Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten benutzt.

3.81 Stabilitätszahl

RYAN und JOHNSON [3.28] definieren eine Stabilitätszahl Z als das Verhältnis aus der Energie der turbulenten Schwankungsbewegungen quer zur Hauptströmungsrichtung und der Dissipationsenergie dieser Schwankungsbewegungen. Die Stabilitätszahl gibt Auskunft darüber, ob eine in der Strömung vorhandene Störung (w'_y) infolge der inneren Reibung abklingt oder durch Energiezufuhr aus der Hauptströmung (\bar{w}) aufrechterhalten wird. Aus der Bewegungsgleichung für die stationäre und isotherme Strömung ergibt sich für die Energie der Schwankungsbewegungen quer zur Strömungsrichtung der Ausdruck

$$-\rho w'_y w \frac{\partial w}{\partial y}$$

und für die Differenz der Dissipationsenergien zweier im Abstand δy befindlicher Strömungsschichten der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-w \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta y.$$

Damit lautet die Definitionsgleichung für die Stabilitätszahl:

$$Z \equiv \frac{-\rho w'_y w \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial}{\partial y} \left(-w \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta y}. \quad (3.91)$$

Es bedeuten w Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung x , y Wandabstand, w'_y die senkrecht zu w gerichtete Schwankungsgeschwindigkeit, ρ Dichte der Flüssigkeit und τ_{yx} Schubspannung. Ersetzt man den unbekanntem Ausdruck $w'_y/\delta y$ durch $-\partial w/\partial y$, so erhält man

$$Z \equiv \frac{\rho w \frac{\partial w}{\partial y}}{-\partial \tau_{yx}/\partial y}. \quad (3.92)$$

In dieser Schreibweise ist die Stabilitätszahl noch unabhängig von der Querschnittsform des Kanals, durch den sich das Fluid bewegt. Man erkennt, daß Z sowohl an der Wand, wegen $w = 0$, als auch an der Stelle mit $\partial w/\partial y = 0$ (das ist beim Rohr und beim ebenen Kanal die Achse) zu Null wird. Zwischen diesen beiden Grenzwerten weist Z jedoch ein Maximum auf, dessen Ort durch $dZ/dy = 0$ bestimmt wird. Der hierdurch festgelegte Wert Z_{\max} läßt einen Zusammenhang mit der kritischen Reynoldszahl erkennen. Dieser Wert soll für die Strömung der verschiedenen nicht-Newtonschen Flüssigkeiten durch Rohre und ebene Kanäle berechnet werden.

3.82 Kritische Reynoldszahl der Rohrströmung

Für die Rohrströmung gilt, unabhängig vom strömenden Medium, die Beziehung

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = -\frac{\tau_w}{R}, \quad (3.93)$$

in der τ_w die Wandschubspannung, y den Wandabstand und R den Rohrradius bedeuten. Für die Rohrströmung erhält die Stabilitätszahl die Form

$$Z_R = \frac{R \rho w}{\tau_w} \left(-\frac{dw}{dr} \right). \quad (3.94)$$

Hierin sind für jede Art der nicht-Newtonschen Flüssigkeiten die entsprechenden Ausdrücke für die örtliche Geschwindigkeit w , für den Geschwindigkeitsgradienten dw/dr und für die Schubspannung τ_w einzuführen.

3.821 Ostwald-Flüssigkeiten

Mit der örtlichen Geschwindigkeit w nach Gl.(3.21), den hieraus gebildeten Geschwindigkeitsgradienten dw/dr und der Wandschubspannung τ_w mittels Gl. (3.24) ergibt sich die Stabilitätszahl zu

$$Z_R = \frac{1 + 3n}{1 + n} \left(\frac{1 + 3n}{n} \right)^{1-n} \frac{\bar{w}^{2-n} R^n}{K} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1+1/n} \right]. \quad (3.95)$$

Aus der Bedingung $dZ_R/dr = 0$ folgt für die Lage des Maximums von Z_R

$$\left(\frac{r}{R} \right)_{Z_{R\max}} = \left(\frac{1}{2+n} \right)^{n/(1+n)} \quad (3.96)$$

und somit für $Z_{R\max}$ selbst

$$Z_{R\max} = Re_M \frac{(1 + 3n)^2}{8n} \left(\frac{1}{2+n} \right)^{\frac{2+n}{1+n}}. \quad (3.97)$$

Re_M ist die bereits durch Gl.(3.33) definierte Reynoldszahl. Nimmt diese den kritischen Wert $Re_{M,kr}$ an, dann ergibt sich auch für die Stabilitätszahl der kritische Wert:

$$Z_{R,kr} = Re_{M,kr} \frac{(1 + 3n)^2}{8n} \left(\frac{1}{2+n} \right)^{\frac{2+n}{1+n}}. \quad (3.98)$$

Die kritische Stabilitätszahl muß für Newtonsche und nicht-Newtonsche Flüssigkeiten, die durch Rohre strömen, den gleichen Wert haben. Für Newtonsche Flüssigkeiten wird $n = 1$ und $Re_{M,kr} = Re_{kr} = 2300$ und somit

$$Z_{R,kr} = 2300 \cdot 2 \cdot 3^{-3/2} = 885. \quad (3.99)$$

Die Gleichung zur Berechnung der kritischen Reynoldszahl läßt sich also in der folgenden Form schreiben:

$$Re_{M,kr} = 885 \frac{8n}{(1 + 3n)^2} (2 + n)^{\frac{2+n}{1+n}}. \quad (3.100)$$

Hiernach berechnete Werte sind in *Bild 3.27* über dem Flüssigkeitsindex n aufgetragen und durch Kurve *a* verbunden. Ausgehend von sehr kleinen Werten für n steigt die Kurve zunächst geradlinig an, durchläuft ein Maximum und nimmt bei $n = 1$ den Wert $Re_{kr} = 2300$ an. Für noch größere Werte von n fällt die Kurve weiterhin ab und erreicht für $n = \infty$ den Endwert $Re_{kr} = 787$. Das Maximum der kritischen Reynoldszahl tritt bei $n = 0,416$ auf und beträgt 2650. Man entnimmt dem Bild, daß das Maximum nur schwach ausgebildet ist und daß sich $Re_{M,kr}$ zwischen $n = 0,1$ und $n = 1$ verhältnismäßig wenig ändert. Wahrscheinlich tritt das Maximum der kritischen Reynoldszahl bei $n = 0,416$ in Wirklichkeit auch nicht auf. Da der Potenzansatz in der Nähe von $dw/dr = 0$ das Verhalten der realen Flüssigkeiten nicht richtig wiedergibt, ist die berechnete kritische Zahl mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Sie wird, wie Gl.(3.94)

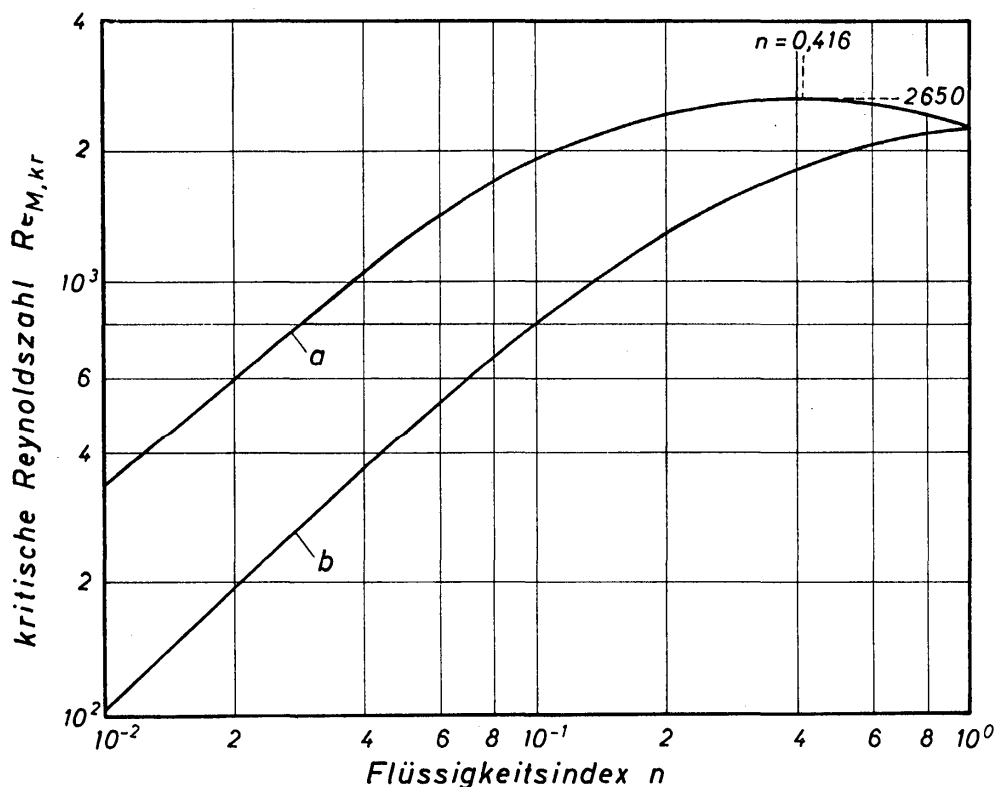


Bild 3.27. Abhängigkeit der kritischen Reynoldszahl vom Flüssigkeitsindex n für die Strömung von Ostwald-Flüssigkeiten. Kurve a für die Strömung durch Rohre und Kurve b für die Strömung durch ebene Kanäle

zeigt, sowohl durch die örtliche Geschwindigkeit w als auch durch deren erste Ableitung beeinflusst.

Die zur Zeit verfügbaren Meßwerte für Re_{kr} liegen innerhalb eines Bereiches von $n = 0,16$ bis $n = 1$ und bestätigen, wie RYAN und JOHNSON [3.28] nachgewiesen haben, die theoretischen Aussagen sehr gut. Dieses Ergebnis erhält noch mehr Gewicht durch die Untersuchung von HANKS und CHRISTIANSEN [3.29]. Diese Autoren erweiterten die Betrachtungen von RYAN und JOHNSON auf die nicht-isotherme Strömung und fanden ebenfalls gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Man darf daher erwarten, daß mit dem Verfahren von RYAN und JOHNSON auch für andere nicht-Newtonsche Flüssigkeiten verlässliche Werte der kritischen Reynoldszahl ermittelt werden.

3.822 Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten

Die kritische Reynoldszahl der Strömung von Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten durch Rohre wird in der gleichen Weise bestimmt wie die der Strömung von Ostwald-Flüssigkeiten. Man erhält nach längeren Rechnungen zunächst die Gleichung

$$Re_{P,kr} = 885 F_1(\tau_w/A), \quad (3.101)$$

worin $F_1(\tau_w/A)$ eine sehr verwickelte Funktion der Größe τ_w/A darstellt, die hier nicht angeführt werden soll. Die Größe τ_w/A ist eine Funktion von Re_P/K_P , wie aus den Gleichungen (3.47) und (3.48) sowie aus Bild 3.15 hervorgeht. Mit diesem Bild und Gl.(3.101) läßt sich die gesuchte Abhängigkeit

$$Re_{P,kr} = 885 F_2(K_P) \quad (3.102)$$

ermitteln, sie ist in *Bild 3.28* als Kurve *a* dargestellt. Mit zunehmenden Werten der Kennzahl K_P steigt die kritische Reynoldszahl stetig an und nähert sich für K_P gegen ∞ dem für Newtonsche Flüssigkeiten anerkannten Wert 2300.

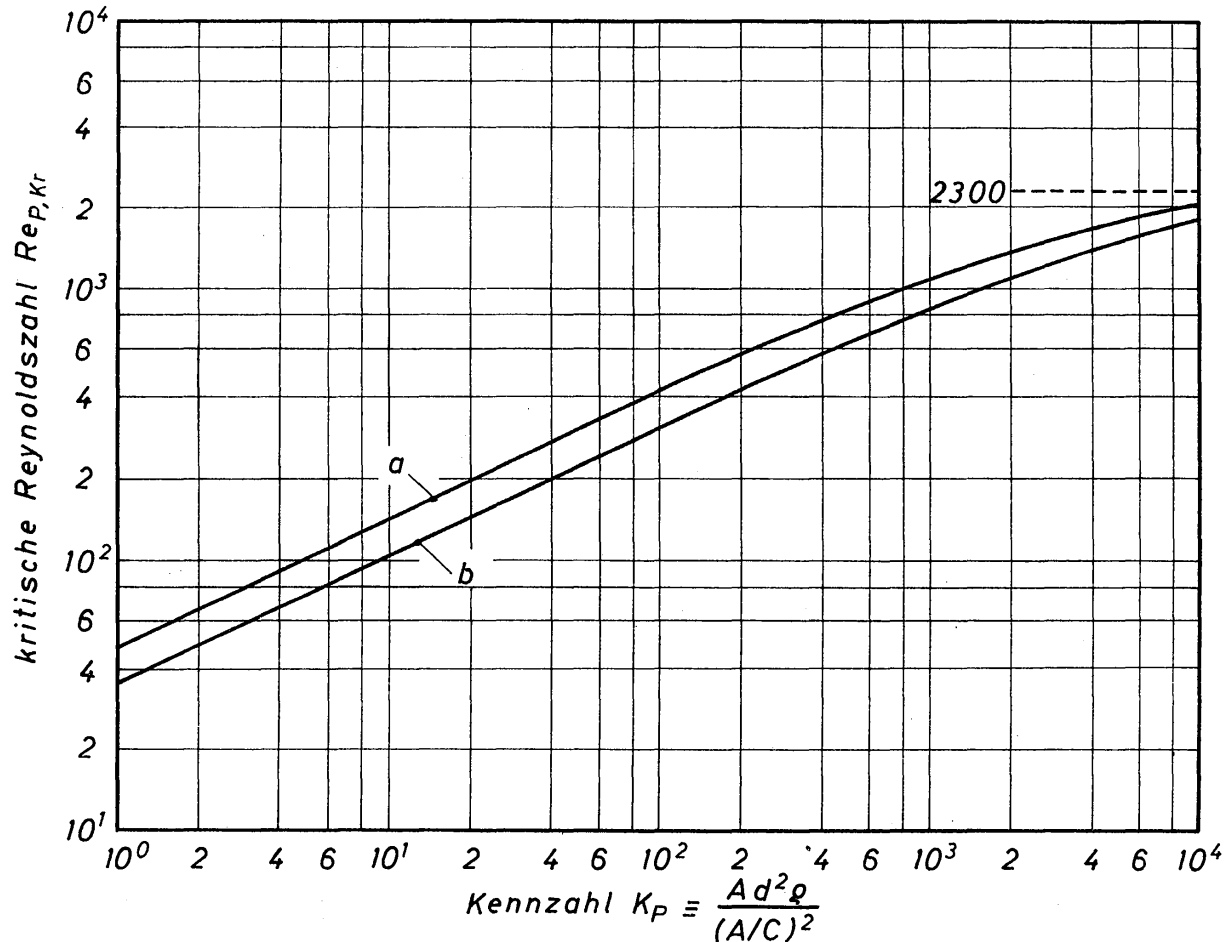


Bild 3.28. Abhängigkeit der kritischen Reynoldszahl von der Kennzahl K_P für die Strömung von Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten. Kurve *a* für die Strömung durch Rohre und Kurve *b* für die Strömung durch ebene Kanäle

3.823 Bingham-Flüssigkeiten

Die Berechnung der kritischen Reynoldszahl von Bingham-Flüssigkeiten durch Rohre, ebene Kanäle und Ringkanäle hat HANKS [3.30] durchgeführt. Er wendete dabei den von HANKS und CHRISTIANSEN [3.29] erweiterten Stabilitätsbegriff an. Die berechnete kritische Reynoldszahl für Rohre ist eine Funktion der Hedströmzahl He und in *Bild 3.29* als Kurve *a* dargestellt. Zum Vergleich ist weiterhin Kurve *b* in das Bild eingetragen worden, durch die alle von HANKS aus dem Schrifttum zusammengetragenen Meßwerte ausgeglichen werden. Der gestrichelte Kurventeil ist extrapoliert worden. Für Hedströmzahlen unterhalb $He = 2 \cdot 10^4$ stimmen berechnete und gemessene Werte der kritischen Reynoldszahl sehr gut überein. Die oberhalb dieses Wertes auftretende Abweichung zwischen Theorie und Experiment erklärt HANKS dadurch, daß der Bingham-Ansatz gemäß Gl.(3.15) das Reibungsverhalten der realen Flüssigkeiten nicht

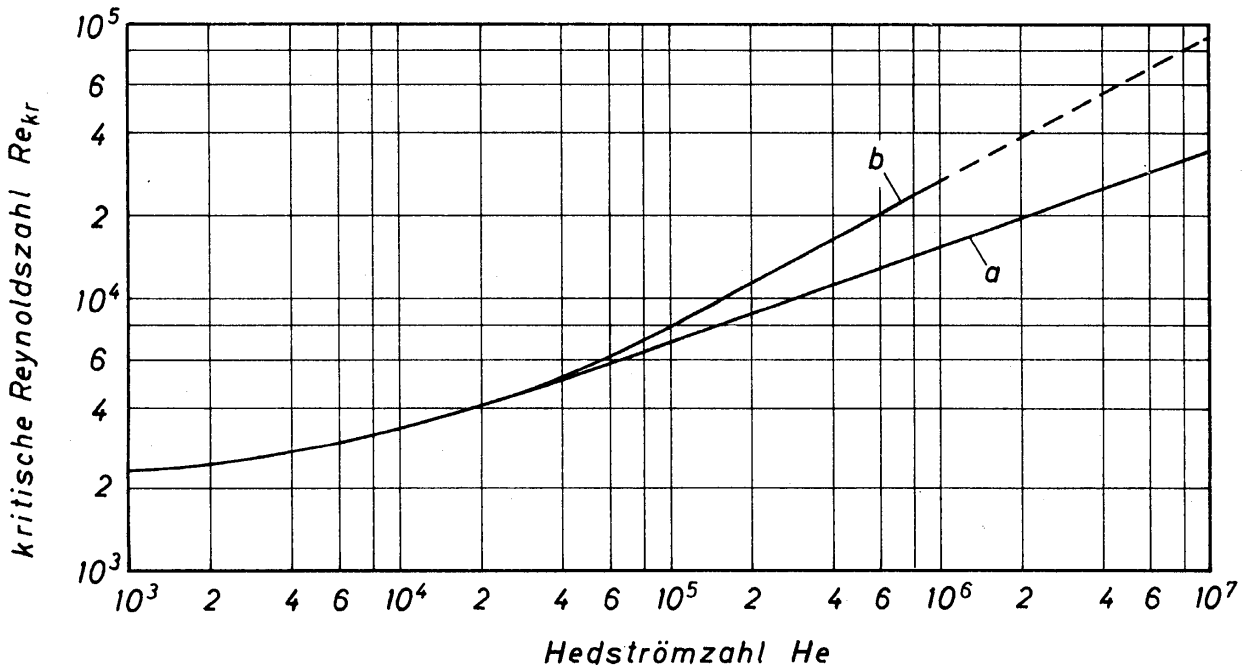


Bild 3.29. Abhängigkeit der kritischen Reynoldszahl von der Hedstromzahl für die Strömung von Bingham-Flüssigkeiten. Kurve *a* berechnete Kurve für die Rohrströmung, Kurve *b* Ausgleichskurve durch Meßwerte für die Rohrströmung. Kurve *b* wird auch zur Bestimmung der kritischen Reynoldszahl für die Strömung in ebenen Kanälen vorgeschlagen

genügend genau wiedergibt. Er schlägt daher vor, den Bingham-Ansatz durch den Powell-Eyring-Ansatz zu ersetzen, durch den auch in der Kernzone eine leichte Scherung berücksichtigt wird.

3.83 Kritische Reynoldszahl der Strömung im ebenen Kanal

Für die Strömung im ebenen Kanal gilt unabhängig vom Fluid die Beziehung

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = - \frac{\tau_w}{s/2}, \tag{3.103}$$

in der τ_w die Wandschubspannung, y den Wandabstand und s die Kanalhöhe bedeuten. Damit ergibt sich die Gleichung für die Stabilitätszahl im ebenen Kanal zu

$$Z_K = \frac{w \rho s/2}{\tau_w} \frac{dw}{dy}. \tag{3.104}$$

Hierin sind für jede Art der nicht-Newtonschen Flüssigkeiten die entsprechenden Ausdrücke für die örtliche Geschwindigkeit w , den Geschwindigkeitsgradienten dw/dy und die Wandschubspannung τ_w einzuführen.

3.831 Ostwald-Flüssigkeiten

Nach dem für die Rohrströmung erörterten Verfahren erhält man mit $Z_{K,kr} = 332$ folgende Gleichung für die kritische Reynoldszahl:

$$Re_{M,kr} = 332 \left(\frac{2 + 4n}{1 + 3n} \right)^n \frac{8n}{(1 + 2n)^2} (2 + n)^{\frac{2+n}{1+n}}. \tag{3.105}$$

Die hiernach berechneten Werte sind in *Bild 3.27* über dem Flüssigkeitsindex n aufgetragen und durch Kurve b verbunden. Kurve a gilt für die kritische Reynoldszahl der Rohrströmung. Voraussetzungsgemäß liefern beide Kurven für Newtonsche Flüssigkeiten mit $n = 1$ den gleichen Wert für $Re_{M,kr}$. Im Bereich $n < 1$ ist die kritische Reynoldszahl für die Strömung durch ebene Kanäle erheblich kleiner als für die Rohrströmung. Ferner läßt die Kurve b im Gegensatz zu der für die Rohrströmung geltenden Kurve a kein Maximum für $n < 1$ erkennen. Die Strömung durch ebene Kanäle wäre besonders gut geeignet, das von RYAN und JOHNSON mitgeteilte Verfahren zur Berechnung der kritischen Reynoldszahl experimentell nochmals zu überprüfen, da sich hierbei $Re_{M,kr}$ wesentlich stärker mit dem Flüssigkeitsindex n ändern soll als bei der Rohrströmung.

3.832 Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten

Für Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten ist die kritische Reynoldszahl nach dem für die Rohrströmung bereits erörterten Verfahren durch die Beziehung

$$Re_{P,kr} = 332 F_3(K_P) \quad (3.106)$$

gegeben, die in *Bild 3.28* als Kurve b dargestellt ist. Für die Kanalströmung ist die kritische Reynoldszahl kleiner als für die Rohrströmung, für die Kurve a gilt. Der Unterschied ist aber wesentlich geringer als für Ostwald-Flüssigkeiten.

3.833 Bingham-Flüssigkeiten

Nach theoretischen Untersuchungen von HANKS [3.30] besteht zwischen den kritischen Reynoldszahlen für die Strömung von Bingham-Flüssigkeiten durch Rohre und ebene Kanäle nur ein sehr geringer Unterschied. Da keine Meßwerte vorliegen, wird die in *Bild 3.29* eingezeichnete Kurve b zur Ermittlung der kritischen Reynoldszahl empfohlen.

3.9 Turbulente Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten

3.91 Geschwindigkeitsverteilung

Da die turbulente Strömung noch nicht streng theoretisch behandelt werden kann, ist man darauf angewiesen, ihre Gesetzmäßigkeiten durch experimentelle Untersuchungen zu bestimmen. Um möglichst allgemeingültige Aussagen über die Änderung der örtlichen Geschwindigkeit mit dem Wandabstand machen zu können, müssen zunächst die maßgebenden dimensionslosen Kennzahlen festgelegt werden. Diese erhält man, wie im Zusammenhang mit der Strömung Newtonscher Flüssigkeiten durch Rohre erörtert wurde, aus der Betrachtung der wandnahen Schicht, innerhalb derer die Strömung noch überwiegend laminar ist. Beschränkt man die Untersuchung auf Ostwald-Flüssigkeiten, deren Reibungsverhalten durch den Potenzansatz beschrieben wird, dann folgt für sehr kleine Werte des Wandabstandes $y = R - r$ aus Gl.(3.21)

$$\frac{w}{w^*} = (y_+)^{1/n}. \tag{3.107}$$

Hierin bedeuten $w^* \equiv \sqrt{\tau_w/\rho}$ die Schubspannungsgeschwindigkeit mit τ_w als Wandschubspannung und ρ als Dichte der Flüssigkeit und y_+ die dimensionslose Wandkoordinate, definiert durch

$$y_+ \equiv \frac{w^{*(2-n)} y^n \rho}{K}. \tag{3.108}$$

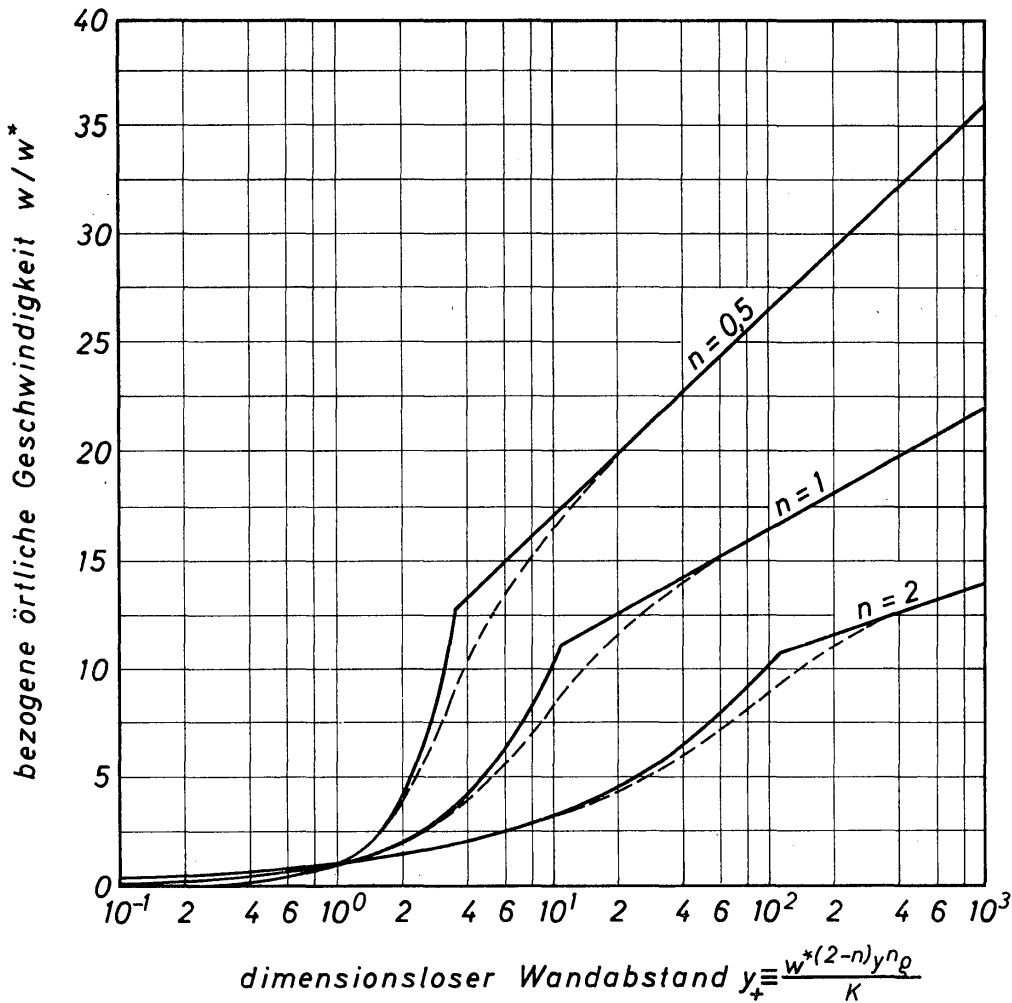


Bild 3.30. Abhängigkeit der bezogenen örtlichen Geschwindigkeit vom dimensionslosen Wandabstand für drei Werte des Flüssigkeitsindex; $n = 1$ Newtonsche Flüssigkeit, $n = 0$ strukturviskose und $n = 2$ dilatante Flüssigkeit

Trägt man w/w^* über y_+ für verschiedene Werte des Flüssigkeitsindexes auf, so erhält man die in *Bild 3.30* dargestellten gekrümmten Kurvenabschnitte. Mit $n = 0,5$ wird ein Beispiel für strukturviskose und mit $n = 2$ ein Beispiel für dilatante Flüssigkeiten gegeben. Zum Vergleich ist ferner der für Newtonsche Flüssigkeiten mit $n = 1$ geltende Kurvenzug eingetragen. Außerhalb der wandnahen Schicht gilt ein anderer Zusammenhang zwischen w/w^* und y_+ und es ergeben sich die geraden Kurvenabschnitte. Hierfür haben DODGE und METZNER [3.31] folgende Gleichung mitgeteilt:

$$\frac{w}{w^*} = f_1(n) \log y_+ + f_2(n). \tag{3.109}$$

Die Funktionen $f_1(n)$ und $f_2(n)$ enthalten den Flüssigkeitsindex als einzige Veränderliche. DODGE und METZNER ermittelten f_1 und f_2 , indem sie ein auf der Grundlage von Gl.(3.109) entwickeltes theoretisches Widerstandsgesetz mit Meßwerten verglichen. Die Funktionen lauten:

$$f_1(n) = \frac{5,66}{n^{0,75}}, \quad (3.110)$$

$$f_2(n) = -\frac{0,40}{n^{1,2}} + \frac{2,458}{n^{0,75}} \left[1,960 + 1,255 n - 1,628 n \log \left(3 + \frac{1}{n} \right) \right]. \quad (3.111)$$

Für Newtonsche Flüssigkeiten wird $f_1(1) = 5,66$ und $f_2(1) = 5,08$. Diese Werte stimmen mit denen, die für Newtonsche Flüssigkeiten allgemein anerkannt sind, recht gut überein. Somit sollte es also möglich sein, mittels Gl.(3.109) die Geschwindigkeitsverteilung außerhalb der wandnahen Schicht mit genügender Genauigkeit zu berechnen. Ebenso wie das Gesetz für Newtonsche Flüssigkeiten hat auch Gl.(3.109) den Nachteil, daß der Geschwindigkeitsgradient in der Rohrachse nicht Null wird.

Zwischen der wandnahen und der wandfernen Schicht liegt ein Übergangsbereich, in dem die Geschwindigkeitsverteilung nach den in *Bild 3.30* gestrichelt eingezeichneten Kurven verläuft. Gleichungen, die die Geschwindigkeitsverteilung über den gesamten Rohrquerschnitt wiedergeben, haben BRODKEY, LEE und CHASE [3.32] sowie BRODKEY [3.33] entwickelt. Diese Gleichungen haben die Form erweiterter Potenzbeziehungen und bauen auf das von NIKURADSE aufgestellte einfache Potenzgesetz für die Geschwindigkeitsverteilung bei Newtonschen Flüssigkeiten auf. Hingewiesen sei in diesem Zusammenhang auch auf eine Untersuchung von EISSENBERG und BOGUE [3.34], in der ähnliche, aber einfachere Gesetze als die von DODGE und METZNER angegebenen, entwickelt wurden.

3.92 Widerstandsgesetze für die Rohrströmung

Ogleich in diesem Abschnitt allein die turbulente Strömung behandelt wird, sollen die Widerstandsdiagramme neben dem turbulenten stets auch den laminaren Strömungsbereich umfassen. Das ist schon deshalb notwendig, um auch den Übergangsbereich betrachten zu können. Bislang wurde fast ausschließlich die turbulente Rohrströmung experimentell untersucht, so daß über die Strömung in ebenen Kanälen keine verbindlichen Aussagen gemacht werden können. Sollten solche aber einmal erforderlich sein, dann liefern die Ausführungen über die Rohrströmung zumindest einen Anhalt, wie man sie sich näherungsweise beschaffen kann.

3.921 Ostwald-Flüssigkeiten

Für Ostwald-Flüssigkeiten haben DODGE und METZNER [3.31] ein theoretisches Widerstandsgesetz hergeleitet. Sie gingen dabei in der gleichen Weise vor wie

PRANDTL bei der Herleitung des entsprechenden Gesetzes für die Rohrströmung Newtonscher Flüssigkeiten. Das Verfahren ist in Abschnitt 1.4 ausführlich erörtert worden. Für Ostwald-Flüssigkeiten lautet das Widerstandsgesetz:

$$\sqrt{\frac{1}{\psi}} = \frac{2,0}{n^{0,75}} \log [Re_M (\psi/4)^{1-n/2}] - \frac{0,2}{n^{1,2}} \quad (3.112)$$

Für $n = 1$ geht es in das Gesetz von PRANDTL über. Die Widerstandszahl ψ ist durch Gl.(3.31) und die Reynoldszahl Re_M durch Gl.(3.33) definiert. Gl.(3.112) zeigt, daß die Widerstandszahl eine Funktion der Reynoldszahl und des Flüssigkeitsindex n ist. In *Bild 3.31* stellen Kurve *a* das Widerstandsgesetz nach Gl.(3.30) für den laminaren Strömungsbereich und die anderen Kurven das Widerstandsgesetz nach Gl.(3.112) für den turbulenten Strömungsbereich dar. Die durch Meßwerte belegten Kurvenabschnitte wurden ausgezogen und die noch nicht experimentell überprüften gestrichelt. Für dilatante Flüssigkeiten mit $n > 1$ ist die Widerstandszahl größer und für strukturviskose Flüssigkeiten mit $n < 1$ kleiner als für Newtonsche Flüssigkeiten. Die Anwendung der Gl.(3.112) für Flüssigkeiten mit $n > 2$ und $n < 0,2$ wird nicht empfohlen.

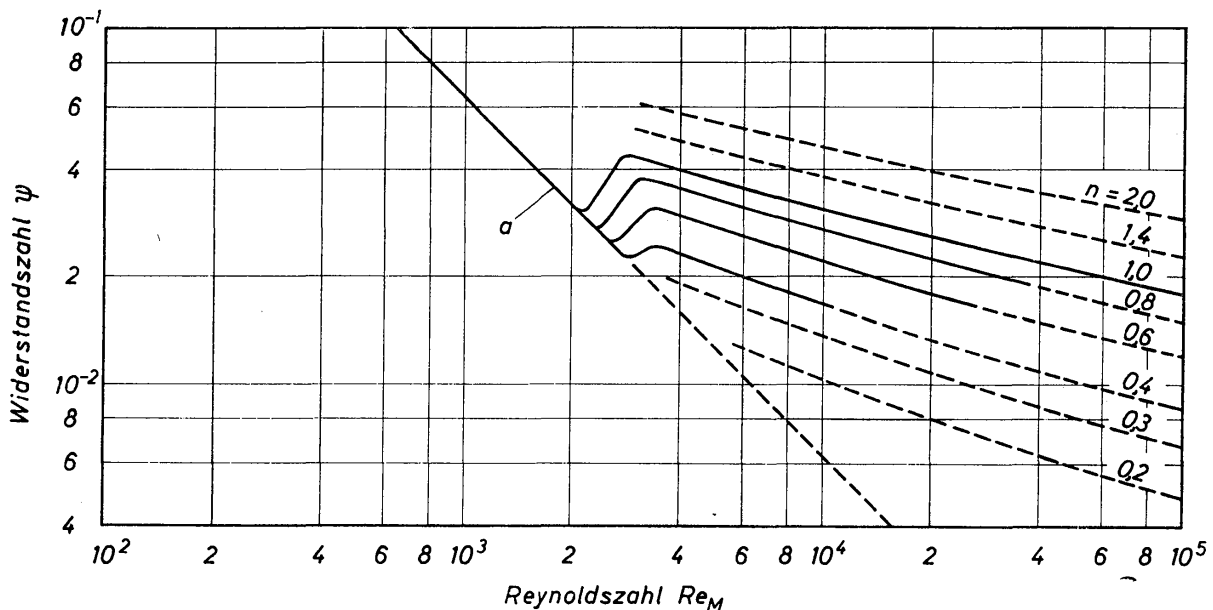


Bild 3.31. Widerstandsgesetze für die laminare und turbulente Rohrströmung von Ostwald-Flüssigkeiten. Kurve *a* für laminare Strömung nach Gl.(3.30) und die anderen Kurven für turbulente Strömung nach Gl.(3.112)

Besonders aufmerksam gemacht sei auf den Übergangsbereich zwischen der laminaren und der turbulenten Strömung. Durch Messungen belegt sind allein die Kurven für $n = 1$, $n = 0,8$, $n = 0,6$ und $n = 0,4$. Für diese vier Fälle ist der Nachweis erbracht, daß die kritische Reynoldszahl, ab welcher der Übergang in den turbulenten Strömungszustand erfolgt, mit abnehmendem Flüssigkeitsindex n geringfügig ansteigt. Zu diesem Ergebnis führte auch die theoretische Berechnung der kritischen Zahl. Der Theorie zufolge ergab sich für $n = 0,416$ der größte Wert mit $Re_{M,kr} = 2650$. Bei $n = 0,18$ nimmt die kritische Zahl dann wieder den für Newtonsche Flüssigkeiten anerkannten Wert 2300 an. Das heißt also, daß für

etwa $n = 1$ bis $n = 0,2$ keine technisch bedeutsame Abweichungen von dem Wert 2300 auftreten. Dieser Sachverhalt wird durch Experimente bestätigt. Das theoretisch begründete starke Absinken der kritischen Zahl für noch kleinere Werte von n konnte bislang nicht experimentell überprüft werden. Für n kleiner als etwa 0,4 kann noch nichts Verbindliches über den Kurvenverlauf im Übergangsbereich ausgesagt werden, da keine Messungen vorliegen. In *Bild 3.31* ist in diesem Bereich daher auch keine Kurve eingezeichnet worden. Man darf aber erwarten, daß mit abnehmenden Werten für n der Übergangsbereich immer weniger ausgeprägt ist. Die bisher von METZNER und seinen Mitarbeitern durchgeführten experimentellen Untersuchungen haben die Theorie bestätigt. Die in *Bild 3.31* dargestellten Widerstandsgesetze für die Rohrströmung von Ostwald-Flüssigkeiten dürfen daher als die zur Zeit sichersten angesehen werden. Vergleichbar vollständige und gesicherte Aussagen über die Widerstandsgesetze der Rohrströmung anderer nicht-Newtonscher Flüssigkeiten liegen nicht vor.

3.922 Bingham-Flüssigkeiten

Nach HEDSTRÖM [3.24] darf man annehmen, daß im turbulenten Strömungsbereich für Bingham-Flüssigkeiten das gleiche Widerstandsgesetz gilt wie für Newtonsche Flüssigkeiten. In *Bild 3.32* gibt Kurve *a* daher das bekannte Widerstandsgesetz von BLASIUS $\psi = 0,3164 Re_B^{-1/4}$ wieder. Die Widerstandszahl ψ ist durch Gl. (3.31), die Reynoldszahl Re_B durch Gl. (3.65) und die Hedströmzahl He durch Gl. (3.66) definiert. Die für den laminaren Bereich geltenden Kurven behalten nur oberhalb von Kurve *a* ihre Gültigkeit. Erhöht man z. B. für eine Flüssigkeit, deren Hedströmzahl 10^7 beträgt, die Reynoldszahl, so bewegt man sich zunächst entlang der für $He = 10^7$ geltenden Kurve, bis diese die Kurve *a* schneidet. Bei noch weiterer Erhöhung der Reynoldszahl bewegt man sich entlang der Kurve *a*. Im Schnittpunkt beider Kurven wird die Strömung turbulent. Das heißt also, daß die kritische Reynoldszahl mit wachsender Hedströmzahl größer wird. Für $He = 10^7$ ergibt sich auf diese Weise eine kritische Reynoldszahl von nahezu 10^5 . Mit Einsetzen der Turbulenz verhält sich die Bingham-Flüssigkeit wie eine Newtonsche. Bei Ostwald-Flüssigkeiten ist das keineswegs der Fall, wie im vorangegangenen Abschnitt erklärt wurde. Das Verhalten der Bingham-Flüssigkeiten ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß sie sich außerhalb der scherungsfreien Kernzone auch bei laminarer Strömung wie eine Newtonsche Flüssigkeit verhält. Man müßte dann allerdings annehmen, daß mit Einsetzen der Turbulenz der scherungsfreie Kern sofort abgebaut wird und über den ganzen Strömungsquerschnitt ein Schergefälle auftritt. In diesem Zusammenhang sei auf *Bild 3.19* verwiesen, in dem der Radius r_0 der scherungsfreien Kernzone, bezogen auf den Radius des Rohres, über dem Verhältnis Re_B/He aufgetragen ist. Aus *Bild 3.32* entnimmt man z. B., daß am Schnittpunkt der Kurve für $He = 10^6$ mit Kurve *a* $Re = 2,6 \cdot 10^4$ und somit $Re_B/He = 2,6 \cdot 10^{-2}$ ist. Hierfür ergibt sich nach *Bild 3.19* $r_0/R \approx 1$. Der scherungsfreie Kern füllt bei der genannten Reynoldszahl praktisch den gesamten Rohrquerschnitt aus. Es ist schwierig, sich

vorzustellen, daß unter diesen extremen Bedingungen die Strömung turbulent wird. Die Klärung der hiermit zusammenhängenden Fragen würde sicherlich zur Bereicherung unserer Kenntnisse von der Natur der Turbulenz beitragen. Das in *Bild 3.32* dargestellte Widerstandsgesetz ist theoretisch begründet und experimentell überprüft. Es kann daher zur Berechnung des Strömungswiderstandes empfohlen werden. Weitere experimentelle Untersuchungen wären auf diesem Gebiet aber sehr erwünscht.

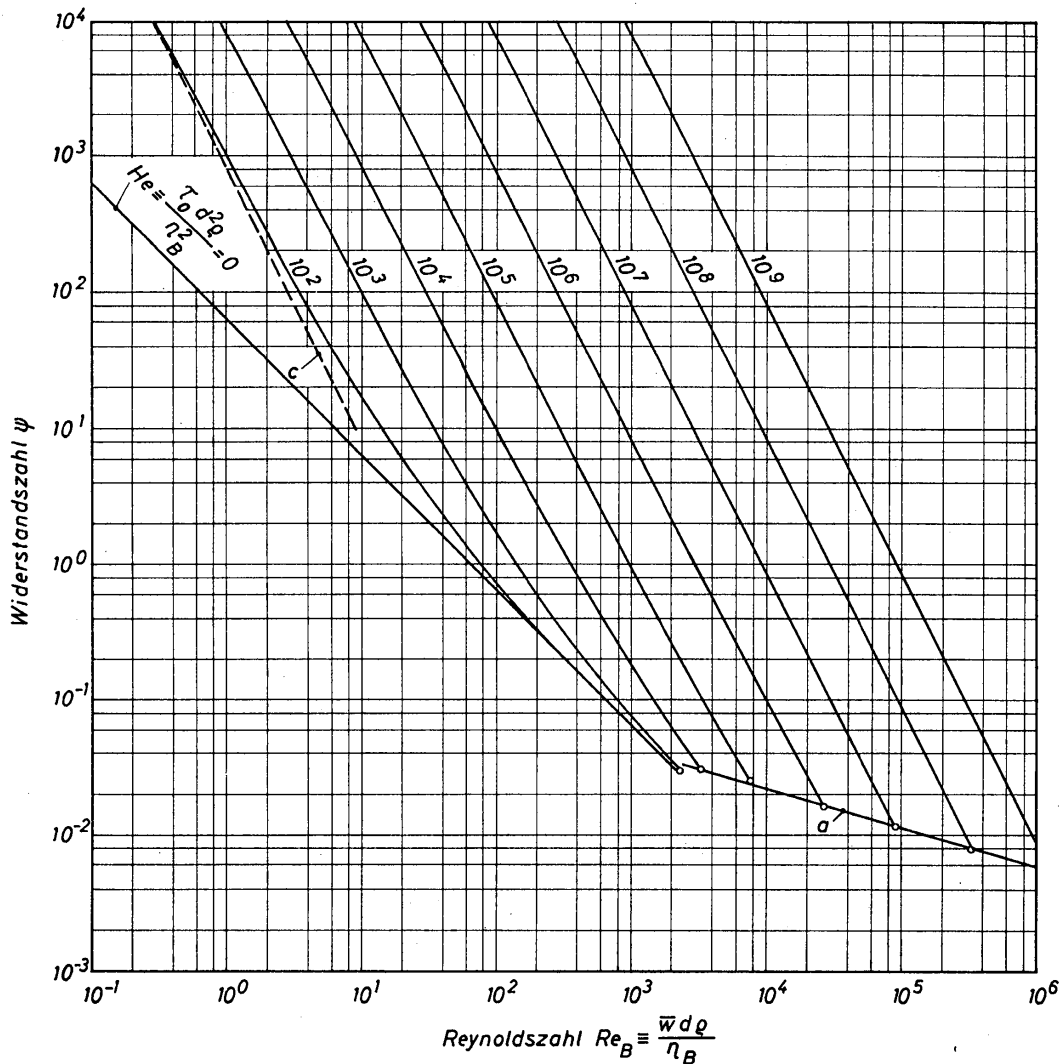


Bild 3.32. Widerstandsgesetze für die laminare und turbulente Rohrströmung von Bingham-Flüssigkeiten nach Angaben von HEDSTRÖM [3.24]

3.923 Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten

Für Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten liegen keine Untersuchungen über den Strömungswiderstand bei turbulenter Strömung vor. Man kann sich also nur mit Hilfe des Widerstandsgesetzes für die laminare Strömung und den berechneten kritischen Reynoldszahlen einen Anhalt über die Form des Widerstandsgesetzes bei turbulenter Strömung verschaffen. *Bild 3.33* zeigt den aus *Bild 3.15* übernommenen Verlauf der Widerstandskurven für $K_P = \text{const}$ bis zu den jeweils durch

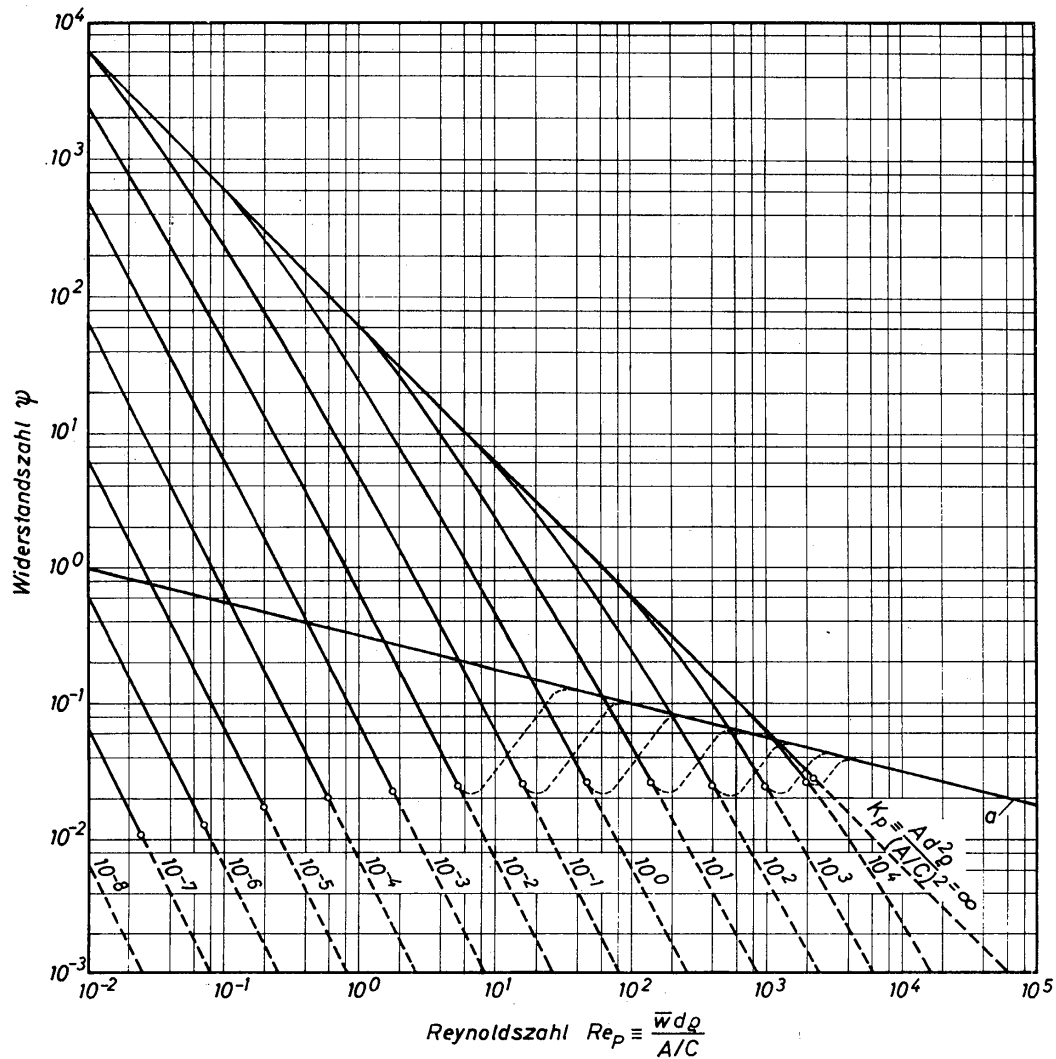


Bild 3.33. Widerstandsgesetze für die laminare und turbulente Rohrströmung von Frandtl-Eyring-Flüssigkeiten

einen Kreis gekennzeichneten kritischen Reynoldszahlen. Die Widerstandszahl ψ ist durch Gl.(3.31), die Reynoldszahl Re_p durch Gl.(3.49) und die Kennzahl K_p durch Gl.(3.50) definiert. Weiterhin ist in *Bild 3.33* als Kurve *a* das für die turbulente Strömung Newtonscher Flüssigkeiten geltende Widerstandsgesetz $\psi = 0,3164 Re_p^{-1/4}$ eingezeichnet. Oberhalb der kritischen Zahl wäre für jede Kurve $K_p = \text{const}$ ein Verlauf denkbar, wie er für einige Beispiele gestrichelt angedeutet ist. Das setzt jedoch voraus, daß der Einfluß von K_p im turbulenten Strömungsbereich vernachlässigt wird. Wie weit das tatsächlich zutrifft, kann natürlich nicht sicher vorausgesagt werden. Es sei daran erinnert, daß im turbulenten Bereich bei Ostwald-Flüssigkeiten der Flüssigkeitsindex n einen merklichen Einfluß ausübt.

Schrifttum

- [3.1] ● J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS und R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York/London 1954
- [3.2] N. OSTWALD, Über die Geschwindigkeitsfunktion der Viskosität disperser Systeme, *Kolloid-Z.* 36 (1925) 2, 99–117
- [3.3] O. REYNOLDS, On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, *Phil. Mag.* 5, Ser. 20 (1885) 127, 469–81
- [3.4] ● E. C. BINGHAM, *Fluidity and Plasticity*, McGraw-Hill, New York/Toronto/London 1922
- [3.5] ● M. REINER, *Deformation, Strain and Flow*, H. K. Lewis & Co., 1960
- [3.6] ● W. PHILIPPOFF, *Viskosität der Kolloide*, Steinkopff, Dresden/Leipzig 1942
- [3.7] ● F. R. EIRICH, *Rheology, Theory and Applications*, Academic Press, New York, Band 1 1956, Band 2 1958, Band 3 1960
- [3.8] ● H. A. STUART, *Die Physik der Hochpolymeren*, Band IV, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956
- [3.9] ● H. GREEN, *Industrial Rheology and Rheological Structures*, Wiley, New York/London/Sydney 1949
- [3.10] ● A. G. FREDRICKSON, *Principles and Applications of Rheology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (N. Y.) 1964
- [3.11] ● R. B. BIRD, W. E. STEWART und E. N. LIGHTFOOT, *Transport Phenomena*, Wiley, New York/London 1962
- [3.12] B. RABINOWITSCH, Über die Viskosität und Elastizität von Solen, *Z. Physik. Chem.* 145 A (1929) 1, 1–26
- [3.13] M. MOONEY, Explicit formulas for slip and fluidity, *J. Rheology* 2 (1931) 210–22
- [3.14] J. PAWLOWSKI, Bestimmung des Reibungsgesetzes der nicht-Newtonischen Flüssigkeiten aus den Viskositätsmessungen mit Hilfe eines Rotationsviskosimeters, *Kolloid-Z.* 130 (1953) 3, 129–31
- [3.15] L. PRANDTL, Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper, *Z. angew. Math. Mech.* 8 (1928) 2, 85–106
- [3.16] H. EYRING, Viscosity, plasticity and diffusion as examples of absolute reaction rates, *J. Chem. Physics* 4 (1936) 283–91
- [3.17] H. WEYMANN, Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Platzwechseltheorie des viskosen Fließens, *Kolloid-Z.* 138 (1954) 1, 41–56
- [3.18] ● A. B. METZNER, Non-Newtonian Technology, in *Advances in Chemical Engineering*, Vol. 1, S. 77–153, Academic Press, New York 1956
- [3.19] P. SCHÜMMER, Zum Druckbegriff bei Strömungen nicht-Newtonischer Flüssigkeiten, *Chem.-Ing.-Techn.* 38 (1966) 3, 226–9
- [3.20] A. B. METZNER und J. C. REED, Flow of non-Newtonian fluids—Correlation of the laminar, transition, and turbulent-flow regions, *AIChE J.* 1 (1955) 4, 434–40
- [3.21] R. W. HANKS und E. B. CHRISTIANSEN, The laminar nonisothermal flow of non-Newtonian fluids, *AIChE J.* 7 (1961) 3, 519–23
- [3.22] D. C. BOGUE, Entrance effects and prediction of turbulence in non-Newtonian flow, *Ind. Eng. Chem.* 51 (1959) 7, 874–8
- [3.23] M. COLLINS und W. R. SCHOWALTER, Behavior of non-Newtonian fluids in the entry region of a pipe, *AIChE J.* 9 (1963) 6, 804–9
- [3.24] B. O. A. HEDSTRÖM, Flow of plastic materials in pipes, *Ind. Eng. Chem.* 44 (1952) 3, 651–5
- [3.25] J. A. WHEELER und E. H. WISSLER, The friction factor Reynolds number relation for the steady flow of pseudoplastic fluids through rectangular ducts, *AIChE J.* 11 (1965) 2, 207–16
- [3.26] A. G. FREDRICKSON und R. B. BIRD, Non-Newtonian flow in annuli, *Ind. Eng. Chem.* 50 (1958) 3, 347–52

- [3.27] K.-F. LADENDORF, *Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten in Ringkanälen mit rotierendem Innenzylinder*, Dipl.-Arbeit am Lehrstuhl für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin 1966
- [3.28] N. W. RYAN und M. N. JOHNSON, Transition from laminar to turbulent flow in pipes, *AICHE J.* 5 (1959) 4, 433-5
- [3.29] R. W. HANKS und E. B. CHRISTIANSEN, The laminar-turbulent transition in non-isothermal flow of pseudoplastic fluids in tubes, *AICHE J.* 8 (1962) 4, 467-71
- [3.30] R. W. HANKS, The laminar-turbulent transition for fluids with a yield stress, *AICHE J.* 9 (1963) 3, 306-9
- [3.31] D. W. DODGE und A. B. METZNER, Turbulent flow of non-Newtonian systems, *AICHE J.* 5 (1959) 2, 189-204
- [3.32] R. S. BRODKEY, J. LEE und R. C. CHASE, A generalized velocity distribution for non-Newtonian fluids, *AICHE J.* 7 (1961) 3, 392-3
- [3.33] R. S. BRODKEY, Limitations on a generalized velocity distribution, *AICHE J.* 9 (1963) 4, 448-51
- [3.34] D. M. EISSENBERG und D. C. BOGUE, Velocity profiles of thoria suspensions in turbulent pipe flow, *AICHE J.* 10 (1964) 5, 723-7

4 Bedeutung und Herleitung von Kennzahlen

In den vorausgegangenen Abschnitten sind die Ergebnisse theoretischer und experimenteller Untersuchungen stets in dimensionsloser Form mitgeteilt worden, da diese Mitteilungsform die denkbar allgemeinste ist. Man bedient sich dabei dimensionsloser Produkte von Größen, die man Kennzahlen nennt. Die mit der dimensionslosen Schreib- und graphischen Darstellungsweise verbundenen Vorteile sind so einleuchtend, daß man sich mit der Bedeutung und der Herleitung von Kennzahlen etwas ausführlicher beschäftigen sollte. Das um so mehr, als die Lösung sehr verwickelter Probleme ihre Anwendung nahezu zwingend fordert. GRASSMANN [4.1] hat die mit Kennzahlen zusammenhängenden Fragen sehr ausführlich behandelt. Es könnte daher überflüssig erscheinen, darauf nochmals einzugehen. Man beobachtet jedoch, daß die Bedeutung der Kennzahlen und insbesondere die Verfahren zu ihrer Herleitung keineswegs so bekannt sind, wie es für Ingenieure eigentlich vorausgesetzt werden sollte. Aus diesem Grunde sollen einige Gesichtspunkte für die praktische Verwendung der Kennzahlen und für ihre Herleitung in knapper Form erörtert werden.

4.1 Bedeutung der Kennzahlen

Um mit den in den vorausgegangenen Abschnitten besprochenen Problemen verbunden zu bleiben, soll die Aufgabe gestellt werden, die Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt in allgemeinsten Form durch Experimente zu bestimmen. Das heißt, es soll eine graphisch dargestellte Geschwindigkeitsverteilung gefunden werden, die für beliebig große Rohrdurchmesser, für beliebig große Volumströme und für beliebige Gase und Flüssigkeiten gültig ist. Zur Vereinfachung der folgenden Überlegungen sei vorausgesetzt, daß die Strömung unter allen Bedingungen der Experimente laminar ist. Ferner mögen nur wir, die Beobachter bei den Experimenten, uns in der glücklichen Lage befinden, einige der hiermit zusammenhängenden theoretischen Gleichungen zu kennen. Das sind die Gleichung für die örtliche Geschwindigkeit

$$w = \frac{R^2 \Delta P/L}{4 \eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

und die für die mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{w} = \frac{R^2 \Delta P/L}{8 \eta} \quad (4.2)$$

Bezieht man die örtliche auf die mittlere Geschwindigkeit, so erhält man

$$\frac{w}{\bar{w}} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4.3)$$

Wir sehen also unmittelbar, daß zur Bestimmung der allgemeingültigen Geschwindigkeitsverteilung nur eine einzige Versuchsreihe notwendig ist, in der die örtliche Geschwindigkeit w abhängig von der Ortskoordinate r gemessen wird, wenn in der Auswertung die örtliche auf die mittlere Geschwindigkeit und die Ortskoordinate auf den Rohrradius bezogen werden.

Was aber wird der mit den physikalischen Vorgängen nur mangelhaft vertraute Experimentator tun? Er wird zunächst als strömendes Medium Luft verwenden und die örtliche Geschwindigkeit w abhängig von r messen. Da er ein guter Experimentator ist, wird er sich über die durch eine Kurve verbundenen Meßwerte freuen, denn sie weisen keine merkliche Streuung auf. Die nächste Überlegung wird ihn dazu führen, die Versuche bei veränderten Volumströmen zu wiederholen. Die Ergebnisse bestätigen die Richtigkeit dieser Überlegung; denn es ergibt sich für jeden Wert des Volumstromes eine andere Geschwindigkeitsverteilung. Ermutigt wird der Experimentator sich sagen, daß es sinnvoll ist, auch den Rohrradius bei den Versuchen zu ändern. Das Versuchsmaterial beginnt sich bereits zu häufen, und er selbst beginnt zu ermatten. Da kommt ihm die Idee, daß er statt Luft auch noch andere Gase und schließlich sogar noch Flüssigkeiten verwenden muß. Alle diese Versuche werden durchgeführt. Ferner möge der Experimentator bemerkt haben, daß sich die strömenden Medien durch ihre Dichte ρ und Viskosität η unterscheiden. Die örtliche Geschwindigkeit wurde also abhängig von fünf Größen, nämlich der Ortskoordinate, dem Rohrradius R , dem Volumstrom \dot{V} , der Dichte ρ und der Viskosität η gemessen. Da der Volumstrom \dot{V} , dividiert durch die Querschnittsfläche F , die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} ergibt, wurde vom Experimentator die Funktion

$$w = f(\bar{w}; r; R; \rho; \eta) \quad (4.3)$$

untersucht. Versteht er es, sein Versuchsmaterial sinnvoll zu überprüfen und auszuwerten, so stellt er fest, daß die Dichte ρ und die Viskosität η keine Einflußgrößen sind und alle Meßwerte auf einer Kurve liegen, wenn er sich auf Grund des experimentellen Tatsachenmaterials dazu entschließt, das dimensionslose Verhältnis w/\bar{w} über dem zweiten dimensionslosen Verhältnis r/R aufzutragen. Eine erst nach Wochen oder Monaten beendete Untersuchung hätte nach wenigen Stunden bereits abgeschlossen sein können, wenn er, so wird der stille Beobachter feststellen, die Bedeutung und die Möglichkeiten der dimensionslosen Verhältnisse oder der Kennzahlen gekannt hätte. Der stille Beobachter wird aber selber vermutlich bald in Schwierigkeiten geraten, wenn ihm die Aufgabe gestellt wird, die allgemeine Form der Geschwindigkeitsverteilung für den Fall zu bestimmen, daß das Rohr an seiner Unterseite beheizt wird. Der erzwungenen Strömung wird dann eine freie Strömung überlagert sein.

Mit der letzten Bemerkung soll darauf hingewiesen werden, daß in der Forschung fehlende Kenntnisse über einen physikalischen Vorgang durch Experimente gewonnen werden müssen. Fehlen die Kenntnisse über den physikalischen Vorgang, so lassen sich auch keine Kennzahlen bilden. Jede durch das Experiment gewonnene Einsicht in einen physikalischen Vorgang sollte aber auch unmittelbar

auf die Möglichkeit zur Begründung einer Kennzahl überprüft werden. Das obige Beispiel hat deutlich erkennen lassen, wie groß die Ersparnis an Arbeit und somit an Zeit und Geld ist, wenn man von den Möglichkeiten Gebrauch macht, die die Kennzahlen bieten.

Das oben behandelte Beispiel hat weiterhin gezeigt, daß Aussagen über einen physikalischen Vorgang mittels Kennzahlen in die einfache Form gekleidet werden können. Je einfacher ein Aussage, desto deutlicher ist sie. Diese Hinweise gelten keineswegs nur für experimentelle Untersuchungen, sie gelten in gleicher Weise auch für theoretische Untersuchungen. Je verwickelter das theoretisch untersuchte Problem ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß geschlossene Lösungen unmöglich sind und numerische Lösungsverfahren angewendet werden müssen. Das bedeutet aber fast zwangsläufig den Einsatz von Rechenautomaten und graphische Darstellung der Ergebnisse. Die Zahl der darzustellenden Kurven wird bei Verwendung von Kennzahlen geringer. Das bedeutet geringere Zeiten für den Rechenautomaten und somit Ersparnis an Zeit und Geld. Dieser Vorteil läßt sich aber nur wahrnehmen, wenn die vorbereitenden Arbeiten mit größter Sorgfalt durchgeführt werden. Der Einsatz von Rechenautomaten erfordert eine bislang fast unbekannte Gründlichkeit im Durchdenken des physikalischen Problems und seiner Lösungsmöglichkeiten. Automaten lassen sich sinnvoll immer nur von geistig hochqualifizierten Sachbearbeitern einsetzen. Ersparnis an manueller Arbeit läßt sich nur durch geistigen Aufwand erringen.

4.2 Herleitung von Kennzahlen mittels der Dimensionsanalyse

Jede Kennzahl ist das dimensionslose Potenzprodukt mehrerer Einflußgrößen. Sollen die für einen physikalischen Vorgang maßgebenden Kennzahlen bestimmt werden, so müssen die den Vorgang beeinflussenden Größen bekannt sein. Eine Einflußgröße möge beispielsweise die Geschwindigkeit $w = 30 \text{ m/s}$ sein. Jede Größe ist das Produkt einer (dimensionsfreien) Zahl – hier 30 – und einer Einheit – hier 1 m/s. Die Einheit läßt sich wiederum als das Produkt der Zahl 1 und der Dimension m/s auffassen. Zahlen sind stets dimensionsfrei. Das gleiche gilt auch für Kennzahlen, die für einen bestimmten Vorgang «kenn»zeichnend sind. Die häufig gebrauchte Schreib- und Sprechweise «dimensionslose Kennzahl» kann also sinnvollerweise durch «Kennzahl» abgekürzt werden. Eine Kennzahl muß also stets aus einer Gruppe von Einflußgrößen derartig zusammengesetzt sein, daß ihre Einheit nur aus dem Zahlenfaktor 1 besteht, ihre Dimension also verschwindet. Die Einflußgrößen müssen hinsichtlich ihrer Dimension analysiert werden, wenn man mittels der Dimensionsanalyse zu Kennzahlen gelangen will.

Ohne Kenntnis der für einen physikalischen Vorgang maßgebenden Einflußgrößen lassen sich keine Kennzahlen bilden. Häufig besteht der erste Schritt bei einer Untersuchung darin, daß man durch Experimente klärt, welche Einflußgrößen bei einem Vorgang auftreten. Es dürfen dabei aber nur solche Einflußgrößen berücksichtigt werden, die voneinander unabhängig sind. Die Beachtung dieser Unabhängigkeitsbedingung bereitet oftmals sehr große Schwierigkeiten. Die

Dimensionsanalyse setzt daher eine besonders sorgfältige Analyse des physikalischen Vorgangs voraus.

Eine für Strömungsvorgänge sehr wichtige Kennzahl z. B. ist die Reynoldszahl:

$$Re \equiv \frac{\bar{w} l \rho}{\eta} = \bar{w} l \rho \eta^{-1}. \quad (4.4)$$

In ihr werden die Einflußgrößen, nämlich die Geschwindigkeit \bar{w} , die Länge l , die Dichte ρ und die Viskosität η , zu einem dimensionslosen Potenzprodukt zusammengefaßt. Welcher Art dabei die Geschwindigkeit \bar{w} und die Länge l sind, hängt nicht nur von dem untersuchten Vorgang allein, sondern auch von dem Ziel ab, welches man durch Verwendung der Kennzahl zu erreichen sich bemüht. Bei der Rohr- und Kanalströmung wird man, wenn die Reynoldszahl zur Darstellung eines Widerstandsgesetzes verwendet werden soll, als Geschwindigkeit die mittlere und als Länge den Rohrdurchmesser wählen. Selbstverständlich könnte die mittlere Geschwindigkeit auch durch eine örtliche ersetzt werden. Als sinnvoll würde sich dann aber nur die in der Rohr- oder Kanalachse auftretende örtliche Geschwindigkeit erweisen. Indes ist ihre Berechnung im allgemeinen recht umständlich, während sich die mittlere Geschwindigkeit sehr einfach bestimmen läßt. Zur Festlegung der Reynoldszahl wählt man also vornehmlich aus Gründen der Einfachheit die mittlere Geschwindigkeit, bezüglich der Länge l sollte beachtet werden, daß sie in einem einfachen Zusammenhang mit der Geschwindigkeit steht. Dieser Zusammenhang ergibt sich bei Verwendung des Rohr- oder Kanaldurchmessers. Im allgemeinen erweist es sich immer als sinnvoll, jene Länge zu wählen, die senkrecht zur Geschwindigkeit zu messen ist. Viele in der Strömungslehre sowie in der Lehre von der Wärme- und Stoffübertragung auftretenden Kennzahlen werden nach verdienten Forschern benannt und mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen bezeichnet.

Zur Erörterung des Verfahrens, das zur Herleitung der Kennzahlen angewendet wird, soll in einem ersten Beispiel der pneumatische Transport von feinkörnigen Feststoffen durch waagerechte Rohrleitungen betrachtet werden. Dieser Vorgang wird später noch sehr gründlich behandelt. Im zweiten Beispiel werden die Kennzahlen für die Strömung von Bingham-Flüssigkeiten gesucht. Da diese Strömung bereits theoretisch behandelt wurde, sind die Kennzahlen schon bekannt und können mit denen verglichen werden, die sich durch die Dimensionsanalyse ergeben.

4.21 Kennzahlen für den pneumatischen Feststofftransport

Zunächst sollen an Hand von *Bild 4.1* der Transportvorgang besprochen und die Einflußgrößen festgelegt werden. Durch ein Rohr mit dem Durchmesser d und der Länge L strömt ein Gas mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{w} . Die Dichte des Gases sei ρ und die Viskosität η . Bei einer einphasigen Strömung tritt die Dichte des Gases als Einflußgröße nur dann auf, wenn die Strömung turbulent ist. Bei zweiphasigen Strömungen tritt sie in jedem Falle auf. Innerhalb des Gasstromes

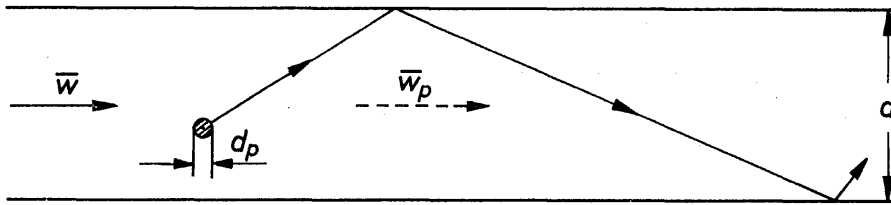


Bild 4.1. Zur Erläuterung des pneumatischen Transports in Rohren

befinden sich Feststoffkörner, deren Durchmesser d_p und Dichte ρ_p ist. Es wird angenommen, daß der Feststofftransport bei sehr hoher Gasgeschwindigkeit erfolgt. Dann bewegen sich die Körner in der für ein einzelnes Korn angedeuteten Weise. Der Abstand zwischen zwei Aufprallpunkten ist sehr groß. Jedes Korn ändert somit fortlaufend Richtung und Größe seiner Geschwindigkeit. Zur Vereinfachung des Vorganges wird angenommen, daß man allen Körnern eine mittlere Geschwindigkeit \bar{w}_p zuordnen kann. Da außer den Strömungskräften die Massen- und Auftriebskraft am Korn auftreten, wird man die Schwerebeschleunigung in die Liste der Einflußgrößen aufnehmen müssen. Alle anderen die Kräfte beeinflussenden Größen sind bereits aufgeführt. Während des Aufpralls der Körner auf die Rohrwand verlieren sie einen Teil ihrer Energie. Wir wollen annehmen, daß diese Energieabgabe vornehmlich durch den Elastizitätsmodul des Kornes E_p und den des Wandmaterials E beeinflusst wird. Gesucht wird der Druckverlust ΔP des Gasstromes. Alle für den pneumatischen Transport als wichtig angesehenen Größen werden nochmals zusammengestellt:

Druckverlust	ΔP
Mittlere Gasgeschwindigkeit	\bar{w}
Mittlere Korngeschwindigkeit	\bar{w}_p
Rohrlänge	L
Rohrdurchmesser	d
Korndurchmesser	d_p
Dichte des Gases	ρ
Dichte des Kornmaterials	ρ_p
Viskosität des Gases	η
Schwerebeschleunigung	g
Elastizitätsmodul des Kornmaterials	E_p
Elastizitätsmodul des Rohrwandmaterials	E

Der pneumatische Transport wird hiernach durch zwölf Einflußgrößen beschrieben, die sich in der folgenden Gleichung zusammenfassen lassen:

$$F(\Delta P; \bar{w}; \bar{w}_p; L; d; d_p; \rho; \rho_p; \eta; g; E_p; E) = 0. \quad (4.5)$$

Aus den Einflußgrößen lassen sich dimensionslose Kennzahlen π_1 bis π_n bilden, so daß die Gleichung auch in der Form

$$F(\pi_1; \pi_2; \dots; \pi_n) = 0 \quad (4.6)$$

geschrieben werden kann. Die Ermittlung dieser Kennzahlen, die jeweils Potenzprodukte ihrer Einflußgrößen darstellen, soll erläutert werden.

Grundsätzlich ist es denkbar, daß das Problem allein durch eine einzige Kennzahl beschrieben wird, die die Form

$$\pi = \Delta P^a \bar{w}^b \bar{w}_p^c L^d d^e d_p^f \varrho^g \varrho_p^h \eta^k g^l E_p^m E^n \quad (4.7)$$

aufweist. Wird das Problem durch mehrere Kennzahlen beschrieben, dann müssen einige der Exponenten a bis n gleich Null werden. Da die Kennzahl π dimensionslos ist, muß für die Dimensionen der Einflußgrößen die folgende Gleichung gelten:

$$\left(\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}\right)^a \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^b \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^c m^d m^e m^f \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^g \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^h \left(\frac{\text{kg}}{\text{m s}}\right)^k \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^l \left(\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}\right)^m \left(\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}\right)^n = 0. \quad (4.8)$$

Alle hierin auftretenden Dimensionen sind aus den Dimensionen der Grundeinheiten für die Masse (1 kg), die Länge (1 m) und die Zeit (1 s) abgeleitet. Die Gleichung ist erfüllt, wenn die Summe der Exponenten für die Dimension jeder Grundeinheit gleich Null ist:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Masse (kg):} \quad a \quad \quad \quad + g + h + k \quad \quad + m + n = 0 \\ \text{Länge (m):} \quad -a + b + c + d + e + f - 3g - 3h - k + l - m - n = 0 \\ \text{Zeit (s):} \quad -2a - b - c \quad \quad \quad -k - 2l - 2m - 2n = 0 \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

Dieses lineare Gleichungssystem wird wie folgt gelöst. Man stellt zunächst die Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{c} \text{kg} \\ \text{m} \\ \text{s} \end{array} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & k & l & m & n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

auf und bestimmt deren Rang r . Unter dem Rang einer Matrix versteht man die höchste Ordnung, die deren nicht verschwindende Unterdeterminante hat. In der obigen Matrix existieren Unterdeterminanten ungleich Null der Ordnung 3; z. B. Spalte b , e und g . Der Rang der Koeffizientenmatrix ist also $r = 3$.

Durch den Rang der Matrix ist die Zahl der abhängigen Variablen festgelegt. Wählt man hierfür die Exponenten b , e und g aus, dann ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} b = -2a - c - k - 2l - 2m - 2n \\ e = -d - f - k + l \\ g = -a - h - k - m - n \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

Nach Einsetzen in Gl.(4.7) folgt damit

$$\pi = \Delta P^a \bar{w}^{-2a-c-k-2l-2m-2n} \bar{w}_p^c L^d d^{-d-f-k+l} d_p^f \varrho^{-a-h-k-m-n} \varrho_p^h \eta^k g^l E_p^m E^n. \quad (4.11)$$

Die Exponenten a bis n können vom mathematischen Standpunkt aus beliebige Werte annehmen. Die einfachste Form der Kennzahlen ergibt sich jedoch, wenn man in Gl.(4.11) der Reihe nach von a bis n jeweils einen Exponenten gleich 1 und die anderen gleich Null setzt:

$$\begin{array}{lll}
 a = 1 & (c, d, f, h, k, l, m, n = 0) & \pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2} \\
 c = 1 & (a, d, f, h, k, l, m, n = 0) & \pi_2 = \frac{\bar{w}_p}{\bar{w}} \\
 d = 1 & (a, c, f, h, k, l, m, n = 0) & \pi_3 = \frac{L}{d} \\
 f = 1 & (a, c, d, h, k, l, m, n = 0) & \pi_4 = \frac{d_p}{d} \\
 h = 1 & (a, c, d, f, k, l, m, n = 0) & \pi_5 = \frac{\rho_p}{\rho} \\
 k = 1 & (a, c, d, f, h, l, m, n = 0) & \pi_6 = \frac{\eta}{\bar{w} d \rho} \\
 l = 1 & (a, c, d, f, h, k, m, n = 0) & \pi_7 = \frac{g d}{\bar{w}^2} \\
 m = 1 & (a, c, d, f, h, k, l, n = 0) & \pi_8 = \frac{E_p}{\rho \bar{w}^2} \\
 n = 1 & (a, c, d, f, h, k, l, m = 0) & \pi_9 = \frac{E}{\rho \bar{w}^2}
 \end{array}$$

Als Ergebnis der Rechnungen erhält man neun Kennzahlen. Die Zahl der Kennzahlen ergibt sich aus folgendem Satz: Die Zahl der Kennzahlen i ist gleich der Zahl der Einflußgrößen n , verringert um den Rang r der Koeffizientenmatrix:

$$i = n - r. \quad (4.12)$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist insbesondere dann, wenn die Zahl der Einflußgrößen wie im gewählten Beispiel sehr groß ist, gleich der Zahl der Grundeinheiten. Für diesen Fall kann man also auch sagen, daß sich die Zahl der Kennzahlen als Differenz der Zahl der Einflußgrößen und der Zahl der Grundeinheiten ergibt.

Bei der Wahl der Einflußgrößen ist darauf zu achten, daß alle den physikalischen Vorgang beeinflussenden Größen berücksichtigt werden. Zu wenige oder zu viele Einflußgrößen ergeben durch die Dimensionsanalyse auch zu wenige oder zu viele Kennzahlen. Man kann um so sicherer entscheiden, ob eine Größe den Vorgang beeinflusst, je mehr man von seinem physikalischen Ablauf weiß. Ohne jegliche Kenntnisse vom physikalischen Vorgang wird man schwerlich eine Dimensionsanalyse durchführen können. Das Ergebnis wäre zumindest zweifelhaft.

Die Festlegung der r abhängigen Variablen, im Beispiel sind das b , e und g , bereitet im allgemeinen Schwierigkeiten. Sie sind in jedem Falle so zu wählen, daß ihre Koeffizienten eine Determinante der Ordnung r bilden. Denn ein lineares

Gleichungssystem hat nur dann eine eindeutige Lösung, wenn seine Koeffizientendeterminante nicht gleich Null ist. Im behandelten Beispiel lassen sich mehr als 20 verschiedene Kombinationen von r abhängigen Variablen finden, die dieser Bedingung genügen. Bei jeder Kombination, die man schließlich auswählt, ergeben sich andere Kennzahlen. Es existiert zwar für jeden Satz von n Einflußgrößen nur ein vollständiger Satz von $n - r$ Kennzahlen, auf den sich alle anderen errechneten Kennzahlen durch multiplikative Potenzkombinationen zurückführen lassen. Da aber zur sinnvollen Beschreibung des Prozesses die $n - r$ Kennzahlen nur in bestimmter Form brauchbar sind, muß man bei der Festlegung der abhängigen Variablen sehr sorgfältig vorgehen. Hierzu können einige Hinweise dienlich sein.

Die zu den unabhängigen Variablen gehörenden Einflußgrößen treten jeweils nur in einer der $n - r$ Kennzahlen auf. Die abhängigen Variablen hingegen, im Beispiel waren es \bar{w} , d und ρ , können in einer oder auch in mehreren Kennzahlen auftreten.

Da fast immer eine Größe, im Beispiel der Druckverlust ΔP , als Funktion der anderen dargestellt werden soll, wird man seinen Exponenten zur Gruppe der unabhängig veränderlichen zählen. Der Druckverlust tritt auch nur in einer Kennzahl, nämlich π_1 , auf.

Ferner wird man sich stets bemühen, jene Kennzahlen, von denen man fest zu wissen glaubt, daß sie zur Beschreibung des Problems sinnvoll sind, auch zu erhalten. Im Beispiel war der mit π^7 bezeichnete Kehrwert der Froudezahl zu erwarten. Aus diesem Grunde wurde der Exponent der Schwerebeschleunigung g als unabhängige Variable gewählt.

Da die Zahl der r abhängigen Variablen meist kleiner als die der $n - r$ unabhängigen ist, kommt man häufig schneller zum Ziel, wenn man erstere festzulegen vermag. Diese Hinweise mögen genügen, um dem Leser die erstmalige Anwendung der Dimensionsanalyse zu erleichtern. Sie werden sicherlich aber auch den Eindruck hervorgerufen haben, daß die Anwendung der Dimensionsanalyse sehr viel Erfahrung erfordert. Diese ist jedoch, wie man leicht feststellen kann, nach Bearbeitung von zwei oder drei Beispielen in ausreichender Weise zu gewinnen.

In dem angeführten Beispiel wurde von der vorhandenen Erfahrung reichlich Gebrauch gemacht. Man erkennt das unmittelbar daran, daß nur sinnvolle und bereits erwartete Kennzahlen erhalten wurden. Als Gegenstück soll noch ein zweites Beispiel behandelt werden, ohne daß Erfahrung und Kenntnisse verwertet werden. Das Beispiel mag also für Anfänger von besonderem Interesse sein.

4.22 Kennzahlen für die Strömung von Bingham-Flüssigkeiten

In Abschnitt 3.51 wurden an Hand von *Bild 3.17* die charakteristischen Strömungsmerkmale einer Bingham-Flüssigkeit erörtert. Diese Flüssigkeit beginnt erst zu fließen, nachdem die Schubspannung einen Mindestwert τ_0 überschritten hat. Als Folge davon bildet sich bei der Rohrströmung eine scherungsfreie Kernzone mit dem Durchmesser d_0 aus. Ein Schergefälle tritt nur innerhalb einer ring-

förmigen Randzone auf. Für das Widerstandsgesetz sollen die maßgebenden Kennzahlen aufgesucht werden. Die folgenden Einflußgrößen sollen als bedeutsam angesehen werden:

Druckverlust	ΔP
Mittlere Geschwindigkeit	\bar{w}
Rohrlänge	L
Rohrdurchmesser	d
Durchmesser der Kernzone	d_0
Dichte der Flüssigkeit	ρ
Viskosität der Flüssigkeit	η_B
Mindestwert der Schubspannung	τ_0

Mittels dieser Einflußgrößen läßt sich die Gleichung

$$F(\Delta P; \bar{w}; L; d; d_0; \rho; \eta_B; \tau_0) = 0 \quad (4.12)$$

und mittels der gesuchten Kennzahlen die Gleichung

$$F(\pi_1; \pi_2; \dots \pi_n) = 0 \quad (4.13)$$

aufstellen. Für eine der Kennzahlen läßt sich dann in allgemeiner Form schreiben:

$$\pi = \Delta P^a \bar{w}^b L^c d^d d_0^e \rho^f \eta_B^g \tau_0^h. \quad (4.14)$$

Die weitere Behandlung erfolgt in der im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Weise. Es sei lediglich erwähnt, daß die Koeffizientenmatrix den Rang $r = 3$ hat und als abhängige Variablen die Exponenten b , c und h gewählt wurden. Dann ergeben sich die folgenden fünf Kennzahlen:

$$\begin{aligned} a = 1: & \quad \pi_1 = \frac{\Delta P}{\tau_0} \\ d = 1: & \quad \pi_2 = \frac{d}{L} \\ e = 1: & \quad \pi_3 = \frac{d_0}{L} \\ f = 1: & \quad \pi_4 = \frac{\rho \bar{w}^2}{\tau_0} \\ g = 1: & \quad \pi_5 = \frac{\bar{w} \eta_B}{L \tau_0} \end{aligned}$$

Von den fünf Kennzahlen scheint auf den ersten Blick nur $\pi_2 = d/L$ sinnvoll zu sein. Die anderen Kennzahlen sind zumindest unbekannt. Man erkennt aber bei näherer Betrachtung sofort, daß Division von π_1 durch π_4 eine bekannte Kennzahl liefert:

$$\frac{\pi_1}{\pi_4} = \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2}.$$

Ferner ergibt die Kombination

$$\frac{\pi_4 \pi_2}{\pi_5} = \frac{\rho \bar{w}^2}{\tau_0} \frac{d}{L} \frac{L \tau_0}{\bar{w} \eta_B} = \frac{\bar{w} \rho d}{\eta_B} \equiv Re_B$$

die zu erwartende Reynoldszahl und die Kombination

$$\frac{\pi_4 \pi_2^2}{\pi_5^2} = \frac{\rho \bar{w}^2}{\tau_0} \frac{d^2}{L^2} \frac{L^2 \tau_0^2}{\bar{w}^2 \eta_B^2} = \frac{\tau_0 d^2 \rho}{\eta_B^2} \equiv He$$

die zu erwartende Hedströmzahl. Unverändert bleiben die beiden Längenverhältnisse d/L und d_0/L . Die Gesamtzahl der Kennzahlen hat sich also nicht verändert.

Da das theoretische Widerstandsgesetz die Widerstandszahl ψ jedoch nur als Funktion von Re_B und He ergibt, haben wir zwei überflüssige Kennzahlen. Schauen wir uns jedoch die Definitionsgleichung für die Widerstandszahl ψ an, so sehen wir, daß diese Kennzahl, bis auf einen festen Zahlenfaktor, das Produkt von π_2 und π_1/π_4 , darstellt:

$$2 \pi_2 \frac{\pi_1}{\pi_4} = \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2/2} \frac{d}{L} \equiv \psi.$$

Diese Definitionsform für ψ ist zulässig und sinnvoll, solange der Druckverlust linear von der Rohrlänge abhängt. Das trifft für die ausgebildete, inkompressible und isotherme Strömung zu. Somit verbleiben also nur noch vier Kennzahlen. Die Widerstandszahl ψ müßte demnach eine Funktion der Reynoldszahl Re_B , der Hedströmzahl He und dem Längenverhältnis d_0/L sein.

$$\psi = f\left(Re_B; He; \frac{d_0}{L}\right) \quad \text{falsch!} \quad (4.15)$$

Das theoretische Widerstandsgesetz enthält jedoch keinen Einfluß von d_0/L . Es muß also offensichtlich ein Fehler unterlaufen sein. Da eine Kennzahl zuviel vorhanden ist, muß auch eine Einflußgröße zuviel aufgeführt worden sein. Diese Einflußgröße ist d_0 . Denn die theoretischen Rechnungen hatten bereits ergeben, daß d_0 eine Funktion von τ_0 ist. Somit muß also d_0 und folglich auch die Kennzahl d_0/L entfallen. Hiernach wird ψ also, wie zu erwarten war, nur noch eine Funktion von Re_B und He :

$$\psi = f(Re_B; He) \quad \text{richtig!} \quad (4.16)$$

Dieses Beispiel hat zwei wichtige Gesichtspunkte hervorgehoben. Die ungeschickte Wahl der unabhängigen Variablen hat zu sehr ungünstigen Kennzahlen geführt. Diese ließen sich indes durch entsprechende Multiplikationen und Divisionen in offensichtlich besser geeignete Kennzahlen umformen. Weiterhin hat sich ergeben, daß eine überflüssige Einflußgröße auch eine überflüssige Kennzahl liefert. Es ist darauf zu achten, daß beim Aufsuchen der Einflußgrößen nur solche gewählt werden, die voneinander unabhängig sind. Die Entscheidung, ob zwei Einflußgrößen voneinander abhängen oder nicht, kann bei verwickelten Problemen sehr schwierig sein. Die Entscheidung wird allein durch die Einsicht in

den betrachteten Vorgang erleichtert. Bei einem einfachen Problem, wie es hier behandelt ist, würden die Experimente sehr bald erkennen lassen, ob eine überflüssige Kennzahl vorhanden ist oder nicht. Man könnte also ohne weiteres mit einer falschen Gleichung, wie sie oben angegeben ist, die Ergebnisse von Druckverlustmessungen darzustellen versuchen. Man würde keinen Einfluß von d_0/L ermitteln können. Insofern hätten die mangelhaften Überlegungen während der Dimensionsanalyse keine Folgen für das aus den Experimenten abgeleitete Ergebnis. Man muß aber beachten, daß jede unnötige Kennzahl das Versuchsprogramm erweitert und ungerechtfertigterweise verteuert. Das trifft auch dann zu, wenn man eine Kennzahl in den Kreis der Betrachtungen einschließt, deren Einfluß von untergeordneter Bedeutung ist. Bei sehr verwickelten Problemen wird man stets zwischen bedeutsamen und weniger bedeutsamen Einflußgrößen zu unterscheiden versuchen. Auch hier hilft nur die Einsicht in die physikalischen und chemischen Vorgänge.

4.3 Herleitung der Kennzahlen aus den Differentialgleichungen

Aus den Differentialgleichungen ergeben sich die Kennzahlen dadurch, daß man die veränderlichen Größen in eine dimensionslose Form bringt. Als Beispiel sei die ebene laminare Strömung mit den Ortskoordinaten x und y betrachtet und von den beiden Bewegungsgleichungen nur die für die x -Richtung herausgegriffen. Der aufgezwungenen Strömung sei eine freie Strömung überlagert. Dann gilt nach SCHLICHTING [4.2]:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) + g \beta (\vartheta_w - \vartheta_\infty). \quad (4.17)$$

Hierin bedeuten w_x und w_y die örtlichen Geschwindigkeiten in x - und y -Richtung, $\partial P/\partial x$ den Druckgradienten, ρ die Dichte und η die Viskosität des Fluids, ϑ_w und ϑ_∞ die als konstant angesehenen Temperaturen an der Wand und in großem Abstand davon, g die Schwerebeschleunigung und β den thermischen Ausdehnungskoeffizienten. Auf der linken Seite von Gl. (4.17) stehen die Trägheitsglieder und auf der rechten Seite in der gewählten Reihenfolge das Druckglied, das Reibungsglied und das Auftriebsglied. Die veränderlichen Größen sind w_x , w_y , x , y und der Druck P . Hierfür sind geeignete Bezugsgrößen zu wählen, die in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die damit gebildeten dimensionslosen Größen werden durch einen Stern gekennzeichnet:

Dimensionsbehaftete Größen	Dimensionsbehaftete Bezugsgrößen	Dimensionslose Größen
w_x	w_∞	$w_x^* = w_x/w_\infty$
w_y	w_∞	$w_y^* = w_y/w_\infty$
x	l	$x^* = x/l$
y	l	$y^* = y/l$
P	$\rho w_\infty^2/2$	$P^* = P/(\rho w_\infty^2/2)$

Als Bezugsgrößen wurden für die Geschwindigkeiten die in großem Wandabstand parallel zur Wand gerichtete Geschwindigkeit w_∞ gewählt, für die Ortskoordinaten eine charakteristische Länge l des Systems und für den Druck der Staudruck $\rho w_\infty^2/2$. Damit ergibt sich die Differentialgleichung in der folgenden dimensionslosen Schreibweise:

$$\begin{aligned} \frac{w_\infty^2}{l} w_x^* \frac{\partial w_x^*}{\partial x^*} + \frac{w_\infty^2}{l} w_y^* \frac{\partial w_x^*}{\partial y^*} &= - \frac{\rho w_\infty^2}{\rho l} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \\ &+ \frac{\eta w_\infty}{\rho l^2} \left(\frac{\partial^2 w_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w_x^*}{\partial y^{*2}} \right) + g \beta (\vartheta_w - \vartheta_\infty). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nach Division durch w_∞^2/l erhält man die endgültige Form:

$$\begin{aligned} w_x^* \frac{\partial w_x^*}{\partial x^*} + w_y^* \frac{\partial w_x^*}{\partial y^*} &= - \frac{\partial P^*}{\partial x^*} \\ &+ \frac{\eta}{w_\infty l \rho} \left(\frac{\partial^2 w_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w_x^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{g \beta (\vartheta_w - \vartheta_\infty) l}{w_\infty^2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Hierin treten zwei für die erzwungene und die freie Strömung maßgebende Kennzahlen auf, nämlich die Reynoldszahl Re und die Grashofzahl Gr . Vor dem Reibungsglied befindet sich die Reynoldszahl

$$\frac{w_\infty l \rho}{\eta} \equiv Re$$

und das Auftriebsglied ist das Verhältnis aus Grashofzahl Gr und dem Quadrat der Reynoldszahl:

$$\frac{g \beta (\vartheta_w - \vartheta_\infty) l}{w_\infty^2} = \frac{g \beta (\vartheta_w - \vartheta_\infty) l^3}{(\eta/\rho)^2} \left(\frac{\eta}{w_\infty l \rho} \right)^2 = \frac{Gr}{Re^2}.$$

Die allgemeine Lösung für die x -Komponente der Geschwindigkeit hat also die Form:

$$w_x^* = f \left(Re; Gr; \frac{\partial P^*}{\partial x^*}; x^*; y^* \right).$$

Diese Gleichung hätte sich ebenfalls durch Dimensionsanalyse finden lassen, der Arbeitsaufwand wäre jedoch erheblich größer gewesen. Ferner kann man aus der obigen Rechnung unmittelbar erkennen, daß das Auftriebsglied – und somit der Einfluß der freien Konvektion – verschwindet, wenn $Gr \ll Re^2$ ist. Dieses Ergebnis hätte die Dimensionsanalyse nicht liefern können. Dafür geht die Dimensionsanalyse auch von einer unvollständigeren Kenntnis des physikalischen Geschehens aus.

An Hand der dimensionslosen Differentialgleichungen läßt sich ferner am deutlichsten erkennen, daß man die Kennzahlen als Maßstabsfaktoren auffassen kann. Die mit den Kennzahlen ausgedrückten Lösungen gelten sowohl für den betrach-

teten Vorgang in großen als auch in kleinen Anlagen. Es sind keine «Vergrößerungsfaktoren» erforderlich, wenn man die durch Versuche an einer kleinen Anlage gewonnenen Ergebnisse auf große Anlagen übertragen will. Für Rohre mit einem Durchmesser von 1 mm und 1 m gelten die gleichen Widerstandsgesetze, wenn nur die Strömungszustände in beiden Rohren übereinstimmen. Diese Bedingung wird jedoch häufig übersehen. Die Strömung in weiten und engen Rohren unterscheiden sich sehr oft von einander. In sehr engen Rohren ist es unter normalen Bedingungen z. B. zulässig, die der erzwungenen Strömung überlagerte freie Strömung zu vernachlässigen. Das muß aber für sehr weite Rohre keineswegs mehr zutreffen. Denn die Grashofzahl ändert sich mit der dritten Potenz und das Quadrat der Reynoldszahl nur mit der zweiten Potenz des Durchmessers. Das heißt also, daß die Grashofzahl mit wechselndem Durchmesser sehr viel stärker ansteigt als das Quadrat der Reynoldszahl. Es sind also keine «Vergrößerungsfaktoren» erforderlich, sondern Gesetze für die Behandlung überlagerter erzwungener und freier Strömung.

Schrifttum

- [4.1] ● P. GRASSMANN, *Physikalische Grundlagen der Verfahrenstechnik*, 2. Auflage, Sauerländer, Aarau/Frankfurt am Main 1970
- [4.2] ● H. SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie*, 3. Auflage, Braun, Karlsruhe 1958

Teil II

Bewegung von Partikeln und Partikelschwärmen

5	Bewegung starrer Partikeln	196
6	Bildung und Bewegung von Blasen und Tropfen	272
7	Bewegung von Partikelschwärmen	353

5 Bewegung starrer Partikeln

Von der Bewegung einer Partikel oder eines Teilchens wird im Gegensatz zur Bewegung eines Partikelschwarms immer dann gesprochen, wenn die Bewegung einer einzelnen Partikel betrachtet wird, die ungestört von sonst noch vorhandenen Partikeln erfolgt. Als starr werden Partikel bezeichnet, wenn ihre Grenzfläche zur Umgebung während der Bewegung nicht verschoben bzw. verformt wird oder die Verschiebung bzw. Verformung keinen merklichen Einfluß auf die Bewegung hat. Starre Teilchen können daher nicht nur Festkörper sein, sondern unter bestimmten Bedingungen auch Flüssigkeitstropfen und Gasblasen. Derartige Partikeln treten überall in der Umgebung des Menschen auf, beispielsweise als Nebel- und Staubteilchen in der Atmosphäre, als mit großem technischem Aufwand erzeugtes feinkörniges Industrieprodukt oder auch als Raumfahrzeuge. Abgesehen von den Raumfahrzeugen treten die Teilchen fast immer in einer großen Zahl je Volumeinheit auf. Grundlage für das Studium ihrer Bewegungsformen ist die Bewegung starrer Einzelteilchen. Von den vielen technisch bedeutsamen Formen ist die Kugelform die einfachste und bildet die Grundlage für Untersuchungen an Partikeln anderer Form. Alle Teilchen setzen ihrer Bewegung einen Widerstand entgegen, den zu bestimmen eine der wichtigsten Aufgaben der Forschung ist. Erst nachdem die für den Widerstand maßgebenden Gesetze bekannt sind, kann die Bewegung selbst untersucht werden.

5.1 Widerstandsgesetze für Kugeln

Der Widerstand von Kugeln hängt von so vielen Einflußgrößen ab, daß es bislang noch nicht gelungen ist, ein allgemeingültiges Widerstandsgesetz aufzustellen. Man muß sich daher stets mit Gesetzen begnügen, die nur für bestimmte, genau zu beachtende Bedingungen gelten.

5.11 Widerstandsgesetz für Kugeln in schwach turbulenter Strömung

Den Widerstand einer Kugel kann man sowohl für den Fall messen, daß die Kugel ruht und das umgebende Fluid strömt oder daß sich das umgebende Fluid im Zustand der Ruhe befindet und die Kugel die Bewegung ausführt. Das erste Meßverfahren wird vornehmlich im Bereich hoher Reynoldszahlen und das zweite im Bereich niedriger Reynoldszahlen angewendet. Bei Messungen im Bereich hoher Reynoldszahlen ist es kaum zu vermeiden, daß die Strömung turbulent ist. Wie sich im Verlauf jahrzehntelanger Untersuchungen herausgestellt hat, beeinflußt der Turbulenzgrad des Fluids den Kugelwiderstand in ganz entscheidender Weise, ohne daß aber schon eine befriedigende Aufklärung erzielt werden konnte. Als verbindliche Grundlage bedurfte es daher auch eines Gesetzes,

welches durch die Turbulenz noch nicht oder nur unwesentlich beeinflußt ist. Da eine vollständige Ausschaltung der Turbulenz im Bereich hoher Reynoldszahlen nicht möglich ist, kann man im Grenzfall also nur ein Widerstandsgesetz für Kugeln in schwach turbulenten Strömungen experimentell ermitteln. Ferner soll vorausgesetzt werden, daß die Kugeloberfläche glatt und das umgebende Medium unendlich ausgedehnt ist. Mit der letzten Voraussetzung werden Einflüsse ausgeschaltet, die von einer in endlichem Abstand von der Kugel befindlichen Wand ausgehen.

Die dimensionslose Darstellung des Kugelwiderstandes mittels des Widerstandsbeiwertes

$$\zeta \equiv \frac{W/F}{\rho w_r^2/2} \quad (5.1)$$

und der Reynoldszahl

$$Re \equiv \frac{w_r d_p \rho}{\eta} \quad (5.2)$$

wurde von RAYLEIGH vorgeschlagen. Es bedeuten W Widerstand und F größte Querschnittsfläche der Kugel, d_p Kugeldurchmesser, ρ Dichte und η Viskosität des umgebenden Fluids und w_r Relativgeschwindigkeit zwischen Kugel und Fluid. Im Sonderfall der ruhenden Kugel ist w_r die Anströmgeschwindigkeit. Ruht hingegen das umgebende Medium und wird die Bewegung der Kugel allein durch Schwer- und Auftriebskräfte ausgelöst, dann ist w_r entweder gleich der stationären Sinkgeschwindigkeit oder gleich der stationären Auftriebsgeschwindigkeit. Im Rahmen der unmittelbar folgenden Betrachtungen soll die gleichzeitige Bewegung von Umgebung und Kugel auf jeden Fall ausgeschlossen sein, da bei derartigen Bewegungsvorgängen eine starke Turbulenz fast unvermeidbar ist.

Der Widerstand W der Kugel setzt sich im allgemeinen aus Reibungs- und Druckwiderstand zusammen. Der Reibungswiderstand tritt an der Kugeloberfläche, insbesondere im Bereich der anliegenden Strömung auf der Kugelvorderseite, auf. Der Druckwiderstand äußert sich in einer Wirbelschleppe hinter der Kugel. *Bild 5.1* zeigt die mit Aluminiumfitter sichtbar gemachte Strömung um einen quer angeströmten Zylinder. In den grundsätzlichen Eigenschaften bestehen zwischen der Umströmung eines Zylinders und einer Kugel keine Unterschiede. Auf der Vorderseite der Kugel liegt die Strömung an, und es bildet sich eine Grenzschicht aus, in welcher die Geschwindigkeit vom Wert Null an der Kugeloberfläche bis auf den Wert der Anströmgeschwindigkeit ansteigt. Kurz hinter dem Kugeläquator beginnt sich die Strömung von der Kugeloberfläche abzulösen, und es bildet sich eine Wirbelschleppe aus. Im Vergleich zum gesamten Widerstand nimmt der Reibungswiderstand mit zunehmender Reynoldszahl stetig ab. Im Bereich sehr kleiner Reynoldszahlen, also im Bereich der schleichenden Strömung, macht der Reibungswiderstand zwei Drittel und der Druckwiderstand ein Drittel des gesamten Widerstandes aus. Im Bereich sehr hoher Reynoldszahlen, in dem fast allein die Trägheitskräfte für die Bewegung maßgebend sind, über-

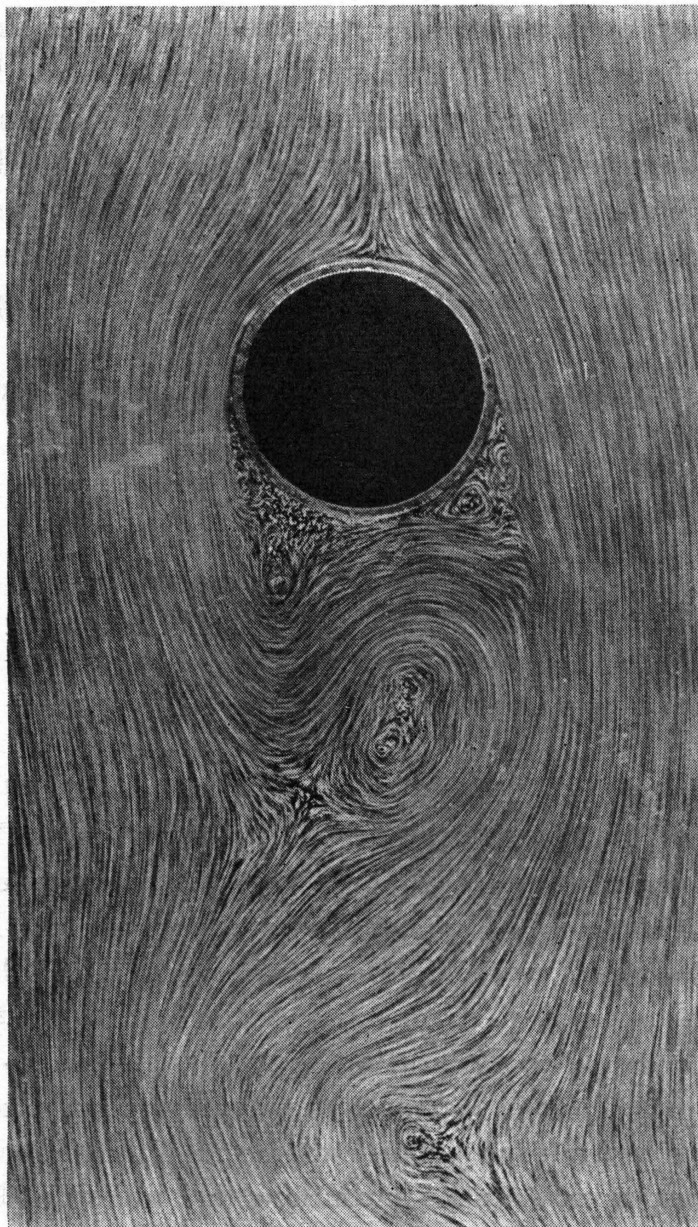


Bild 5.1. Photographische Aufnahme von der Umströmung eines Zylinders

wiegt der Druckwiderstand so stark, daß der Reibungsanteil vernachlässigt werden kann.

Für die Bewegung im Bereich der schleichenden Strömung dürfen die Trägheitsglieder in der Bewegungsgleichung gestrichen werden. Mit dieser Bedingung berechnete STOKES den Widerstand W der Kugel, womit sich für den Widerstandsbeiwert folgende Beziehung ergibt:

$$\zeta = \frac{24}{Re}. \quad (5.3)$$

Dieses ist das Stokessche Gesetz. Sein Gültigkeitsbereich, $Re \leq 0,1$, wird der Stokessche Bereich genannt. Später hat OSEEN [5.1] die Berechnung des Widerstandes unter Berücksichtigung linearisierter Trägheitsglieder nochmals vorgenommen. Das Ergebnis ist das Oseensche Widerstandsgesetz:

$$\zeta = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right). \quad (5.4)$$

Für größere Werte der Reynoldszahl liefert die Oseensche Gleichung etwas größere Widerstandsbeiwerte als die Stokessche Gleichung. Der Gültigkeitsbereich von Gl.(5.4) erstreckt sich bis etwa $Re = 1$. Eine vollständige Lösung der von OSEEN angegebenen Gleichung gelang GOLDSTEIN [5.2]:

$$\zeta = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re - \frac{19}{1280} Re^2 + \frac{71}{20480} Re^3 - \dots \right). \quad (5.5)$$

Durch Hinzunahme der höheren Glieder wird die Widerstandszahl also wieder etwas erniedrigt. Auch für die Goldsteinsche Gleichung gilt als obere Gültigkeitsgrenze etwa $Re = 1$. Für höhere Werte der Reynoldszahl ist es bislang nicht gelungen, den Widerstand zu berechnen. Man war also auf Experimente angewiesen.

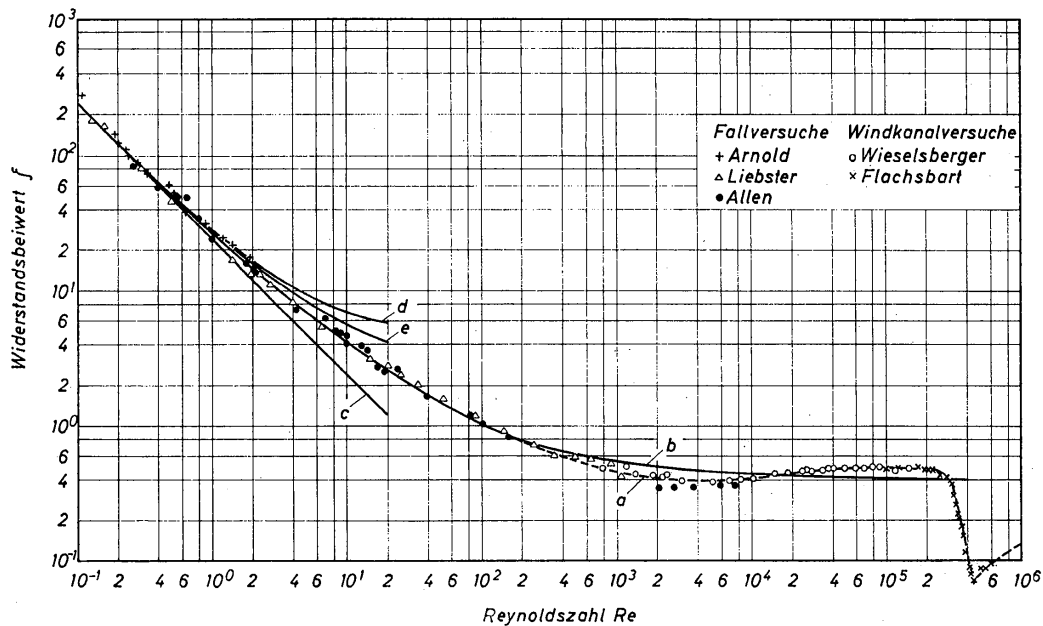


Bild 5.2. Widerstandsbeiwert für Kugeln mit glatter Oberfläche in schwach turbulenter Strömung; Kurve a Ausgleichskurve durch Meßwerte, Kurve b nach Gl.(5.7), Kurve c nach Gl.(5.3), Kurve d nach Gl.(5.4) und Kurve e nach Gl.(5.5)

In Bild 5.2 sind die Meßergebnisse mehrerer Experimentatoren [5.3 bis 5.7] mittels des Widerstandsbeiwertes und der Reynoldszahl dargestellt und durch Kurve a ausgeglichen. Unterhalb $Re = 10^2$ fällt Kurve a mit Kurve b zusammen und nähert sich mit kleiner werdender Reynoldszahl den Kurven c, d und e, die nach den theoretischen Gleichungen (5.3), (5.4) und (5.5) von STOKES, OSEEN und GOLDSTEIN berechnet wurden. Oberhalb $Re = 1$ beginnen die Meßwerte in zunehmendem Maße von den Kurven c, d und e abzuweichen. Die Ausgleichskurve a sinkt zunächst stetig ab, durchläuft ein schwach ausgebildetes Minimum bei $Re \approx 4 \cdot 10^3$, steigt wieder geringfügig an und fällt dann bei $Re = 3 \cdot 10^5$ sehr steil von $\zeta = 0,4$ bis auf $\zeta \approx 0,07$ ab. Dieser plötzliche Abfall wird darauf zurückgeführt, daß die auf der Vorderseite der Kugel vorhandene Grenzschichtströmung vom laminaren in den turbulenten Zustand übergeht. Auf Grund des verstärkten Impulstransportes ist die turbulente Grenzschicht in verstärktem Maße in der Lage, gegen den auf der Kugelrückseite vorhandenen Druckanstieg anzulaufen.

Sie löst sich daher erst später von der Kugeloberfläche ab als die laminare Grenzschicht, wodurch die Ausdehnung des Wirbelgebietes hinter der Kugel verkleinert wird. Nach Durchlaufen des Minimums steigt der Widerstandsbeiwert mit zunehmender Reynoldszahl wieder an. Als Wert der kritischen Zahl wird üblicherweise derjenige genommen, bei der $\zeta = 0,3$ ist. Die kritische Reynoldszahl ist $Re_{kr} = 3 \cdot 10^5$.

Im hohen unterkritischen Bereich, etwa zwischen $Re = 10^3$ und $Re = 10^5$, ist der Widerstandsbeiwert nahezu konstant. Da die theoretischen Überlegungen von NEWTON über den Kugelwiderstand auf einen konstanten Beiwert führten, nennt man diesen Bereich den Newtonschen. Mit guter Näherung gilt in diesem Bereich

$$\zeta = 0,44. \quad (5.6)$$

Hiernach ist der Widerstand W proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit. Im unterkritischen Bereich, $Re \leq Re_{kr}$, lassen sich die Meßwerte mit einer für viele technische Zwecke ausreichenden Genauigkeit durch das von KASKAS [5.8] aufgestellte Näherungsgesetz

$$\zeta = \frac{24}{Re} + \frac{4}{Re^{1/2}} + 0,4 \quad (5.7)$$

ausgleichen, das in *Bild 5.2* durch Kurve *b* wiedergegeben wird. Dieses sehr bequem auszuwertende Gesetz geht für den Bereich sehr kleiner Reynoldszahlen in das theoretische Gesetz nach STOKES mit $\zeta = 24/Re$ über. Etwas größere Abweichungen von Kurve *a*, die die Meßwerte sehr genau ausgleicht, treten nur in kleinen Bereichen der Reynoldszahl auf. Experimentell überprüft ist das Widerstandsgesetz zwischen $Re = 10^{-4}$ und 10^{+6} .

TOROBIN und GAUVIN [5.9] haben in fünf Berichten einen umfassenden Überblick über alle Probleme des Kugelwiderstandes gegeben und dabei 478 Arbeiten kritisch ausgewertet. Hiernach sowie auf Grund einer weiteren zusammenfassenden Darstellung von GARNER, JENSON und KEYEY [5.10] ergibt sich folgendes Bild von der Strömung um die Kugel in verschiedenen Bereichen der Reynoldszahl: Innerhalb des Stokesschen Bereiches ist das Strömungsfeld auf Vorder- und Rückseite der Kugel gleich, wenn durch den Kugeläquator die Symmetrieffläche gelegt wird. Die ersten Anzeichen beginnender Ablösung der Strömung von der Kugeloberfläche treten in der Nähe von $Re = 1$ auf. Damit wird ein Übergangsbereich eingeleitet, der sich bis zu $Re = 2 \cdot 10^4$ erstreckt. Innerhalb dieses Bereiches bildet sich auf der Rückseite der Kugel zunächst ein stationärer Ringwirbel aus, der bei $Re = 500$ in den instationären Zustand übergeht und den Aufbau der Wirbelschleppe vorbereitet. Mit zunehmender Reynoldszahl verlagert sich der Ablösungspunkt stromaufwärts und erreicht bei $Re = 450$ einen vom vorderen Staupunkt gemessenen Winkel von 104° . Weiterhin ändert sich im Verlauf des Übergangsbereiches das Verhältnis aus Reibungs- und Druckwiderstand. Unterhalb $Re = 250$ überwiegt der Reibungswiderstand und oberhalb $Re = 250$ der Druckwiderstand. Das Auftreten des stationären Ringwirbels und der Wirbelschleppe ist keineswegs an Turbulenz der Außenströmung gebunden. Die Wirbel

treten auch dann auf, wenn die Außenströmung laminar ist. Bei $Re = 2 \cdot 10^4$ wird der Aufbau der Wirbelschlepe als abgeschlossen betrachtet. Der Widerstandsbeiwert nimmt einen nahezu konstanten Wert an. Die nächste Änderung im Strömungsfeld tritt dann erst bei der kritischen Reynoldszahl auf, bei der innerhalb der auf der Kugelvorderseite vorhandenen laminaren Grenzschicht der Umschlag in den turbulenten Zustand erfolgt. Allen bisherigen Bemühungen, den zwischen dem Stokesschen und Newtonschen Bereich liegenden Übergangsbereich theoretisch zu begründen, war nur ein geringer Erfolg beschieden. Das ist um so bedauerlicher, als bei vielen technischen Prozessen die Bewegungsvorgänge von Kugeln und anderen Teilchen gerade in diesem Bereich ablaufen. In neuerer Zeit bemüht man sich, die bereits früher bei Fallversuchen beobachtete pendelnde Bewegung von Kugeln gründlicher zu untersuchen. Hingewiesen sei auf Arbeiten von ISAAKYAN und GASPARYAN [5.11], JENSON [5.12], RUBINOW und KELLER [5.13] sowie von SATHAPATHY und SMITH [5.14]. Die erstgenannten Forscher konnten nachweisen, daß die Pendelbewegung auch im Stokesschen Bereich bereits vorhanden ist. Aus einer großen Zahl von photographischen Aufnahmen vermochten sie eine Beziehung für die Länge l der Transversalwellen zu entwickeln. In dimensionsloser Form ergab sich:

$$\frac{l}{d_p} = 8,35 Re^{0,1}. \quad (5.8)$$

Die Reynoldszahl lag bei den Versuchen zwischen 0,0108 und 1,390. Für $Re = 0,1$ ergibt sich somit $l/d_p = 6,63$, so daß für einen Kugeldurchmesser d_p von 0,2 mm die Wellenlänge $l = 1,326$ mm ist. Da die Amplitude klein im Vergleich zur Wellenlänge ist, wird man derartige Schwingungen ohne optische oder sonstige Hilfsmittel kaum beobachten können. Sie deuten darauf hin, daß die bislang als gültig angesehene Vorstellung, wonach oszillierende Bewegungen nur außerhalb des Stokesschen Bereiches auftreten, nicht aufrechterhalten werden kann. Weitere Untersuchungen sind erforderlich und werden sicher dazu führen, daß noch manche als gesichert angesehene Vorstellung aufgegeben werden muß. Andererseits lassen die in *Bild 5.2* dargestellten Versuchswerte aber erkennen, daß das Stokessche Widerstandsgesetz für technische Zwecke unterhalb $Re = 0,1$ weiterhin angewendet werden kann.

Für technische Probleme wird es wahrscheinlich bedeutsamer sein, daß ein anderer Einfluß auf den Widerstandsbeiwert beachtet wird. Fallversuche in Flüssigkeiten werden immer in Behältern mit endlichen Abmessungen durchgeführt. Man muß dann erwarten, daß die Behälterwände die Strömung um die Kugel beeinflussen. LADENBURG [5.15] hat den Widerstand einer Kugel, die sich in der Längsachse eines Kreiszyinders mit dem Durchmesser d_z bewegt, auf der Grundlage der Stokesschen Gleichung berechnet. Hieraus folgt das Widerstandsgesetz nach Berichtigung durch FAXÉN [5.16] zu

$$\zeta = \frac{24}{Re} \left(1 + 2,1 \frac{d_p}{d_z} \right). \quad (5.9)$$

Zur Ausschaltung des Wandeinflusses bedarf es sehr kleiner Werte für das Durchmesser Verhältnis d_p/d_z . FAXÉN berechnete den Kugelwiderstand für die Bewegung in der Achse eines Zylinders mit Kreisquerschnitt und zwischen zwei parallelen Platten auf der Grundlage der Oseenschen Gleichung.

Für die Bewegung in stark verdünnten Gasen sind die bisher angegebenen und für die Kontinuumsströmung hergeleiteten Widerstandsgesetze nicht mehr gültig. Mit dem von CUNNINGHAM [5.17] berechneten Widerstand einer Kugel läßt sich folgendes Widerstandsgesetz aufstellen:

$$\zeta = \varphi \frac{24}{Re}. \quad (5.10)$$

Hierin ist φ der Cunninghamsche Korrekturfaktor:

$$\varphi = \frac{1}{1 + 3,26 Kn}. \quad (5.11)$$

$Kn \equiv \lambda/d_p$ ist die Knudsenzahl mit λ als der mittleren freien Weglänge, die nach Gl. (1.95) umgekehrt proportional dem Druck ist. Mit abnehmendem Druck wird somit die Widerstandszahl kleiner. Über eine noch genauere Berechnung des Kugelwiderstandes in verdünnten Gasen haben BAKER und CHARWAT [5.18] berichtet.

5.12 Einfluß des Turbulenzgrades und kritische Reynoldszahl

Langjährige Forschungsarbeiten waren erforderlich, um Unstimmigkeiten in den in verschiedener Laboratorien der Welt gemessenen Kugelwiderständen zu klären. Sieht man von Randeinflüssen ab, so hat sich als bedeutsamste Ursache für die Unstimmigkeiten der Turbulenzgrad herausgestellt, der für die verwendeten Windkanäle sehr verschiedene Werte hatte. Man mußte erst lernen, turbulenzarme Windkanäle zu bauen. Der erste Kanal, der diesen Anforderungen entsprach, wurde in Göttingen errichtet. Die darin von WIESELSBERGER [5.6] durchgeführten Widerstandsmessungen an Kugeln waren für das im vorangegangenen Abschnitt behandelte Widerstandsgesetz von entscheidender Bedeutung. Damit waren auch die Voraussetzungen geschaffen, den Einfluß des Turbulenzgrades auf den Kugelwiderstand zu untersuchen.

Der Turbulenzgrad ist definiert durch

$$Tu \equiv \sqrt{\frac{\overline{w'^2}}{w_r^2}}, \quad (5.12)$$

wobei $\overline{w'^2}$ der Mittelwert des Quadrates der in Anströmrichtung gemessenen Schwankungsgeschwindigkeit ist und w_r die Relativgeschwindigkeit zwischen der Kugel und dem umgebenden Medium. Bild 5.3 zeigt die von TOROBIN und GAUVIN [5.19] mitgeteilten Ergebnisse für relativ bewegte Kugeln, verglichen mit denen von HOERNER [5.20] für ruhende Kugeln. Von relativ bewegten Kugeln spricht man, wenn sich Kugel und Umgebung gleichzeitig bewegen. Außerdem ist bei

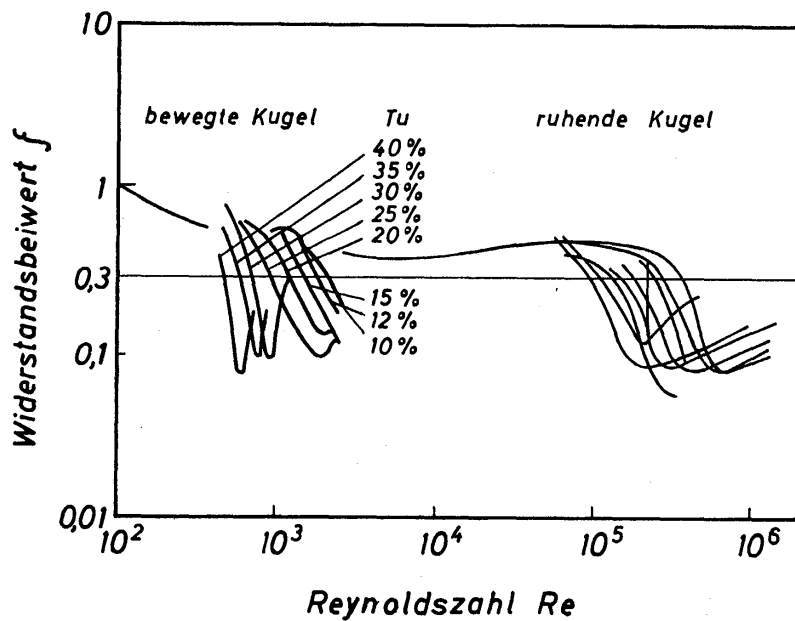


Bild 5.3
Einfluß des Turbulenzgrades
auf den Widerstand ruhender
und bewegter Kugeln nach
TOROBIN und GAUVIN [5.19]

den hier betrachteten Untersuchungen der Strömungszustand der Umgebung turbulent. Obgleich HOERNER die bei den Versuchen eingestellten Turbulenzgrade nicht angab, darf man aus dem Bild den Schluß ziehen, daß sowohl bei ruhender als auch bei bewegter Kugel die kritische Reynoldszahl mit steigendem Turbulenzgrad abnimmt. Aussagen über den Widerstand außerhalb der unmittelbaren Umgebung des Umschlaggebietes lassen sich aber nicht mit Sicherheit machen. Die Versuchsergebnisse von HOERNER werden jedoch stets so gedeutet, daß der Turbulenzgrad zwar die kritische Reynoldszahl verändert, nicht aber den Widerstand vor der Umschlagstelle. Damit war für lange Zeit das Interesse allein noch auf eine genaue Bestimmung der kritischen Reynoldszahl gerichtet.

Die Ergebnisse von TOROBIN und GAUVIN geben einen schwachen Hinweis dafür, daß der Widerstand relativ bewegter Kugeln im unterkritischen Bereich etwas größer sein kann als für ruhende. Endgültige Aussagen sind aber nicht möglich. Es hat sich als außerordentlich schwierig herausgestellt, Widerstandsmessungen an relativ bewegten Kugeln durchzuführen, insbesondere dann, wenn sich das umgebende Medium im turbulenten Strömungszustand befindet [5.19]. Offensichtlich bedarf es zunächst noch einer erheblichen Verfeinerung der Meßmethoden. Ferner muß eindeutig zwischen dem Widerstand von einzelnen Kugeln und Kugelschwärmen unterschieden werden, was bislang noch nicht genügend beachtet wurde. Die bisher vorliegenden Versuchsergebnisse sind widerspruchsvoll. Beispielsweise berichten BURKE und PLUMMER [5.21] sowie WILHELM und VALENTINE [5.22] von einer ganz erheblichen Erhöhung des Widerstandes relativ bewegter Kugeln und andere Forscher von einer ebenso erheblichen Erniedrigung.

Einigermaßen gesicherte Aussagen lassen sich zur Zeit nur über den Einfluß des Turbulenzgrades auf die kritische Reynoldszahl machen. In Bild 5.4 sind für ruhende Kugeln die von DRYDEN und Mitarbeitern [5.23 und 5.24] mitgeteilten Ergebnisse und für relativ bewegte Kugeln die von TOROBIN und GAUVIN [5.19] zusammengestellt. Die Meßwerte für ruhende Kugeln wurden durch Kurve *a* und die für relativ bewegte Kugeln durch Kurve *b* ausgeglichen. Bei den Versuchen mit ruhenden Kugeln ändert sich der Turbulenzgrad etwa zwischen 0,006 und

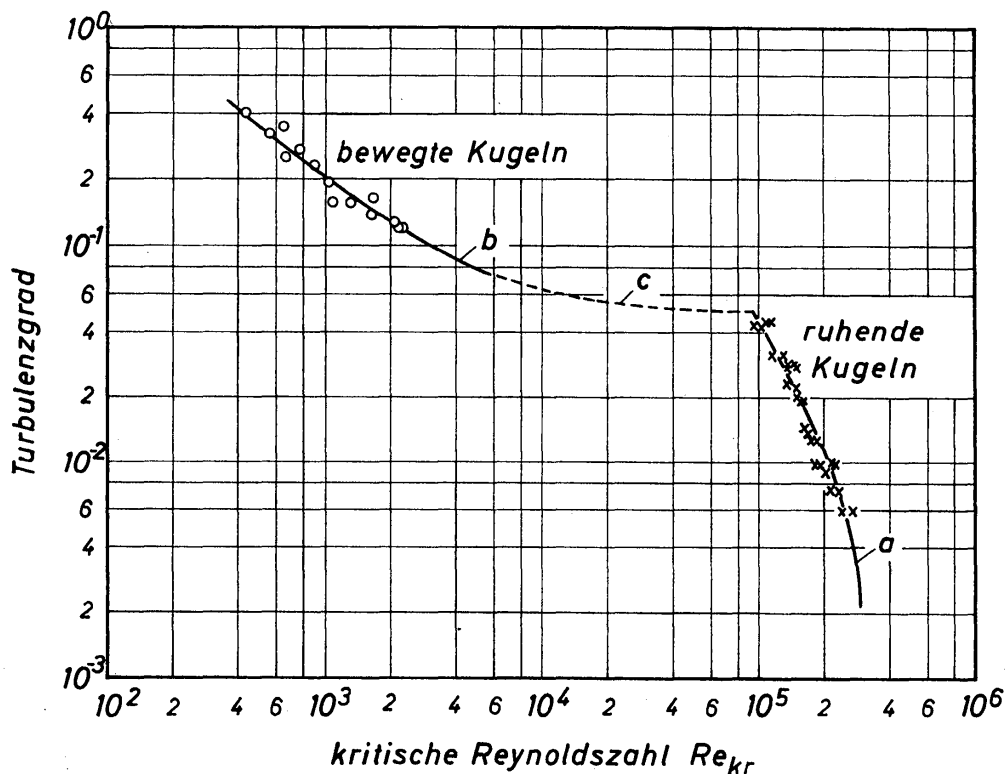


Bild 5.4. Einfluß des Turbulenzgrades auf die kritische Reynoldszahl für ruhende und bewegte Kugeln

0,05, wobei die kritische Reynoldszahl von etwa $2,6 \cdot 10^5$ auf $1 \cdot 10^5$ erniedrigt wurde. Die Meßwerte deuten darauf hin, daß eine noch weitergehende Erniedrigung des Turbulenzgrades keine merkliche Erhöhung der kritischen Reynoldszahl mehr zur Folge haben wird. Ob sich durch Erhöhung des Turbulenzgrades über 0,05 hinaus die kritische Reynoldszahl für ruhende Kugeln noch weiter erniedrigen läßt, kann man vermuten, aber nicht mit Sicherheit voraussagen.

Einen zunächst recht eigenartigen Verlauf zeigen die Meßwerte für die relativ bewegten Kugeln. Der Turbulenzgrad änderte sich bei diesen Versuchen von etwa 0,12 bis 0,4 und die kritische Zahl von etwa $2,3 \cdot 10^3$ bis $4 \cdot 10^2$. Die sehr großen Werte des Turbulenzgrades ergeben sich dadurch, daß gemäß Gl.(5.12) die an die Geschwindigkeit des umgebenden Mediums gebundene Schwankungsgeschwindigkeit auf die Relativgeschwindigkeit bezogen ist. Die Relativgeschwindigkeit beträgt aber nur einen Bruchteil der Geschwindigkeit des umgebenden Mediums. Bei relativ bewegten Kugeln ändert sich die kritische Reynoldszahl erheblich stärker mit dem Turbulenzgrad als bei ruhenden Kugeln. Dieses Ergebnis ist wahrscheinlich aber auf die Versuchsbedingungen zurückzuführen. Bei ruhenden Kugeln lag Re_{kr} in der Größenordnung von 10^5 und bei den bewegten von 10^3 . Der Unterschied beträgt also zwei Zehnerpotenzen. Für die relativ bewegten Kugeln hat sich offensichtlich vor dem Umschlag die Wirbelschlepe noch nicht voll ausgebildet. Je geringer deren Ausbildung ist, desto höher muß offensichtlich der Turbulenzgrad sein, damit ein Umschlag herbeigeführt wird. Mit zunehmender Reynoldszahl hat sich die Wirbelschlepe weitergehend ausgebildet, und ein niedrigerer Turbulenzgrad reicht bereits zum Umschlag aus. Nach vollständiger Ausbildung der Wirbelschlepe, was bei etwa $Re = 10^4$ der

Fall ist, genügen bereits verhältnismäßig geringe Änderungen im Turbulenzgrad, um erhebliche Änderungen der kritischen Zahl herbeizuführen. Kurve *c* gibt diese Tendenz wieder, die jedoch rein hypothetischer Natur ist, was ausdrücklich betont werden soll.

5.13 Einflüsse von Beschleunigung, Rotation und Oberflächenrauigkeit

Bei den meisten der technisch interessanten Vorgänge mit Partikelbewegungen treten Zeitabschnitte mit Beschleunigung und Verzögerung auf. Bei stark aufgelockerten Wirbelschichten wird man beispielsweise damit rechnen müssen, daß die Teilchenbewegung fast ausschließlich im Zustand der Beschleunigung und Verzögerung erfolgt. Es wäre also für die genaue Beschreibung von Bewegungsvorgängen sehr wichtig, zu erfahren, in welcher Weise die Widerstandszahl durch die Beschleunigung beeinflusst wird.

TOROBIN und GAUVIN [5.9] haben das bekannte Schrifttum kritisch gesichtet und festgestellt, daß sich noch keine eindeutigen Aussagen über den Einfluß der Beschleunigung, sei sie konstant oder zeitlich veränderlich, auf den Widerstandsbeiwert machen lassen. Die von diesen Berichtern umgerechneten Meßwerte von LUNNON sind in *Bild 5.5* wiedergegeben. Danach kann die mit *b* bezeichnete Beschleunigung den Widerstandsbeiwert ganz erheblich vergrößern. Zu ähnlichen Ergebnissen sind auch andere Experimentatoren gekommen. Andererseits sind aber auch Untersuchungen mit entgegengesetztem Ergebnis bekanntgeworden. Es wird noch einen großen Aufwand erfordern, um über den Einfluß von Beschleunigung und Verzögerung auch nur in einer für technische Anwendungsfälle ausreichenden Form Auskunft zu erhalten.

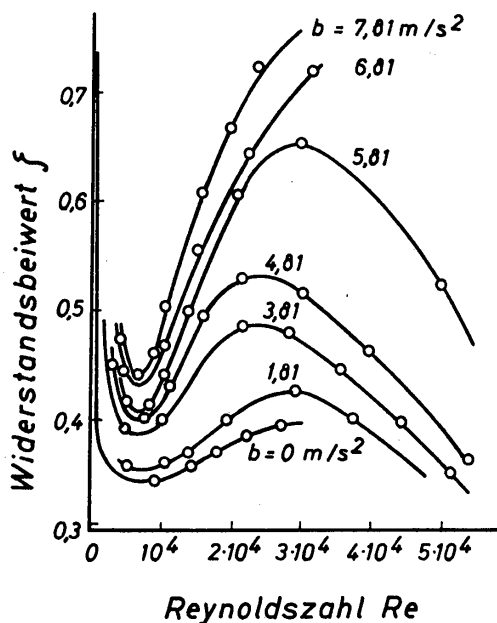


Bild 5.5. Einfluß der Beschleunigung auf den Widerstandsbeiwert von Kugeln

Bild 5.5. Einfluß der Beschleunigung auf den Widerstandsbeiwert von Kugeln

Weitgehende Übereinstimmung in den Ergebnissen verschiedener Experimentatoren fanden TOROBIN und GAUVIN bezüglich des Einflusses der Rotation auf den Widerstandsbeiwert. MACCOLL [5.25] stellte beispielsweise im Bereich von $Re = 10^5$ fest, daß sich der Widerstandsbeiwert mit zunehmender Umfangsgeschwindigkeit der Kugel nur wenig ändert. Für viele technische Zwecke wird man daher den Rotationseinfluß vernachlässigen dürfen. Im Gegensatz dazu hat sich bei Zylindern aber ein recht starker Einfluß der Rotation auf den Widerstand bei hohen Reynoldszahlen ergeben. Theoretische Untersuchungen lassen erkennen, daß auch im Bereich sehr niedriger Reynoldszahlen ein Rotations-einfluß kaum auftritt [5.9].

Unterhalb der kritischen Reynoldszahl übt die Oberflächenrauigkeit nur einen für technische Zwecke belanglosen Einfluß auf den Widerstandsbeiwert von Kugeln aus. Bedeutsam ist jedoch, daß durch Erhöhen der Oberflächenrauigkeit die kritische Zahl erniedrigt werden kann, wie FLACHSBART [5.7] und HOERNER [5.20] für Kugeln und FAGE und WARSOP [5.26] für Zylinder nachweisen konnten. Wenn die Rauigkeitshöhe und der Kugel- oder Zylinderradius von gleicher Größenordnung sind, dann sind die Abweichungen des Körpers von der Kugelform bereits so groß, daß man die Vorstellung von einer rauhen Kugel aufgeben und von einem unregelmäßig geformten Körper sprechen muß.

5.2 Widerstandsgesetze für nicht kugelförmige Körper

Der Widerstand von Partikeln, deren Form von der einer Kugel abweicht, kann in starkem Maße von der Orientierung der Partikel zur Strömungsrichtung abhängen. Man wird daher zunächst fordern, daß der Widerstand solcher Teilchen nur im Zustand der Bewegung gemessen werden darf, weil sich dann in jedem Falle gerade die «richtige Orientierung» ergibt. Man wird den Widerstand also vornehmlich durch Sinkversuche bestimmen, bei denen man das Absinken der Teilchen in einem sehr großen Behälter beobachtet. Daß dieses Meßverfahren aber keineswegs über alle vorkommenden Orientierungsmöglichkeiten Aufschluß gibt, wird am Beispiel des pneumatischen und hydraulischen Transportes unmittelbar verständlich. Jeder Körper, ganz gleich ob kugelförmig oder nicht, wird nach schrägem Auftreffen auf die Rohrwand mit einer zunächst anderen Orientierung seine Flugbahn fortsetzen als vor dem Aufprall. Vor und nach dem Aufprall müssen sich dann zwangsläufig andere Beiwerte für seinen Bewegungswiderstand ergeben. Erst nach längerem Flugweg wird sich wieder die normale Orientierung einstellen. Streng genommen heißt das, daß man für jeden nicht kugelförmigen Körper den Widerstand für alle denkbaren Orientierungen messen müßte. Da ferner zu erwarten ist, daß bei nicht kugelförmigen Körpern die Rotation einen größeren Einfluß auf den Widerstand ausübt als bei Kugeln, wäre das erforderliche Meßprogramm so umfangreich, daß es mit erträglichem Aufwand nicht mehr durchgeführt werden könnte. Man wird sich daher im allgemeinen darauf beschränken müssen, den Widerstand für die wichtigsten Orientierungen, insbesondere für diejenige, die sich während des freien Falls einstellt, zu messen. Aber auch dann bereitet die Messung noch genügend Schwierigkeiten, da die Falllinie eines nicht kugelförmigen Körpers stärkere Abweichungen von der geraden Linie aufweist. Die auch bei Kugeln auftretende Abweichung von der geraden Falllinie ist demgegenüber wesentlich geringer. Daraus folgt, daß die Widerstandsbeiwerte, ermittelt aus Fallversuchen, im allgemeinen Mittelwerte darstellen und das momentane Verhalten der Körper nicht richtig wiedergeben. Bei nicht kugelförmigen Teilchen gibt es also eine Reihe von zusätzlichen Einflußgrößen, die bei der Aufstellung von Widerstandsgesetzen zu berücksichtigen sind. Da ferner die Zahl der nicht kugelförmigen Körper theoretisch unendlich groß ist, bestünde leicht die Gefahr, daß sich die weiteren Ausführungen in einer reinen

Aufzählung von Widerstandsgesetzen für verschiedene Körperformen erschöpft. Um dieser Gefahr zu entgehen, sollen nur die wichtigsten Eigenschaften am Beispiel weniger Partikelformen erläutert werden.

Der Zylinder mit kreisförmiger Querschnittsfläche und die Kreisscheibe stellen zwei sehr extreme Körperformen dar, obgleich sie sich in geometrischer Hinsicht nur durch die Ausdehnung ihrer Längsachse unterscheiden. Der Kreiszyylinder kann als idealisierte Näherung für nadelförmige und die Kreisscheibe als idealisierte Näherung für stumpfe oder plattenförmige Körper angesehen werden.

5.21 Kreiszyylinder

Am gründlichsten ist bislang der senkrecht zu seiner Längsachse angeströmte Kreiszyylinder untersucht worden. Als Grundlage für alle weiteren Angaben soll zunächst die in *Bild 5.6* durch Kurve *a* dargestellte Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes von der Reynoldszahl für unendlich lange Kreiszyylinder, die sich in einer nach allen Raumkoordinaten unendlich ausgedehnten Umgebung befinden, betrachtet werden. Widerstandsbeiwert und Reynoldszahl sind durch die Gleichungen (5.1) und (5.2) definiert. Für *F* ist die durch die Zylinderlängsachse gelegte Querschnittsfläche und für *d_p* der Durchmesser des Zylinders zu nehmen.

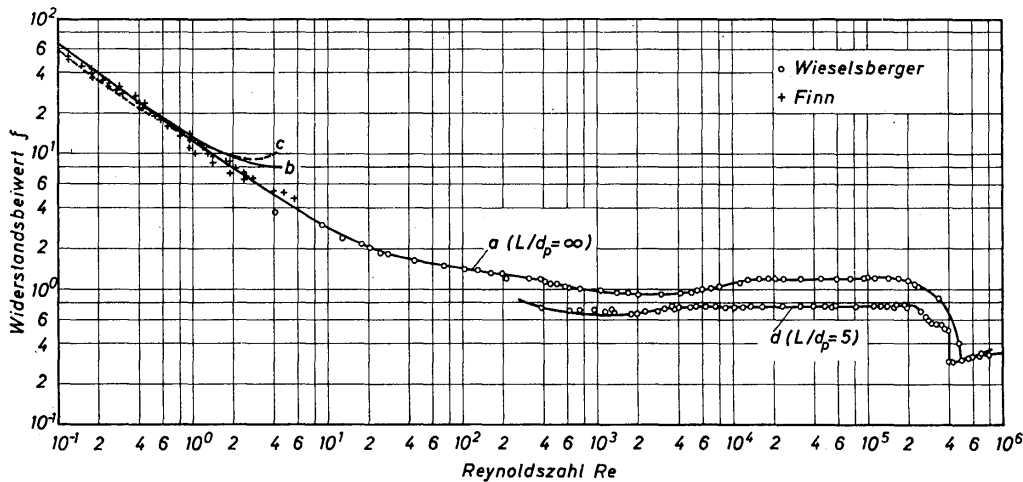


Bild 5.6. Widerstandsbeiwert für quer angeströmte Zylinder; Kurve *a* Ausgleichskurve durch Meßwerte für unendlich lange, ruhende Zylinder; Kurve *b* nach Gl. (5.13), Kurve *c* nach Gl. (5.15), Kurve *d* Ausgleichskurve durch Meßwerte für Zylinder mit $L/d_p = 5$

Die eingetragenen Meßwerte stammen von WIESELSBERGER [5.6] für den oberen Bereich der Reynoldszahl und von FINN [5.27] für den unteren Bereich der Reynoldszahl. Mit abnehmender Reynoldszahl nähert sich Kurve *a* der Kurve *b* an, die nach der theoretischen Gleichung von TOMOTIKA und AOI [5.28] berechnet wurde:

$$\zeta = \frac{9\pi}{Re \cdot A} \left[1 - \frac{1}{A} \left(A^2 - \frac{A}{2} + \frac{5}{16} \right) \frac{Re^2}{32} \right]. \tag{5.13}$$

Hierin ist

$$A = 2,0022 - \ln Re. \tag{5.14}$$

Zum Vergleich ist ferner noch Kurve *c* eingezeichnet, welche die von LAMB [5.29] aufgestellte Gleichung

$$\zeta = \frac{8\pi}{Re A} \quad (5.15)$$

wiedergibt. Die Gleichungen (5.13) und (5.15) zeigen, daß der Widerstand auch bei sehr kleinen Reynoldszahlen noch keine lineare Funktion der Anströmgeschwindigkeit ist. Die Meßwerte von FINN, die zwischen $Re = 0,05$ und $Re = 5$ liegen, scheinen die Gültigkeit von Gl. (5.13) bis zu der oberen Grenze von $Re = 0,5$ zu bestätigen. Für $Re \leq 0,1$ kann der in der eckigen Klammer von Gl. (5.13) stehende Ausdruck mit genügender Genauigkeit gleich 1 gesetzt werden.

Die kritische Reynoldszahl hat für Zylinder den Wert $4 \cdot 10^5$ und liegt somit in der gleichen Größenordnung wie für Kugeln. Im Bereich von $Re = 10^3$ bis $Re = Re_{kr}$ nimmt der Widerstandsbeiwert einen nahezu konstanten Wert von etwa 1 an. Er ist etwa 2,5mal so groß wie für Kugeln im gleichen Bereich der Reynoldszahl.

Das Verhalten des Widerstandes unendlich langer Zylinder in einer unendlich ausgedehnten Umgebung kann nur als Anhalt für den Widerstand technisch interessanter Zylinder dienen. Wählt man den Zylinder als ideale Näherung für nadelförmige Körper, so wird man in jedem Falle dem Zylinder eine endliche Länge L zuordnen müssen. Das heißt also, daß der Widerstandsbeiwert nicht nur eine Funktion der Reynoldszahl sein kann, sondern zusätzlich vom Längenverhältnis L/d_p abhängen muß. Ferner wird man die Annahme, wonach sich das umgebende Medium in allen Richtungen bis ins Unendliche erstreckt, aufgeben müssen. Um noch eindeutige Untersuchungen durchführen zu können, nimmt man an, daß sich die Zylinder zwischen zwei parallelen Platten bewegen, deren Abstand s ist. Dadurch kommt das Verhältnis s/d_p als weitere Veränderliche in das Widerstandsgesetz. WHITE [5.30] leitete unter Berücksichtigung der genannten Einflüsse folgendes Widerstandsgesetz her, welches für den Bereich kleiner Reynoldszahlen gültig sein soll:

$$\zeta = \frac{C_r + C_e}{Re} \quad (5.16)$$

Hierin berücksichtigt

$$C_r = \frac{12,6}{\log(0,8 s/d_p)} \quad (5.17)$$

den durch die parallelen Wände bedingten Randeinfluß und

$$C_e = 20 \frac{d_p}{L} \left(1 + 2,4 \frac{d_p/L}{(s/d_p) - 1} \right) \quad (5.18)$$

den durch die freien Enden des endlich langen Zylinders bedingten Eindeinfluß. Nach experimentellen Untersuchungen von JONES und KNUDSEN [5.31] liefern die Gleichungen von WHITE brauchbare Ergebnisse, wenn das Längenverhältnis

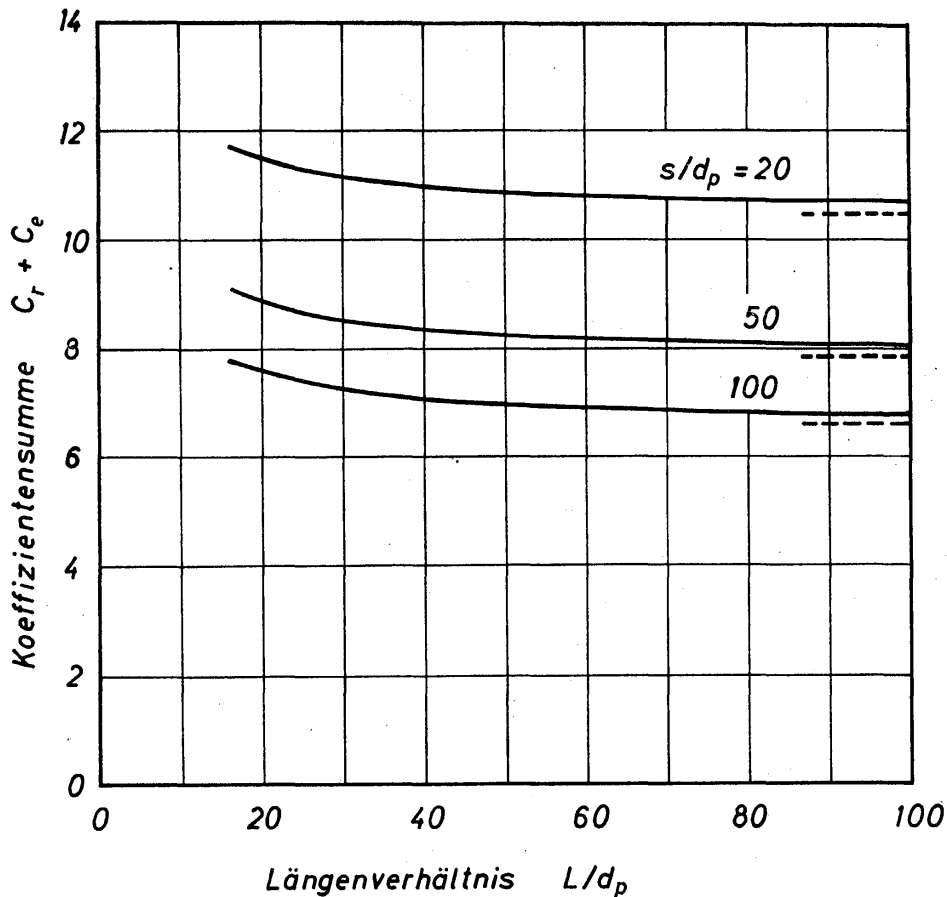


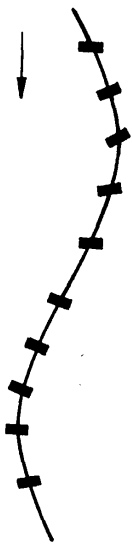
Bild 5.7. Abhängigkeit der Summe $C_r + C_e$ vom Längenverhältnis L/d_p und Abstandsverhältnis s/d_p für Zylinder

L/d_p größer als 16 ist. Das Abstandsverhältnis s/d_p lag bei den Versuchen zwischen 9,17 und 55. Für kleinere Werte als $L/d_p = 16$ und $s/d_p = 9,17$ lassen sich noch keine sicheren Aussagen über die Größe des Widerstandsbeiwertes machen. In Bild 5.7 ist die Koeffizientensumme $C_r + C_e$ abhängig vom Längenverhältnis L/d_p für einige Werte des Abstandsverhältnisses dargestellt. Mit zunehmenden Werten von L/d_p nähert sich $C_r + C_e$ den durch gestrichelte Linien angedeuteten Grenzwerten, die aus Gl. (5.17) folgen. Für $L/d_p > 16$ ist es bereits zulässig, den Ausdruck in der runden Klammer von Gl. (5.18) gleich 1 zu setzen. Die Summe $C_r + C_e$ nimmt mit wachsenden Werten für L/d_p und s/d_p ab.

Die Versuche von JONES und KNUDSEN erstreckten sich über einen Bereich der Reynoldszahl von etwa 0,01 bis 2. Die Zylinder wurden mittels einer Vorrichtung so durch die Flüssigkeit gezogen, daß die Orientierung der Zylinder unverändert erhalten blieb.

Versuche an einem Zylinder mit dem Längenverhältnis $L/d_p = 5$ im Windkanal hat WIESELSBERGER [5.6] durchgeführt. Die Versuchsanordnung entspricht der Bedingung $s/d_p = \infty$, unter der ein Randeinfluß entfällt. Die Versuchsergebnisse sind in Bild 5.6 dargestellt und durch Kurve *d* verbunden. Es zeigt sich, daß der Widerstandsbeiwert kurzer Zylinder kleiner ist als der für unendlich lange (Kurve *a*). Die Verminderung des Widerstandsbeiwertes wird auf die seitliche Umströmung der kurzen Zylinder zurückgeführt, wobei das Wirbelgebiet belüftet wird.

MARCHILDON, CLAMEN und GAUVIN [5.32] sowie CHRISTIANSEN und BARKER [5.33] untersuchten den Widerstand von Zylindern endlicher Länge während des freien Falls in einer Flüssigkeitssäule mit großem Durchmesser. Während des freien Falls treten innerhalb begrenzter Bereiche der Reynoldszahl unterschiedliche Bewegungsformen auf. Für Re kleiner als etwa 0,1 haben die Zylinder keine bevorzugte Orientierung zur Bewegungsrichtung. Sie behalten die im Ruhezustand eingenommene Orientierung bei und bewegen sich entlang einer senkrechten Falllinie. Nach Einsetzen der ersten Ablösungserscheinungen oberhalb von $Re \approx 0,1$ bewegen sich die Zylinder im stationären Zustand stets mit einer bevorzugten Orientierung. Stimmt diese mit der Ausgangslage nicht überein, so wird die Orientierung im Verlauf eines instationären Anlaufbereiches entsprechend verändert. Die bevorzugte Orientierung ist dadurch gekennzeichnet, daß die Zylinder quer zur Längsachse angeströmt werden. Bei beliebig geformten Körpern stellt sich stets die größte Fläche senkrecht zur Strömung ein. Genau wie bei der Tropfenbewegung ist jeweils die stumpfe Seite des Körpers der Strömung entgegengerichtet. Nach Überschreiten einer Reynoldszahl von etwa 100 machen sich Abweichungen von der senkrechten Falllinie bemerkbar. Es treten Sekundär-



bewegungen in Form von Oszillationen auf, die zum Absinken auf einer schraubenförmigen oder ähnlichen Bahn führen. In *Bild 5.8* sind die Bewegungszustände eines frei fallenden Zylinders angedeutet. Die bei dieser Bewegung auftretenden Amplituden und Frequenzen wurden von MARCHILDON, CLAMEN und GAUVIN [5.32] näher untersucht. Auf Grund einer einfachen Modellvorstellung konnten sie für die Frequenz die dimensionslose Beziehung

$$Sr \equiv \frac{\omega (L \cdot d_p)^{1/2}}{w_s} = \frac{(\rho/\rho_p)^{1/2}}{10,5} \quad (5.19)$$

Bild 5.8. Bewegung eines frei fallenden Zylinders

aufstellen. Mit Sr wird die Strouhalzahl bezeichnet. Ferner bedeuten ω die Frequenz, L und d_p Länge und Durchmesser des Zylinders, w_s die Sinkgeschwindigkeit des Zylinders, ρ die Flüssigkeitsdichte und ρ_p die Dichte des Zylindermaterials. Diese Gleichung besagt, daß die Frequenz mit zunehmender Sinkgeschwindigkeit w_s und mit zunehmendem Dichteverhältnis größer, mit zunehmender Länge L und zunehmendem Durchmesser aber kleiner wird. Da die Oszillationen mit Sicherheit den Widerstand des Zylinders beeinflussen, wird man aus Gl.(5.19) den wichtigen Hinweis entnehmen, daß der Widerstandsbeiwert unter anderem vom Dichteverhältnis abhängt. Diese Abhängigkeit tritt aber nur bei bewegten, nicht bei ruhenden Körpern auf, und auch nur innerhalb des Bereiches, in dem sich Ablösungen und Wirbel auf der Rückseite des Körpers bilden. Während das Widerstandsgesetz für ruhende Körper von endlicher Größe in endlich ausgedehnter Umgebung die Form

$$\zeta = f\left(Re; \frac{L}{d_p}; \frac{s}{d_p}\right) \tag{5.20}$$

hat, wird es für frei fallende Körper im allgemeinen die Form

$$\zeta = f\left(Re; \frac{L}{d_p}; \frac{s}{d_p}; \frac{\rho}{\rho_p}\right) \tag{5.21}$$

aufweisen müssen. Für sehr kleine Reynoldszahlen wird jedoch auch für frei fallende Körper Gl.(5.20) gelten, da dann noch keine Oszillationen auftreten.

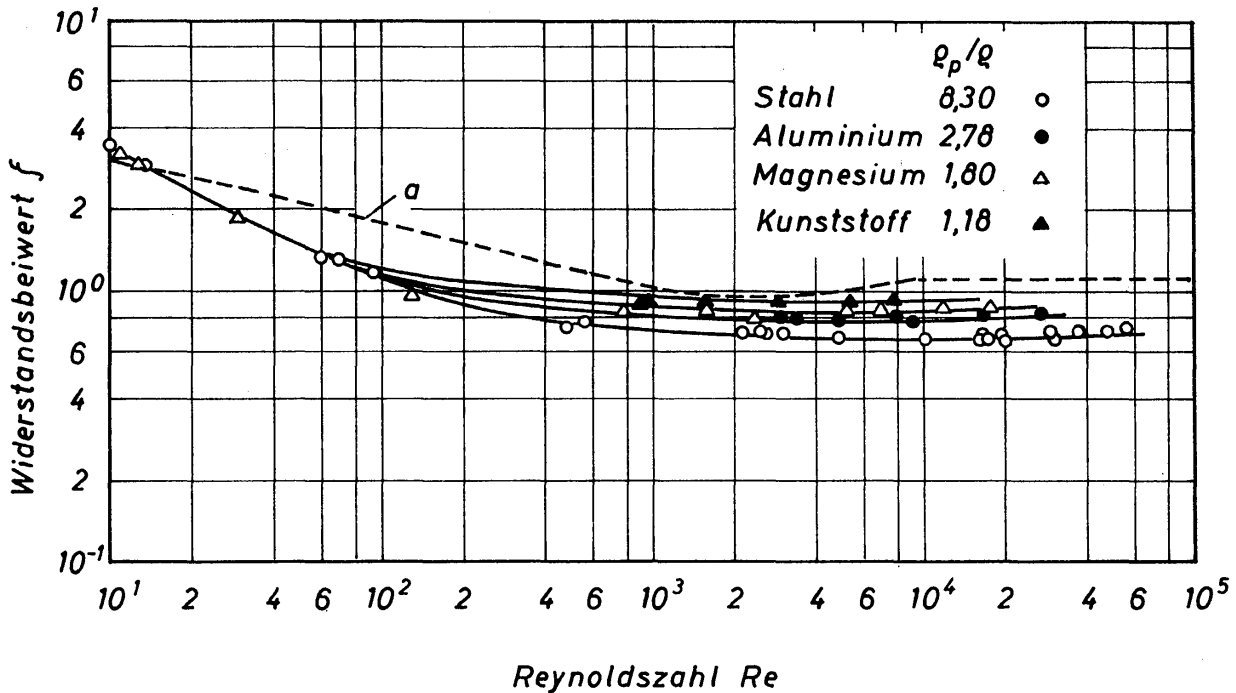


Bild 5.9. Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes für frei fallende Zylinder mit dem Längenverhältnis $L/d_p = 2,5$ von der Reynoldszahl Re und dem Dichteverhältnis ρ_p/ρ ; Kurve a für unendlich lange, ruhende Zylinder

In Bild 5.9 sind die von CHRISTIANSEN und BARKER [5.33] mitgeteilten Meßwerte für Zylinder, deren Längenverhältnis $L/d_p = 2,5$ war, abhängig von der Reynoldszahl wiedergegeben. Die Zylinder waren aus Stahl, Aluminium, Magnesium und einem Kunststoff hergestellt. Da die Fallversuche in Wasser vorgenommen wurden, änderte sich das Dichteverhältnis ρ_p/ρ von 8,30 auf 1,18. Der Dichteinfluß tritt oberhalb von $Re = 10^2$ deutlich hervor. Der Widerstandsbeiwert nimmt mit zunehmendem Dichteverhältnis ab. Bei $Re = 10^4$ ist beispielsweise die Widerstandszahl proportional $(\rho/\rho_p)^{1/6}$. Damit ist der Einfluß des Dichteverhältnisses eindeutig nachgewiesen. Allgemeinverbindliche Aussagen lassen sich auf Grund dieser Versuche aber noch nicht machen. Eine vollständige Klärung dieses bedeutsamen Problems erfordert noch umfangreiche Untersuchungen.

5.22 Kreisscheiben und andere Körper

In Bild 5.10 ist der Widerstandsbeiwert quer angeströmter Kreisscheiben nach Messungen von SCHMIEDEL [5.34], SIMMONS und DEWEY [5.35] und WIESELS-

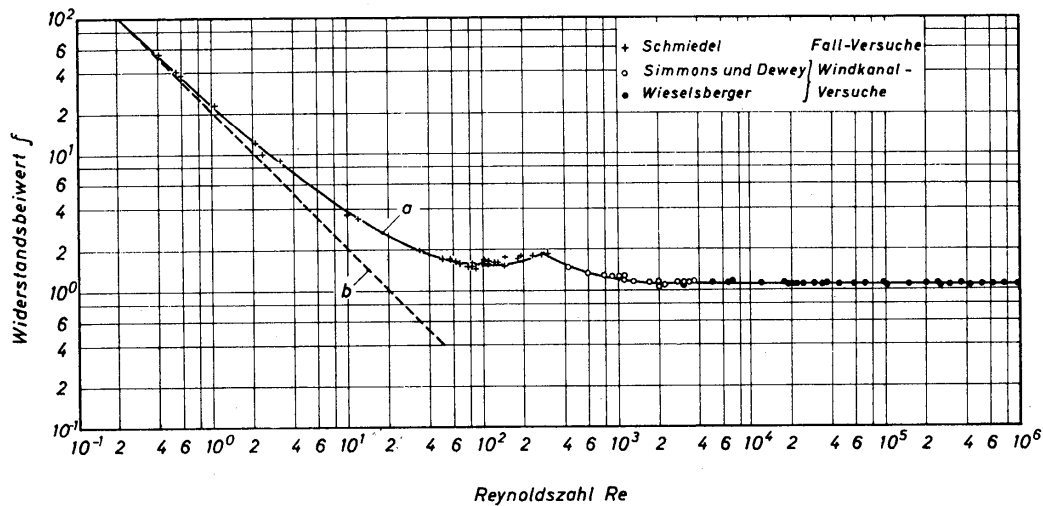


Bild 5.10. Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes quer angeströmter Kreisscheiben von der Reynoldszahl; Kurve *a* Ausgleichskurve durch Meßwerte, Kurve *b* nach theoretischer Gl.(5.22)

BERGER [5.6] über der Reynoldszahl aufgetragen. Der Widerstandsbeiwert ist durch Gl.(5.1) und die Reynoldszahl durch Gl.(5.2) definiert. Da die Scheibe mit der größten Fläche der Strömung entgegengerichtet ist, sind d_p der Scheibendurchmesser und $F = d_p^2 \pi/4$ die Anströmfläche. SCHMIEDEL hat den Scheibenwiderstand aus Fallversuchen bestimmt, während die anderen Experimentatoren ihn bei starrer Anordnung der Scheiben in Windkanälen gemessen haben. Die Meßwerte sind in *Bild 5.10* durch Kurve *a* ausgeglichen. In Richtung abnehmender Werte der Reynoldszahl nähert sich Kurve *a* der getrichelt eingezeichneten Kurve *b* an. Hierfür gilt die Beziehung

$$\zeta = \frac{64/\pi}{Re}, \quad (5.22)$$

die unmittelbar aus der von OBERBECK [5.36] angegebenen Gleichung für den Widerstand W folgt. Die Gültigkeit von Gl. (5.22) erstreckt sich bis zu $Re = 0,5$. Für größere Werte der Reynoldszahl beginnen die Meßwerte in zunehmendem Maße von Kurve *b* abzuweichen. In der Nähe von $Re = 100$ beginnt die Scheibe beim freien Fall, wie SCHMIEDEL feststellte, zu oszillieren. Auf diese Bewegungsform ist offensichtlich auch das örtliche Maximum in Kurve *a* bei $Re \approx 280$ zurückzuführen. Bei weiterer Erhöhung der Reynoldszahl sinkt der Widerstandsbeiwert noch etwas ab und nimmt dann einen konstanten Wert an. Die Versuche von WIESELSBERGER reichen bis zu $Re = 10^6$, ohne daß bereits ein Umschlag in die turbulente Strömung aufgetreten wäre.

Umfangreiche Versuche über den Widerstand an Scheiben haben auch SQUIRES und SQUIRES [5.37] durchgeführt, wobei aber die Behälterwand die Ergebnisse stark beeinflusste. Bei diesen Versuchen war die Strömung entweder senkrecht auf die Kreisfläche oder parallel zur Kreisfläche gerichtet.

Zur weiteren Information über den Widerstand anderer Körper sei auf die Arbeiten von TOROBIN und GAUVIN [5.9], CHRISTIANSEN und BARKER [5.33], BECKER [5.38] sowie CHOWDHURY und FRITZ [5.39] verwiesen. Es ist zur Zeit

noch nicht möglich, allgemein verbindliche Widerstandsgesetze für beliebig geformte Körper anzugeben. Die verfügbaren Angaben beschränken sich zumeist auf begrenzte Bereiche der Reynoldszahl und auf bestimmte Körperformen. Mittels empirischer Formfaktoren versucht man für geometrisch ähnliche Körper Gesetze mit begrenztem Gültigkeitsbereich aufzustellen [5.40]. Für den Stokeschen Bereich, in dem man eine schleichende Bewegung annehmen kann, liegen einige bedeutsame theoretische Untersuchungen über den Widerstand beliebig geformter Körper vor. Hingewiesen sei vor allem auf die Arbeiten von ACRIVOS und TAYLOR [5.41] sowie von BRENNER [5.42 und 5.43]. Hierin wird insbesondere auch der Fall behandelt, daß die Form der Partikeln nur wenig von der einer Kugel abweicht. Obgleich die Rechnungen für den Grenzfall der schleichenden Strömung durchgeführt werden, können sie doch für die Praxis von erheblicher Bedeutung sein, beispielsweise für die Kornbewegung bei der Sedimentation oder der Staubbewegung in schwach bewegter Luft.

5.3 Partikelbewegung auf gerader, senkrechter Bahn

5.31 Mögliche Bewegungsfälle

Obgleich allein die Bewegung von Partikeln auf senkrechten Bahnen behandelt werden soll, ergibt sich dafür bereits eine Reihe von technisch bedeutsamen Bewegungsfällen. Hierbei treten absolute und relative Geschwindigkeiten auf. Die absoluten Geschwindigkeiten für das Teilchen (w_p) und das Fluid (w) sind auf ein ruhendes Koordinatennetz bezogen. Sie sind positiv, wenn sie senkrecht abwärts, und negativ, wenn sie senkrecht aufwärts gerichtet sind. Die Relativgeschwindigkeit w_r ist auf ein mit dem Teilchen mitgeführtes Koordinatensystem bezogen. Sie ist ebenfalls positiv, wenn sie senkrecht abwärts, und negativ, wenn sie senkrecht aufwärts gerichtet ist. Es gilt:

$$w_r \equiv w - w_p. \tag{5.23}$$

Die Relativgeschwindigkeit ist für den Strömungswiderstand maßgebend. Beide Größen haben die gleiche Richtung. Um das zum Ausdruck bringen zu können, wird die Gleichung für den Strömungswiderstand in der folgenden Form geschrieben:

$$W = \zeta F \frac{\rho \cdot w_r |w_r|}{2}. \tag{5.24}$$

Hierin ist $|w_r|$ der Betrag der Relativgeschwindigkeit, während w_r die mit dem Vorzeichen behaftete Relativgeschwindigkeit bedeutet, durch die die Richtung der Widerstandskraft W festgelegt wird. Ferner wird die Reynoldszahl

$$Re \equiv \frac{|w_r| d_p \rho}{\eta} \tag{5.25}$$

stets mit dem Betrag der Relativgeschwindigkeit gebildet, sie wird also als richtungsunabhängige Größe betrachtet.

Tabelle 5.1:
Zur Erläuterung der stationären Bewegung einzelner Partikeln

Strömungsart		ρ_p/ρ	w	w_p	$w_r = w - w_p$	
1.	Gleichstrom aufwärts	1a	> 1			
		1b	< 1			
2.	Gleichstrom abwärts	2a	> 1			
		2b	< 1			
3.	Gegenstrom	3a	> 1			
		3b	< 1			
4.	Teilchen- bewegung im ruhenden Fluid	4a	> 1			
		4b	< 1			

Die für das System, bestehend aus Partikel und umgebendem Fluid, möglichen Bewegungsfälle sollen an Hand von Tabelle 5.1 erläutert werden. Sie sind in vier Gruppen unterteilt worden: 1) Aufwärts gerichteter Gleichstrom; 2) abwärts gerichteter Gleichstrom; 3) Gegenstrom und 4) Partikelbewegung im ruhenden Fluid. Zur weiteren Unterteilung wird das Verhältnis aus den Dichten des Teilchens (ρ_p) und des Fluids (ρ) herangezogen. Das Dichteverhältnis ρ_p/ρ kann sowohl größer, gleich und kleiner als 1 sein. Für jeden Bewegungsfall sind in Tabelle 5.1 Richtung und Größe der absoluten Geschwindigkeiten w und w_p und der relativen Geschwindigkeit w_r angegeben. Ferner sind durch Pfeile die Richtung der bei stationärer Bewegung an ein Teilchen angreifenden Kräfte verzeichnet worden. Dabei sind A die Auftriebskraft, G die durch die Erdschwere hervorgerufene Massenkraft und W die Widerstandskraft. Auftriebs- und Massenkraft behalten für alle Bewegungsfälle ihre Richtung bei. Lediglich die Widerstandskraft ändert ihre Richtung, die mit der Relativgeschwindigkeit übereinstimmt und durch das Dichteverhältnis festgelegt ist. Die positive Richtung von Geschwindigkeiten und Kräften wird durch abwärts gerichtete Pfeile und die negative Richtung durch aufwärts gerichtete Pfeile angegeben. Zu den einzelnen Bewegungsfällen sollen noch folgende Hinweise gegeben werden:

- 1 a) Senkrecht aufwärts gerichteter pneumatischer und hydraulischer Transport von Feststoffteilchen; Tropfenbewegung im senkrecht aufwärts gerichteten Gas- und Flüssigkeitsstrom. Hierbei ist die Teilchengeschwindigkeit w_p immer kleiner als die Geschwindigkeit w des Fluids. Die Relativgeschwindigkeit w_r ist daher stets negativ.
- 1 b) Blasen- und Tropfenbewegung in Flüssigkeiten, die senkrecht aufwärts strömen. Da die Dichte der Partikel kleiner ist als die Dichte des Fluids, ist die Geschwindigkeit der Teilchen immer größer als die des Fluids. Die Teilchen eilen dem Fluid voraus, und folglich ist w_r positiv.
- 2 a) Senkrecht abwärts gerichteter pneumatischer und hydraulischer Transport von Feststoffpartikeln. Die Geschwindigkeit w_p ist stets größer als die Geschwindigkeit w des Fluids. Diese Bewegung ist z. B. unbeabsichtigt, wenn man körnige Feststoffe durch ein Rohr hinunterschüttet. Die Folge ist ein mitgerissener Gasstrom, der an der unteren Öffnung des Rohres eine starke Staubentwicklung hervorrufen kann.
- 2 b) Blasenbewegung im Flüssigkeitsstrom; beispielsweise in Ablaufvorrichtungen von Rektifizierböden oder in Rückführleitungen von Umlaufverdampfern. Weiterhin können auch Tropfen in einem Flüssigkeitsstrom mitgerissen werden. Die Relativgeschwindigkeit ist stets positiv, die Partikeln eilen dem Fluid nach.
- 3 a) Bewegung von Feststoffkörnern und Flüssigkeitstropfen, die einem aufwärts gerichteten Gasstrom entgegenfallen. Die Geschwindigkeit des Gasstromes kann jedoch nur sehr gering sein, da die Teilchen sonst mitgerissen würden. Die Relativgeschwindigkeit ist negativ.

- 3b) Aufsteigen von Gasblasen und Flüssigkeitstropfen in einem abwärts gerichteten Flüssigkeitsstrom. Diese Bewegung tritt z.B. in Blasen- und Tropfensäulen auf. Die Relativgeschwindigkeit ist positiv.
- 4a) Sinkbewegung von Feststoffkörnern bei der Sedimentation. Die Relativgeschwindigkeit ist negativ.
- 4b) Aufstieg von Gasblasen und Flüssigkeitstropfen in ruhenden Flüssigkeiten. Die Relativgeschwindigkeit ist positiv.

Die unter 4a) und 4b) aufgeführten Bewegungsvorgänge sind bereits als Sonderfälle unter den Punkten 3a) und 3b) erfaßt worden. Ihre gesonderte Erwähnung ist aber wegen der Bedeutung von Sink- und Aufstiegsbewegungen berechtigt.

5.32 Stationäre Partikelbewegung

Die Bewegung eines Einzelteilchens in senkrechter Richtung soll für den Fall beschrieben werden, daß Umgebung und Teilchen als isothermes und isobares System angesehen werden können. Da ferner die Bewegung stationär sein soll, treten keine Beschleunigungskräfte auf. Die an eine Kugel angreifenden Kräfte sind die Widerstandskraft W , die Auftriebskraft A und die Schwerkraft G . Im Gleichgewicht gilt dann:

$$W = -(G - A). \quad (5.26)$$

Der Zusammenhang zwischen den Kräften ist in Tabelle 5.1 verzeichnet worden. Mit Gl.(5.24) für die Widerstandskraft W und

$$G - A = g \varrho \frac{d_p^3 \pi}{6} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right) \quad (5.27)$$

folgt aus Gl. (5.26)

$$w_r |w_r| = -\frac{4}{3} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right) \frac{d_p g}{\zeta}. \quad (5.28)$$

Mit ζ wird der Widerstandsbeiwert und mit d_p der Partikeldurchmesser bezeichnet. In dimensionsloser Schreibweise wird hieraus

$$\frac{w_r |w_r|}{w^2} = -\frac{4}{3} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right) \frac{d_p g}{w^2} \frac{1}{\zeta} \quad (5.29)$$

oder auch

$$\frac{w_r |w_r|}{g d_p} = -\frac{4}{3} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right) \frac{1}{\zeta}. \quad (5.30)$$

Dieses sind die allgemeinsten Gleichungen zur Beschreibung der stationären Bewegung einer beliebigen Partikel in senkrechter Richtung für alle in Tabelle 5.1 erwähnten Fälle. In Übereinstimmung mit den Bezeichnungen in Tabelle 5.1 ist w_r für $\varrho_p/\varrho > 1$ stets negativ und für $\varrho_p/\varrho < 1$ stets positiv. Die letzten beiden Gleichungen besagen, daß mit wachsendem Widerstandsbeiwert ζ die Relativgeschwindigkeit w_r kleiner wird.

Zur Berechnung von w_r bzw. w_p muß der Widerstandsbeiwert ζ des Teilchens bekannt sein. Nimmt man an, daß es sich bei den Teilchen um Kugeln handelt, dann ist beispielsweise das Stokessche Gesetz $\zeta = 24/Re$ einzuführen. Somit ergibt sich nach Umformung die für den Stokesschen Bereich gültige Beziehung

$$\frac{w_r d_p}{\nu} = - \frac{Ar}{18}. \quad (5.31)$$

Hierin sind

$$Ar \equiv \frac{d_p^3 g}{\nu^2} \cdot \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \quad (5.32)$$

die Archimedeszahl und $\nu = \eta/\rho$ die kinematische Viskosität. Auf der linken Seite von Gl.(5.31) steht, so man w_r durch $|w_r|$ ersetzt, die Reynoldszahl der Kugel. Diese ist eine Funktion der Dichtekennzahl $(\rho_p/\rho - 1)$ und der Galileizahl $Ga \equiv d_p^3 g/\nu^2$. Führt man die entsprechenden Rechnungen unter Berücksichtigung des Newtonschen Widerstandsgesetzes $\zeta = 0,44$ durch, so erhält man

$$\frac{w_r |w_r|}{d g_p} = - 3,03 \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right). \quad (5.33)$$

Mittels der Gleichungen (5.33) und (5.31) bestimmt man für die Relativgeschwindigkeit w_r gleichzeitig den Betrag und die durch das Vorzeichen festgelegte Richtung. Beachtet man, daß auf der linken Seite von Gl.(5.33), so w_r durch $|w_r|$ ersetzt wird, die Definition einer Froudezahl

$$Fr \equiv \frac{|w_r^2|}{g d_p} \quad (5.34)$$

steht und für diese der Zusammenhang

$$Fr \equiv \frac{Re^2}{d_p^3 g/\nu^2} \quad (5.35)$$

gilt, dann läßt sich für Gl.(5.33) auch schreiben:

$$Re^2 = 3,03 |Ar|. \quad (5.36)$$

Damit diese Gleichung formal richtig ist, muß der Betrag der Archimedeszahl genommen werden. Von dieser Schreibweise ist immer dann Gebrauch zu machen, wenn man zu graphischen Darstellungen übergeht, die für alle in Tabelle 5.1 aufgeführten Bewegungsfälle gelten sollen.

Um eine Berechnungsgleichung für $|w_r|$ zu erhalten, die innerhalb des ganzen unterkritischen Strömungsbereiches gilt, hat man in Gl.(5.30) für ζ Gl.(5.7) einzuführen. Berücksichtigt man dabei noch Gl.(5.35), so ergibt sich nach Umformung

$$18 Re + 3 Re^{3/2} + 0,3 Re^2 = |Ar|. \quad (5.37)$$

Für kleine Werte von der Reynoldszahl Re geht diese Gleichung in Gl.(5.31) und für große Werte in Gl.(5.36) über, so man den Unterschied im Zahlenfaktor zwi-

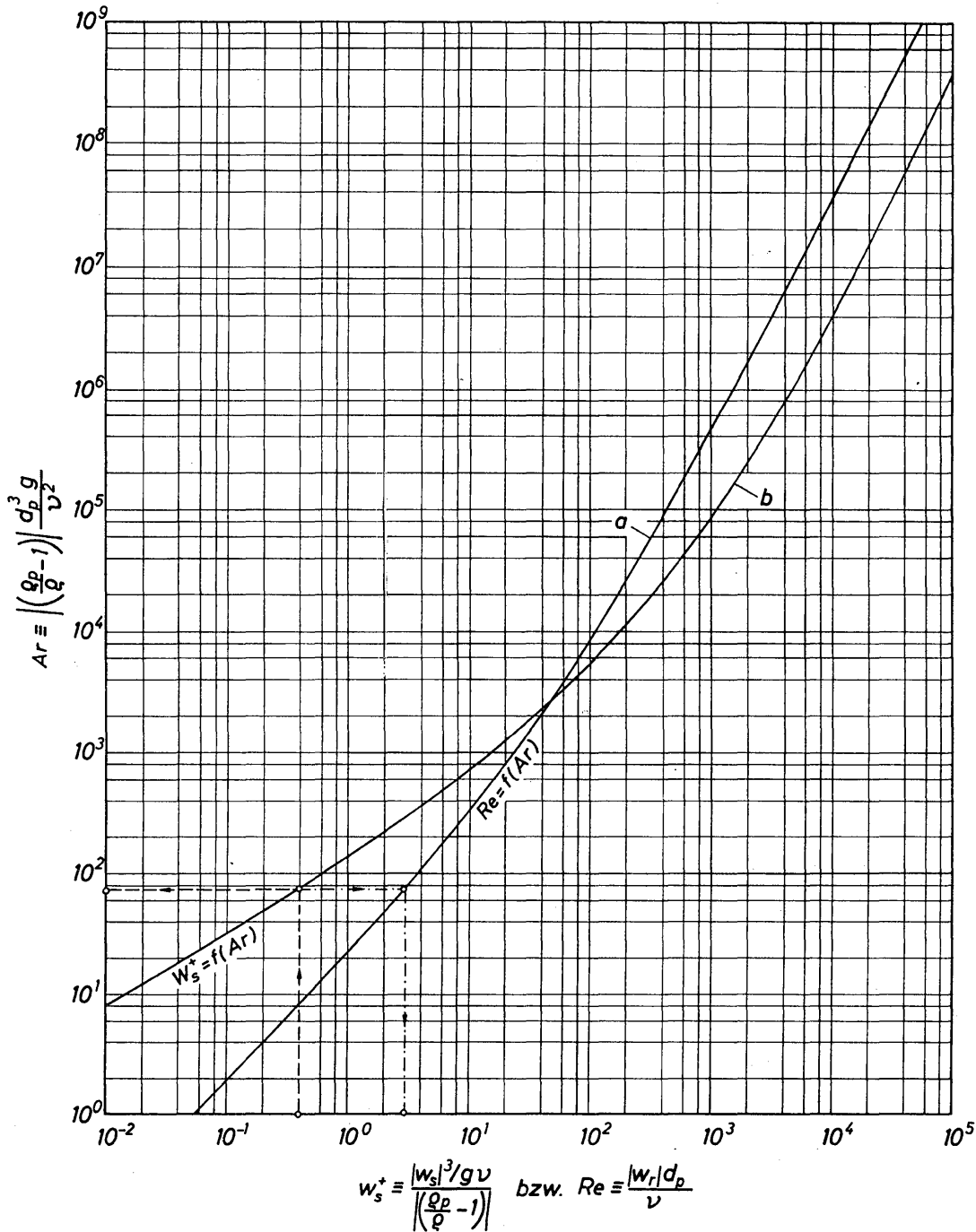


Bild 5.11. Diagramm zur graphischen Ermittlung der Relativgeschwindigkeit und der Sink- bzw. Aufstiegschwindigkeit; Erläuterung im Text

schen 3,03 und 3,33 als belanglos ansieht. In *Bild 5.11* ist der durch Gl.(5.37) gegebene Zusammenhang zwischen Ar und Re durch Kurve a wiedergegeben. Somit kann man also für beliebige Bedingungen, solange nur $Re < Re_{kr}$ ist, die Relativgeschwindigkeit $|w_r|$ und mittels Gl. (5.23) auch die absolute Teilchengeschwindigkeit w_p bestimmen.

Ist die absolute Teilchengeschwindigkeit w_p bekannt, dann läßt sich auch der vom Teilchen zurückgelegte Weg h_p berechnen:

$$h_p = w_p t. \quad (5.38)$$

Hierbei ist t die Bewegungszeit.

Bei Anwendung der Gl. (5.37) muß beachtet werden, daß zu ihrer Herleitung das Widerstandsgesetz gemäß Gl. (5.7) herangezogen wurde. Diese Gleichung gilt streng nur für den Widerstand von Kugeln in schwach turbulenten Strömungen. Wenn man Vorgänge wie den Teilchentransport in Gasen oder Flüssigkeiten betrachtet, wird im allgemeinen eine turbulente Strömung vorliegen. Bezieht man deren Schwankungsgeschwindigkeit auf die mittlere Geschwindigkeit der fluiden Phase, so wird sich ein verhältnismäßig niedriger Wert ergeben. Zur Beurteilung des Einflusses der Turbulenz auf Bewegung und Widerstand eines Partikels muß jedoch die Schwankungsgeschwindigkeit auf die Relativgeschwindigkeit w_r , die zumeist erheblich kleiner ist als die mittlere Geschwindigkeit des Fluids, bezogen werden. Das so gebildete Verhältnis kann dann recht große Werte annehmen. Der Einfluß der Turbulenz auf den Partikelwiderstand kann daher von ganz erheblicher Bedeutung sein. Hierauf wurde bereits im Abschnitt 5.12 ausführlich eingegangen. Da aber noch keine Widerstandsgesetze unter Berücksichtigung des Turbulenzgrades aufgestellt werden konnten, ist man auf die Anwendung von Gl. (5.7) angewiesen. Die hiermit berechneten Relativgeschwindigkeiten und absoluten Partikelgeschwindigkeiten dürfen folglich aber nur als Näherungswerte angesehen werden.

5.33 Schwebegeschwindigkeit

Beachtet man den Zusammenhang $w_r \equiv w - w_p$, dann ergibt sich aus der für alle Bewegungsfälle gültigen Gl. (5.30) als Sonderfall des Gegenstromes mit $w_p = 0$, daß die Geschwindigkeit des Fluids das Teilchen gerade in der Schwebelage hält. Diese Geschwindigkeit nennt man die Schwebegeschwindigkeit w_s . Es gilt also:

$$w_p = 0 : w = w_r = w_s.$$

Da Gl. (5.30) weiterhin für den Fall gilt, daß sich die Partikel in einem ruhenden Fluid ($w = 0$) bewegen, ist die Relativgeschwindigkeit w_r ebenfalls gleich dem Betrag der Sinkgeschwindigkeit w_s bzw. gleich der Steiggeschwindigkeit w_s der jeweils betrachteten Partikel:

$$w = 0 : -w_p = w_r = |w_s|.$$

Schwebe-, Sink- und Steiggeschwindigkeit haben die gleiche Größe. Ferner ist die Relativgeschwindigkeit immer gleich der Schwebegeschwindigkeit, unabhängig davon, wie groß die absolute Geschwindigkeit w des Fluids und die absolute Partikelgeschwindigkeit w_p werden und welche Richtungen diese Geschwindigkeiten haben. Diese Zusammenhang kann für technische Probleme sehr bedeutsam sein. Da für den Wärme- und Stoffübergang die Relativgeschwindigkeit maßgebend ist, wird man zunächst folgern, daß es dann auch gleichgültig sein muß, ob die absoluten Geschwindigkeiten w und w_p groß oder klein sind. Diese Schlussfolgerung ist aber nur dann richtig, wenn der Strömungszustand des Fluids laminar ist. Bei turbulentem Strömungszustand wird die Größe der absoluten Geschwindigkeit einen Einfluß auf den Wärme- und Stoffübergang ausüben, da mit zunehmender Absolutgeschwindigkeit der Turbulenzgrad ansteigt.

Da sich die Sinkgeschwindigkeit auf sehr einfache Weise experimentell ermitteln läßt, wird sie häufig zur Berechnung von Kugel- oder Korndurchmessern verwendet. Unter einem Korn soll ein nicht kugelförmiges Teilchen verstanden werden. Die in der Technik am häufigsten auftretenden Körner sind Granulate, deren Größenbestimmung zumeist recht schwierig ist. Berechnet man einen Korndurchmesser mittels der gemessenen Sinkgeschwindigkeit nach einer der oben angegebenen Gleichungen, so liegt dem Berechnungsverfahren die Annahme zugrunde, daß das Granulat Korn den gleichen Widerstand hat wie eine Kugel mit dem berechneten Durchmesser d_p . Da bei Beginn der Rechnungen die Größe der Reynoldszahl $Re = |w_r| d_p/\nu$ noch nicht bekannt ist, da d_p erst berechnet werden soll, läßt sich nicht voraussagen, welche der Gleichungen anzuwenden ist. Man sucht daher nach einem Diagramm, aus dem man bei bekannter Sinkgeschwindigkeit $|w_s| = w_r$ den Korndurchmesser d_p ohne Probieren entnehmen kann. Ferner soll das Diagramm die Ermittlung der Sinkgeschwindigkeit bei gegebenem Durchmesser erlauben. Das Diagramm muß also so beschaffen sein, daß beispielsweise in der auf der Ordinate aufgetragenen Größe nur die Geschwindigkeit und in der auf der Abszisse aufgetragenen Größe nur der Durchmesser auftritt. Um ein solches Diagramm herstellen zu können, wird zunächst in Gl.(5.30) für ζ Gl.(5.7) eingeführt. Multipliziert man beide Seiten anschließend mit $|w_s| d_p/\nu = |w_r| d_p/\nu = Re$, so erhält man nach Umformung:

$$\frac{|w_s^3|/g\nu}{\left|\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)\right|} \equiv w_s^+ = \frac{Re^2}{0,3(60 + 10 Re^{1/2} + Re)}. \quad (5.39)$$

Diese Gleichung ist für sich allein noch unbrauchbar. In Verbindung mit Gl.(5.37), die den Zusammenhang zwischen Ar und Re angibt, ist es jedoch möglich, w_s^+ als Funktion von Ar darzustellen:

$$\frac{|w_s^3|/g\nu}{\left|\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)\right|} = f(|Ar|). \quad (5.40)$$

Hierin treten $|w_s| = w_r$ nur auf der linken Gleichungsseite und d_p nur auf der rechten Gleichungsseite, nämlich in der Archimedeszahl Ar , auf. Gl.(5.40) ist in *Bild 5.11* als Kurve *b* dargestellt. Die praktische Anwendung des Diagramms wird durch den gestrichelten Linienzug deutlich gemacht. Bei gegebener Sinkgeschwindigkeit berechnet man w_s^+ , folgt dem gestrichelten Linienzug in Pfeilrichtung bis zum Schnittpunkt mit Kurve *b* und liest dann auf der Ordinate den Wert für Ar ab. Hieraus folgt dann der gesuchte Korndurchmesser d_p . Da die obere Gültigkeitsgrenze des Diagramms durch die kritische Reynoldszahl $Re_{kr} = 3 \cdot 10^5$ gegeben ist, wird anschließend der Wert von Re kontrolliert. Zu dem Zweck folgt man dem strich-punktierten Linienzug, ausgehend von Ar in Pfeilrichtung, bis zur Kurve *a* und erhält dann auf der Abszisse die gesuchte Reynoldszahl.

5.34 Instationäre Partikelbewegung

Die in den voraufgegangenen Abschnitten berechnete stationäre Bewegung ist der Endzustand, dem sich die instationäre Bewegung asymptotisch annähert. Bei der instationären Bewegung ist die Trägheitskraft gleich der Summe der aufgeprägten äußeren Kräfte. Es gilt also die Beziehung:

$$m_p \frac{dw'_r}{dt} = G - A + W. \quad (5.41)$$

Mit der Partikelmasse $m_p = \rho_p d_p^3 \pi/6$ und den Gleichungen (5.24) und (5.27) erhält man zur Berechnung der instationären Partikelbewegung die Differentialgleichung

$$\frac{1}{g} \frac{dw'_r}{dt} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) + \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{w'_r |w'_r|}{g d_p} \zeta_b. \quad (5.42)$$

Es bedeuten

$$w'_r = w - w'_p \quad (5.43)$$

instationäre Relativgeschwindigkeit, w'_p instationäre absolute Partikelgeschwindigkeit, t Zeit, g Erdbeschleunigung und ζ_b Widerstandsbeiwert der Partikel bei instationärer Bewegung. Man muß erwarten, daß ζ_b größer ist als der Widerstandsbeiwert ζ für die stationäre Bewegung. Es liegen aber auch einige Versuchsergebnisse vor, aus denen geschlossen wurde, daß ζ_b kleiner ist als ζ . Hierauf haben TOROBIN und GAUVIN [5.9] im Rahmen einer Sichtung des verfügbaren Schrifttums hingewiesen. Zur Zeit sind noch keine zuverlässigen Gesetze verfügbar, die eine Berechnung von ζ_b ermöglichen. Aus diesem Grunde ist es also auch streng genommen nicht möglich, die für die instationäre Bewegung maßgebende Gl.(5.42) zu lösen.

Eine Näherungslösung ist dann möglich, wenn man sich die Vorstellung von BESSEL (zitiert in [5.9]) zu eigen macht und annimmt, daß während der instationären Bewegung nicht nur die Masse $m_p = \rho_p V_p$ des Teilchens beschleunigt werden muß, sondern zusätzlich eine Flüssigkeitsmasse $m = \rho V$. Setzt man das mitbeschleunigte Volumen V ins Verhältnis zum Partikelvolumen V_p gemäß

$$V = \alpha V_p, \quad (5.44)$$

so ergibt sich als gesamte beschleunigte Masse

$$m_b = m_p + m = V_p (\rho_p + \alpha \rho). \quad (5.45)$$

Für das Volumverhältnis α wird häufig ein Wert in der Größenordnung von 0,5 empfohlen [5.44]. Andererseits liegen Versuchsergebnisse vor, die darauf hindeuten, daß der Wert von α sowohl größer als auch kleiner sein kann [5.9]. Ist ρ_p wesentlich größer als ρ , dann kann $\alpha \rho$ offensichtlich im Vergleich zu ρ_p vernachlässigt werden. Ersetzt man in Gl.(5.41) die Masse m_p durch $m_p + m$, so erhält man folgende Beziehung:

$$\frac{1}{g} \frac{dw'_r}{dt} = \frac{1 - \varrho/\varrho_p}{1 + \alpha \varrho/\varrho_p} + \frac{3}{4} \frac{\varrho/\varrho_p}{1 + \alpha \varrho/\varrho_p} \frac{w'_r |w'_r|}{g d_p} \zeta. \quad (5.46)$$

Hierin ist ζ der Widerstandsbeiwert bei stationärer Bewegung, der als bekannt angesehen werden soll.

Im allgemeinen Fall ist für ζ das über den gesamten unterkritischen Bereich geltende Gesetz gemäß Gl. (5.7) zu verwenden. Eine geschlossene Lösung ist dann aber nicht mehr möglich. Zur Vereinfachung der Lösung von Gl. (5.46) soll daher das Stokessche Widerstandsgesetz nach Gl. (5.3) verwendet werden. Damit erhält die Differentialgleichung die Form:

$$\frac{1}{g} \frac{dw'_r}{dt} = \frac{1 - \varrho/\varrho_p}{1 + \alpha \varrho/\varrho_p} + 18 \frac{\varrho/\varrho_p}{1 + \alpha \varrho/\varrho_p} \frac{\nu w'_r}{g d_p^2}. \quad (5.47)$$

Der mit w'_r gebildete Weg h'_r folgt zu

$$h'_r = - \int_0^t w'_r dt. \quad (5.48)$$

Ersetzt man das Zeitdifferential durch den aus Gl. (5.47) folgenden Ausdruck, so ergibt sich

$$h'_r = - \int_0^{w'_r} \frac{w'_r dw'_r}{g \frac{1 - \varrho/\varrho_p}{1 + \alpha \varrho/\varrho_p} + 18 \frac{\varrho/\varrho_p}{1 + \alpha \varrho/\varrho_p} \frac{\nu w'_r}{d_p^2}}. \quad (5.49)$$

Nach Integration folgt der während der instationären Bewegung zurückgelegte Weg in dimensionsloser Schreibweise zu

$$h_r^* \equiv \frac{h'_r}{d_p} \frac{\varrho}{\varrho_p} = - \frac{1}{18} \frac{w_r d_p}{\nu} \left(1 + \alpha \frac{\varrho}{\varrho_p} \right) \left\{ \frac{w'_r}{w_r} + \ln \left(1 - \frac{w'_r}{w_r} \right) \right\}. \quad (5.50)$$

Begnügt man sich mit dem Betrag des bezogenen instationären Weges, so darf man Gl. (5.50) durch folgende Beziehung ersetzen:

$$|h_r^*| \equiv \frac{|h'_r|}{d_p} \frac{\varrho}{\varrho_p} = - \frac{1}{18} \frac{|w_r| d_p}{\nu} \left(1 + \alpha \frac{\varrho}{\varrho_p} \right) \left\{ \frac{w'_r}{w_r} + \ln \left(1 - \frac{w'_r}{w_r} \right) \right\}. \quad (5.51)$$

Hierin bedeutet w_r die stationäre Relativgeschwindigkeit der Kugel gemäß Gl. (5.31). Das Verhältnis w'_r/w_r ändert sich zwischen 0 und 1 und der bezogene Weg $|h_r^*|$ zwischen 0 und ∞ . Ferner ist $|w_r| d_p/\nu$ die mit der stationären Relativgeschwindigkeit gebildete Reynoldszahl. In *Bild 5.12* ist das Geschwindigkeitsverhältnis w'_r/w_r über dem bezogenen Weg $|h_r^*|$ für verschiedene Werte von $1 + \alpha \varrho/\varrho_p$ und für $Re = |w_r| d_p/\nu = 0,1$ aufgetragen. Für $1 + \alpha \varrho/\varrho_p = 1$ ist $\alpha = 0$; die hierfür gezeichnete Kurve gilt also für den Fall, daß die bei instationärer Bewegung berücksichtigte Beschleunigung des umgebenden Fluids vernachlässigt werden kann. Wie zu erwarten, stellt sich dabei bereits nach kürzestem Weg die größte Geschwindigkeit ein. Je größer die Dichte bzw. der Volumanteil α des mitbeschleunigten Mediums sind, desto größer ist der zurückgelegte Weg, bis das gleiche Geschwindigkeitsverhältnis erreicht wird.

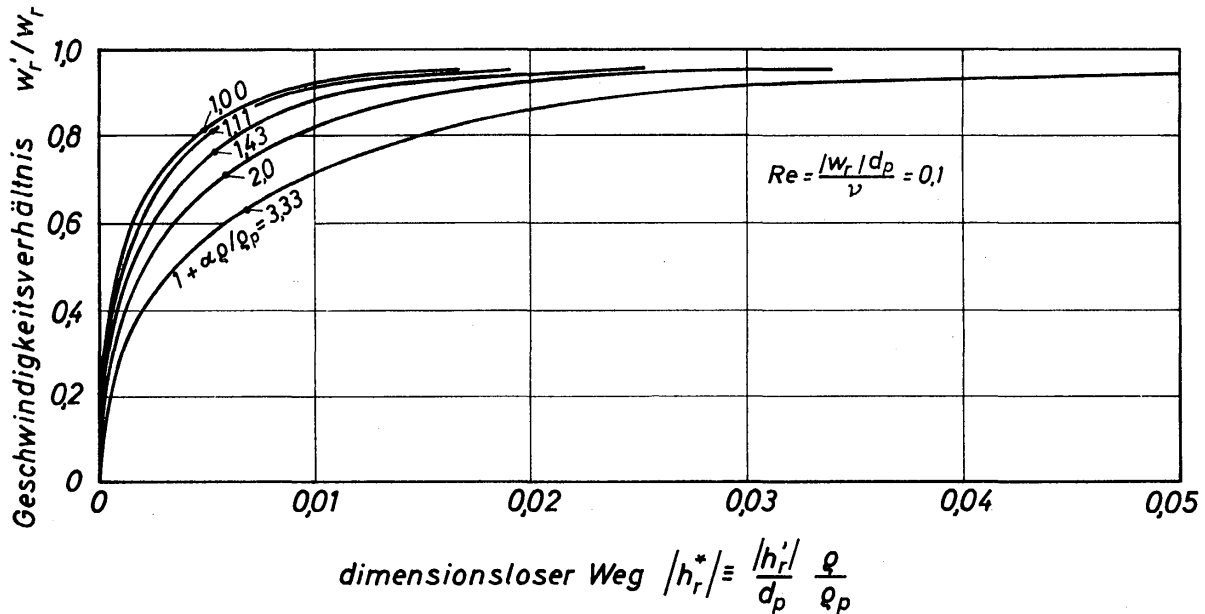


Bild 5.12. Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverhältnisses bei instationärer Teilchenbewegung im Stokesschen Bereich vom dimensionslosen Weg für einige Werte des Parameters $1 + \alpha \rho / \rho_p$ und für $Re = 0,1$

Die Rechnungen gelten für die in Tabelle 5.1 aufgeführten Fälle, insbesondere auch für Bewegungen in ruhender Umgebung. Vorausgesetzt wurde, woran nochmals erinnert sei, die Gültigkeit des Stokesschen Widerstandsgesetzes. Es bereitet aber grundsätzlich keine Schwierigkeiten, andere Widerstandsgesetze einzuführen.

Bei der Berechnung vieler verfahrenstechnisch interessanter Vorgänge würde es eine große Erleichterung bedeuten, wenn man die instationäre durch die stationäre Bewegung ersetzen könnte. Das ist offensichtlich dann zulässig, wenn der gesamte Kugelweg fast ausschließlich unter den Bedingungen der stationären Bewegung zurückgelegt wird. Um hierüber eine Aussage machen zu können, wird ein instationärer Kugelweg $|h_{r_{95}}^*|$ definiert, bei dem $w_r'/w_r = 0,95$ ist. Hierfür folgt aus Gl.(5.51) die Beziehung:

$$|h_{r_{95}}^*| = 0,1136 \frac{|w_r| d_p}{\nu} \left(1 + \alpha \frac{\rho}{\rho_p} \right). \tag{5.52}$$

Hiermit sollen die instationären Sinkwege einer Partikel in Luft und in Wasser berechnet werden. Die Partikel habe einen Durchmesser von 0,04 mm und eine Dichte von 1500 kg/m³. Ferner soll $\alpha = 0,5$ gesetzt werden. Dann erhält man den instationären Sinkweg in Luft zu

$$h_r' = 1,041 \text{ mm}$$

und in Wasser zu

$$h_r' = 0,153 \cdot 10^{-3} \text{ mm.}$$

In Luft ist der instationäre Wegabschnitt also etwa 6817 mal so lang wie in Wasser. Bei der Partikelbewegung in Gasen wird sich daher die Berücksichtigung der instationären Bewegung nur selten vermeiden lassen. Beispielsweise wird die

Kornbewegung in stark aufgelockerten Wirbelschichten sowie beim pneumatischen Feststofftransport mit hohen Feststoffkonzentrationen fast ausschließlich in großem Abstand vom stationären Zustand erfolgen. Die Rechnungen lassen ferner erkennen, daß die beschleunigte Masse des umgebenden Fluids bei der Teilchenbewegung in Gasen im allgemeinen vernachlässigt werden darf; bei der Bewegung in Flüssigkeiten wird sie aber bedeutsam sein. Gerade dann aber wird man sorgfältig prüfen, ob man nicht die instationäre Bewegung überhaupt vernachlässigen kann.

Die vorangegangenen Betrachtungen gelten unter der Bedingung, daß die Bewegung der Partikel im Gültigkeitsbereich des Stokesschen Widerstandsgesetzes erfolgt. Nimmt man als anderen Grenzfall das Newtonsche Widerstandsgesetz $\zeta = 0,44$, dann ergibt sich, ohne auf die Herleitung einzugehen, folgende Beziehung für den instationären Sinkweg:

$$h_r^* \equiv \frac{h_r'}{d_p} \frac{\rho}{\rho_p} = -1,5 \left(1 + \alpha \frac{\rho}{\rho_p} \right) \ln \left[1 - \left(\frac{w_r'}{w_r} \right)^2 \right]. \quad (5.53)$$

Da im Newtonschen Bereich der Widerstandsbeiwert nicht von der Reynoldszahl Re abhängt, ist auch der Sinkweg keine Funktion von Re . In *Bild 5.13* ist h_r^* über dem Geschwindigkeitsverhältnis w_r'/w_r aufgetragen, wobei $1 + \alpha \rho/\rho_p$ wieder als Parameter dient. Mit zunehmenden Werten dieses Parameters wird der Sinkweg bei konstantem Geschwindigkeitsverhältnis größer.

Für den bei $w_r'/w_r = 0,95$ auftretenden Sinkweg erhält man die Beziehung

$$h_{r_{95}}^* = 3,49 \left(1 + \alpha \frac{\rho}{\rho_p} \right). \quad (5.54)$$

Durch Vergleich mit Gl.(5.52) stellt man fest, daß man bei Anwendung des Stokesschen Widerstandsgesetzes im Newtonschen Bereich ($Re = 10^3$ bis 10^5) erheblich zu lange Sinkwege berechnen würde.

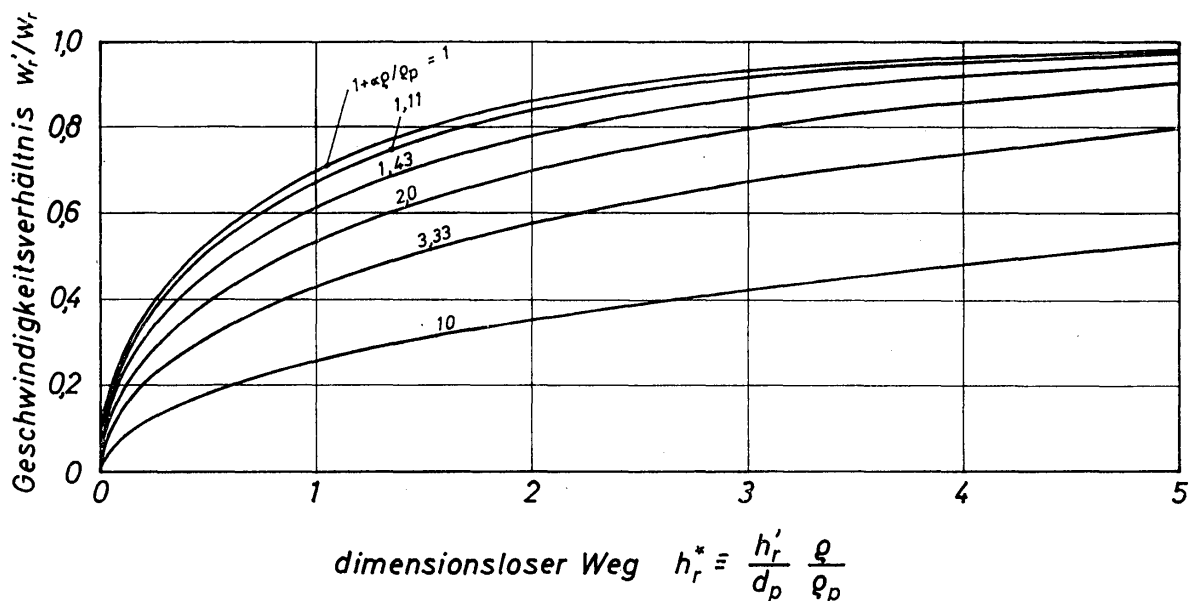


Bild 5.13. Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverhältnisses bei instationärer Partikelbewegung im Newtonschen Bereich vom dimensionslosen Weg für einige Werte des Parameters $1 + \alpha \rho/\rho_p$

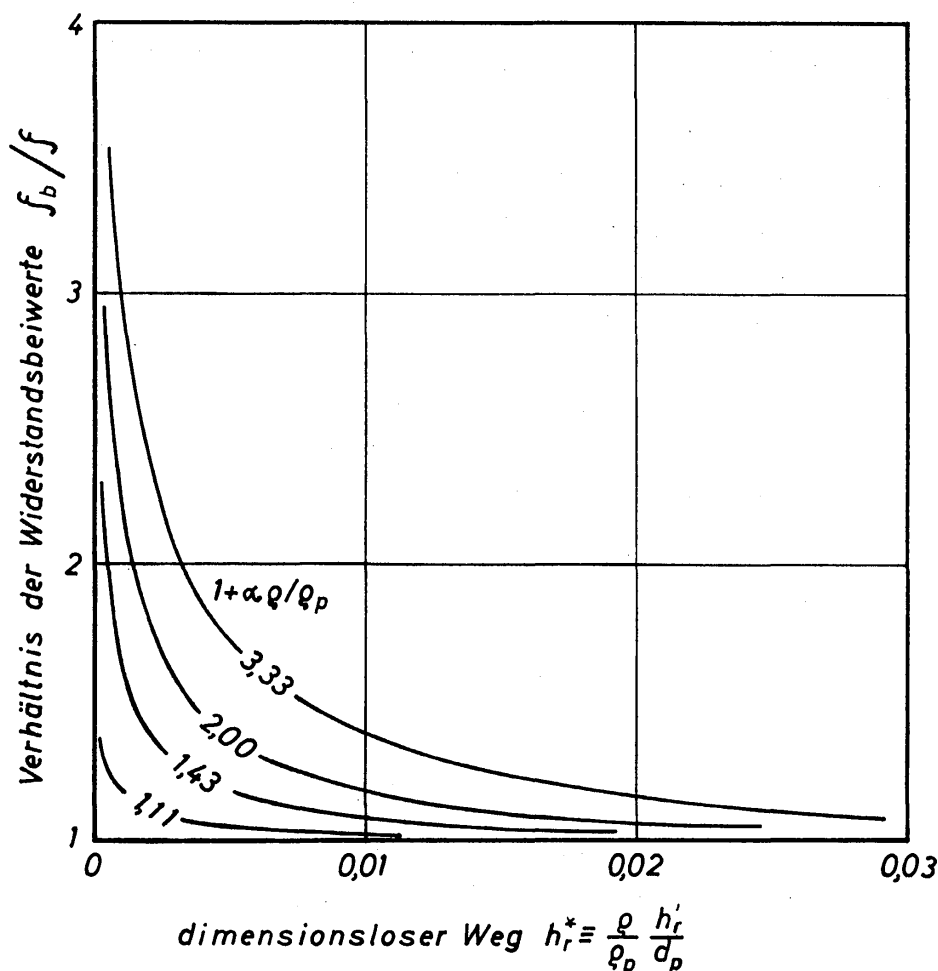


Bild 5.14. Abhängigkeit des Verhältnisses der Widerstandsbeiwerte bei instationärer Bewegung im Stokesschen Bereich vom dimensionslosen Weg für einige Werte des Parameters $1 + \alpha \rho / \rho_p$

Nachdem der in instationärer Bewegung zurückgelegte Weg mittels der Annahme einer mitbeschleunigten Masse des umgebenden Fluids berechnet wurde, ist es möglich, mittels Gl. (5.42) den bei instationärer Strömung geltenden Widerstandsbeiwert ζ_b auszurechnen. Diese Rechnungen wurden von KASKAS [5.8] für verschiedene Fälle durchgeführt. Als Beispiel wird in *Bild 5.14* das Ergebnis für den Stokesschen Widerstandsbereich gezeigt. Aufgetragen ist das Verhältnis ζ_b/ζ , abhängig vom bezogenen Weg $|h_r^*|$ für verschiedene Werte des Parameters $1 + \alpha \rho / \rho_p$. Für die stationäre Bewegung mit $\alpha = 0$ bzw. $1 + \alpha \rho / \rho_p = 1$ ist $\zeta_b/\zeta = 1$. Für alle anderen Werte von $1 + \alpha \rho / \rho_p$ ist ζ_b/ζ sehr stark von der Weglänge abhängig.

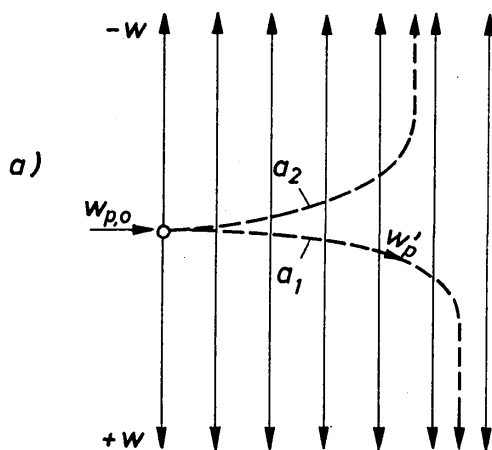
5.4 Partikelbewegung auf gekrümmter Bahn im linearen Strömungsfeld

Betrachtet wird die Bewegung beliebiger Partikeln, also Feststoffkörner, Flüssigkeitstropfen oder Gasblasen, in einem fluiden Medium, das sich auf einer geraden Bahn innerhalb einer senkrechten Ebene bewegt. Die Strömungsrichtung des Fluids soll gegenüber der waagerechten Ebene eine beliebige Neigung aufweisen können. Im übrigen sei aber das strömende Medium nach allen Richtungen unendlich ausgedehnt, und die Bewegung der betrachteten Partikeln sei durch

benachbarte Partikeln nicht beeinflußt. Die Folge ist, daß auch die von den Partikeln durchlaufenen Bahnkurven innerhalb dieser Ebene liegen. Obgleich damit räumliche Bahnkurven ausgeschlossen sind, werden die Rechnungen häufig aber doch auch für solche Bewegungsvorgänge gelten, die im wesentlichen in einer waagerechten Ebene verlaufen. Im einzelnen werden Partikelbewegungen in einem sich auf linearer Bahn bewegenden Fluid berechnet, wobei neben der Trägheitskraft die Widerstands-, Auftriebs- und Massenkraft auftreten und weiterhin die Partikelbewegung im elektrischen Feld, wobei die Bahnkurve zusätzlich durch die elektrische Feldkraft beeinflußt wird. Die Partikeln sollen in allen Fällen kugelförmig sein. Zunächst werden einige technische Anwendungsbeispiele beschrieben und anschließend die Bewegungsgesetze in allgemeiner Form hergeleitet werden.

5.41 Beschreibung einiger technisch interessanter Anwendungsfälle

In *Bild 5.15* sind bezüglich des strömenden Mediums zwei Grenzfälle dargestellt. Während das Fluid in *Bild 5.15a* entweder senkrecht aufwärts oder senkrecht



abwärts strömt, bewegt es sich in *Bild 5.15b* in waagerechter Richtung. Die Geschwindigkeit des Fluids wird als konstant angenommen und mit w bezeichnet. Die Partikeln durchlaufen die gestrichelten Bahnkurven. Sie treten mit der Geschwindigkeit $w_{p,0}$ in das Strömungsfeld ein. Entlang der Bahnkurve ändert sich die mit w'_p bezeichnete Geschwindigkeit der Partikeln.

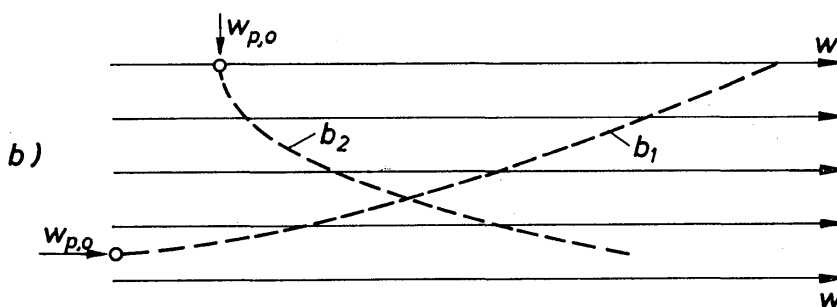


Bild 5.15. Beispiele für Partikelbahnen im linearen Strömungsfeld

Bahnkurven, die in *Bild 5.15a* angedeutet sind, können z.B. in Trocknungsanlagen auftreten, in denen die aus Flüssigkeit und sehr feinkörnigem Feststoff bestehende Suspension mittels Düsen oder rotierenden Scheiben in Tropfen aufgelöst wird. Die Tropfen treten mit der Anfangsgeschwindigkeit $w_{p,0}$ in das Strömungsfeld ein. Bei abwärts gerichtetem Gasstrom durchlaufen die Partikeln Bahnkurve a_1 ; bei aufwärts gerichtetem Gasstrom können die Partikeln Bahnkurve a_2 durchlaufen. Eine möglichst genaue Kenntnis der Partikelbahn ist für

die Festlegung der Hauptabmessungen eines Trocknungsturms erforderlich. So folgt z. B. der Turmdurchmesser aus dem maximalen Weg, der in horizontaler Richtung von der Partikel zurückgelegt wird. Die Höhe des Turms folgt aus der Bedingung, daß die in der Partikel enthaltene Flüssigkeit möglichst vollständig verdunsten kann. Von besonderer Bedeutung ist hierfür die Relativgeschwindigkeit zwischen Gas und Partikel entlang der Bahnkurve.

Dreht man *Bild 5.15a* ein wenig aus der Senkrechten heraus, dann ergeben sich für Fluid und Partikeln Bewegungen, die in Apparaten für die Kornklassierung auftreten können. Die Geschwindigkeit w des aufwärts gerichteten Gasstromes wird dabei so eingestellt, daß eine bestimmte Kornfraktion nach oben mitgerissen wird, während die größeren Körner beispielsweise entlang Kurve a_1 nach unten fallen. Selbstverständlich können die Körner unter beliebigem Winkel in den Gasstrom hineingeworfen werden oder auch allein unter der Wirkung der Schwerkraft hineinfallen. Die Flugbahnen von Körnern, die mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit in einen schräg nach oben gerichteten Gasstrom eintreten, haben MÜLLER und WESSEL [5.45] mittels eines Analogrechners unter Vernachlässigung der Auftriebskraft bestimmt. Dabei wurde das Widerstandsgesetz der als kugelförmig angenommenen Partikeln zwischen $Re = 5$ und $Re = 500$ durch einen Polygonzug angenähert.

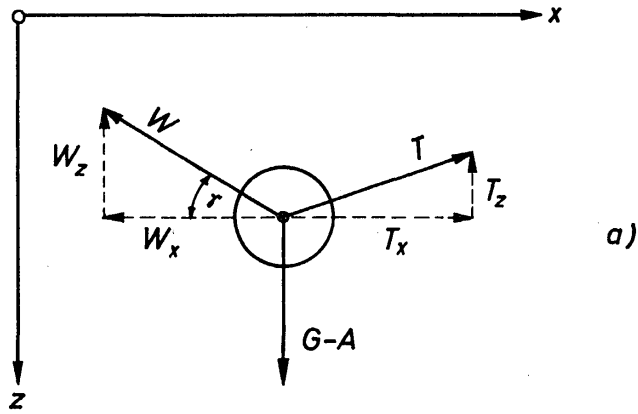
Die mit b_1 bezeichnete Partikelbahn in *Bild 5.15b* könnte z. B. von einer Blase, an der ein Feststoffkorn haftet, in einer Flotationsrinne durchlaufen werden. Der in horizontaler Richtung zurückgelegte Weg ergibt die Mindestlänge der Rinne.

Kurve b_2 mag schließlich als Beispiel für die Bahn eines Feststoffkornes in einem Flüssigkeitsstrom dienen. Solche Bahnkurven sind von KÄRTEN, RAASCH und RUMPF [5.46] berechnet worden, wobei jedoch Schwer- und Auftriebskraft vernachlässigt wurden. Der Gültigkeitsbereich des verwendeten Widerstandsgesetzes für Kugeln erstreckt sich von $Re = 0,1$ bis $Re = 4000$. Ähnliche Rechnungen für Kugelbahnen in einem ruhenden Medium unter Berücksichtigung des Stokeschen Widerstandsgesetzes hatten bereits LAPPLE und SHEPHARD [5.47] durchgeführt.

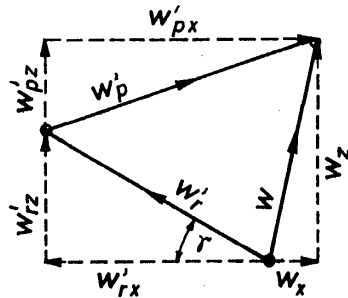
Mit den angeführten Beispielen konnten nur Hinweise auf die technische Bedeutung der nachfolgenden Rechnungen gegeben werden. In aller Strenge gelten die Rechnungen nur für den Fall, daß die Partikelbewegung in einer senkrechten Ebene verläuft. In vielen Fällen lassen sich die Ergebnisse mit guter Näherung auch auf Bewegungsvorgänge übertragen, die in einer waagerechten Ebene verlaufen, insbesondere dann, wenn die um die Auftriebskraft verminderte Schwerkraft klein im Vergleich zur Widerstandskraft ist.

5.42 Herleitung der Differentialgleichung für die Partikelbewegung

Bild 5.16a zeigt im x, z -Koordinatensystem die bei instationärer Kugelbewegung auftretenden Kräfte. Es sind T die Trägheitskraft, W die Widerstandskraft und $\overset{k}{G} - A$ die Differenz aus Schwer- und Auftriebskraft. In *Bild 5.16b* sind die Geschwindigkeit w des umgebenden Fluids, die absolute Partikelgeschwindigkeit



a)



b)

Bild 5.16

Kräfte- und Geschwindigkeitsdiagramm für instationäre Kugelbewegung auf gekrümmter Bahn

w'_p und die Relativgeschwindigkeit w'_r angegeben. Die Komponenten der Kräfte und Geschwindigkeiten sind durch die Indizes x und z gekennzeichnet.

Aus dem Kräftegleichgewicht folgt für die x -Richtung

$$m_b \frac{dw'_{p,x}}{dt} = W_x \quad (5.55)$$

und für die z -Richtung

$$m_b \frac{dw'_{p,z}}{dt} = G - A + W_z. \quad (5.56)$$

Für die Widerstandskomponenten W_x und W_z erhält man mittels der allgemeinen Beziehung für den Widerstand

$$W = \zeta \frac{d^2 \pi}{4} \frac{\rho w'_r |w'_r|}{2} \quad (5.57)$$

und den aus *Bild 5.16* folgenden Winkelfunktionen

$$\cos \gamma = \frac{w'_{r,x}}{w'_r} \quad (5.58)$$

sowie

$$\sin \gamma = \frac{w'_{r,z}}{w'_r} \quad (5.59)$$

die Ausdrücke:

$$W_x = W \cos \gamma = \zeta \frac{d_p^2 \pi}{4} \frac{\rho |w'_r|}{2} w'_{r,x}, \quad (5.60)$$

$$W_z = W \sin \gamma = \zeta \frac{d_p^2 \pi}{4} \frac{\rho |w'_r|}{2} w'_{r,z}. \quad (5.61)$$

Nach Einsetzen in die Gleichungen (5.55) und (5.56) ergeben sich unter Berücksichtigung von Gl.(5.27) für $G - A$ die folgenden Beziehungen:

$$m_b \frac{dw'_{p,x}}{dt} = \zeta \frac{d_p^2 \pi}{4} \frac{\varrho |w'_r|}{2} w'_{r,x}, \quad (5.62)$$

$$m_b \frac{dw'_{p,z}}{dt} = g \frac{d_p^3 \pi}{6} (\varrho_p - \varrho) + \zeta \frac{d_p^2 \pi}{4} \frac{\varrho |w'_r|}{2} w'_{r,z}. \quad (5.63)$$

Mit ζ wird der Widerstandsbeiwert bezeichnet, für den bei Annahme kugelförmiger Partikeln und stationärer Strömung das von KASKAS aufgestellte Gesetz gemäß Gl.(5.7) gilt. Sein Gültigkeitsbereich erstreckt sich über den gesamten Bereich der laminaren Grenzschichtströmung, also von $Re = 0$ bis $Re_{kr} = 3 \cdot 10^5$. Dieses Gesetz ist auch für die instationäre Strömung anwendbar, wenn man die Reynoldszahl,

$$Re \equiv \frac{|w'_r| d_p}{\nu} \quad (5.64)$$

mit dem Betrag der instationären Relativgeschwindigkeit w'_r bildet und gleichzeitig, gemäß den Erläuterungen im Abschnitt 5.34, annimmt, daß sich die träge Masse m_b aus der Partikelmasse m_p und einem Massenanteil des umgebenden Fluids zusammensetzt:

$$m_b = \frac{d_p^3 \pi}{6} (\varrho_p + \alpha \varrho). \quad (5.65)$$

Diese letzten beiden Beziehungen sind in die Gleichungen (5.62) und (5.63) einzuführen. Ferner sind die Komponenten $w'_{r,x}$ und $w'_{r,z}$ der instationären Relativgeschwindigkeit gemäß *Bild 5.16* durch die Ausdrücke

$$w'_{r,x} \equiv w_x - w'_{p,x} \quad (5.66)$$

und

$$w'_{r,z} \equiv w_z - w'_{p,z} \quad (5.67)$$

zu ersetzen. Für den Betrag der Relativgeschwindigkeit $|w'_r|$ ist der Zusammenhang

$$|w'_r| = [w'_{r,x}{}^2 + w'_{r,z}{}^2]^{1/2} \quad (5.68)$$

zu beachten. Setzt man auch diese Beziehungen noch in die Gleichungen (5.62) und (5.63) ein, so enthalten diese die Komponenten w_x und w_z der Geschwindigkeit des umgebenden Fluids sowie die Komponenten $w'_{p,x}$ und $w'_{p,z}$ der Partikelgeschwindigkeit. Letztere sowie deren Ableitungen werden durch folgende Differentialquotienten des Weges nach der Zeit ersetzt:

$$w'_{p,x} = \frac{dx}{dt}, \quad (5.69)$$

$$\frac{dw'_{p,x}}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (5.70)$$

$$w'_{p,z} = \frac{dz}{dt}, \quad (5.71)$$

$$\frac{dw'_{p,z}}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (5.72)$$

Damit ergeben sich für die Koordinaten x und z der Partikelbahnen die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & \left[18 + 3 \left(\frac{d_p^2 \left(w_x - \frac{dx}{dt} \right)^2}{\nu^2} + \frac{d_p^2 \left(w_z - \frac{dz}{dt} \right)^2}{\nu^2} \right)^{1/4} \right. \\ & \left. + 0,3 \left(\frac{d_p^2 \left(w_x - \frac{dx}{dt} \right)^2}{\nu^2} + \frac{d_p^2 \left(w_z - \frac{dz}{dt} \right)^2}{\nu^2} \right)^{1/2} \right] \cdot \frac{\left(w_x - \frac{dx}{dt} \right)}{\left(\frac{\rho_p}{\rho} + \alpha \right)} \cdot \frac{\nu}{d_p^2}, \quad (5.73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} = & \left[18 + 3 \left(\frac{d_p^2 \left(w_x - \frac{dx}{dt} \right)^2}{\nu^2} + \frac{d_p^2 \left(w_z - \frac{dz}{dt} \right)^2}{\nu^2} \right)^{1/4} \right. \\ & \left. + 0,3 \left(\frac{d_p^2 \left(w_x - \frac{dx}{dt} \right)^2}{\nu^2} + \frac{d_p^2 \left(w_z - \frac{dz}{dt} \right)^2}{\nu^2} \right)^{1/2} \right] \cdot \frac{\left(w_z - \frac{dz}{dt} \right)}{\left(\frac{\rho_p}{\rho} + \alpha \right)} \frac{\nu}{d_p^2} + g \frac{\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right)}{\left(\frac{\rho_p}{\rho} + \alpha \right)}. \quad (5.74) \end{aligned}$$

Um diese dimensionsbehafteten Gleichungen in einer dimensionslosen Form zu erhalten, werden folgende Kennzahlen verwendet:

$$\left. \begin{aligned} x^* &\equiv \frac{x/d_p}{\left(\frac{\rho_p}{\rho} + \alpha \right)}; & z^* &\equiv \frac{z/d_p}{\left(\frac{\rho_p}{\rho} + \alpha \right)}; & t^* &\equiv \frac{\nu \cdot t/d_p^2}{\left(\frac{\rho_p}{\rho} + \alpha \right)}; \\ w_x^* &\equiv \frac{w_x d_p}{\nu}; & w_z^* &\equiv \frac{w_z d_p}{\nu}; & Ar &\equiv \frac{g d_p^3}{\nu^2} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

Die endgültigen Gleichungen für die Koordinaten der Partikelbahnen lauten damit:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & 18 \left(w_x^* - \frac{dx^*}{dt^*} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left[\left(w_x^* - \frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right)^2 \right]^{1/4} \right. \\ & \left. + \frac{1}{60} \left[\left(w_x^* - \frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (5.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} = & 18 \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left[\left(w_x^* - \frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right)^2 \right]^{1/4} \right. \\ & \left. + \frac{1}{60} \left[\left(w_x^* - \frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} + Ar. \quad (5.77) \end{aligned}$$

In dieser Form wurden die Bewegungsgleichungen von GRAVE [5.48] aufgestellt und näher untersucht. Es sind zwei gekoppelte nichtlineare inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die nur mittels numerischer Verfahren ausgewertet werden können. Sie sind in einer solchen Form angegeben worden, daß die Ausdrücke in den geschweiften Klammern jeweils die Abweichungen des vollständigen vom Stokesschen Widerstandsgesetz darstellen. Für den Sonderfall des Stokesschen Widerstandsgesetzes $\zeta = 24/Re$ ergeben sich somit die Beziehungen:

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = 18 \left(w_x^* - \frac{dx^*}{dt^*} \right), \quad (5.78)$$

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = 18 \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right) + Ar. \quad (5.79)$$

Sie sind nicht gekoppelt und lassen sich in geschlossener Form integrieren.

Weitere Sonderfälle lassen sich aus den vollständigen Gleichungen (5.76) und (5.77) leicht entwickeln. Bewegt sich das umgebende Fluid gemäß *Bild 5.15a* nur in senkrechter Richtung, dann ist $w_x^* = 0$, und bewegt es sich allein in horizontaler Richtung gemäß *Bild 5.15b*, dann ist $w_z^* = 0$ zu setzen. Im Falle eines ruhenden Fluids sind gleichzeitig w_x^* und $w_z^* = 0$. Findet die Bewegung von Fluid und Partikeln nur in senkrechter Richtung statt, dann entfällt die Gleichung für die x -Komponente und in der Gleichung für die z -Komponente sind die Größen $w_x^* = 0$ und $dx^*/dt^* = 0$ zu setzen.

Interessant sind weiterhin jene Fälle, in denen man den Einfluß der Schwer- und Auftriebskraft im Vergleich zur Widerstandskraft vernachlässigen darf. Dann muß entweder das Dichteverhältnis $\rho_p/\rho \approx 1$ sein oder die Galileizahl $Ga \equiv g d_p^3/\nu^2$ sehr kleine Werte annehmen. Da die Galileizahl von der dritten Potenz des Partikeldurchmessers d_p abhängt, wird man häufig die genannten Vernachlässigungen begehen dürfen, wenn d_p sehr klein ist. Je größer die Geschwindigkeit w_z ist, desto größer darf d_p noch werden.

Sind die Schwer- und Auftriebskraft im Vergleich zur Widerstandskraft vernachlässigbar, dann lassen sich die Gleichungen (5.76) und (5.77) bzw. (5.78) und (5.79) auch zur Berechnung von Partikelbahnen verwenden, die in einer horizontalen Ebene liegen. Man hat dann gedanklich nur das Koordinatensystem von der senkrechten in die horizontale Ebene zu legen.

Im folgenden werden für einige Fälle Partikelbahnen berechnet, womit vornehmlich das Ziel angestrebt wird, die Lösungsmöglichkeiten der Differentialgleichungen zu erörtern.

5.43 Partikelbewegung im Gültigkeitsbereich des Stokesschen Gesetzes

Ist die Reynoldszahl der Partikeln im Verlauf der gesamten Bahnkurve kleiner als etwa 1, was bei kleinem Durchmesser und kleiner Relativgeschwindigkeit häufig möglich ist, dann gelten die Gleichungen (5.78) und (5.79). Diese Gleichungen werden unter Berücksichtigung folgender Anfangsbedingungen integriert:

$$\begin{aligned}
t^* = 0: \quad w_{p,x}^* &= w_{p,x,o}^* \equiv \frac{w_{p,x,o} d_p}{\nu}, \\
w_{p,z}^* &= w_{p,z,o}^* \equiv \frac{w_{p,z,o} d_p}{\nu}, \\
x^* &= 0, \\
z^* &= 0.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Zur Zeit t^* ergeben sich $w_{p,x}^*$, $w_{p,z}^*$, x^* und z^* . Mit $w_{p,x,o}$ und $w_{p,z,o}$ werden die Komponenten der Partikelgeschwindigkeit beim Eintritt in das Strömungsfeld bezeichnet.

Die erste Integration liefert die Geschwindigkeitskomponenten:

$$w_{p,x}^{\prime*} = w_x^* + (w_{p,x,o}^* - w_x^*) e^{-18 t^*}, \tag{5.81}$$

$$w_{p,z}^{\prime*} = w_z^* + \frac{Ar}{18} + \left[w_{p,z,o}^* - w_z^* - \frac{Ar}{18} \right] \cdot e^{-18 t^*}. \tag{5.82}$$

Die zweite Integration führt auf die Ortskoordinaten:

$$x^* = w_x^* t + \frac{1}{18} (w_{p,x,o}^* - w_x^*) [1 - e^{-18 t^*}], \tag{5.83}$$

$$z^* = \frac{1}{18} \left(w_{p,z,o}^* - w_z^* - \frac{Ar}{18} \right) (1 - e^{-18 t^*}) + \left(w_z^* + \frac{Ar}{18} \right) t^*. \tag{5.84}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Bewegung des Fluids und die der Partikeln in einer senkrechten Ebene erfolgen, beschreiben diese Gleichungen eine große Zahl technisch interessanter Bewegungsvorgänge. Die Strömungsrichtung des Fluids und die Anfangsrichtung der Partikeln lassen sich in beliebiger Weise ändern, indem man die Fluidgeschwindigkeit w und die Anfangsgeschwindigkeit $w_{p,o}$ der Partikeln entsprechend *Bild 5.16* in ihre Komponenten zerlegt.

5.44 Partikelbewegung in einem senkrechten Strömungsfeld

Zur Anwendung der hergeleiteten Gleichungen soll im ersten Beispiel die Tropfenbewegung, wie sie in einem Apparat für die Zerstäubungstrocknung auftreten kann, berechnet werden. *Bild 5.17* zeigt in schematisierter Form die Zerstäubungseinrichtung. Die zu zerstäubende Flüssigkeit wird im Mittelpunkt der rotierenden Scheibe aufgegeben. Ihre Schichtdicke nimmt in Richtung zur Peripherie stetig ab. Eine genaue Berechnung des auf der Scheibe auftretenden Flüssigkeitsfilms erfolgt später im Zusammenhang mit Zerstäubungsproblemen. Hier wird davon ausgegangen, daß sich der Tropfen am Scheibenrand bildet und in tangentialer Richtung innerhalb einer horizontalen Ebene mit der Geschwindigkeit $w_{p,o,x}$ von der Scheibe fortgeschleudert wird. Unter der Wirkung der Schwerkraft wird die Bewegung allmählich senkrecht abwärts gerichtet, wobei vorausgesetzt wird, daß

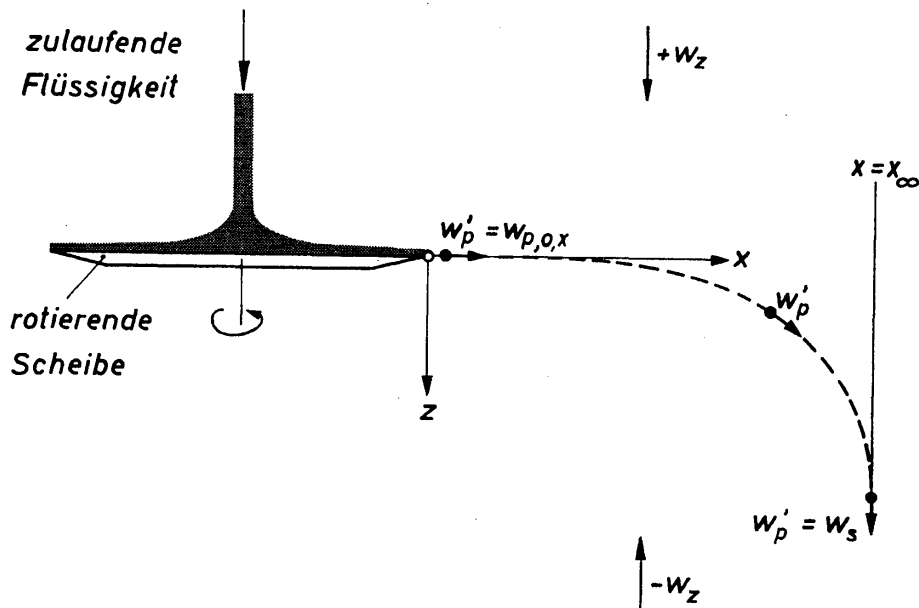


Bild 5.17. Zur Erläuterung der Flugbahn eines Tropfens nach Loslösung von der Zerstäuberscheibe

die Bewegung in einer ruhenden Umgebung oder in einem senkrecht abwärts gerichteten Gasstrom erfolgt. Die vom Tropfen schließlich erreichte Relativgeschwindigkeit ist in jedem Falle gleich der stationären Sinkgeschwindigkeit. Dieser Endwert wird dann erreicht, wenn in horizontaler Richtung der Weg $x = x_\infty$ zurückgelegt ist, der den Durchmesser des Trocknungsturms bestimmt.

Im folgenden werden die Rechnungen zunächst unter der Voraussetzung durchgeführt, daß die Partikelbewegung im Gültigkeitsbereich des Stokesschen Widerstandsgesetzes erfolgt. An Hand dieser verhältnismäßig einfachen Rechnungen werden die verschiedenen Einflüsse auf den Verlauf der Tropfenbahnen ausführlich besprochen. Anschließend werden dann noch einige Bahnkurven mitgeteilt, zu deren Berechnung das vollständige Widerstandsgesetz nach KASKAS herangezogen wurde.

Da die Geschwindigkeit des Fluids nur eine Komponente in senkrechter Richtung und die Anfangsgeschwindigkeit des Tropfens nur eine Komponente in horizontaler Richtung haben soll, ergeben sich bei Annahme des Stokesschen Gesetzes für die Ortskoordinaten folgende Gleichungen:

$$x^* = \frac{1}{18} w_{p,x,0}^* [1 - e^{-18 t^*}], \tag{5.85}$$

$$z^* = \left(w_z^* + \frac{Ar}{18} \right) t^* - \frac{1}{18} \left(w_z^* + \frac{Ar}{18} \right) [1 - e^{-18 t^*}]. \tag{5.86}$$

Aus Gl.(5.85) kann der auf den Partikeldurchmesser d_p bezogene und mit x_∞ bezeichnete maximale Flugweg in waagerechter Richtung berechnet werden. Bildet man den Grenzwert für $t^* \rightarrow \infty$, so ergibt sich hierfür

$$x_\infty^* = \frac{w_{p,x,0}^*}{18}. \tag{5.87}$$

Wird Gl. (5.85) durch Gl. (5.87) dividiert, dann erhält man die folgende Beziehung:

$$\frac{x^*}{x_\infty^*} \equiv \frac{x}{x_\infty} = 1 - e^{-18 t^*}. \quad (5.88)$$

Hieraus ergibt sich durch Logarithmieren für die dimensionslose Zeit t^* der Ausdruck

$$t^* = -\frac{1}{18} \ln \left(1 - \frac{x}{x_\infty} \right). \quad (5.89)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (5.88) und (5.89) in Gl. (5.86) erhält man

$$z^* = -\frac{1}{18} \left[w_z^* + \frac{Ar}{18} \right] \left[\ln \left(1 - \frac{x}{x_\infty} \right) + \frac{x}{x_\infty} \right]. \quad (5.90)$$

Diese Gleichung beschreibt die Tropfenbahnen, die in den *Bildern 5.18* und *5.19* für verschiedene Werte der Archimedeszahl Ar dargestellt sind.

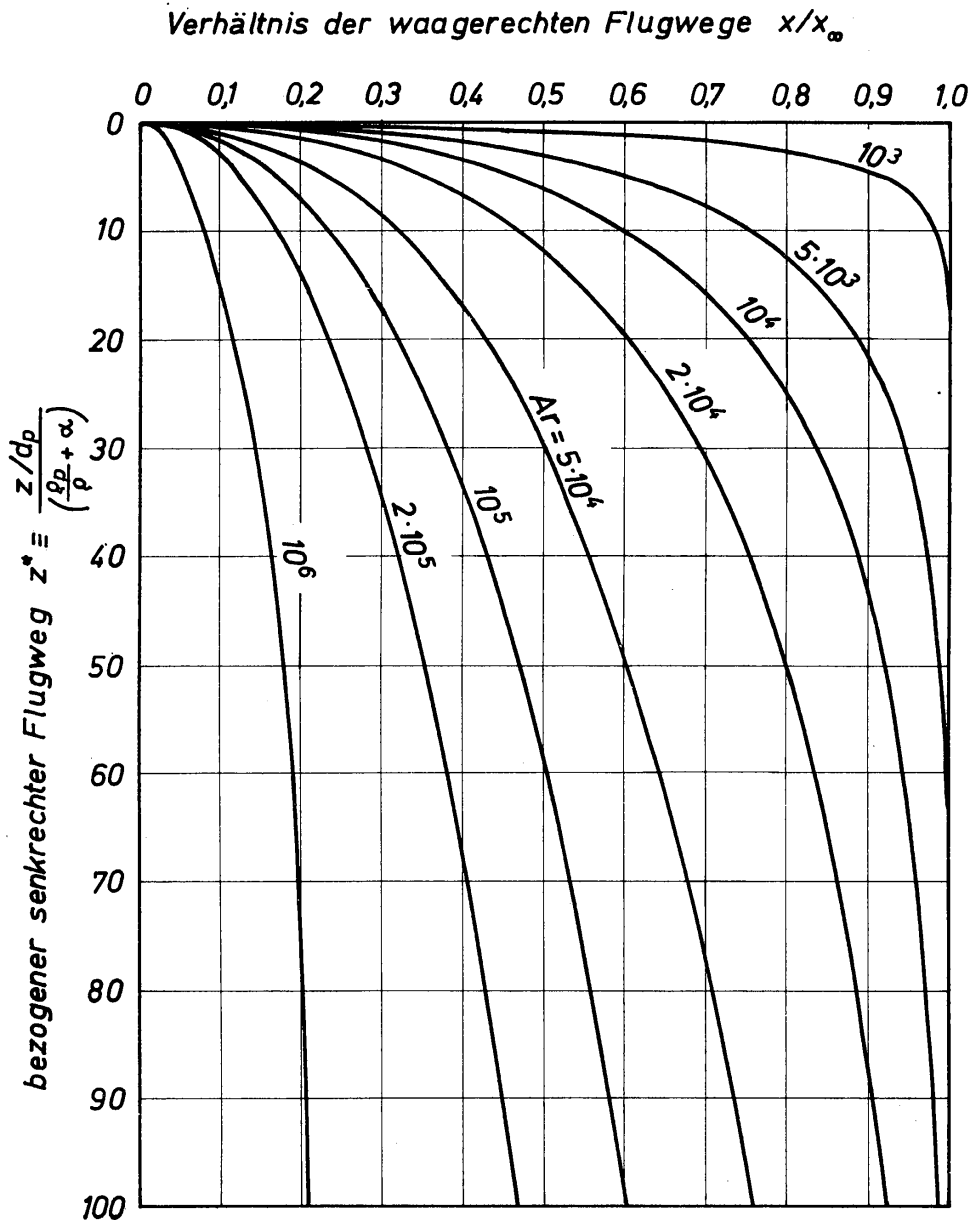


Bild 5.18. Bezogener senkrechter Flugweg z^* , abhängig vom Verhältnis der waagerechten Flugwege x/x_∞ mit Ar^* als Parameter; gültig für den Stokeschen Bereich und für $w_z = 0$

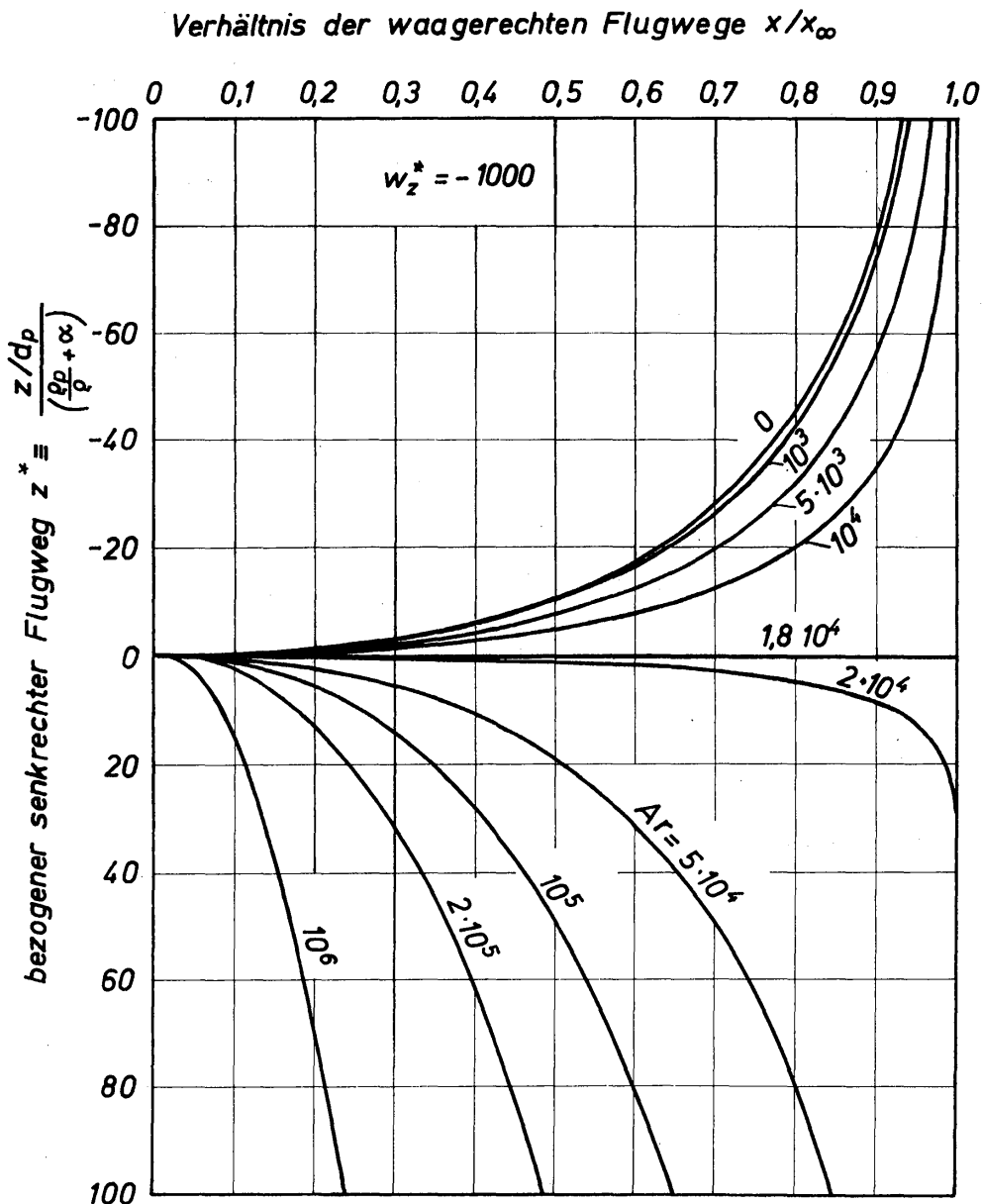


Bild 5.19. Bezogener senkrechter Flugweg z^* , abhängig vom Verhältnis der waagerechten Flugwege x/x_∞ mit Ar^* als Parameter, gültig für den Stokeschen Bereich und $w_z^* = -1000$

Bild 5.18 gilt für die Partikelbewegung im ruhenden Medium, so daß $w_z^* = 0$ ist und Bild 5.19 für die Partikelbewegung im aufwärts strömenden Fluid. Wie man aus Gl. (5.90) ersieht, tritt in diesem Fall noch die zusätzliche Kenngröße w_z^* auf, für die als Beispiel der Wert -1000 gewählt wurde.

Um die physikalischen Verhältnisse besser durchschauen zu können, wird der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer von Gl. (5.90) in folgender Weise umgeschrieben:

$$w_z^* + \frac{Ar}{18} = w_z^* + Re_s. \quad (5.91)$$

Hierin bedeuten Re_s die mit der stationären Sinkgeschwindigkeit w_s gebildete Reynoldszahl, wobei der Zusammenhang

$$Re_s \equiv \frac{|w_s| d_p}{\nu} = \frac{|Ar|}{18} \quad (5.92)$$

gilt. Re_s hat einen stets positiven Wert, so daß für positive oder negative Werte von z nur Größe und Richtung der dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeit w_z^* maßgebend sind. Hierbei können drei Fälle unterschieden werden:

- a) $(Re_s + w_z^*) > 0$: Die Strömungsgeschwindigkeit ist negativ und betragsmäßig kleiner als die Sinkgeschwindigkeit oder aber positiv. Die Partikeln bewegen sich auf gekrümmten Bahnen abwärts.
- b) $(Re_s + w_z^*) = 0$: Die aufwärts gerichtete Strömungsgeschwindigkeit ist dem Betrage nach gleich der Sinkgeschwindigkeit. Die Partikelbahn ist in diesem Fall eine waagerechte Gerade.
- c) $(Re_s + w_z^*) < 0$: Die aufwärts gerichtete Strömungsgeschwindigkeit ist größer als der Betrag der Sinkgeschwindigkeit. In diesem Fall bewegen sich die Partikeln auf gekrümmten Bahnen nach oben.

Da der in horizontaler Richtung zurückgelegte maximale Flugweg x_∞ einen Grenzwert darstellt, der erst nach unendlich langer Zeit t^* und für $z^* = \infty$ erreicht wird, soll die Größe

$$z_{95}^* \equiv f(0,95 x_\infty^*) \quad (5.93)$$

definiert werden, die denjenigen senkrechten Flugweg des Partikels angibt, bei dem es in waagerechter Richtung einen Weg $0,95 x_\infty^*$ zurückgelegt hat. Aus Gl.(5.90) ergibt sich hierfür die Beziehung:

$$z_{95}^* = 0,114 \left(\frac{Ar}{18} + w_z^* \right). \quad (5.94)$$

Damit hat man den Bereich der Partikelbahn abgegrenzt, innerhalb dessen die Bewegung instationär ist. Außerhalb dieses Bereiches bewegt sich die Partikel näherungsweise mit der stationären Relativgeschwindigkeit, die dem Betrage nach gleich der Sinkgeschwindigkeit ist. Die Kenntnis dieses Bereiches kann z. B. für Fragen des Stoffüberganges, und somit auch für die Bemessung von Trocknungstürmen, von Bedeutung sein. Für die Zeit der instationären Bewegung erhält man aus Gl.(5.89) die Beziehung

$$t_{95}^* = 0,166. \quad (5.95)$$

Zur Vertiefung des Einblicks in die Bewegungsvorgänge wird man weiterhin die in jedem Punkt der Bahnkurve auftretende Absolutgeschwindigkeit w'_p des Tropfens bestimmen, die sich wie folgt aus den Komponenten zusammensetzt:

$$w'_p = \sqrt{w'_{p,x}{}^2 + w'_{p,z}{}^2}. \quad (5.96)$$

Für $w'_{p,x}$ und $w'_{p,z}$ gelten die Gleichungen (5.81) und (5.82). Durch Vergleich der am Anfang der Tropfenbahn auftretenden Geschwindigkeit $w_{p,x,0}$ mit der am Ende sich einstellenden stationären Relativgeschwindigkeit, die dem Betrage nach gleich der Sinkgeschwindigkeit w_s ist, erhält man eine Vorstellung von den auftretenden Verzögerungen bzw. Beschleunigungen, die außerordentlich groß sein können.

Maßgebend für alle Fragen des Stoff- und Wärmeüberganges ist die Relativgeschwindigkeit w'_r , die sich gemäß den Gleichungen (5.66) und (5.67) aus den Komponenten der Fluid- und der Partikelgeschwindigkeit berechnen läßt. Zu beachten ist jedoch, daß der Stoff- und Wärmeübergang in einer noch nicht geklärten Weise von der Beschleunigung bzw. Verzögerung beeinflusst wird.

Die bislang in diesem Abschnitt durchgeführten Rechnungen setzten die Anwendbarkeit des Stokesschen Widerstandsgesetzes voraus. Im folgenden sollen noch einige Ergebnisse besprochen werden, die sich unter Berücksichtigung des Widerstandsgesetzes von KASKAS gemäß Gl. (5.7) ergeben. Dieses Widerstandsgesetz gilt zwischen den Grenzen $Re = 0$ und $Re = 3 \cdot 10^5$. Da für die betrachteten Bedingungen $w_x^* = 0$ ist, erhält man aus den vollständigen Differentialgleichungen (5.76) und (5.77) folgende vereinfachten Gleichungen für die Bahnkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = 18 - \frac{dx^*}{dt^*} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right)^2 \right]^{1/4} \right. \\ \left. + \frac{1}{60} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = 18 \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right)^2 \right]^{1/4} \right. \\ \left. + \frac{1}{60} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(w_z^* - \frac{dz^*}{dt^*} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} + Ar. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Da eine geschlossene Lösung dieses gekoppelten Gleichungssystems nicht mehr möglich ist, muß ein geeignetes numerisches Verfahren angewendet werden. Hierfür erweist sich ein von NYSTRÖM auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung erweitertes Runge-Kutta-Verfahren als geeignet, dessen Anwendung ZURMÜHL [5.49] ausführlich beschrieben hat.

Da die Tropfenbahnen in qualitativer Hinsicht mit den bereits in den *Bildern 5.18* und *5.19* dargestellten übereinstimmen, soll darauf nicht mehr eingegangen werden. Von Interesse ist für den Bau von Apparaten insbesondere die maximale Länge des Flugweges x_∞^* in horizontaler Richtung. Der maximale Flugweg x_∞^* ist bei Anwendung des vollständigen Widerstandsgesetzes eine Funktion der Größen $w_{p,x,o}^*$, w_z^* und Ar , während bei Anwendung des Stokesschen Gesetzes gemäß Gl. (5.87) nur eine Abhängigkeit von $w_{p,x,o}^*$ auftrat. *Bild 5.20* zeigt x_∞^* als Funktion von $w_{p,x,o}^*$ für einige Werte der Archimedeszahl Ar und den konstanten Wert $w_z^* = 100$. Der bezogene Flugweg wird mit zunehmender Archimedeszahl kleiner. Die für $Ar = 10$ angegebene Kurve stimmt bereits mit sehr guter Näherung mit derjenigen für $Ar = 0$ überein. Diese Kurve gibt daher den Grenzfall vernachlässigbarer Schwerkraft wieder. Die mit α bezeichnete Kurve ist nach Gl. (5.87) berechnet worden und gilt für den Fall der Partikelbewegung im Stokesschen Bereich. Es zeigt sich sehr deutlich, daß die Anwendung des Stokes-

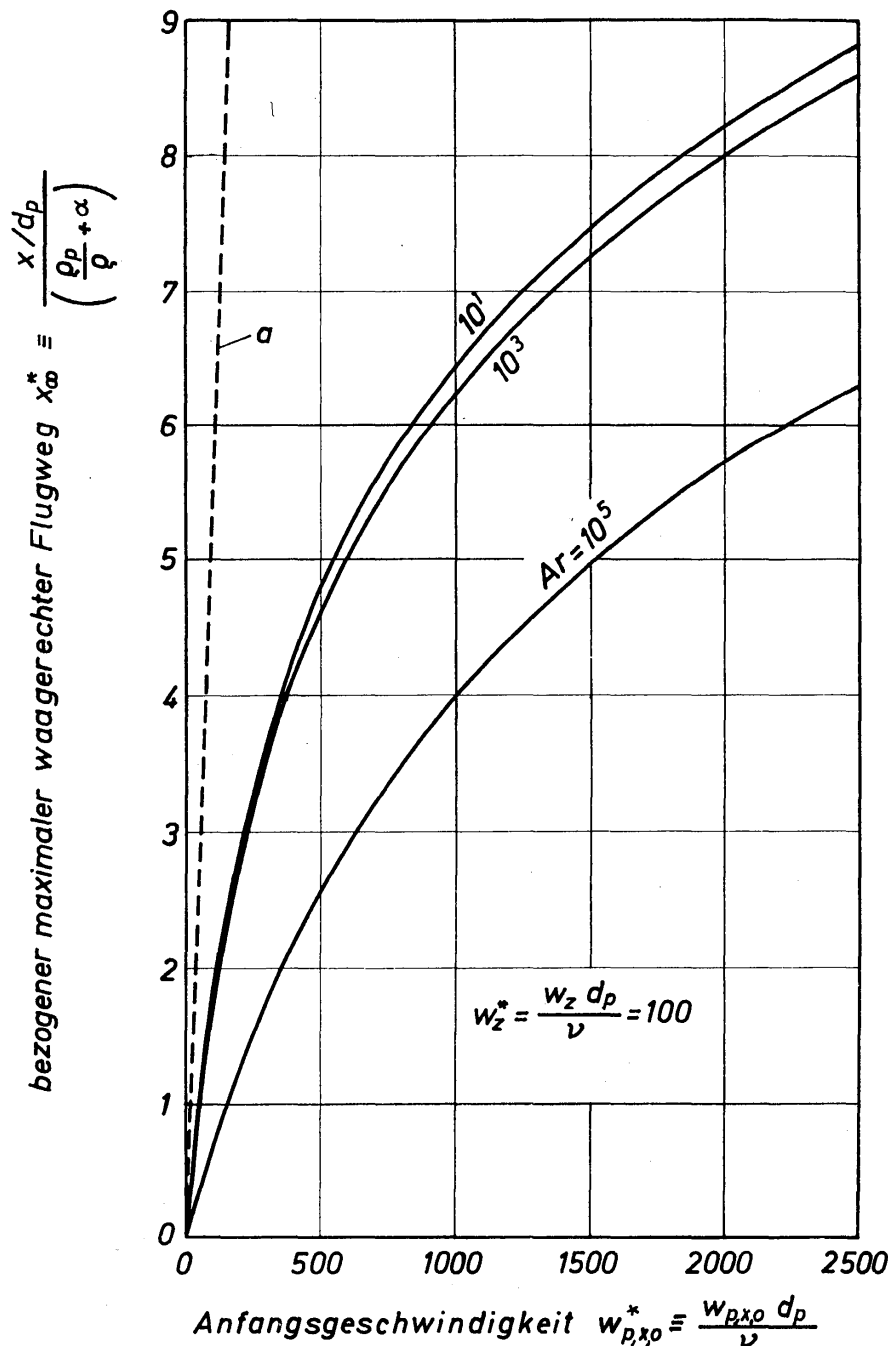


Bild 5.20. Bezogener maximaler Flugweg in waagerechter Richtung x_{∞}^* , abhängig von $w_{p,x,0}^*$ mit Ar als Parameter, gültig für $w_z^* = 100$ bei Berücksichtigung des allgemeinen Widerstandsgesetzes

schen Widerstandsgesetzes oberhalb seines Gültigkeitsbereiches erheblich zu große Flugwege x_{∞}^* liefert.

Ist die Schwerkraft der Partikel vernachlässigbar, was näherungsweise bereits für $Ar < 10^3$ zutrifft, dann läßt sich x_{∞}^* in einem alle weiteren Einflüsse berücksichtigenden Diagramm darstellen, das in *Bild 5.21* wiedergegeben ist. Zum Vergleich ist wieder die in Zusammenhang mit *Bild 5.20* erläuterte Kurve *a* eingezeichnet. Ferner sind in *Bild 5.21* einige Meßwerte eingetragen, durch die die Kurve für $w_z^* \leq 10$ recht gut bestätigt wird [5.50]. Danach ist es also gerechtfertigt, den theoretisch berechneten Bahnkurven volles Vertrauen zu schenken.

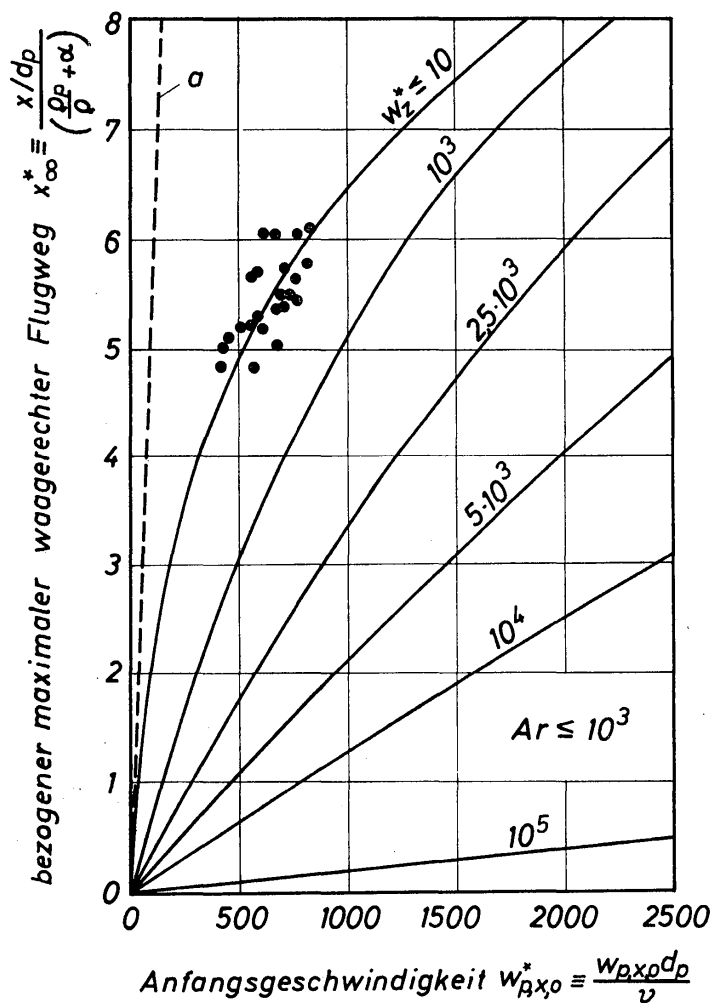


Bild 5.21. x_∞^* abhängig von der Anfangsgeschwindigkeit $w_{p,x,0}^*$ mit w_z^* als Parameter, gültig für $Ar < 10^3$ bei Berücksichtigung des allgemeinen Widerstandsgesetzes. Eingezeichnete Punkte geben Meßwerte wieder

5.45 Partikelbewegung in einem waagerechten Strömungsfeld

Als weiteres Beispiel sollen die Bahnkurven von Blasen in einem horizontalen Strömungsfeld berechnet werden. In *Bild 5.15* ist eine solche Bahnkurve bereits dargestellt und mit b_1 bezeichnet worden. Das strömende Medium hat die konstante Geschwindigkeit w . Bahnkurven von der dargestellten Art werden beispielsweise in Flotationsrinnen von Blasen, an denen kleine Feststoffpartikeln haften, durchlaufen. Für die Berechnung solcher Rinnen ist es notwendig, zu wissen, nach welcher horizontalen Strecke die Blasen an die freie Flüssigkeitsoberfläche gelangen.

Die Bahnkurven für die Partikeln werden in allgemeinsten Form durch die Differentialgleichungen (5.76) und (5.77) beschrieben. Die positiven Richtungen der Ortskoordinaten x und z gehen aus *Bild 5.16* hervor. Zur Vereinfachung der Rechnungen wird zunächst angenommen, daß die Partikelbewegung im Gültigkeitsbereich des Stokesschen Widerstandsgesetzes stattfindet. Dann erhält man folgende einfache Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = 18 \left(w_x^* - \frac{dx^*}{dt^*} \right), \tag{5.99}$$

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = 18 \frac{dz^*}{dt^*} + Ar. \tag{5.100}$$

Die hierin auftretenden dimensionslosen Größen sind in Gl.(5.75) erklärt. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung, wonach die Partikel sich zur Zeit $t = 0$ im Ruhezustand befindet, lassen sich die obigen Gleichungen in geschlossener Form integrieren. Dividiert man die Lösungsgleichungen für die Ortskoordinaten z und x durcheinander, dann erhält man zur Beschreibung der Bahnkurve die Beziehung:

$$\frac{z}{x} = \frac{Ar/18}{w_x^*}. \quad (5.101)$$

Durch Vergleich mit Gl.(5.31) ergibt sich, daß $Ar/18$ gleich der dimensionslosen Steiggeschwindigkeit der Partikel ist, wenn man den Zusammenhang $w_r = -w_s$ beachtet. Somit läßt sich die Gleichung für die Bahnkurve in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{z}{x} = \frac{|w_s|}{w_x}. \quad (5.102)$$

Hiernach ist das Verhältnis der Ortskoordinaten gleich dem Verhältnis von Steiggeschwindigkeit w_s der Partikel zu Strömungsgeschwindigkeit w_x des Fluids. Die Bahnkurven der Partikeln werden durch gerade Linien dargestellt. Voraussetzungs-gemäß gilt dieses Ergebnis für die instationäre und die stationäre Bewegung bei Gültigkeit des Stokesschen Widerstandsgesetzes.

Es sei an dieser Stelle aber schon darauf hingewiesen, daß Gl.(5.102) auch unter Berücksichtigung des vollständigen Widerstandsgesetzes gemäß Gl.(5.7) gilt, so man eine stationäre Partikelbewegung voraussetzt. Diese Voraussetzung ist für die Berechnung von Blasenbahnen in Flotationsrinnen gerechtfertigt, da der im instationären Zustand durchlaufene Abschnitt der Bahnkurve kurz ist im Vergleich zur gesamten Bahnkurve. Somit ist Gl.(5.102) also von großer praktischer Bedeutung.

Eine genaue Berechnung der Bahnkurven mittels der vollständigen Differentialgleichungen hat SCHULZE [5.51) durchgeführt. Er stellte fest, daß Gl.(5.102) dann zur Berechnung der Bahnkurven genügend genaue Ergebnisse liefert, wenn $w_s/w_x \leq 1$, $x/d_p \geq 1000$ und $z/d_p \geq 100$ sind. Diese Bedingungen sind in Flotationsrinnen immer erfüllt.

5.46 Partikelbewegung im linearen Strömungsfeld mit überlagertem elektrischem Feld

Es sollen die Bahnkurven für die Bewegung einzelner Partikeln im elektrischen Feld konstanter und veränderlicher Stärke berechnet werden. Die Kenntnis solchen Bahnkurven kann für die Auslegung von Staubabscheidern und Geräten zur Klassierung von Korngemischen nach Korngröße und Korndichte von Bedeutung sein. Zur Vereinfachung der Rechnungen, die MARZILGER [5.52) durchführte, wird das Stokessche Gesetz zur Bestimmung der Widerstandskraft eingeführt.

5.461 Partikelbewegung im elektrischen Feld konstanter Stärke

An Hand von *Bild 5.22* sollen die zu erwartenden Bahnkurven und die zu ihrer Berechnung erforderlichen Annahmen erläutert werden. Zwischen den senkrechten Plattenelektroden *A* und *B*, die im Abstand *a* angeordnet sind, wird ein elektrisches Feld konstanter Stärke aufrechterhalten. Ist *U* die an die Elektroden angelegte Spannung, dann ist die Feldstärke

$$E = \frac{U}{a}. \tag{5.103}$$

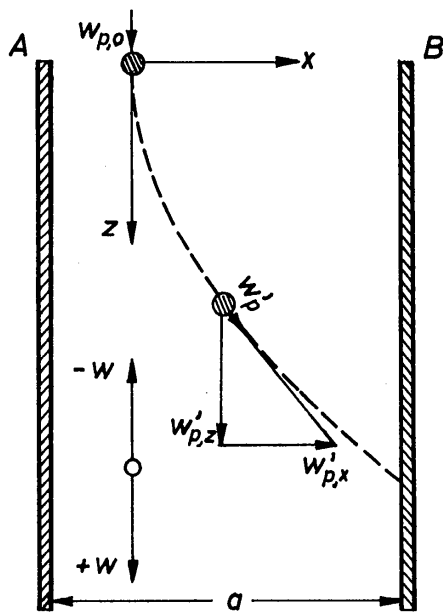


Bild 5.22
Zur Erläuterung der Kornbewegung zwischen zwei senkrecht angeordneten Plattenelektroden

Die auf eine zwischen den Elektroden befindliche Partikel wirkende elektrische Feldkraft ist

$$K_e = Q E, \tag{5.104}$$

wobei *Q* die elektrische Ladung des Kornes darstellt. Definiert man in Anlehnung an die Beschleunigung im Schwerfeld eine elektrische Feldbeschleunigung *g_e*, so ergibt sich diese zu

$$g_e = \frac{K_e}{m_p} = \frac{Q E}{m_p}. \tag{5.105}$$

Mit *m_p* wird wieder die Masse des Kornes bezeichnet.

Gemäß *Bild 5.22* wird davon ausgegangen, daß das Korn mit der Geschwindigkeit *w_{p,o}* an der Stelle *z = 0* in das elektrische Feld eintritt. Das Korn bewegt sich mit der Geschwindigkeit *w'_p* auf der angedeuteten Bahnkurve in Richtung auf die Elektrodenplatte *B*. Ferner ist vorgesehen, daß sich ein Gasstrom mit der konstanten Geschwindigkeit *w* in oder entgegen der positiven *z*-Richtung zwischen den Platten bewegt. Zwischen Korn und Gas besteht in senkrechter Richtung bei instationärer Bewegung die Relativgeschwindigkeit

$$w'_r \equiv w - w'_{p,z} \tag{5.106}$$

und bei Übergang in den stationären Bewegungszustand

$$w_r \equiv w - w_{p,z}. \tag{5.107}$$

Die mit *w_r* bezeichnete Relativgeschwindigkeit bei stationärer Bewegung des Kornes in senkrechter Richtung hat den Betrag der Sinkgeschwindigkeit *w_s*, aber eine entgegengesetzte Richtung; es ist also *w_r = -w_s*.

Die am Korn angreifenden Kräfte werden in ihre z - und x -Komponenten zerlegt. Für die z -Komponente ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung:

$$m_p \frac{dw'_{p,z}}{dt} = m_p g \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_p}\right) + W_z. \quad (5.108)$$

Hierin sind t die Zeit, der erste Term auf der rechten Seite die Differenz aus Schwer- und Auftriebskraft und W_z die z -Komponente des Widerstandes, die eine Funktion der Relativgeschwindigkeit w'_r ist. Als träge Masse wird allein die Partikelmasse m_p berücksichtigt, da die Bewegung des Kornes in einem Gas erfolgt und daher die mitbeschleunigte Gasmasse vernachlässigt werden kann. Aus dem Stokesschen Widerstandsgesetz folgt

$$W_z = 3\pi\nu d_p \varrho w'_r. \quad (5.109)$$

Diese Gleichung läßt sich unter Verwendung der stationären Relativgeschwindigkeit

$$w_r = w - w_{p,z} = -\frac{1}{18} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1\right) \frac{d_p^2 g}{\nu} \quad (5.110)$$

folgendermaßen umformen:

$$W_z = -m_p g \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_p}\right) \frac{w'_r}{w_r} = -m_p g \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_p}\right) \frac{w - w'_{p,z}}{w - w_{p,z}}. \quad (5.111)$$

Nach Einführen in Gl. (5.108) erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dw'_{p,z}}{dt} = g \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_p}\right) \left(1 - \frac{w - w'_{p,z}}{w - w_{p,z}}\right). \quad (5.112)$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $w'_{p,z} = w_{p,o}$ für $t = 0$ ergibt die Integration

$$\frac{w'_{p,z}}{w_{p,z}} = 1 - \left(1 - \frac{w_{p,o}}{w_{p,z}}\right) e^{\frac{(1-\varrho/\varrho_p)gt}{w-w_{p,z}}}. \quad (5.113)$$

Wegen $w'_{p,z} = dz/dt$ führt eine weitere Integration unter Berücksichtigung von $z = 0$ für $t = 0$ zu

$$z = w_{p,z} t - \frac{(w - w_{p,z})(w_{p,o} - w_{p,z})}{g(1 - \varrho/\varrho_p)} \left[1 - e^{\frac{(1-\varrho/\varrho_p)gt}{w-w_{p,z}}}\right]. \quad (5.114)$$

Um diese Gleichung in eine dimensionslose Form überführen zu können, werden folgende Größen definiert:

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{w_r} &\equiv w^*; & \frac{a}{d_p} &\equiv a^*; & \frac{z}{a} &\equiv z^*; \\ \frac{w_{p,o}}{w_r} &\equiv w_{p,o}^*; & \frac{t}{m_p} \cdot 3\pi\nu d_p \varrho &= t^*. \end{aligned} \right\} \quad (5.115)$$

Hiermit erhält man für den senkrechten Weg z^* nach Umformung die folgende Gleichung:

$$z^* = \frac{Ga}{324 a^*} \frac{\rho_p}{\rho} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) [(1-w^*) t^* - (1-w^* + w_{p,o}^*) (1-e^{-t^*})]. \quad (5.116)$$

Mit $Ga \equiv d_p^3 g / \nu^2$ wird die Galileizahl bezeichnet.

Für die x -Komponente der am Korn angreifenden Kräfte führt die Gleichgewichtsbedingung zu

$$m_p \frac{dw'_{p,x}}{dt} = K_e + W_x. \quad (5.117)$$

Die Feldkraft K_e läßt sich mit dem Beschleunigungsverhältnis

$$g_e^* \equiv \frac{g_e}{g} \quad (5.118)$$

folgendermaßen ausdrücken:

$$K_e = g_e^* m_p g. \quad (5.119)$$

Die Widerstandskraft W_x ist bei Annahme des Stokesschen Widerstandsgesetzes durch

$$W_x = 3 \pi \nu d_p \rho w'_{r,x} \quad (5.120)$$

gegeben, wobei die Relativgeschwindigkeit $w'_{r,x} = -w'_{p,x}$, also entgegengesetzt gleich der Absolutgeschwindigkeit der Partikel, ist, da das Fluid in x -Richtung keine Geschwindigkeitskomponente besitzt. Nach längerem Flugweg stellt sich die stationäre Geschwindigkeit $w_{r,x}$ ein. Hierfür erhält man aus Gl.(5.117) mit $K_e = -W_x$ den Ausdruck:

$$-w_{r,x} = w_{p,x} = \frac{g_e^* m_p g}{3 \pi \nu d_p \rho}. \quad (5.121)$$

Damit läßt sich die Kräftegleichung (5.117) in die folgende Form bringen:

$$\frac{dw'_{p,x}}{dt} = g_e^* g \left(1 - \frac{w'_{p,x}}{w_{p,x}} \right). \quad (5.122)$$

Mit der Anfangsbedingung $w'_{p,x} = 0$ für $t = 0$ ergibt die Integration

$$\frac{w'_{p,x}}{w_{p,x}} = 1 - e^{-\frac{g_e^* g t}{w'_{p,x}}}. \quad (5.123)$$

Wegen $w'_{p,x} = dx/dt$ führt eine weitere Integration unter Berücksichtigung von $x = 0$ für $t = 0$ zu der dimensionslosen Gleichung:

$$x^* = g_e^* \frac{Ga}{324 a^*} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)^2 \{ t^* - [1 - e^{-t^*}] \}. \quad (5.124)$$

Hierin sind g_e^* und t^* die bereits durch die Gleichungen (5.118) und (5.115) definierten Größen und

$$x^* \equiv \frac{x}{a} \quad (5.125)$$

die auf den Plattenabstand bezogene Querkoordinate. Mit den Gleichungen (5.116) für z^* und (5.124) für x^* ist die Bahnkurve einer Partikel vollkommen bestimmt. Sie soll für einige Sonderfälle näher untersucht werden.

a) $w^* \equiv w/w_r = 0$ und $w_{p,o}^* \equiv w_{p,o}/w_r = 0$

Unter diesen Bedingungen beginnt das Korn seine Bewegung aus der Ruhelage heraus, und das umgebende Medium befindet sich im Ruhezustand. Mit den Gleichungen (5.116) und (5.124) erhält man die einfache Beziehung

$$x^* = \frac{\varrho_p/\varrho}{\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1} g_e^* z^*. \quad (5.126)$$

Vernachlässigt man den Auftrieb, was bei der Kornbewegung in Luft wegen $\varrho_p/\varrho \gg 1$ zulässig ist, dann wird hieraus:

$$x^* = g_e^* z^*. \quad (5.127)$$

Die Bahnkurven sind also gerade Linien, deren Steigung durch die Beschleunigungskennzahl g_e^* gegeben ist. Den größten Weg hat jenes Korn innerhalb des elektrischen Feldes zurückzulegen, das sich bei $z = 0$ in unmittelbarer Nähe der Elektrodenplatte A befindet. Dieser längste Weg ist durch die senkrechte Entfernung vom Eintritt $z^* = 1/g_e^*$ gekennzeichnet. Je geringer g_e^* ist, desto größer wird z^* , d.h. also auch, die erforderliche Plattenlänge, um die maximale Ablenkung bzw. die Abscheidung zu erreichen.

b) $w^* \equiv w/w_r = 0$ und $w_{p,o}^* \equiv w_{p,o}/w_r = -1$

Diese Bedingungen besagen, daß das Korn mit der stationären Relativgeschwindigkeit w_r in das elektrische Feld eintritt und sich in einer ruhenden Umgebung fortbewegt. Aus Gl. (5.116) erhält man die dimensionslose Zeit

$$t^* = \frac{324 a^* z^*}{G a \frac{\varrho_p}{\varrho} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right)}, \quad (5.128)$$

womit sich nach Einsetzen in Gl. (5.124) und unter Vernachlässigung der Auftriebskraft folgende Gleichung für die Bahnkurve ergibt:

$$x^* = g_e^* z^* - \frac{g_e^* Ga}{324 a^*} [1 - e^{-324 a^* z^* [Ga(\rho_p/\rho)]^{-1}}] \left(\frac{\rho_p}{\rho}\right)^2. \quad (5.129)$$

Für $Ga = 0$, was praktisch gleichbedeutend mit $d_p = 0$ ist, geht Gl.(5.129) in Gl.(5.127) über. In *Bild 5.23* sind einige Bahnkurven für verschiedene Werte des Beschleunigungsverhältnisses g_e^* dargestellt. Zum Vergleich ist für $g_e^* = 1$ auch eine nach Gl. (5.127) berechnete Bahnkurve gestrichelt eingetragen. Aus diesem Bild läßt sich unmittelbar folgern, daß die Bahnkurven um so steiler verlaufen werden, je größer die Eintrittsgeschwindigkeit $w_{p,o}$ ist. Für $w_{p,o}^* < -1$ muß $w^* < 0$ sein, d.h. es muß ein Gaststrom in positiver z -Richtung vorhanden sein.

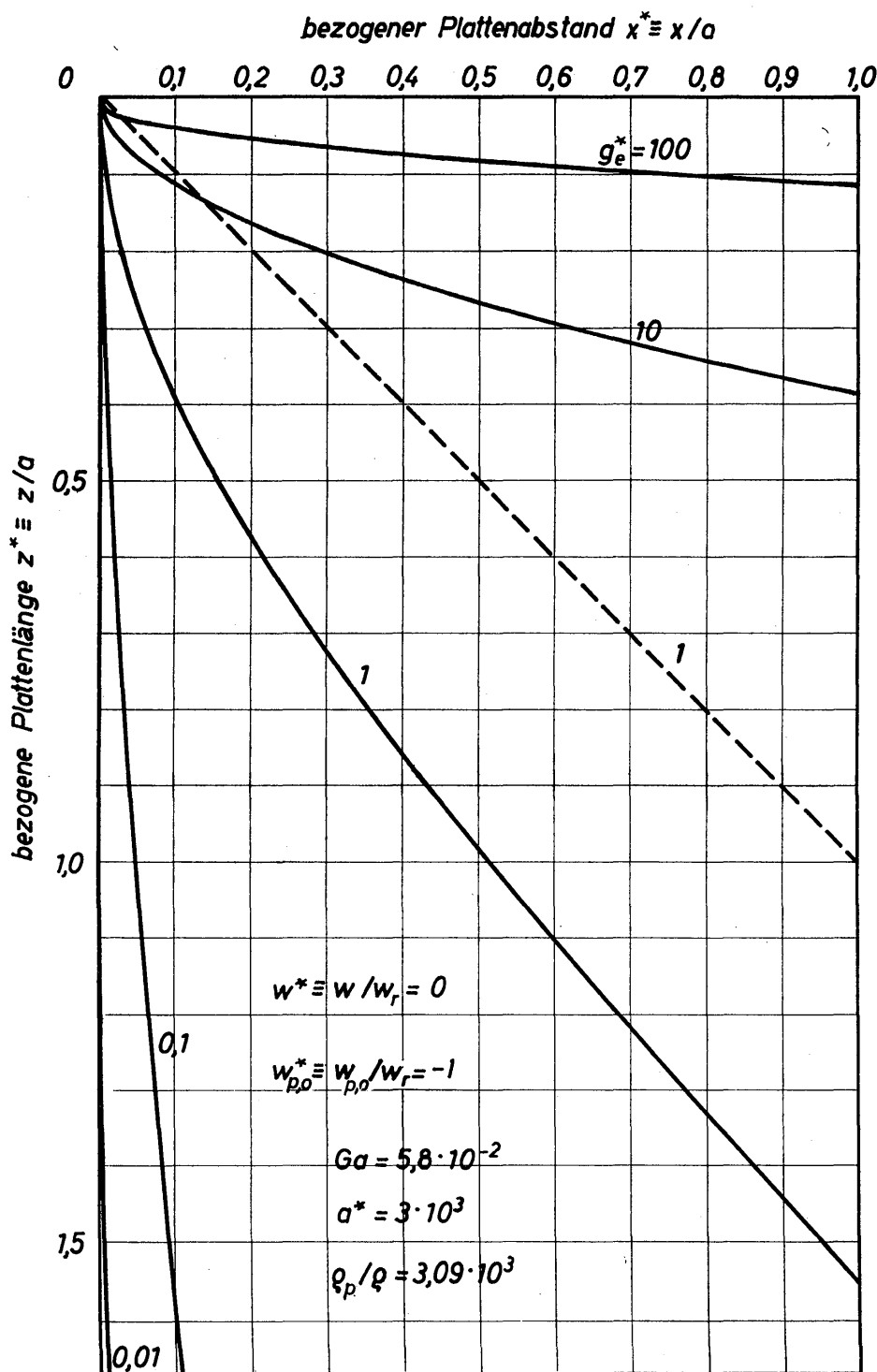


Bild 5.23
Bahnkurven für ein Korn, das mit der Sinkgeschwindigkeit w_s in das elektrische Feld eintritt; das umgebende Medium befindet sich im Ruhezustand

c) $w^* \equiv w/w_r = 1$ und $w_{p,o}^* \equiv w_{p,o}/w_r = -1$

Diese Bedingungen besagen, daß sich das Korn in einem Fluid bewegt, dessen Geschwindigkeit w senkrecht aufwärts gerichtet ist und mit der stationären Relativgeschwindigkeit w_r des Kornes nach Größe und Richtung übereinstimmt. Am Eintritt in das elektrische Feld hat das Korn selbst die Absolutgeschwindigkeit $w_{p,o}$, die betragsmäßig gleich der Relativgeschwindigkeit w_r , dieser aber entgegengerichtet ist. Für diese Bedingungen folgt aus Gl.(5.116) die dimensionslose Zeit t^* zu

$$t^* = -\ln \left[1 - \frac{324 a^* z^*}{Ga \frac{\rho_p}{\rho} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right)} \right]. \quad (5.130)$$

Vernachlässigt man wieder die Auftriebskraft, dann erhält man mit Gl.(5.124) für die Bahnkurve die Beziehung

$$x^* = g_e^* z^* \left\{ -\frac{Ga}{324 a^* z^*} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)^2 \ln \left[1 - \frac{324 a^* z^*}{Ga (\rho_p/\rho)^2} \right] - 1 \right\}. \quad (5.131)$$

Einige hiernach berechnete Bahnkurven sind in *Bild 5.24* wiedergegeben. Obgleich die Körner in der Eintrittsebene die entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeit des Gastromes haben, dringen sie in das elektrische Feld ein. Sie können aber

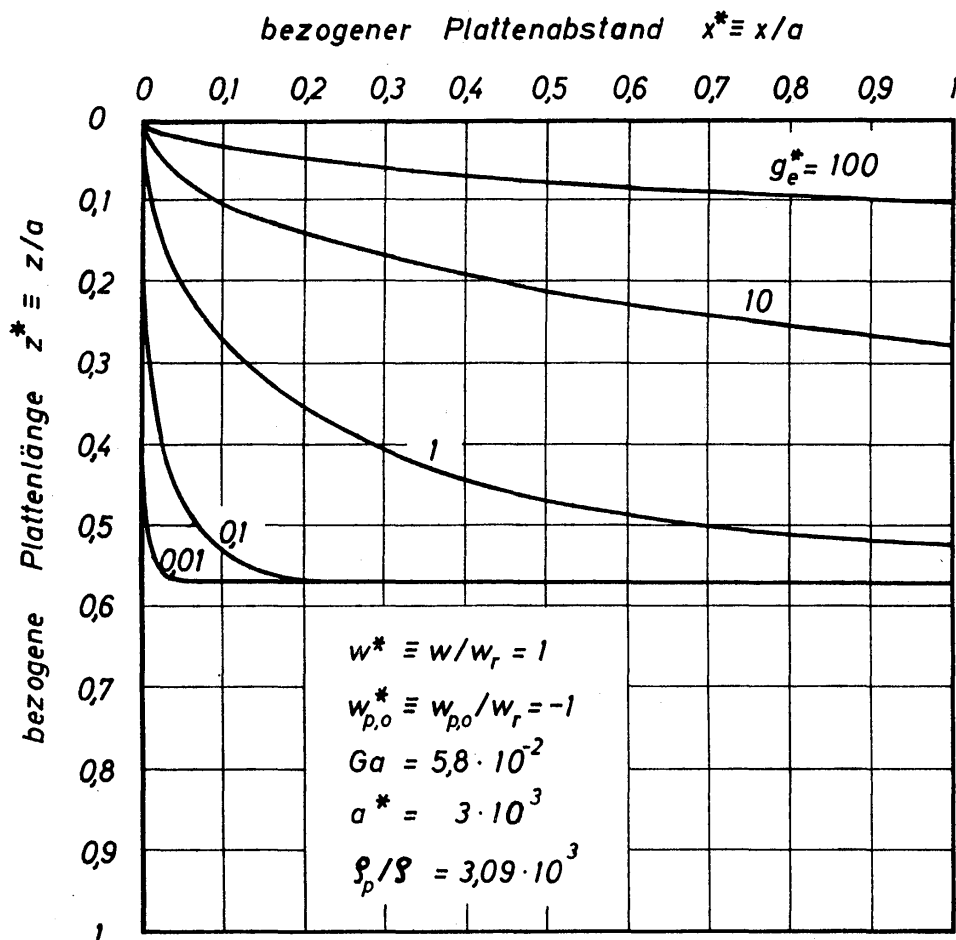


Bild 5.24. Bahnkurven für ein Korn, das mit der Sinkgeschwindigkeit w_s in das elektrische Feld eintritt und von einem Gas mit der Geschwindigkeit $w = -w_s$ angeströmt wird

für die gegebenen Bedingungen in keinem Falle die bei $z_{\max}^* = 0,568$ liegende Grenzlinie überschreiten. Auf dieser Linie erreichen die Körner spätestens die Elektrodenplatte *B*. Für den maximalen Wert von z^* erhält man aus Gl.(5.130) unter Vernachlässigung der Auftriebes mit $t^* = \infty$ die Beziehung:

$$z_{\max}^* = \frac{Ga (q_p/q)^2}{324 a^*}. \tag{5.132}$$

Im praktischen Betrieb von Kornklassierern darf man Bahnkurven, wie sie im *Bild 5.24* dargestellt sind, nicht erwarten. Denn wenn $w = w_p$ ist, wird das Korn gar nicht erst in das elektrische Feld geraten, sondern bereits in den Schwebestand übergehen, wenn es in den entgegengesetzt gerichteten Gasstrahl gelangt. Für alle anderen als die hier angeführten Bedingungen a), b) und c) lassen sich die Gleichungen (5.116) und (5.124) nicht mehr zusammenfassen. Dann müssen die Koordinaten x^* und z^* der Bahnkurven bei gleichen Werten für t^* getrennt berechnet werden.

5.462 Partikelbewegung im elektrischen Feld veränderlicher Stärke

Untersucht werden soll die Kornbewegung im Ringraum zwischen zwei konzentrischen Zylinderelektroden, deren Radien r_i und r_a sind. Die elektrische Feldstärke E_r ändert sich mit dem Radius r nach der Beziehung

$$E_r = \frac{U}{r \ln(r_a/r_i)}. \tag{5.133}$$

Die Feldstärke besitzt am Innenzylinder ihren größten und am Außenzylinder ihren niedrigsten Wert. Die auf ein Korn wirkende Feldkraft ist

$$K_{e,r} = Q E_r = m_p g_{e,r}. \tag{5.134}$$

Hieraus folgt die elektrische Feldbeschleunigung zu

$$g_{e,r} = \frac{Q E_r}{m_p} = \frac{Q U}{m_p r \ln(r_a/r_i)}, \tag{5.135}$$

die eine Funktion der Ortskoordinate r ist. Für die weiteren Rechnungen ist es sinnvoll, eine von r unabhängige Beschleunigung einzuführen. Zu dem Zweck erweitert man Gl.(5.135) mit dem Radius r_a des Außenzylinders und erhält dann

$$g_{e,r} = \frac{g_{e,a}}{r^*}. \tag{5.136}$$

Hierin bedeuten

$$g_{e,a} = \frac{Q U}{m_p r_a \ln(r_a/r_i)} \tag{5.137}$$

die mit dem unveränderlichen Radius r_a gebildete Beschleunigung und

$$r^* = \frac{r}{r_a} \tag{5.138}$$

den bezogenen unveränderlichen Radius.

Zur Berechnung der Bahnkurven müssen wieder Gleichungen für die z - und die r -Koordinate aufgestellt werden, die durch die Zeit t verbunden sind. Für die z -Komponente läßt sich unmittelbar Gl.(5.116), die für die Kornbewegung zwischen zwei senkrechten, ebenen Platten hergeleitet wurde, übernehmen, wenn man

$$z^* \equiv z/r_a \text{ und } a_r^* \equiv r_a/d_p \quad (5.139)$$

setzt. Alle anderen in Gl.(5.116) auftretenden Größen haben die bereits in Gl.(5.115) angegebenen Definitionen.

Für die r -Komponente liefert das Kräftegleichgewicht die Beziehung

$$m_p \frac{d^2 r}{dt^2} = K_{e,r} + W_r. \quad (5.140)$$

Für die von r abhängige elektrische Feldkraft ist Gl.(5.134) unter Berücksichtigung von Gl.(5.136) einzuführen und für die Stokesche Widerstandskraft der Ausdruck

$$W_r = -3\pi\nu d_p \varrho \frac{dr}{dt}. \quad (5.141)$$

Damit erhält die Differentialgleichung für die r -Komponente die folgende Form:

$$m_p \frac{d^2 r}{dt^{*2}} = m_p g_{e,a} \frac{1}{r^*} - 3\pi\nu d_p \varrho \frac{dr}{dt}. \quad (5.142)$$

In dimensionsloser Schreibweise wird hieraus:

$$\frac{d^2 r^*}{dt^{*2}} + \frac{dr^*}{dt^*} - \frac{Ga g_{e,a}^*}{324 a_r^*} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho}\right)^2 \frac{1}{r^*} = 0. \quad (5.143)$$

Hierin ist

$$g_{e,a}^* = \frac{g_{e,a}}{g} \quad (5.144)$$

die bezogene elektrische Feldbeschleunigung am Außenzylinder. Alle anderen dimensionslosen Größen sind bereits definiert worden. Gl.(5.143) läßt sich nicht mehr in geschlossener Form lösen. Aus diesem Grunde erfolgt eine numerische Lösung mittels des Differenzenverfahrens nach RUNGE und KUTTA.

An Hand der *Bilder* 5.25 bis 5.27 sollen einige der Ergebnisse besprochen werden. Da die Feldstärke mit zunehmendem Radius r^* abnimmt, müssen die Bahnkurven vom Eintrittsradius $r_o^* \equiv r_o/r_a$ abhängen. Aus diesem Grunde sind in den erwähnten Bildern jeweils mehrere Bahnkurven für Körner mit verschiedenen Eintrittsradien r_o angegeben. Für alle Bahnkurven wurde $Ga = 5,8 \cdot 10^{-2}$, $a_r^* = 933$ und $\varrho_p/\varrho = 3,09 \cdot 10^3$ gesetzt. Verändert wurden das Beschleunigungsverhältnis $g_{e,a}^*$ und die Geschwindigkeitsverhältnisse $w^* \equiv w/w_r$ und $w_{p,o}^* \equiv w_{p,o}/w_r$.

Bild 5.25 enthält die Bahnkurve für $w_{p,o}^* = 0$, $w^* = 0$ und $g_{e,a}^* = 0,1$. Das Korn beginnt seine Bewegung aus der Ruhelage heraus, und das umgebende Medium befindet sich im Ruhezustand. Der maximale Wert von z^* , der bei $r^* = 1$ auftritt, hängt vom Eintrittsort des Kornes ab. Mit zunehmendem Abstand von

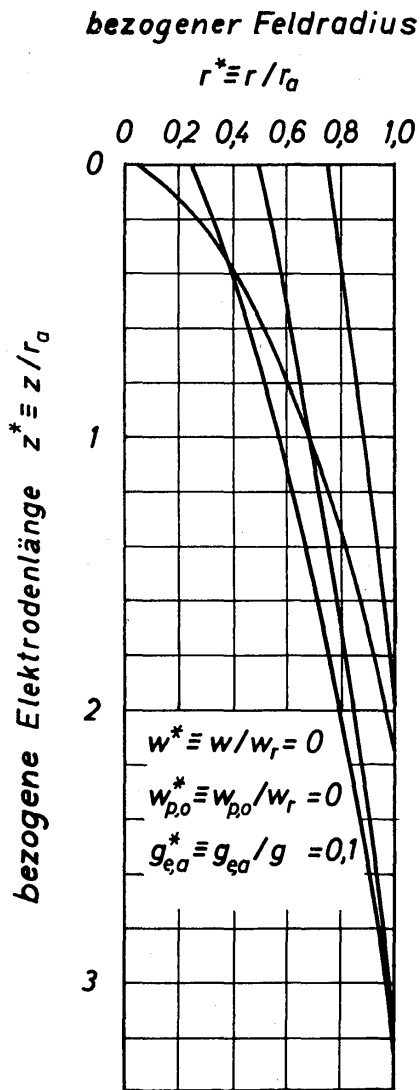
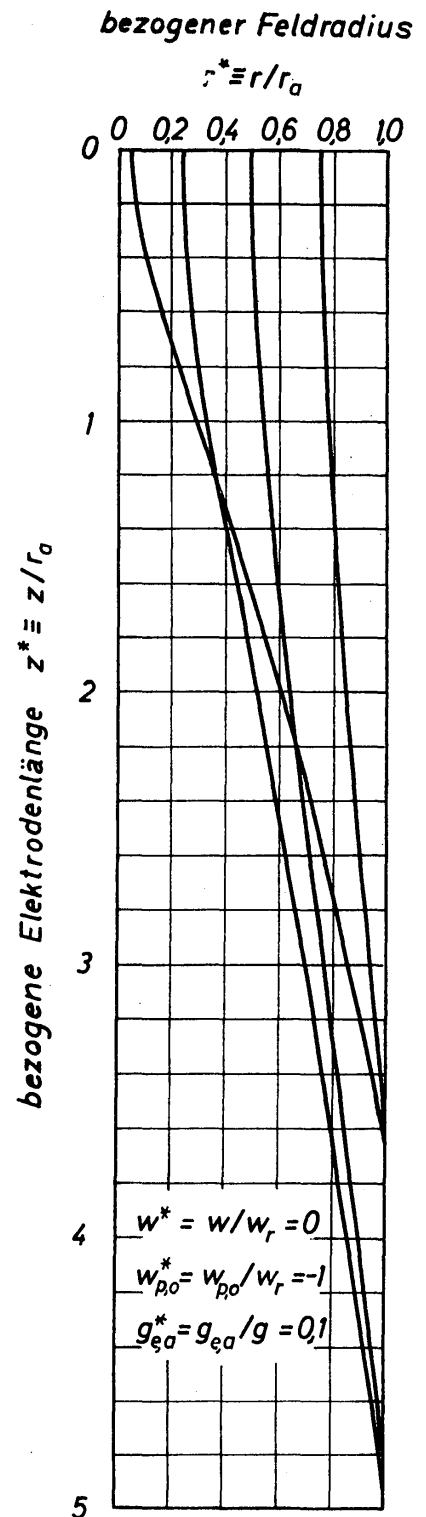


Bild 5.25. Bahnkurven für Körner, die ihre Bewegung aus der Ruhelage heraus beginnen; das umgebende Medium befindet sich im Ruhezustand

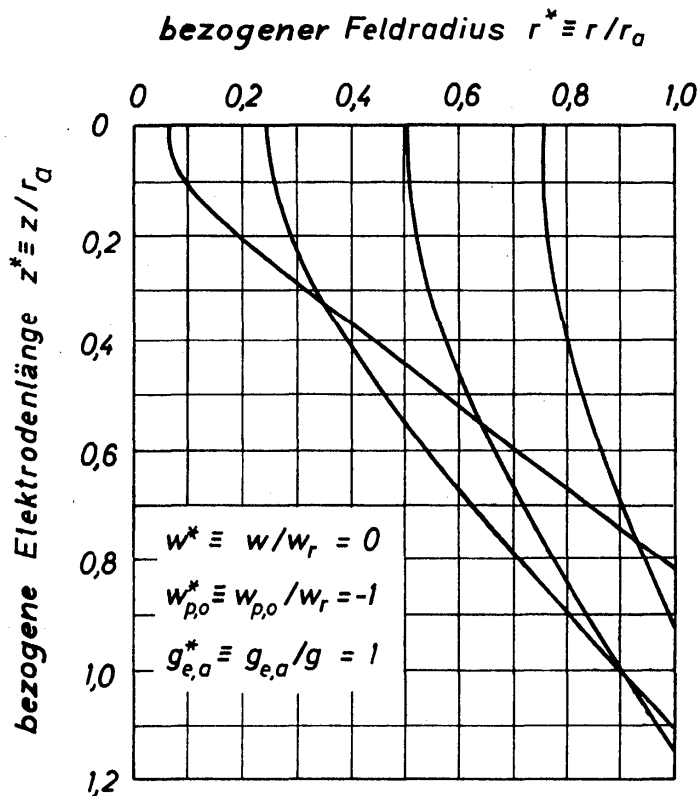
Bild 5.26. Bahnkurven für Körner, die mit ihrer stationären Sinkgeschwindigkeit in das elektrische Feld eintreten, das umgebende Medium befindet sich im Ruhezustand und das Beschleunigungsverhältnis ist $g_{e,a}^* = 0,1$



der inneren Elektrode nimmt z_{\max}^* zunächst zu, durchläuft ein Maximum und nimmt dann stetig bis auf $z_{\max}^* = 0$ bei $r^* = 1$ ab. Dieser zunächst eigenartige Verlauf von z_{\max}^* ist durch die mit dem Radius veränderliche Feldstärke bedingt. Die in der Nähe der inneren Elektrode in das Feld gelangenden Körner erhalten den stärksten Ablenkimpuls. Obwohl diese Körner den längsten Weg in radialer Richtung zurücklegen müssen, erreichen sie die äußere Elektrode doch bei kleineren z^* -Werten als andere Körner.

Ebenfalls für eine Beschleunigungskennzahl $g_{e,a}^* = 0,1$ und $w^* = 0$, aber $w_{p,0}^* = -1$ sind in *Bild 5.26* einige Bahnkurven dargestellt. Der Unterschied zu den Bedin-

gungen, für die *Bild 5.25* gilt, besteht darin, daß die Körner bereits mit ihrer stationären Sinkgeschwindigkeit in das Feld eintreten. Der maximale Wert von z^*



ändert sich mit dem Eintrittsort in der schon beschriebenen Weise.

Bemerkenswert ist, daß einige Bahnkurven einen Wendepunkt aufweisen. Den Einfluß des Beschleunigungsverhältnisses $g_{e,a}^*$ auf die Bahnkurven erkennt man aus einem Vergleich von *Bild 5.26* ($g_{e,a}^* = 0,1$) mit *Bild 5.27* ($g_{e,a}^* = 1$). Je größer unter sonst gleichen Bedingungen das Beschleunigungsverhältnis ist, desto kleiner wird der maximale Wert von z^* .

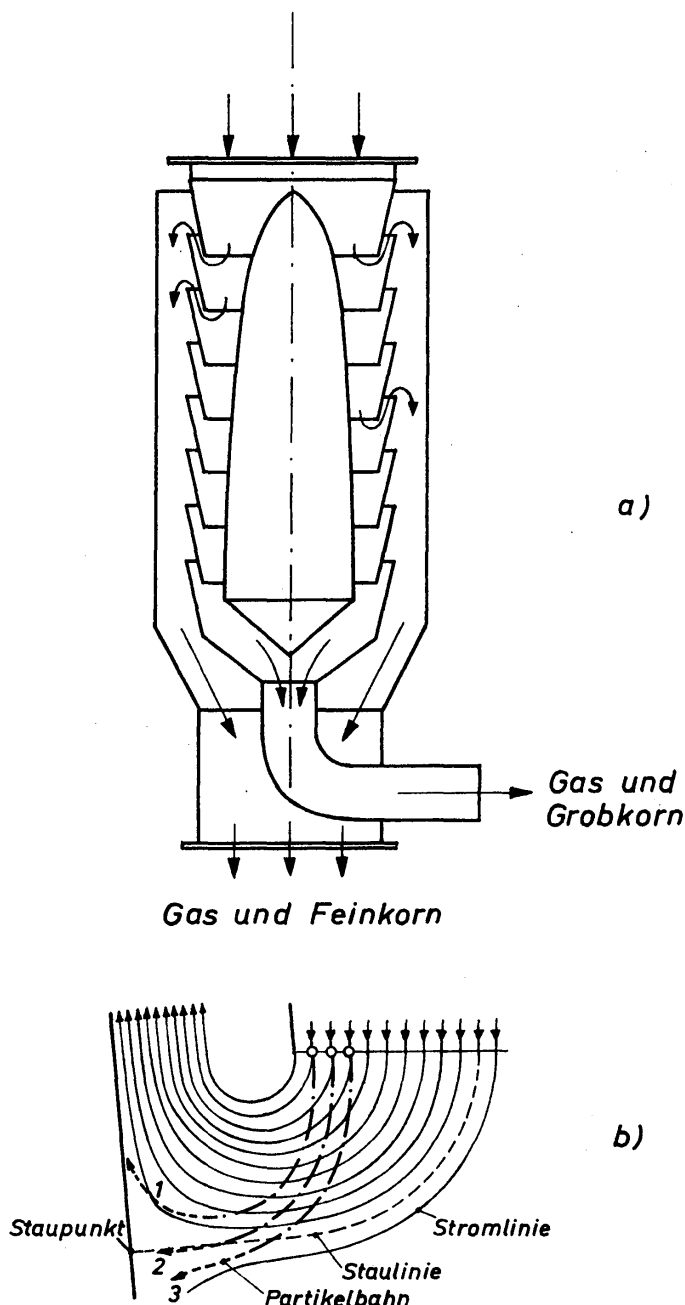
Bild 5.27. Bahnkurven für ein Beschleunigungsverhältnis $g_{e,a}^* = 1$, aber für sonst gleiche Bedingungen wie für die Kurven in *Bild 5.26*

5.5 Partikelbewegung auf gekrümmter Bahn im gekrümmten Strömungsfeld

5.51 Beschreibung einiger technischer Beispiele

Die Bewegung von Partikeln in gekrümmten Strömungsfeldern tritt beispielsweise in Apparaten für die Kornabscheidung auf. Auf Grund der zwischen den Partikeln und dem Trägermedium bestehenden Dichteunterschiede werden im gekrümmten Strömungsfeld unterschiedliche Zentrifugalkräfte wirksam, die zu einer Entmischung führen. Bekanntestes Beispiel hierfür dürfte der Zyklonabscheider sein. Aber auch neuere Abscheiderentwicklungen beruhen auf dem Prinzip, mittels gekrümmter Strömungsfelder eine Trennung von Partikeln und Trägermedium zu erzielen.

Bild 5.28a zeigt das Schema eines Ringspaltabscheiders, der von MUSCHEL-KNAUTZ [5.53] untersucht wurde. Der feststoffbeladene Luftstrom tritt in den Apparat von oben ein. Die Luft wird zwischen mehreren ineinandergesteckten konischen Ringelementen um fast 180° umgelenkt, wobei die größeren Partikeln aus den abzweigenden Luftströmen herausgeschleudert werden. Etwa 90% der Luft gelangt bei dem skizzierten Apparat zusammen mit den nicht abgeschiedenen feinen Partikeln durch die Ringspalte und kann zur weiteren Reinigung z. B. einem Elektrofilter zugeführt werden. Die Trennung der verbleibenden geringen Luftmenge von der Hauptmasse des groben Feststoffes kann in einem Zyklonabscheider mit relativ kleinem Durchmesser erfolgen. Die physikalische Wirkungsweise des Ringspaltabscheiders wird in *Bild 28b* deutlich. Es zeigt den Verlauf



a)

der Stromlinien bei der Umlenkung in einem Ringspalt. Außerdem sind die Bahnkurven von drei gleichgroßen kugelförmigen Partikeln für verschiedene Startpunkte eingezeichnet. MUCHELKNAUTZ berechnete diese Bahnkurven unter der Voraussetzung, daß das Stokessche Widerstandsgesetz gültig ist und die Schwerkraft keinen Einfluß ausübt. Partikel 2 endet mit seiner Flugbahn gerade auf der Staulinie und kann daher mit gleicher Wahrscheinlichkeit abgeschieden oder mitgerissen werden. Korn 1 gelangt mit der Abluft durch den Ringspalt, während Korn 3 zum nächsten Spalt transportiert wird. Hier befindet es sich hinsichtlich seiner Abscheidung in einer günstigen Position. Es leuchtet ein, daß für die richtige Auslegung eines Ringspaltabscheiders die Kenntnis der zu erwartenden Partikelbahnen an den Umlenkkanten notwendig ist.

b)

Bild 5.28. Schematische Darstellung eines Ringspaltabscheiders (Bild a) sowie der Stromlinien und Partikelbahnen während der Umlenkung (Bild b)

Die Partikelbewegung in gekrümmten Strömungsfeldern tritt weiterhin beim hydraulischen und pneumatischen Transport körniger Feststoffe durch Rohrkrümmer auf. Die beim pneumatischen Transport zu erwartenden Kornbahnen sind in *Bild 5.29* dargestellt. Feststoff und Transportmedium entmischen sich bei der Umlenkung im Krümmer, wobei der Feststoff durch Stöße und Reibung an der äußeren Krümmerwand gegenüber dem Fluid verzögert wird. Zur Wiederherstellung der ursprünglichen, im Mittel stationären Bewegung der Partikel muß das Transportmedium Beschleunigungsenergie aufbringen, die sich als zusätzlicher Druckverlust bemerkbar macht. Außerdem beobachtet man beim hydraulischen und pneumatischen Transport in den Rohrkrümmern einen sehr ausgeprägten örtlichen Verschleiß, wobei eine Verschleißmulde entsteht. Die Verschleißgeschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit, mit der sich diese Verschleißmulde ausbildet, hängt neben den Materialeigenschaften von dem Auftreffwinkel der Partikel auf die äußere Krümmerwand ab, worauf BRAUER und

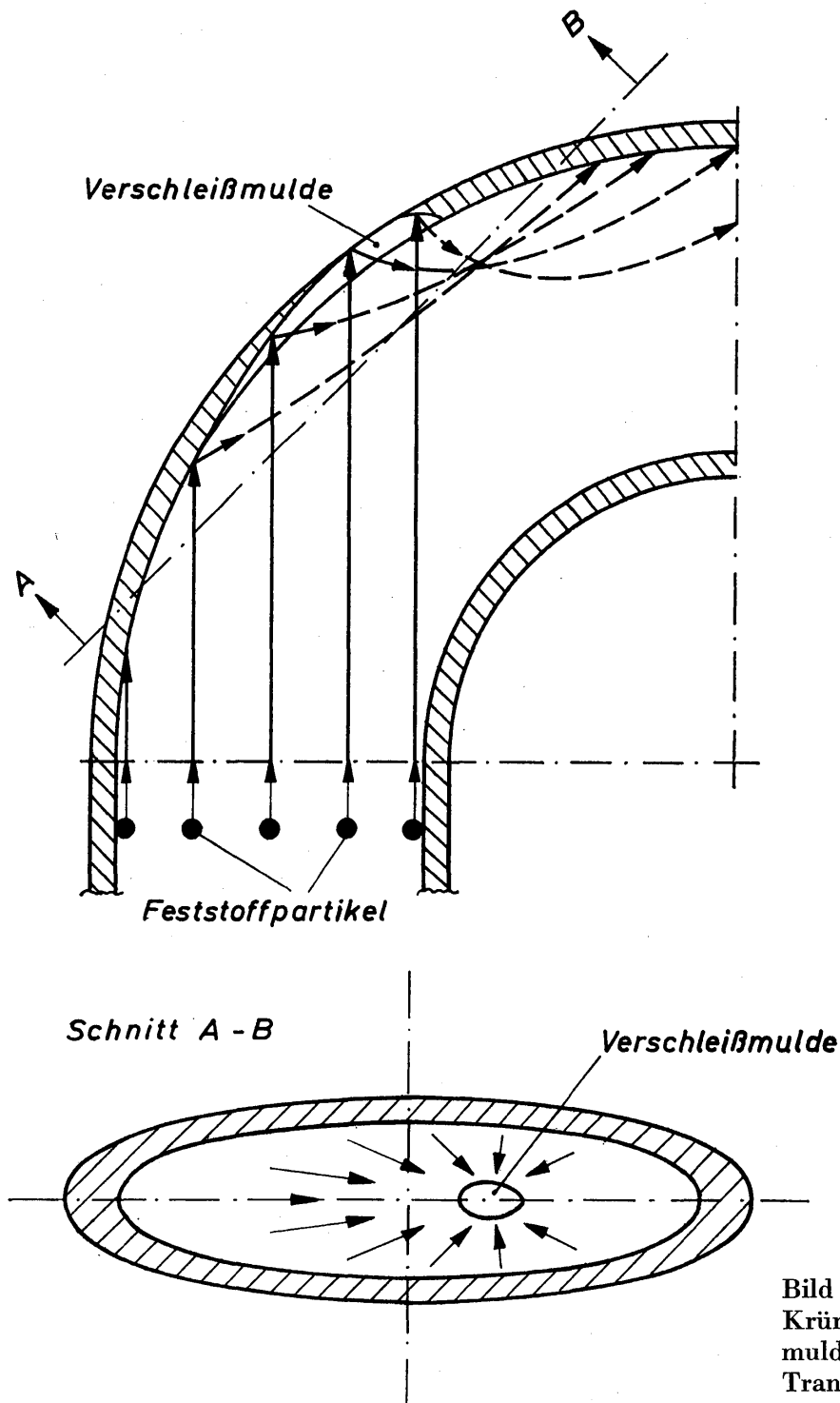


Bild 5.29. Partikelbahnen im Krümmersystem mit Verschleißmulde beim pneumatischen Transport

KRIEDEL [5.54] bereits früher hingewiesen haben. Die Kenntnis der Bahnkurven läßt somit Rückschlüsse auf den zu erwartenden zusätzlichen Druckverlust sowie den Ort und die Geschwindigkeit des Krümmerverschleißes zu.

Die angeführten Beispiele zeigen, daß die Berechnung von Partikelbahnen in gekrümmten Strömungsfeldern von erheblicher technischer Bedeutung ist. Deshalb sollen im folgenden die maßgebenden Gleichungen für Partikelbahnen hergeleitet werden, wobei zunächst der Fall eines ebenen, unbegrenzten, aber beliebig gekrümmten Strömungsfeldes zugrunde gelegt wird. Die Rechnungen führte MÜHLE [5.55] im Rahmen einer umfassenden Untersuchung über die Bewegung von Partikeln in ebenen und räumlichen Strömungen durch.

5.52 Herleitung der allgemeinen Differentialgleichungen

In *Bild 5.30* ist eine kugelförmige Partikel dargestellt, die sich längs der eingezeichneten Bahnkurve bewegt. Zu einer bestimmten Zeit t befindet sie sich auf einer ebenfalls dargestellten Stromlinie des Fluids. Da sich gekrümmte Strömungsfelder mit Vorteil durch Polarkoordinaten beschreiben lassen, soll der jeweilige Ort der Partikel durch einen um den festen Punkt 0 rechts drehenden Polradius r und den dazugehörigen Polwinkel φ bezeichnet werden. Die Polarkoordinaten sowie deren mit Punkten versehenen ersten und zweiten Ablei-

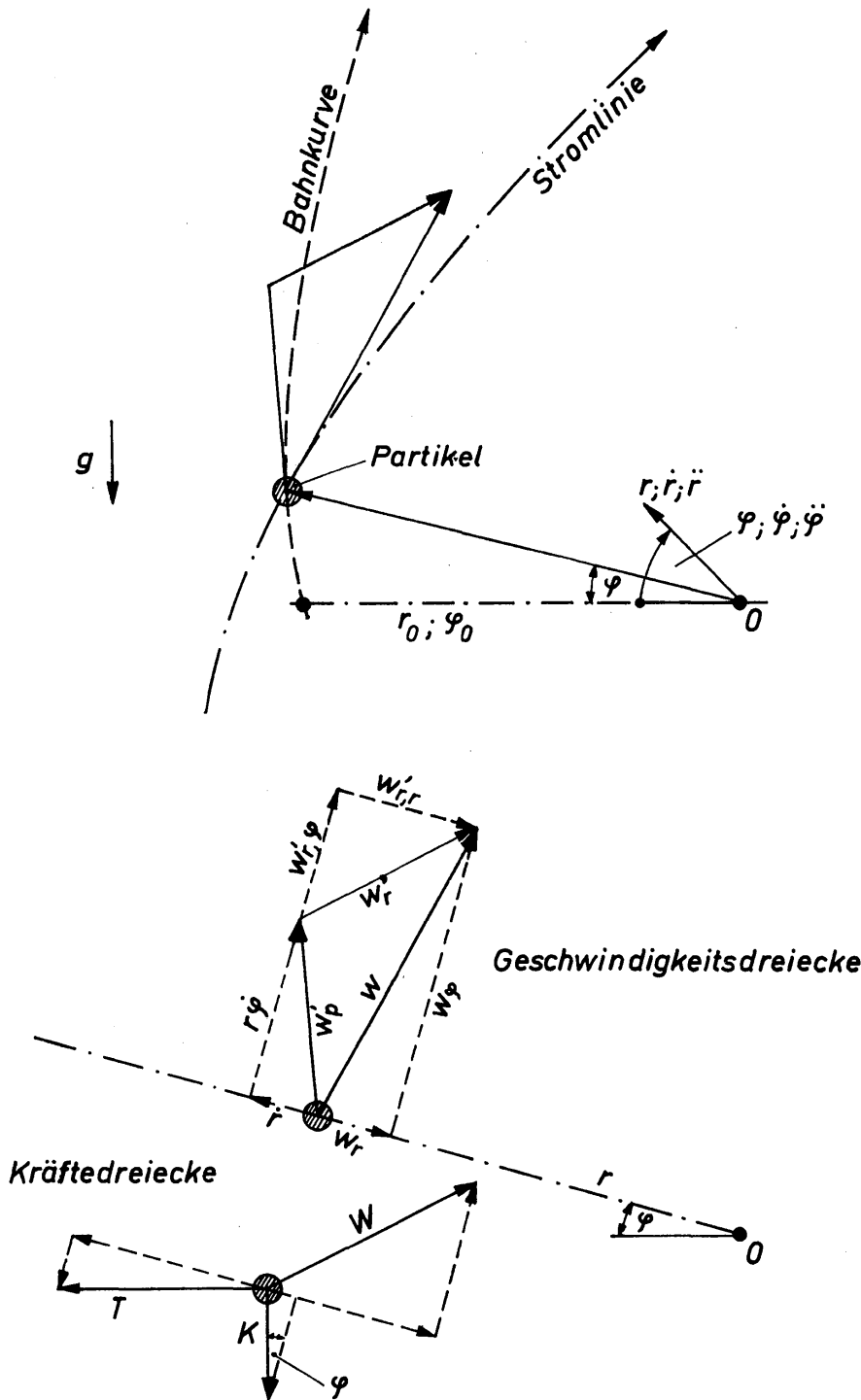


Bild 5.30. Zur Erläuterung der Partikelbahn im gekrümmten Strömungsfeld mit Geschwindigkeits- und Kräfte dreiecken

tungen nach der Zeit sind gemäß den in *Bild 5.30* angegebenen Pfeilrichtungen positiv. Die örtliche Geschwindigkeit des Fluids wird mit w , diejenige der Partikel mit w'_p und die Relativgeschwindigkeit nach Gl. (5.43) mit w'_r bezeichnet. Es wird angenommen, daß das Geschwindigkeitsfeld des Fluids bekannt ist und durch Beziehungen folgender Art beschrieben werden kann:

$$w_r = f_1(r, \varphi), \quad (5.145)$$

$$w_\varphi = f_2(r, \varphi). \quad (5.146)$$

Die gesuchten Geschwindigkeitskomponenten der Partikel sind:

$$w'_{p,r} = \dot{r}, \quad (5.147)$$

$$w'_{p,\varphi} = r \cdot \dot{\varphi}. \quad (5.148)$$

Die Geschwindigkeiten und die im Schwerpunkt der Partikel angreifenden Kräfte sind mit ihrem radialen (Index r) sowie tangentialen Komponenten (Index φ) in *Bild 5.30* gesondert dargestellt. Es bedeuten T die Trägheitskraft, W die Widerstandskraft und $K = G - A$ die Differenz aus Massen- und Auftriebskraft infolge der Erdbeschleunigung g . Auftriebskräfte, die durch andere Beschleunigungen, so z. B. durch eine auf das Fluid wirksame Zentrifugalbeschleunigung, entstehen, sollen hier unberücksichtigt bleiben. Außerdem wird angenommen, daß die bei instationärer Bewegung mitbeschleunigte Masse des Fluids $\alpha \cdot m_p \varrho/\varrho_p$ gegenüber derjenigen der Partikel vernachlässigt werden kann. Diese Einschränkungen sind von untergeordneter Bedeutung, solange Partikelbahnen in gasförmigen Medien betrachtet werden, wobei stets $\varrho_p/\varrho \gg 1$ ist. In flüssigen Medien hingegen sind diese Vernachlässigungen insbesondere für Dichteverhältnisse $\varrho_p/\varrho \approx 1$ nicht mehr gerechtfertigt.

Nach dem Newtonschen Grundgesetz gilt für die Komponenten der Kräfte:

$$T_r = W_r + K_r. \quad (5.149)$$

$$T_\varphi = W_\varphi + K_\varphi. \quad (5.150)$$

Die Trägheitskraft ist das Produkt aus der Masse m_p sowie der Beschleunigung der Partikel, welche in einem Polarkoordinatensystem die folgenden Komponenten besitzt:

$$b_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, \quad (5.151)$$

$$b_\varphi = r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}. \quad (5.152)$$

Hiermit gewinnt man für die Trägheitskräfte die Beziehungen:

$$T_r = m_p (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2), \quad (5.153)$$

$$T_\varphi = m_p (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}). \quad (5.154)$$

Die Widerstandskraft gemäß Gl.(5.57) hat die Komponenten:

$$W_r = \zeta \frac{d_p^2 \cdot \pi}{4} \frac{\varrho \cdot |w'_r|}{2} \cdot w'_{r,r}, \quad (5.155)$$

$$W_\varphi = \zeta \frac{d_p^2 \cdot \pi}{4} \frac{\varrho \cdot |w'_r|}{2} \cdot w'_{r,\varphi}. \quad (5.156)$$

Hierin sind

$$|w'_r| = \left| \sqrt{(w_r - \dot{r})^2 + (w_\varphi - r \dot{\varphi})^2} \right| \quad (5.157)$$

der Betrag der Relativgeschwindigkeit sowie

$$w'_{r,r} = w_r - \dot{r} \quad (5.158)$$

und

$$w'_{r,\varphi} = w_\varphi - r \dot{\varphi} \quad (5.159)$$

ihre radialen und tangentialen Größen. Für die Komponenten der um die Auftriebskraft verminderten Massenkraft der Partikel gilt im betrachteten Koordinatensystem nach *Bild 5.30*:

$$K_r = -m_p \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_p} \right) g \sin \varphi, \quad (5.160)$$

$$K_\varphi = -m_p \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_p} \right) g \cos \varphi. \quad (5.161)$$

Führt man die hergeleiteten Beziehungen für die Kraftkomponenten in die Gleichungen (5.149) und (5.150) ein, so gelangt man zu den Differentialgleichungen für die Koordinaten r und φ der Bahnkurve der betrachteten Partikel:

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} \cdot \zeta \frac{1}{\varrho_p/\varrho} \frac{|w'_r|}{d_p} (w_r - \dot{r}) - g \frac{(\varrho_p/\varrho) - 1}{\varrho/\varrho_p} \sin \varphi, \quad (5.162)$$

$$r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} = \frac{3}{4} \cdot \zeta \frac{1}{\varrho_p/\varrho} \frac{|w'_r|}{d_p} (w_\varphi - r \dot{\varphi}) - g \frac{(\varrho_p/\varrho) - 1}{\varrho_p/\varrho} \cos \varphi. \quad (5.163)$$

Hierin ist der Widerstandsbeiwert ζ für kugelförmige Partikeln und stationäre Strömung gemäß Gl.(5.7) einzusetzen. Mit einer charakteristischen Geschwindigkeit \bar{w} des Strömungsfeldes und dem Polradius r_0 am Ausgangspunkt der Partikelbahn lassen sich die folgenden Kennzahlen bilden:

$$r^* \equiv \frac{r}{r_0}; \quad \varphi^* \equiv \varphi; \quad t^* \equiv \frac{\bar{w}}{r_0} \cdot t,$$

$$B \equiv \frac{2r_0/d_p}{\varrho/\varrho_p}; \quad \bar{w}^* \equiv \frac{\bar{w} d_p}{\nu},$$

$$Ar \equiv \frac{d_p^3 g}{\nu^2} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right), \quad (5.164)$$

$$w_r^* \equiv \frac{w_r}{\bar{w}}; \quad w_\varphi^* \equiv \frac{w_\varphi}{\bar{w}}.$$

Mit w_r^* und w_φ^* werden die auf die charakteristische Geschwindigkeit \bar{w} bezogenen Geschwindigkeitskomponenten des Fluids bezeichnet. Die endgültigen Gleichungen für die Koordinaten der Bahnkurve einer kugelförmigen Partikel in einem ebenen, gekrümmten Strömungsfeld können damit in der folgenden dimensionslosen Form geschrieben werden:

$$\ddot{r}^* - r^* \dot{\varphi}^{*2} = \frac{3}{8} \frac{B}{\bar{w}^*} Re_p \cdot \zeta (w_r^* - \dot{r}^*) - 0,5 \frac{B \cdot Ar}{\bar{w}^{*2}} \sin \varphi^*, \quad (5.165)$$

$$r^* \ddot{\varphi}^* + 2 \dot{r}^* \dot{\varphi}^* = \frac{3}{8} \frac{B}{\bar{w}^*} Re_p \cdot \zeta (w_\varphi^* - r^* \dot{\varphi}^*) - 0,5 \frac{B \cdot Ar}{\bar{w}^{*2}} \cos \varphi^*. \quad (5.166)$$

Die Reynoldszahl der Partikel erhält man aus Gl. (5.64) mit den hier verwendeten Größen zu

$$Re_p \equiv \frac{|w_r'| d_p}{\nu} = \bar{w}^* \cdot [(w_r^* - \dot{r}^*)^2 + (w_\varphi^* - r^* \dot{\varphi}^*)^2]^{1/2}. \quad (5.167)$$

Die Gleichungen (5.165) und (5.166) stellen ein System zweier gekoppelter, nicht-linearer sowie inhomogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar, welches nur mittels numerischer Verfahren auswertbar ist. Über den Einfluß der Schwerkraft und Auftriebskräfte im Vergleich zu den Widerstandskräften gilt hier sinngemäß das gleiche, was bereits am Schluß vom Abschnitt 5.42 gesagt worden ist.

Zu einer wesentlichen Vereinfachung der Gleichungen, die die Partikelbahn beschreiben, gelangt man, wenn für den Widerstandsbeiwert ζ der Partikel das Newtonsche Gesetz angenommen wird. Hiernach ist $\zeta = 0,44$ und somit unabhängig von der Reynoldszahl Re_p . Dieser Zusammenhang ist bei großen Werten von Re_p und gemäß Gl. (5.167) somit bei großen Werten von \bar{w}^* gegeben. Mit diesen Bedingungen erhält man für die Partikelbahn folgende vereinfachte Gleichungen:

$$\ddot{r}^* - r^* \dot{\varphi}^{*2} = 0,165 B \cdot [(w_r^* - \dot{r}^*)^2 + (w_\varphi^* - r^* \dot{\varphi}^*)^2]^{1/2} (w_r^* - \dot{r}^*), \quad (5.168)$$

$$r^* \ddot{\varphi}^* + 2 \dot{r}^* \dot{\varphi}^* = 0,165 B \cdot [(w_r^* - \dot{r}^*)^2 + (w_\varphi^* - r^* \dot{\varphi}^*)^2]^{1/2} (w_\varphi^* - r^* \dot{\varphi}^*). \quad (5.169)$$

Wie man sieht, sind sämtliche Partikelbahnen bei gegebenem Strömungsfeld nur noch von der Kennzahl B abhängig.

5.53 Partikelbahnen in Rohrkrümmern

5.531 Spezielle Form der Differentialgleichungen

Beobachtet man die Bahnen einzelner Partikeln in einer Krümmerströmung, so stellt man gemäß *Bild 5.31* beim pneumatischen und hydraulischen Transport unterschiedliches Verhalten fest. Beim pneumatischen Transport sind die Bahnkurven nach Eintritt der Partikeln in den Krümmer nahezu geradlinig (Kurve *a*). Demgegenüber sind die Bahnkurven beim hydraulischen Transport mehr oder

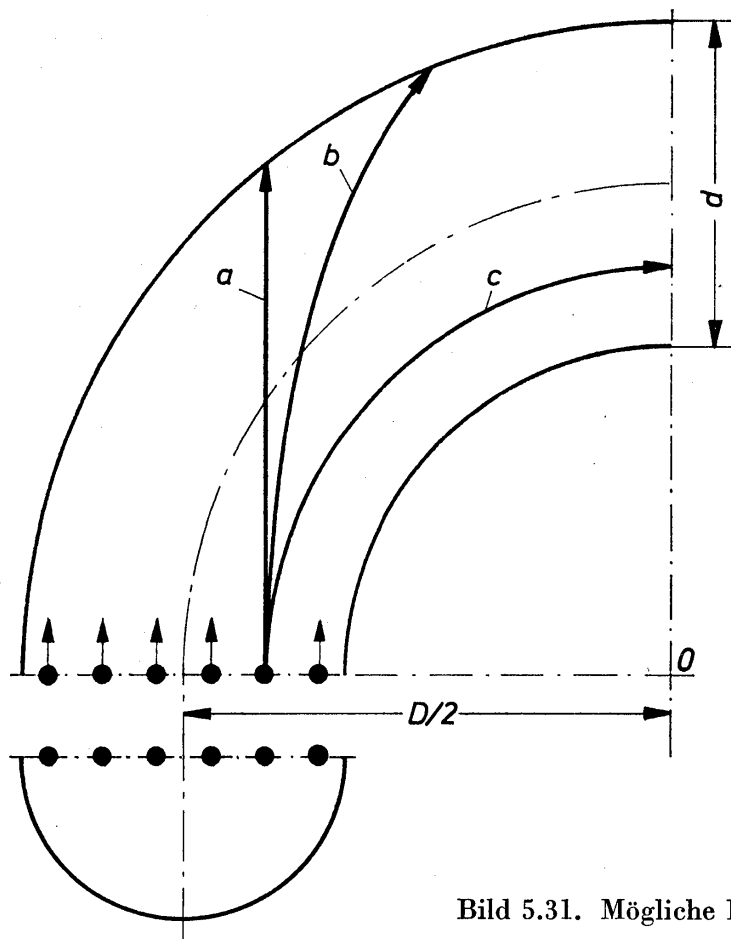


Bild 5.31. Mögliche Kornbahnen in einem Krümmer

weniger stark gekrümmt (Kurve *b*). Während beim pneumatischen Transport (Kurve *a*) die Trägheitskräfte der Partikeln sehr viel größer sind als die Widerstandskräfte des Fluids, bewegt sich beim hydraulischen Transport (Kurve *b*) die Partikel unter dem gemeinsamen Einfluß beider Kräfte. Neben dem Geradeausflug ist auch der Sonderfall einer Kreisbahn (Kurve *c*) denkbar, für den die Trägheitskräfte der Partikeln gegenüber den Widerstandskräften des Fluids zu vernachlässigen sind.

Bei der Berechnung von Partikelbahnen in Rohrkrümmern werden neben den Trägheits- und Widerstandskräften auch die Schwerkraft berücksichtigt. Da die reale Krümmerströmung sowie die Partikelbahnen im allgemeinen räumlich gekrümmt sind und Sekundärströmungen sowie Ablösungen mathematisch nicht berücksichtigt wurden, sind für die folgenden Rechnungen einige Voraussetzungen zu treffen. Es werden nur Bahnkurven kugelförmiger Partikeln betrachtet, die in der mittleren Schnittebene eines Krümmers liegen. In dieser Ebene befinden sich der Krümmungsmittelpunkt 0 und die Rohrachse des Krümmers. Die Stromlinien des Fluids sollen innerhalb der mittleren Schnittebene auf Kreisbahnen verlaufen.

Die Koordinaten und die Einflußgrößen des Problems werden anhand von *Bild 5.32* erläutert. Hierbei ist die Umlenkung der Strömung in einer senkrechten Ebene dargestellt, wobei auf Grund der verschiedenen Krümmeranordnungen die Schwerkraft unterschiedlichen Einfluß auf die Partikelbahnen ausübt. Es werden jeweils 90° -Krümmer betrachtet. Die Berechnung der Kornbahnen für andere Umlenk-

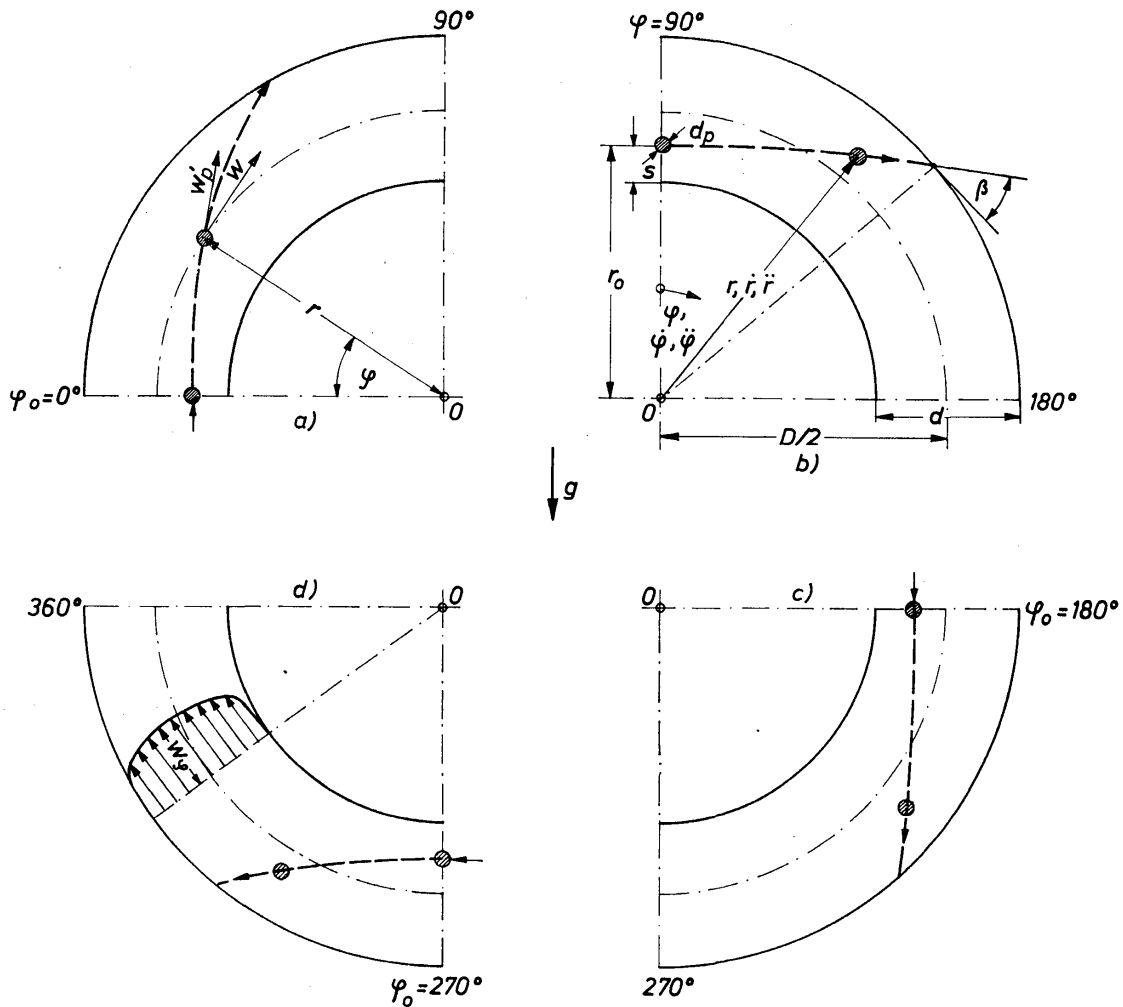


Bild 5.32. Zur Erläuterung der Koordinaten, Kräfte und geometrischen Abmessungen bei der Bewegung von Partikeln in Rohrkrümmern, die in einer senkrechten Ebene angeordnet sind

winkel würde aber keine besondere Schwierigkeit bereiten. Die Ergebnisse für Krümmeranordnungen gemäß *Bild 5.32* gelten auch für in horizontaler Ebene liegende Krümmer, so der Einfluß der Schwerkraft vernachlässigbar ist.

Die Partikelbahnen werden durch ein Polarkoordinatensystem beschrieben, dessen Zentrum 0 mit dem jeweiligen Krümmungsmittelpunkt übereinstimmt. Der zeitlich veränderliche Ort einer Partikel ist durch den Polradius r und den dazugehörigen Polwinkel φ gegeben. Letzterer zählt von 0° bis 360° , also vom Eintritt in den Krümmer (*a*) rechtsdrehend bis zum Austritt aus dem Krümmer (*d*). Die positiven Richtungen der Polarkoordinaten r und φ sind durch Pfeile gekennzeichnet. Mit dem Krümmungsverhältnis D/d und dem Rohrdurchmesser d sind die geometrischen Abmessungen eines Kreisbogenkrümmers festgelegt. Die betrachtete Partikel hat den Durchmesser d_p und tritt im Abstand s von der Innenwand mit den Anfangskoordinaten $r = r_0$ und $\varphi = \varphi_0$ in den Krümmer ein. Prallt eine Partikel auf die äußere Krümmerwand auf, so bilden die Tangenten im Auftreffpunkt an die Bahnkurve sowie an die Krümmerwand den Aufprallwinkel β . Bei der Beschreibung der Partikelbahnen treten neben den Kennzahlen, die bereits für den allgemeinen Fall im vorausgegangenen Abschnitt angegeben

wurden, noch einige weitere Parameter hinzu, welche die geometrische Abmessungen des Strömungsfeldes berücksichtigen:

$$D^* \equiv \frac{D}{d} \quad \text{und} \quad s^* \equiv \frac{s}{d}. \quad (5.170)$$

Für die örtliche Geschwindigkeit des Fluids in tangentialer Richtung wird in Anlehnung an das «1/7-Potenzgesetz» von PRANDTL der folgende Ansatz benutzt:

$$w_\varphi^* \equiv \frac{w_\varphi}{\bar{w}} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} \left\{ 1 - |[r^* \cdot (D^* + 2s^* - 1) - D^*]| \right\}^{1/n} \quad (5.171)$$

Mit $n = 7$ erhält man das in *Bild 5.32 d* dargestellte Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Rohrströmung. Bei größer werdenden Werten von n wird das Profil völliger und nimmt mit $n = \infty$ schließlich Kolbenform an. Mit \bar{w} wird die mittlere Geschwindigkeit des Fluids bezeichnet, die als charakteristische Geschwindigkeit Verwendung findet. In radialer Richtung soll die Geschwindigkeit des Fluids keine Komponenten besitzen; es gilt also

$$w_r^* = 0. \quad (5.172)$$

Mithin wird das Feld der Stromlinien durch konzentrische Kreise um den Krümmungsmittelpunkt 0 beschrieben. Für die Begrenzung des Strömungsfeldes durch die Krümmerrwände gilt die Bedingung

$$\frac{D^* - 1}{D^* + 2s^* - 1} \leq r^* \leq \frac{D^* + 1}{D^* + 2s^* - 1}. \quad (5.173)$$

Mit den allgemeinen Gleichungen (5.165) und (5.166) sowie den getroffenen Vereinbarungen erhält man die Differentialgleichungen für die Koordinaten der Partikelbahnen in Krümmerrströmungen:

$$\ddot{r}^* - r^* \dot{\varphi}^{*2} = -\frac{3}{8} \frac{B}{\bar{w}^*} \cdot Re_p \cdot \zeta \dot{r}^* - 0,5 \frac{B Ar}{\bar{w}^{*2}} \sin \varphi^*, \quad (5.174)$$

$$r^* \ddot{\varphi}^* + 2\dot{r}^* \dot{\varphi}^* = \frac{3}{8} \frac{B}{\bar{w}^*} \cdot Re_p \cdot \zeta \cdot (w_\varphi^* - r^* \dot{\varphi}^*) - 0,5 \frac{B Ar}{\bar{w}^{*2}} \cos \varphi^*. \quad (5.175)$$

Hierin ist Re_p die Reynoldszahl der Partikel, die für die Bewegung im Krümmerr folgendermaßen definiert ist:

$$Re_p \equiv \frac{d_p |w_r'|}{\nu} = \bar{w}^* [\dot{r}^{*2} + (w_\varphi^* - r^* \dot{\varphi}^*)^2]^{1/2}. \quad (5.176)$$

Ferner sind ζ der Widerstandsbeiwert der Partikel nach Gl.(5.7) und $w_\varphi^* \equiv w_\varphi/\bar{w}$ die durch Gl.(5.171) gegebene, bezogene örtliche Geschwindigkeit, wobei \bar{w} die mittlere Geschwindigkeit des Fluids bedeutet.

Das vorliegende Problem besitzt die folgenden Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} t^* = 0: \quad r^* &= 1; \quad \varphi^* = \varphi_0; \\ \dot{r}^* &= 0; \quad \dot{\varphi}^* = w_{p,o}^* \equiv \frac{w_{p,o}}{\bar{w}}. \end{aligned} \quad (5.177)$$

Gemäß *Bild 5.32* kennzeichnet φ_0 die räumliche Anordnung des Krümmers bei einer Umlenkung der Strömung in senkrechter Ebene, und $w_{p,o}^*$ ist die bezogene Partikelgeschwindigkeit beim Eintritt in den Krümmer. Ist im Krümmereintritt keine Relativgeschwindigkeit zwischen Partikel und transportierendem Fluid vorhanden, so sind ihre bezogenen Geschwindigkeiten gleich ($w_{p,o}^* = w_\varphi^*$). Die bezogenen Koordinaten der Partikelbahnen r^* und φ^* hängen von den folgenden sieben Parametern ab:

$$\begin{aligned}
 B &\equiv \frac{2r_0/d_p}{\varrho_p/\varrho} = \frac{D^* + 2s^* - 1}{(\varrho_p/\varrho) \cdot d_p/d}; & \bar{w}^* &\equiv \frac{\bar{w} \cdot d_p}{\nu}; \\
 Ar &\equiv \frac{d_p^3 g}{\nu^2} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right); & D^* &\equiv \frac{D}{d}; \\
 \varphi_0^* &\equiv \varphi_0; & n; & s^* \equiv \frac{s}{d}.
 \end{aligned} \tag{5.178}$$

Das gekoppelte Differentialgleichungssystem ist mit dem numerischen Verfahren von RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM zu lösen. Bei der großen Zahl von Parametern wird zunächst versucht, solche mit untergeordnetem Einfluß auf die Kornbahnen herauszufinden. *Bild 5.33* zeigt Bahnkurven für die Parameter $B = 50$ und $\bar{w}^* = 2,5 \cdot 10^3$, so wie sie etwa beim hydraulischen Transport anzutreffen sind. Die Schwerkraft sei zunächst vernachlässigbar ($Ar = 0$). Der Krümmer hat das Krümmungsverhältnis $D^* = 6$. Für die Partikel, welche in unmittelbarer Nähe der Innenwand ($s^* = 0,01$) in den Krümmer eintritt und im folgenden Grenzkorn heißt, ist ein maximaler Einfluß des Strömungsprofils zu erwarten. *Bild 5.34* zeigt,

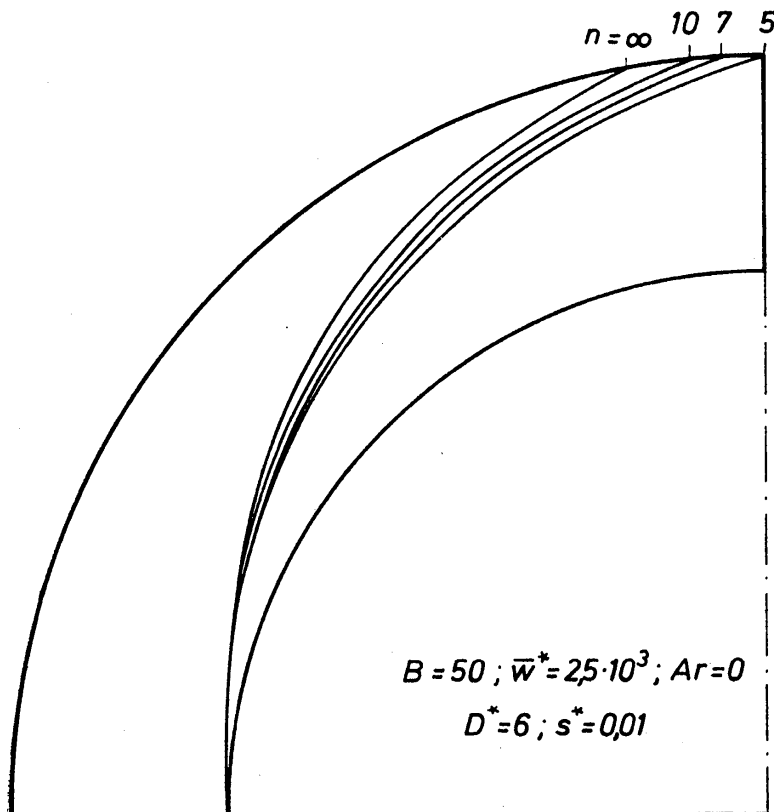


Bild 5.33. Beispiele für Partikelbahnen beim hydraulischen Transport unter Berücksichtigung verschiedener Geschwindigkeitsprofile des Fluids

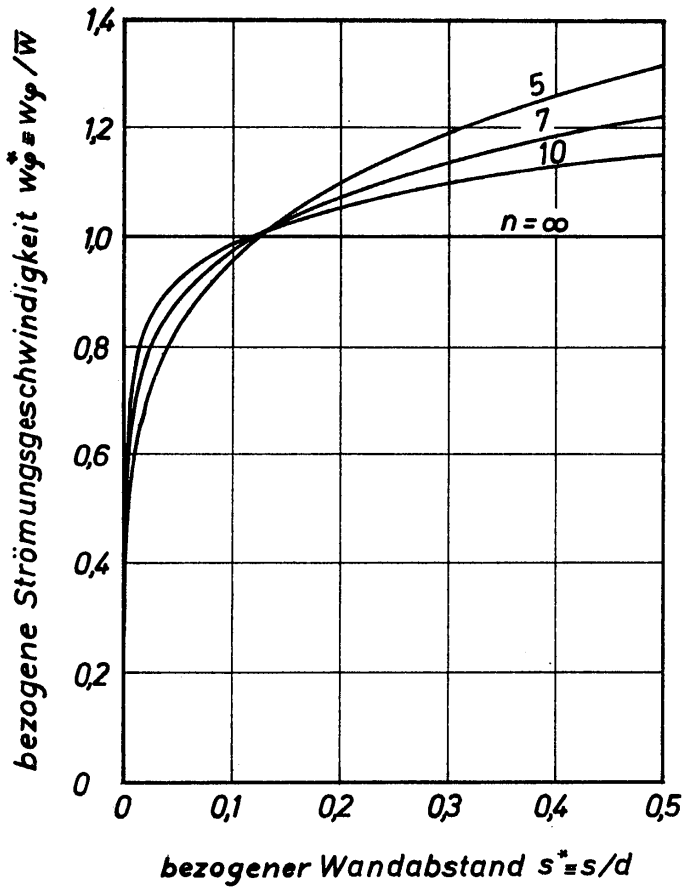


Bild 5.34 Geschwindigkeitsprofile im Fluid für verschiedene Werte des Exponenten n

in welcher Weise sich die bezogene Strömungsgeschwindigkeit w_φ^* des Fluids gemäß Gl.(5.171) mit dem bezogenen Wandabstand s^* bei verschiedenen Werten von n ändert. Der starke Unterschied zwischen dem Strömungsprofil für turbulente Rohrströmungen mit z. B. $n = 7$ und dem Kolbenprofil mit $n = \infty$ hat jedoch in *Bild 5.33* nur einen verhältnismäßig kleinen Einfluß auf die Bahnkurve des Grenzkornes. Daraus wird die geringe Bedeutung des Strömungsprofils bei

gleicher mittlerer Geschwindigkeit deutlich. Man kann daher auch annehmen, daß der sich ausbildende Sekundärwirbel der realen Krümmerströmung im allgemeinen die Bahnkurven nur wenig beeinflusst, was auch durch Beobachtungen bestätigt wird. Rechnet man im folgenden stets mit Kolbenströmung, d.h. mit $w_\varphi^* \equiv w_\varphi / \bar{w} = 1$, so bedeutet dieses keine schwerwiegende Einschränkung der Ergebnisse. Man gewinnt jedoch den Vorteil, daß die Parameter D^* und s^* nunmehr allein als Größen des Parameters B einen Einfluß auf die Partikelbahnen ausüben und im übrigen lediglich zur Begrenzung des Strömungsfeldes gemäß Gl.(5.173) benötigt werden.

5.532 Diskussion der Bahnkurven

Für den Fall, daß die Schwerkraft vernachlässigt werden kann, ist die Archimedeszahl $Ar = 0$ und die jeweils letzten Glieder in den Gleichungen (5.174) und (5.175) entfallen. Durch die Vernachlässigung der Schwerkraft werden die Anordnung der Krümmer und somit auch der Winkel φ_0^* bedeutungslos. Die bezogene Anfangsgeschwindigkeit $w_{p,o}^* \equiv w_{p,o} / \bar{w}$ der Partikel soll dann stets gleich der bezogenen Geschwindigkeit $w^* = 1$ des Fluids im Krümmereintritt sein. Demnach verbleiben zunächst als einzige Parameter die Kennzahlen B und \bar{w}^* , die im folgenden näher untersucht werden. Die Größe von B wird im wesentlichen durch das Dichteverhältnis ρ_p / ρ bestimmt. Beim pneumatischen Transport ist $0 \leq B \leq 1$ zu erwarten, während beim hydraulischen Transport B um zwei bis drei Zehnerpotenzen größer ist. Der Parameter $\bar{w}^* \equiv \bar{w} d_p / \nu$ ist beim pneumatischen und hydraulischen Transport von gleicher Größenordnung.

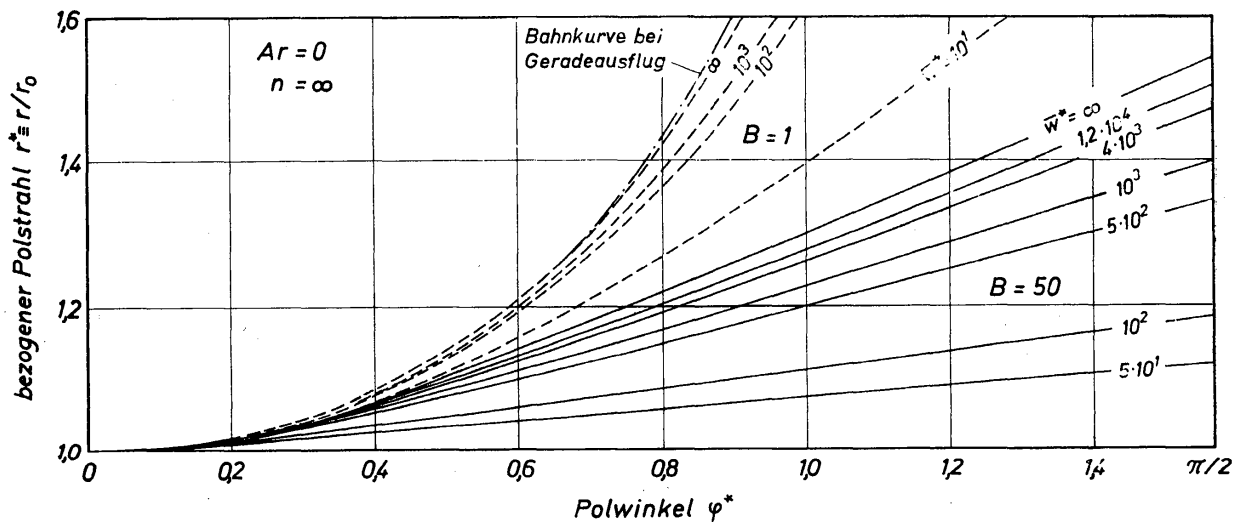


Bild 5.35. Einfluß der Kennzahl $\bar{w}^* \equiv d_p \bar{w} / \nu$ auf die Kornbahnen beim pneumatischen Transport mit $B = 1$ (gestrichelte Kurven) und beim hydraulischen Transport mit $B = 50$ (ausgezogene Kurven)

In *Bild 5.35* ist der bezogene Polstrahl r^* über dem Polwinkel φ^* in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgetragen. Für je ein Beispiel des pneumatischen Transportes mit $B = 1$ (gestrichelte Kurven) und des hydraulischen Transportes mit $B = 50$ (ausgezogene Kurven) ist der Parameter $\bar{w}^* \equiv \bar{w} d_p / \nu$ verändert worden. Bei $\bar{w}^* = \infty$, d. h. beispielsweise, wenn die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Fluids sehr große Werte annimmt, erhält man jeweils Grenzkurven, deren Auftreten bereits am Ende von Abschnitt 5.52 anhand der allgemeinen Differentialgleichungen erklärt wurde. Bei dem gewählten Beispiel für den pneumatischen Transport liegt diese Grenzkurve in unmittelbarer Nähe der Kurve für den Geradeausflug. Die Grenzkurven treten jedoch praktisch schon bei endlichen Werten, nämlich bei $\bar{w}^* \approx 10^5$ auf. Im allgemeinen dürfte beim hydraulischen und pneumatischen Transport \bar{w}^* in der Größenordnung von $5 \cdot 10^3$ liegen, so daß die Partikelbahnen in der Nähe der Grenzkurven verlaufen. Daher kann angenommen werden, daß die Grenzkurven bereits weitgehenden Aufschluß über den Verlauf der tatsächlichen Kornbahnen liefern.

In *Bild 5.36* ist eine Reihe von Grenzkurven für verschiedene Werte des Parameters B dargestellt, wobei $\bar{w}^* \geq 10^5$ ist. Als Grenzfall aller möglichen Partikelbahnen treten der Geradeausflug für $B = 0$ sowie die Kreisbahn für $B = \infty$ auf. Das Kurvenfeld, welches durch den Parameterbereich $20 \leq B \leq 500$ beschrieben wird, kann dem hydraulischen Transport zugeordnet werden. Der pneumatische Transport ist hingegen im Bereich $0 \leq B \leq 1$ zu finden. Die Partikelbahnen beginnen im Krümmereintritt bei $r^* = 1$ und $\varphi^* = 0$. Je kleiner B ist, desto länger fällt die Kornbahn im Krümmereintritt mit dem Geradeausflug ($B = 0$) zusammen. Alle Partikelbahnen dieses Bildes sind Grenzkurven für die jeweils dazugehörige Kenngröße B . Falls die Bedingung $\bar{w}^* \geq 10^5$ nicht erfüllt ist, werden die Bahnkurven mit geringerer Steigung verlaufen als dargestellt.

Untersuchungen von BRAUER und KRIEGEL [5.54, 5.56] haben gezeigt, daß die Stelle maximalen Verschleißes im Krümmer beim hydraulischen und pneumatischen Transport vom Aufprallort des Grenzkornes auf die äußere Krümmer-

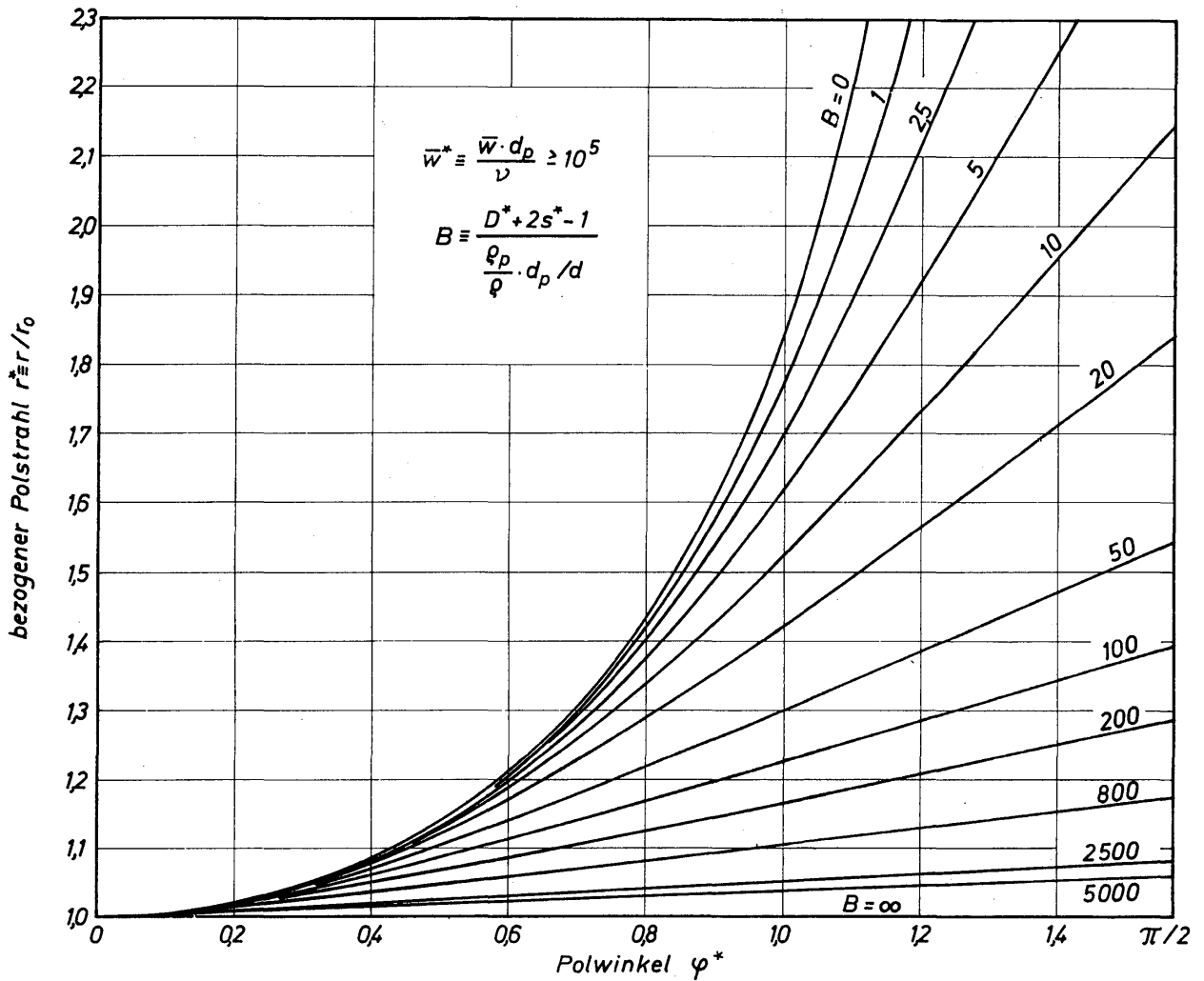


Bild 5.36. Verlauf der Partikelbahnen in Rohrkrümmern für verschiedene Werte der Kennzahl B unter Berücksichtigung von $\bar{w}^* \geq 10^5$

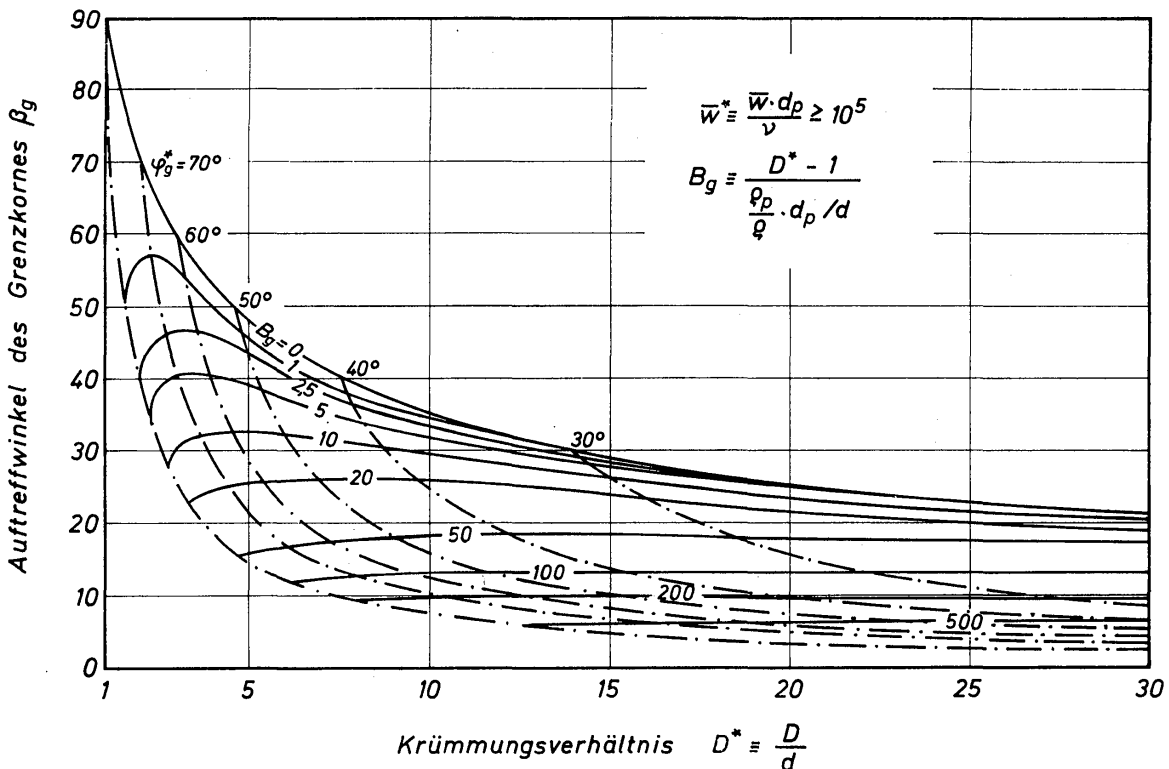


Bild 5.37. Auftreffwinkel β_g des Grenzkornes für $\bar{w}^* \geq 10^5$ bei verschiedenen Werten der Kennzahl $B = B_g$, abhängig vom Krümmungsverhältnis $D^* \equiv D/d$

wand abhängt. Darüber hinaus ist die Verschleißgeschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit, mit der sich die Verschleißmulde ausbildet, eine Funktion des Auftreffwinkels β_g des Grenzkornes. Die Auftreffstelle, gekennzeichnet durch den Polwinkel φ_g^* sowie der Auftreffwinkel β_g interessieren insbesondere in Abhängigkeit vom Krümmungsverhältnis $D^* \equiv D/d$. Die Winkel β_g und φ_g^* lassen sich aus *Bild 5.36* ermitteln und sind in *Bild 5.37* über D^* für verschiedene Werte von

$$B_g \equiv \frac{D^* - 1}{\frac{\rho_p}{\rho} \cdot d_p/d} \quad (5.179)$$

aufgetragen. Die strichpunktierten Linien geben an, bei welchem Polwinkel φ_g^* das Grenzkorn auf die äußere Krümmerwand aufprallt. Der oberste Kurvenzug mit $B_g = 0$ kennzeichnet den Geradeausflug und damit praktisch die Verhältnisse beim pneumatischen Transport. Der Einfluß des Krümmungsverhältnisses D^* auf den Auftreffwinkel β_g ist hierbei am stärksten. Demgegenüber wird im Parameterbereich $B_g \geq 20$, der etwa beim hydraulischen Transport vorliegt, der Einfluß des Krümmungsverhältnisses für den Auftreffwinkel β_g vernachlässigbar.

Die Bedeutung von *Bild 5.37* kann am besten ein Beispiel für den Verschleiß von PVC-Krümmern beim pneumatischen Transport von Stahlsand zeigen. Nach Untersuchung von BRAUER und KRIEGEL [5.54] läßt sich bei PVC die Verschleißgeschwindigkeit um die Hälfte senken, wenn der Auftreffwinkel des Gas-Feststoff-Strahles von $\beta = 50^\circ$ auf $\beta = 20^\circ$ vermindert wird. In *Bild 5.37* entnimmt man der Kurve für den pneumatischen Transport mit $B_g = 0$, daß demnach ein PVC-Krümmern bei einem Krümmungsverhältnis von $D^* = 30$ eine ungefähr doppelt so lange Lebensdauer besitzen würde als bei einem Krümmungsverhältnis von $D^* = 5$.

Es wurde bereits nachgewiesen, daß für große Werte der Kennzahl $\bar{w}^* \equiv \bar{w} d_p/\nu$ die Schwerkkräfte gegenüber den Widerstandskräften vernachlässigbar sind und somit die Archimedeszahl keinen Einfluß auf den Verlauf der Bahnkurven ausübt. Erst wenn die Kenngröße \bar{w}^* sehr viel kleiner als 10^5 wird, muß mit einem deutlichen Einfluß der Schwerkkräfte auf die Partikelbahnen gerechnet werden. In den *Bildern 5.38* und *5.39* sind für je ein Beispiel des pneumatischen Transportes mit $\bar{w}^* = 10^2$ und $B = 1$ sowie des hydraulischen Transportes mit $\bar{w}^* = 10^3$ und $B = 100$ einige Bahnkurven für verschiedene Werte der Archimedeszahl Ar dargestellt. Die Umlenkung erfolgt in 90° -Krümmern mit Krümmungsverhältnissen $D^* = 6$ in der Richtung senkrecht aufwärts-waagrecht. Die Partikel treten mit dem bezogenen Wandabstand $s^* = 0,5$ in die Krümmerströmung ein. Ihre Anfangsgeschwindigkeiten weichen infolge der Schwerkkräfte von der Geschwindigkeit des Fluids ab. Die bezogene Anfangsgeschwindigkeit $w_{p,o}^* \equiv w_{p,o}/\bar{w}$ kann mit der stationären Sinkgeschwindigkeit w_s der Partikel in folgender Form geschrieben werden:

$$w_{p,o}^* \equiv \frac{w_{p,o}}{\bar{w}} = \left(\frac{w \pm |w_s|}{\bar{w}} \right)_0 = w_{\varphi,o}^* \pm \left(\frac{|w_s|^3/g \cdot \nu}{\left| \frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right|} \right)^{1/3} \cdot \frac{Ar^{1/3}}{\bar{w}^*}. \quad (5.180)$$

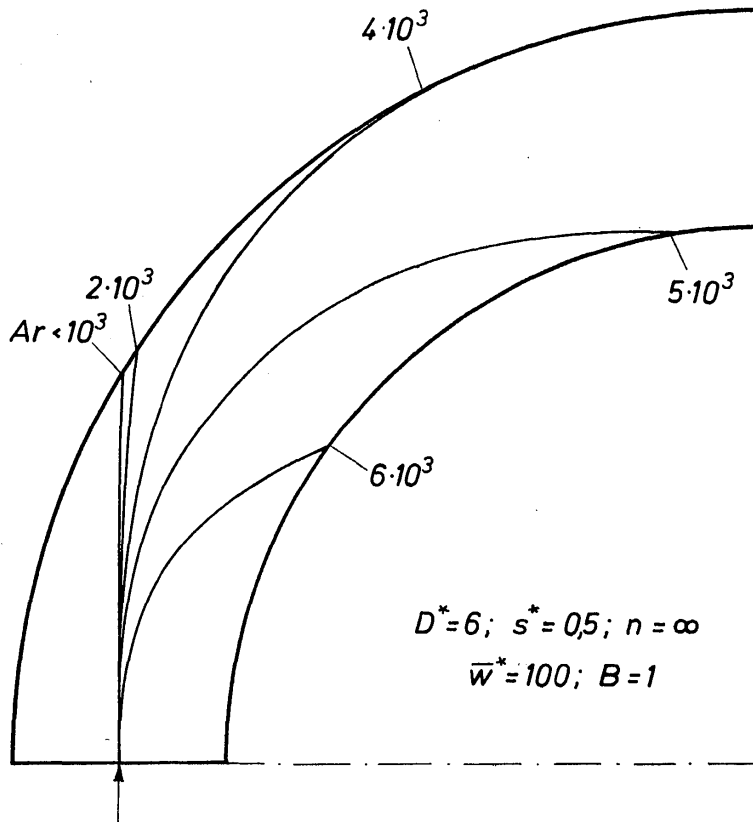


Bild 5.38. Einfluß der Archimedeszahl auf die Kornbewegung beim pneumatischen Transport in einer Umlenkung senkrecht aufwärts-waagrecht

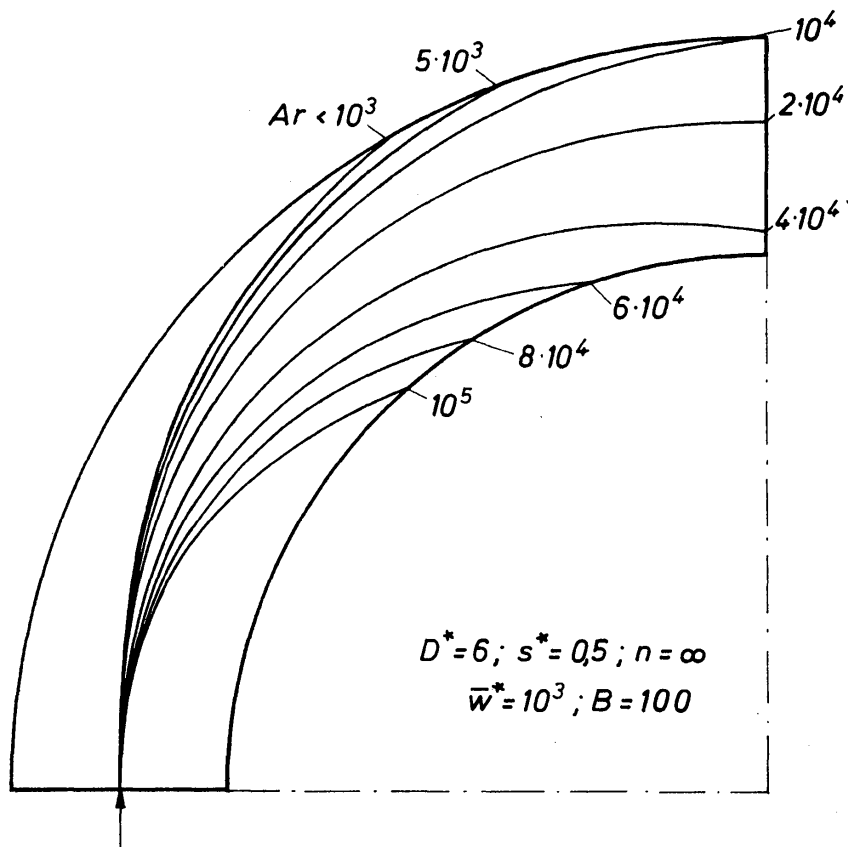


Bild 5.39. Einfluß der Archimedeszahl auf die Kornbewegung beim hydraulischen Transport in einer Umlenkung senkrecht aufwärts-waagrecht

Hierin ist der Ausdruck $|w_s|^3/g \cdot \nu \left| \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \right|$ gemäß Gl. (5.40) allein eine Funktion der Archimedeszahl. Demnach hängt die bezogene Anfangsgeschwindigkeit $w_{p,0}^*$ bei konstantem Wert der Kenngröße \bar{w}^* und vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung des Fluids im Krümmereintritt ebenfalls nur von der Archimedeszahl ab und kann mit Hilfe von *Bild 5.11* ermittelt werden. Das negative Vorzeichen in Gl. (5.180) ist bei aufwärts gerichtetem und das positive bei abwärts gerichtetem Förderstrom zu verwenden.

Mit den gewählten Parametern ist in den *Bildern 5.38* und *5.39* für $Ar < 10^3$ kein Einfluß der Schwerkraft auf die Partikelbahnen feststellbar. Für $Ar > 10^3$ macht sich hingegen die Schwerkraft außerordentlich stark bemerkbar. Die Krümmung der Bahnkurven nimmt zu, und der Aufprallwinkel der Partikel auf die äußere Krümmenwand wird kleiner. Bei bestimmten Werten der Archimedeszahl kommt es nicht zu einer Berührung der Bahnkurven mit den äußeren Krümmenwänden. In diesem Fall kann erwartet werden, daß die Stoß- und Reibungsverluste bei der Umlenkung einer feststoffbeladenen Strömung im Krümmer besonders niedrig

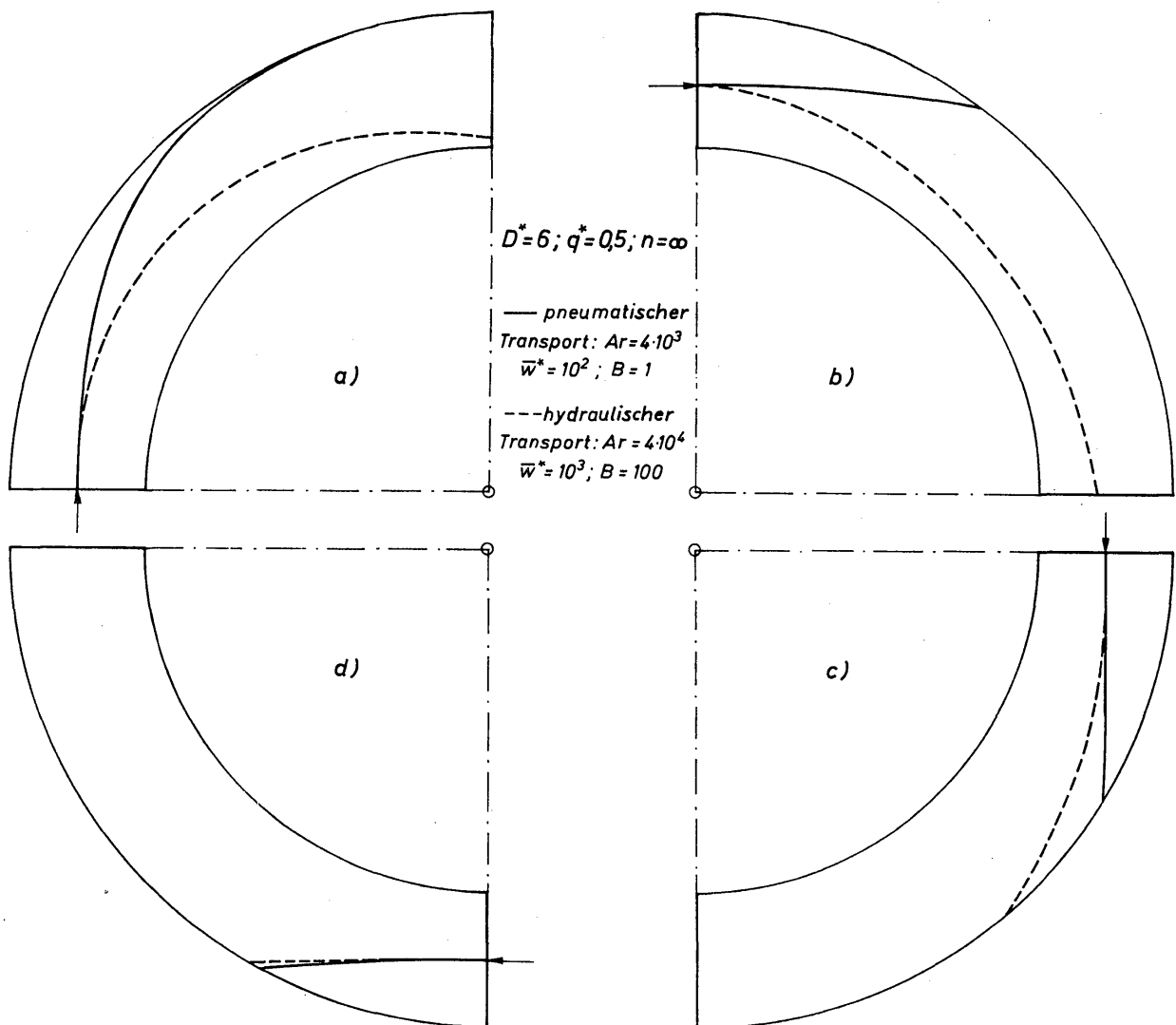


Bild 5.40. Partikelbahnen für je ein Beispiel des pneumatischen Transports ($Ar = 4 \cdot 10^3$, ausgezogene Kurven) und des hydraulischen Transports ($Ar = 4 \cdot 10^4$, gestrichelte Kurven) bei unterschiedlicher Krümmenanordnung in senkrechter Ebene

sind. Schließlich prallen bei noch größeren Werten der Archimedeszahl die Partikeln auf die inneren Krümmerrände auf. Die Strömungsgeschwindigkeit des Fluids wird dann ungefähr gleich der stationären Sinkgeschwindigkeit der Partikeln, so daß mit Ablagerungen zu rechnen ist. Es muß jedoch betont werden, daß die in *Bild 5.38* benutzten Parameterwerte beim pneumatischen Transport praktisch niemals auftreten und hier nur den Einfluß der Schwerkraft besonders deutlich machen sollen. Im allgemeinen sind beim pneumatischen Transport die Kenngrößen \bar{w}^* um eine Zehnerpotenz größer und B um eine Zehnerpotenz kleiner als in dem gewählten Beispiel, so daß dann nur ein sehr geringer Einfluß der Schwerkraft vorhanden ist.

Die bisherigen Aussagen über den Einfluß der Schwerkraft auf die Partikelbahnen sind von der geometrischen Lage des betrachteten Krümmers in bezug auf die Richtung der Erdbeschleunigung abhängig. *Bild 5.40* zeigt, in welcher Weise die in senkrechter Ebene unterschiedlich angeordneten Krümmern (a) bis (d) unter sonst gleichen Bedingungen von einander abweichende Partikelbahnen aufweisen. Aus den *Bildern 5.38* und *5.39* sind jeweils die Bahnkurven für den pneumatischen Transport mit $Ar = 4 \cdot 10^3$ und für den hydraulischen Transport mit $Ar = 4 \cdot 10^4$ für einen Vergleich herangezogen worden. Die gestrichelten Kurven kennzeichnen das Beispiel für den hydraulischen Transport. In den Krümmern (a) und (b) wirkt die radiale Komponente der Schwerkraft stets in entgegengesetzter Richtung wie die Zentrifugalkraft, während sie in den Krümmern (c) und (d) den Einfluß der Zentrifugalkraft verstärkt. Deshalb sind die zu erwartenden Energieverluste bei Umlenkungen senkrecht aufwärts-waagrecht sowie waagrecht-senkrecht abwärts auch geringer, als bei Umlenkungen senkrecht abwärts-waagrecht und waagrecht-senkrecht aufwärts. Diese Aussage wird in *Bild 5.40* durch den Verlauf der Bahnkurven beim hydraulischen Transport bestätigt. Das Beispiel für den pneumatischen Transport zeigt in den Krümmern (b), (c) und (d) nur einen kleinen Einfluß der Umlenkungsrichtung. In Krümmer (a) wird hingegen deutlich, daß die Schwerkraft den Einfluß der Zentrifugalkraft verringert, und die Partikel daher eine etwas stärker gekrümmte Bahn durchläuft.

Der zu erwartende Energieverlust beim hydraulischen und pneumatischen Transport in Rohrkrümmern hängt stark davon ab, in welcher Weise die Partikeln nach dem ersten Wandaufprall ihren weiteren Weg durch den Krümmer zurücklegen. Mit den hergeleiteten Bewegungsgleichungen können die Bahnkurven auch im Anschluß an einen Wandaufprall berechnet werden. Dazu wird die vereinfachende Annahme getroffen, daß der Stoß nur hinsichtlich der senkrechten Auftreffgeschwindigkeit der Partikeln mit Verlusten behaftet ist. Dies wird durch die Stoßzahl e berücksichtigt, die das Verhältnis aus der zur Stoßebene senkrechten Partikelgeschwindigkeit nach und vor dem Stoß ist. In *Bild 5.41* sind in einem Krümmer mit $D^* = 6$ einige Bahnkurven von Partikeln dargestellt, die jeweils bei $s^* = 0,5$ in die Krümmerströmung eintreten. Die ausgezogenen Kurven sind mit $B = 0,1$ ein Beispiel für den pneumatischen Transport. Für den hydraulischen Transport gelten die gestrichelten Kurven mit $B = 50$. In beiden Fällen sind $\bar{w}^* = 10^3$ und $Ar = 0$. Die Bahnkurven nach dem ersten Wandstoß sind für

verschiedene Stoßzahlen dargestellt. Dabei kennzeichnet $e = 1$ den idealen, verlustlosen Stoß.

Beim pneumatischen Transport gelangt die Partikel nach dem Wandaufprall an der Stelle P wieder in den mittleren Bereich der Krümmerströmung, und es kommt je nach Größe der Stoßzahl bei P_1 bzw. P_2 zu weiteren Stößen mit der Außenwand. Die radiale Partikelgeschwindigkeit vermindert sich dabei von Stoß zu Stoß. WEIDNER [5.57] berechnete beim pneumatischen Transport in Rohrkrümmern den zusätzlichen Druckverlust infolge der im Fluid vorhandenen Partikeln. Er setzte dabei voraus, daß alle Partikeln vom Augenblick ihres Eintritts in den Krümmer an der Außenwand rutschen. Die berechneten Bahnkurven sowie Beobachtungen [5.58] und [5.59] zeigen jedoch, daß dies nur bei kleinen Fördergeschwindigkeiten der Fall sein kann. Mit steigenden Geschwindigkeiten werden die Partikeln nach dem ersten Wandstoß in zunehmendem Maße in die Krümmerströmung reflektiert. Die Reibungsverluste nehmen dabei im gleichen Maße ab wie der an der äußeren Krümmerwand reibend zurückgelegte Weg der Partikeln kleiner wird.

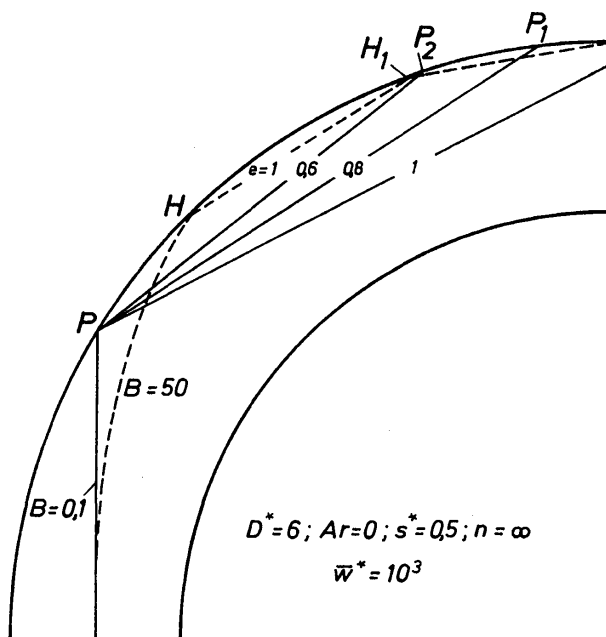


Bild 5.41. Einfluß der Stoßzahl e auf die Partikelbahnen nach einem Wandaufprall beim pneumatischen Transport ($B = 0,1$, ausgezogene Kurven) und beim hydraulischen Transport ($B = 50$, gestrichelte Kurven)

Beim hydraulischen Transport vermag sich die Partikel in *Bild 5.41* selbst bei verlustlosem Stoß kaum mehr von der Wand zu lösen. Infolge des bereits kleinen Auftreffwinkels an der Stelle H kann angenommen werden, daß unter praktischen Bedingungen die Partikel den Weg von H bis H_1 an der äußeren Krümmerwand gleitend zurücklegt. Diese Vermutung stimmt mit Beobachtungen überein.

Schrifttum

- [5.1] C. W. OSEEN, Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, *Ark. Math. Astr. Fys.* 6 (1910) Nr. 29
- [5.2] S. GOLDSTEIN, The steady flow of viscous fluid past a fixed spherical obstacle at small Reynolds numbers, *Proc. Roy. Soc. (London) A* 123 (1929) 225–35
- [5.3] H. S. ALLEN, The motion of spheres in a viscous fluid, *Phil. Mag. Ser. 5*, 50 (1900) 323–38 und 519–34
- [5.4] H. LIEBSTER, Über den Widerstand von Kugeln, *Ann. Physik* 4, F. 82 (1927) 541–62
- [5.5] H. D. ARNOLD, Limitations imposed by slip and inertia terms upon Stokes' law for the motion of spheres through liquids, *Phil. Mag. Ser. 6*, 22 (1911) 755–75
- [5.6] C. WIESELSBERGER, Weitere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes, *Physik. Z.* 23 (1922) 219–24
- [5.7] O. FLACHSBART, Neuere Untersuchungen über den Luftwiderstand von Kugeln, *Physik. Z.* 28 (1927) 461–9
- [5.8] A. KASKAS, *Berechnung der stationären und instationären Bewegung von Kugeln in ruhenden und strömenden Medien*, Dipl.-Arbeit am Lehrstuhl für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin, 1964
- [5.9] L. B. TOROBIN und W. H. GAUVIN, Fundamental aspects of solids-gas flow, *Can. J. Chem. Eng.* 37 (1959) 4, 129–41, 5, 167–76, 6, 224–36, 38 (1960) 5, 142–53, 6, 189–200, 39 (1961) 3, 113–20
- [5.10] F. H. GARNER, V. G. JENSON und R. B. KEEY, Flow pattern around spheres and the Reynolds analogy, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 37 (1959) 191–7
- [5.11] S. M. ISAAKYAN und A. M. GASPARYAN, The mechanism of the interaction of solids with a viscous liquid under laminar conditions, *Int. Chem. Eng.* 6 (1966) 3, 445–8
- [5.12] V. G. JENSON, Viscous flow round a sphere at low Reynolds numbers, *Proc. Roy. Soc. (London) A* 249 (1959) 346–66
- [5.13] S. I. RUBINOW und J. B. KELLER, The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid, *J. Fluid Mech.* 11 (1961) 3, 447–59
- [5.14] R. STAPATHY und W. SMITH, The motion of single immiscible drops through a liquid, *J. Fluid Mech.* 10 (1961) 4, 561–70
- [5.15] R. LADENBURG, Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit, *Ann. Physik* 4, E 23 (1907) 447–58
- [5.16] H. FAXÉN, Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist, *Ann. Physik* 4, F 68 (1922) 89–119
- [5.17] E. CUNNINGHAM, On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium, *Proc. Roy. Soc. (London) A* 83 (1909/10) 357–65
- [5.18] M. L. BAKER und A. F. CHARWAT, Transitional correction to the drag of a sphere in free molecule flow, *Physics of Fluids* 1 (1958) 2, 73–81
- [5.19] L. B. TOROBIN und W. H. GAUVIN, The drag coefficients of single spheres moving in steady and accelerated motion in a turbulent fluid, *AIChE J.* 7 (1961) 4, 615–9
- [S.20] S. HOERNER, Versuche mit Kugeln betreffend Kennzahl, Turbulenz und Oberflächenbeschaffenheit, *Luftfahrtforsch.* 12 (1935) 1, 42–54
- [5.21] S. P. BURKE und W. B. PLUMMER, Suspension of macroscopic particles in a turbulent gas stream, *Ind. Eng. Chem.* 20 (1928) 11, 1200–4
- [5.22] R. H. WILHELM und S. VALENTINE, Fluidized bed. Transition state in the vertical pneumatic transport of particles, *Ind. Eng. Chem.* 43 (1951) 5, 1199–1203
- [5.23] H. L. DRYDEN und E. KUETHE, Effect of turbulence in wind-tunnel measurements, *NACA Techn. Rep.* 342 (1929)

- [5.24] H. L. DRYDEN, G. B. SCHUBAUER, W. C. MOCK und H. K. SKRAMSTAD, Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of sphere, *NACA Techn. Rep. 581* (1937)
- [5.25] J. W. MACCOLL, Aerodynamics of spinning sphere, *J. Roy. Aeron. Soc.* 32 (1928) Z 13, 777–98
- [5.26] A. FAGE und J. H. WARSAP, The effects of turbulence and surface roughness on the drag of a circular cylinder, *Aeron. Res. Comm. Rep. & Mem. 1283* (1929)
- [5.27] R. K. FINN, Determination of the drag on a cylinder at low Reynolds numbers, *J. Appl. Physics* 24 (1953) 6, 771–3
- [5.28] S. TOMOTIKA und T. AOI, The steady flow of a viscous fluid past an elliptic cylinder and a flat plate small Reynolds numbers, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 6 (1953) 290–312
- [5.29] ● H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6. Auflage, Cambridge University Press, 1932
- [5.30] C. M. WHITE, The drag of cylinders in fluids at slow speeds, *Proc. Roy. Soc. (London) A* 186 (1946) 472–8
- [5.31] A. M. JONES und J. G. KNUDSEN, Drag coefficients at low Reynolds numbers for flow past immersed bodies, *AIChE J.* 7 (1961) 1, 20–5
- [5.32] E. K. MARCHILDON, A. CLAMEN und W. H. GAUVIN, Drag and oscillatory motion of freely particles, *Can. J. Chem. Eng.* 42 (1964) 4, 178–82
- [5.33] E. B. CHRISTIANSEN und D. H. BARKER, The effect of shape and density on the free settling of particles at high Reynolds numbers, *AIChE J.* 11 (1965) 1, 145–51
- [5.34] J. SCHMIEDEL, Experimentelle Untersuchungen über die Fallbewegung von Kugeln und Scheiben in reibenden Flüssigkeiten, *Physik. Z.* 29 (1928) 17, 593–610
- [5.35] F. G. SIMMONS und N. S. DEWEY, Wind tunnel experiments with circular discs. *Aeron. Res. Comm. Rep. & Mem. 1334* (1930)
- [5.36] A. OBERBECK, Über stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung, *Crelles J.* 81 (1876) 62–80, s. auch [5.26]
- [5.37] L. SQUIRES und W. SQUIRES, The sedimentation of thin discs, *Trans. Amer. Inst. Chem. Eng.* 33 (1937) 1, 1–12
- [5.38] H. A. BECKER, The effects of shape and Reynolds number on drag in the motion of a freely oriented body in an infinite fluid, *Can. J. Chem. Eng.* 37 (1959) 2, 85–91
- [5.39] K. C. R. CHOWDHURY und W. FRITZ, Sinkversuche mit isometrischen Teilchen in Flüssigkeiten, *Chem. Eng. Sci.* 11 (1959) 92–8
- [5.40] E. S. PETTYJOHN und E. B. CHRISTIANSEN, Effect of particle shape on free-settling rates of isometric particles, *Chem. Eng. Progr.* 44 (1948) 2, 157–72
- [5.41] A. ACRIVOS und T. D. TAYLOR, The Stokes flow past an arbitrary particle, *Chem. Eng. Sci.* 19 (1964) 445–51
- [5.42] H. BRENNER, The Stokes resistance of a slightly deformed sphere, *Chem. Eng. Sci.* 19 (1964) 519–39
- [5.43] H. BRENNER, The Stokes resistance of an arbitrary particle, *Chem. Eng. Sci.* 18 (1963) 1–25, 19 (1964) 599–629, 631–51 und 703–27
- [5.44] W. TOLLMIEH, Über Kräfte und Momente in schwach gekrümmten oder konvergenten Strömungen, *Ing.-Arch.* 9 (1938) 308–26
- [5.45] K. MÜLLER und J. WESSEL, Berechnung von Teilchenbahnen im Windsichter mit dem elektronischen Analogrechner, *Aufbereitungstechn.* 6 (1966) 235–42
- [5.46] H. KÜRTEH, J. RAASCH und H. RUMPF, Beschleunigung eines kugelförmigen Feststoffteilchens im Strömungsfeld konstanter Geschwindigkeit, *Chem.-Ing.-Techn.* 38 (1966) 9, 941–8
- [5.47] C. E. LAPPLE und C. B. SHEPHARD, Calculation of particle trajectories, *Ind. Eng. Chem.* 32 (1940) 5, 605–17
- [5.48] B. GRAVE, *Bewegung kugelförmiger Partikel in strömenden Medien*, Studienarbeit am Lehrstuhl für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin, 1967

- [5.49] ● R.ZURMÜHL, *Praktische Mathematik*, Springer, 4.Auflage, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963
- [5.50] K.-J.SCHMID, *Aufbau einer Versuchseinrichtung und experimentelle Untersuchungen zur Flüssigkeitszerstäubung mittels einer rotierenden Zerstäuberscheibe*, Dipl.-Arbeit am Lehrstuhl für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin, 1967
- [5.51] J.SCHULZE, *Aufwärtsbewegung von Partikeln in horizontal strömenden Medien*, Dipl.-Arbeit am Lehrstuhl für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin, 1967
- [5.52] B.MARZILGER, *Kornbewegung im elektrischen Feld*, Studienarbeit am Lehrstuhl für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin, 1965
- [5.53] E.MUSCHELKNAUTZ, Untersuchungen an Fliehkraftabscheidern, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5/6, 306–10
- [5.54] H.BRAUER und E.KRIEGEL, Verschleiß von Rohrkrümmern beim pneumatischen und hydraulischen Feststofftransport, *Chem.-Ing.-Techn.* 37 (1965) 3, 265–76
- [5.55] J.MÜHLE *Partikelbewegungen in ebenen und räumlichen Strömungsfeldern*, Dissertation, Technische Universität Berlin, 1969
- [5.56] H.BRAUER und E.KRIEGEL, Verschleiß an Rohrleitungen bei hydraulischer Förderung von Feststoffen, *Stahl u. Eisen* 84 (1964) 21, 1313–22
- [5.57] G.WEIDNER, Grundsätzliche Untersuchung über den pneumatischen Fördervorgang, insbesondere über die Verhältnisse bei Beschleunigung und Umlenkung, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 21 (1955) 5, 145–53
- [5.58] P.SCHUCHART, *Widerstandsgesetze beim pneumatischen Transport durch gerade Rohre und Rohrkrümmer*, Dissertation, Technische Universität Berlin, 1968, und *Chem.-Ing.-Techn.* 40 (1968) 21/22, 1060–7
- [5.59] T.UEMATU und Y.MORIKAWA, Druckverluste in Krümmern einer waagerechten Förderung von körnigen Gütern, *Bull. Jap. Soc. Mech. Eng.* 4 (1961) 15, 531–8

6 Bildung und Bewegung von Blasen und Tropfen

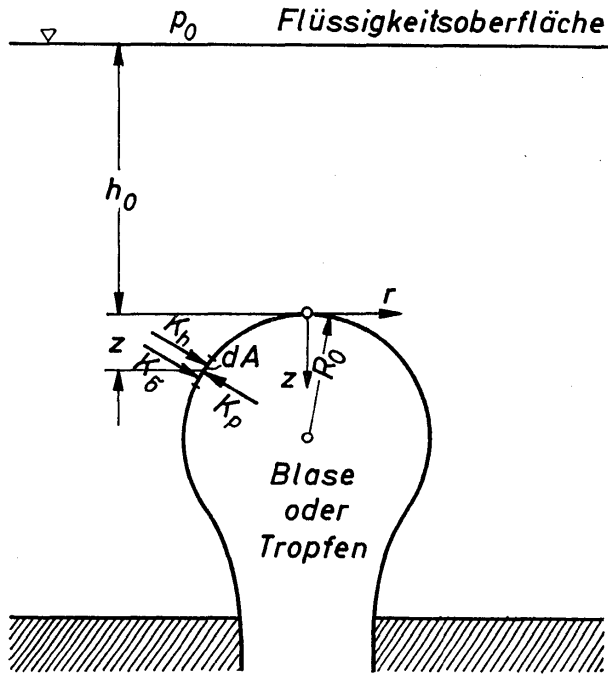
Für viele verfahrenstechnische Prozesse wie beispielsweise Absorption, Rektifikation, Extraktion und Trocknung sind die Bildung und die Bewegung von Blasen und Tropfen von grundlegender Bedeutung. Die bisher über diese Elementarvorgänge verfügbaren Kenntnisse sind noch sehr mangelhaft. Das ist keineswegs darauf zurückzuführen, daß man sich mit diesen Vorgängen nicht beschäftigt, sondern darauf, daß die Phasengrenzfläche zwischen den Blasen bzw. den Tropfen und der umgebenden fluiden Phase beweglich ist. Die Folge ist, daß Blasen und Tropfen sowohl während der Entstehung als auch während der Bewegung in der fluiden Phase fortlaufend ihre Form ändern können. Die Formänderung kann so weit gehen, daß sie zu einer Aufteilung des ursprünglichen Teilchens in mehrere kleinere Teilchen führt. Umgekehrt können aber auch mehrere kleine Teilchen wieder zu einem großen zusammenwachsen. Man hat es also mit wesentlich verwickelteren Problemen zu tun als bei der Bewegung fester Partikeln, über die in den vorangegangenen Abschnitten berichtet wurde.

Die Formänderung der Partikeln bringt zwangsläufig eine Änderung ihrer Oberfläche und ihrer charakteristischen Abmessungen mit sich. Gerade diese Größen müssen aber für die Berechnung des Wärme- und Stofftransportes bekannt sein. Alle Untersuchungen über Bildung und Bewegung von Blasen und Tropfen werden daher fast ausschließlich mit der Absicht durchgeführt, Berechnungsunterlagen für diese Transportvorgänge zu gewinnen. Bislang ist man noch auf die Sammlung von Beobachtungsergebnissen und ihre Wiedergabe durch vornehmlich empirische Gleichungen angewiesen. Gleichzeitig bemüht man sich aber auch um eine theoretische Durchdringung der einzelnen Probleme, wobei jedoch zur Vereinfachung Blasen und Tropfen getrennt behandelt werden.

Sowohl die Bildung als auch die Bewegung von Blasen und Tropfen sind dynamische Vorgänge, bei dem sich ihre Form und ihre Größe fortlaufend ändern. Für einen ersten Einblick in die Blasen- und Tropfenbildung läßt sich dieser Vorgang, so man sehr lange Bildungszeiten annimmt, als quasistatisch ansehen. Er stimmt für Blasen und Tropfen überein, so daß für diesen Grenzfall auch eine gemeinsame Behandlung möglich ist. Hierauf wird im folgenden zunächst eingegangen. Die weitergehenden Betrachtungen werden dann aber für Blasen und Tropfen getrennt angestellt.

6.1 Quasistatische Bildung von Blasen und Tropfen

Man nennt einen Vorgang quasistatisch, wenn in seinem zeitlichen Ablauf nur unendlich kleine Abweichungen vom Gleichgewichtszustand auftreten. Für diesen Fall haben BASHFORTH und ADAMS [6.1] die während der Blasen- oder Tropfenbildung entstehenden Formen, Oberflächen und Volumen berechnet. Eine sehr gute



Darstellung des Rechnungsganges findet man in einer bedeutenden Arbeit von SIEMES [6.2] über das Verhalten von Gasblasen in Flüssigkeiten.

Bild 6.1. Zur Erläuterung des Kräftegleichgewichtes an einer Blase oder einem Tropfen

Mit den Bezeichnungen von *Bild 6.1* muß an jedem Oberflächenelement dA einer Blase oder eines Tropfens das folgende Kräftegleichgewicht vorhanden sein:

$$dK_p = dK_\sigma + dK_h. \quad (6.1)$$

Es bedeuten

$$dK_p = [P + g \rho_p z] dA \quad (6.2)$$

die auf der Innenseite der Phasengrenzfläche wirkende differentielle Druckkraft, welcher die differentielle Kapillarkraft

$$dK_\sigma = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dA \quad (6.3)$$

und die differentielle hydrostatische Druckkraft

$$dK_h = [P_0 + g \rho h_0 + g \rho z] dA \quad (6.4)$$

auf der Außenseite der Phasengrenzfläche entgegenwirken. In diesen letzten Gleichungen sind P der im Scheitel der Blase oder des Tropfens vorhandene Innendruck, σ die Oberflächenspannung, R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien des Flächenelementes der Phasengrenze, P_0 der Druck oberhalb der freien Flüssigkeitsoberfläche, g Erdbeschleunigung, h_0 senkrechter Abstand zwischen der freien Flüssigkeitsoberfläche und dem Scheitelpunkt der Blase bzw. des Tropfens, ρ_p Dichte des Fluids, welches die Blase oder den Tropfen bildet, ρ Dichte des die Blase oder den Tropfen umgebenden Fluids und schließlich z die vom Scheitelpunkt laufende Ortskoordinate in senkrechter Richtung. Führt man die Kräfte in Gl.(6.1) ein, so erhält man

$$P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + P_0 + g \rho h_0 + g (\rho - \rho_p) z. \quad (6.5)$$

Im Scheitelpunkt ist $R_1 = R_2 = R_0$ und $z = 0$, so daß sich die Kräftegleichung vereinfacht und man hieraus den Innendruck P leicht ermitteln kann:

$$P = \frac{2\sigma}{R_0} + P_0 + g\rho h_0. \quad (6.6)$$

Nach Einsetzen in Gl.(6.5) folgt

$$\frac{2}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{g(\varrho - \varrho_p)}{\sigma} z. \quad (6.7)$$

Bezieht man alle Längen auf die Laplace-Konstante

$$b = \sqrt{\frac{2\sigma}{g(\varrho - \varrho_p)}} \quad (6.8)$$

und bezeichnet die damit entstehenden Längenverhältnisse mit R_0^* , R_1^* und R_2^* , dann ergibt sich in dimensionsloser Schreibweise

$$\frac{2}{R_0^*} = \frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*} + 2z^*. \quad (6.9)$$

Die ortsabhängigen Hauptkrümmungsradien R_1^* und R_2^* lassen sich durch die Ortskoordinate z^* und r^* ausdrücken. Die Lösung von Gl.(6.9) würde also die allgemeine Form

$$z^* = f(r^*; R_0^*) \quad (6.10)$$

aufweisen. Das heißt also, daß sich für jeden im Scheitelpunkt angenommenen Krümmungsradius R_0^* eine andere Kontur der Blase oder des Tropfens ergibt. In *Bild 6.2* sind für einige Werte von R_0^* Konturen angegeben, die von SIEMES übernommen wurden. Zur Deutung des Parameters R_0^* sei seine Definitionsgleichung hingeschrieben:

$$R_0^* = \frac{R_0}{b} = \sqrt{\frac{R_0^2 g(\varrho - \varrho_p)}{2\sigma}}. \quad (6.11)$$

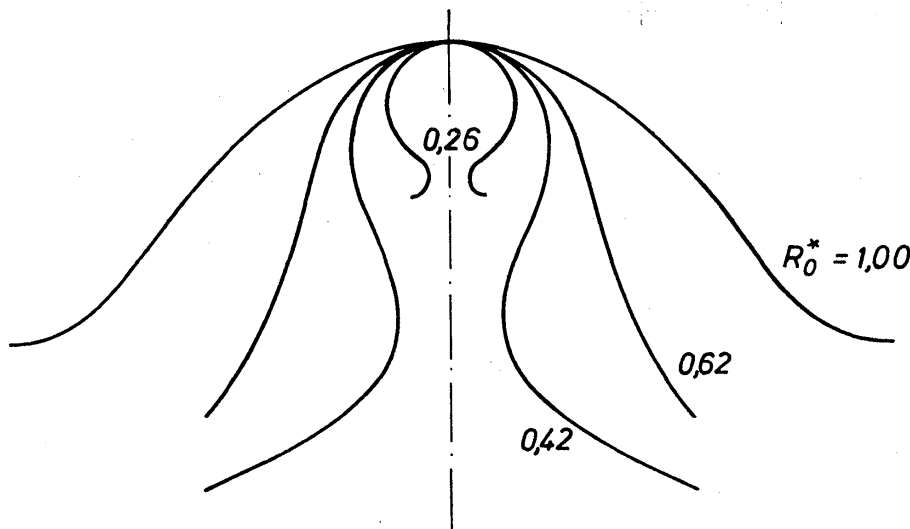


Bild 6.2. Blasen- oder Tropfenkonturen für verschiedene Werte des Scheitelradius R_0^* als Lösung der Gl.(6.9)

Der unter der Wurzel stehende Ausdruck läßt sich als das Verhältnis aus einer Weberzahl We und einer Froudezahl Fr ansehen. Da die Weberzahl als Verhältnis aus Trägheits- und Oberflächenspannungskraft und die Froudezahl als Verhältnis aus Trägheits- und um Schwerkraft verminderte Auftriebskraft dargestellt werden können, ist der Parameter R_0^* also gleich der Wurzel aus We/Fr bzw. aus dem Verhältnis von Auftriebskraft zu Oberflächenspannungskraft. Die Trägheitskraft entfällt natürlich, da die Betrachtung für die quasistatische Blasen- bzw. Tropfenbildung gilt. Kleine Werte von R_0^* bringen nach diesen Überlegungen einen großen Einfluß der Oberflächenspannungskraft zum Ausdruck, was gemäß *Bild 6.2* kugelförmige Konturen ergibt. Ist hingegen R_0^* groß, dann ist der Einfluß der Oberflächenspannungskraft sehr gering, und es ergeben sich die stark abgeflachten Blasenkonturen.

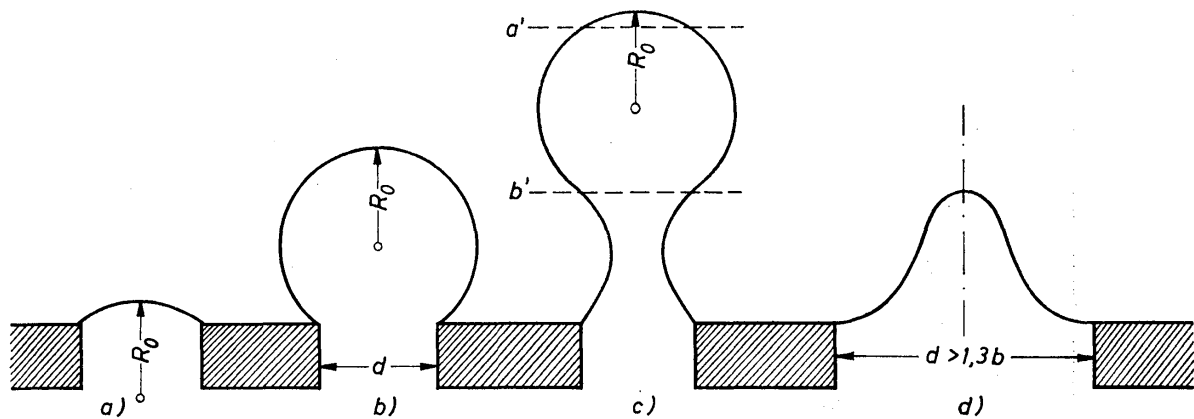
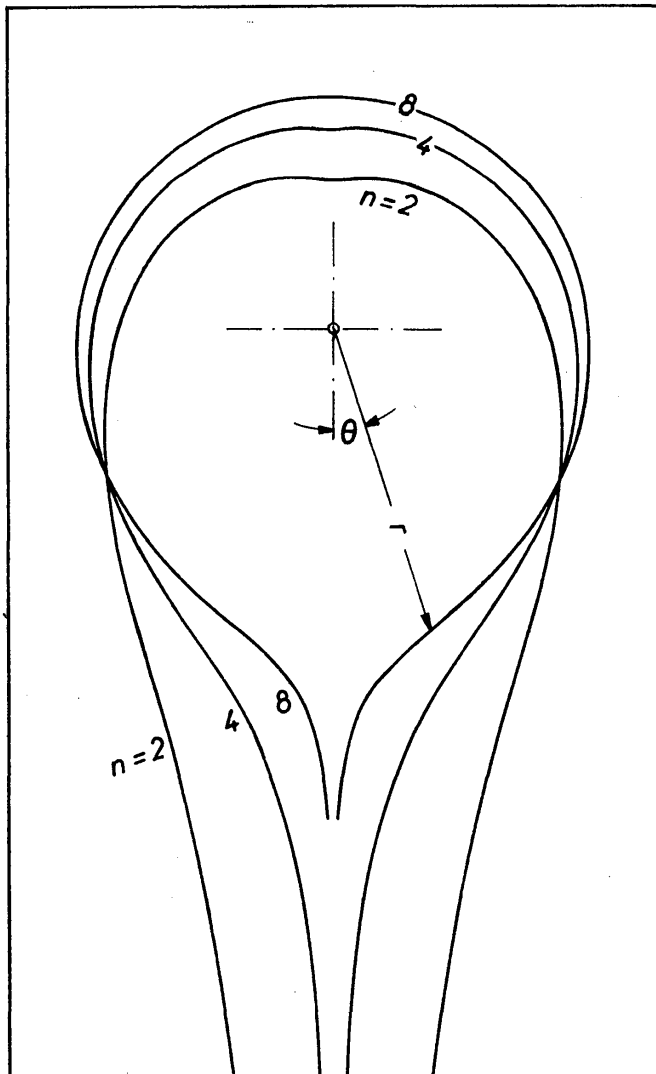


Bild 6.3. Zur Erläuterung der möglichen Blasenkonturen bei konstantem Scheitelradius R_0

Die Bedeutung der theoretisch berechneten Konturen soll an Hand von *Bild 6.3 a* bis *6.3 c* erläutert werden. Dargestellt sind Konturen von drei Blasen, die auf Öffnungen mit dem gleichen Durchmesser d aufsitzen, für die aber verschiedene Werte der Laplace-Konstante gelten. Alle drei Blasen haben den gleichen Scheitelradius R_0 . Somit sind alle drei Konturen Teile derselben nach Gl. (6.9) berechneten Lösungskurve. Die in den *Bildern a* und *b* angegebenen Konturen sind in Kontur *c* enthalten, und zwar vom Scheitel bis zu den gestrichelten Linien a' und b' . Die dargestellten Konturen geben jedoch nicht, was ausdrücklich erwähnt sei, die zeitliche Entwicklung einer bestimmten Blase an, denn hierfür müßte der Scheitelradius R_0 veränderlich sein. Im Moment des Vordringens der Blase in die Flüssigkeit oberhalb des Düsenrandes wird der Scheitelradius sehr groß sein. Im weiteren zeitlichen Ablauf wird R_0 zunächst kleiner werden, als unteren Wert $d/2$ annehmen und dann wieder ansteigen. Dieser zeitliche Verlauf der Blasenentstehung kann durch die quasistatische Betrachtungsweise nicht verfolgt werden. Die Theorie der Blasen- oder Tropfenbildung lehrt weiterhin, daß sich eine Kugelkalotte, wie sie in *Bild 6.3 a* dargestellt ist, nur dann ergibt, wenn der Radius der Düse ($d/2$) klein im Vergleich zur Laplace-Konstante b ist. Trifft diese Bedingung nicht mehr zu, dann kommt es zu einer Kontur gemäß *Bild 6.3 d*, aus welcher im weiteren Verlauf dann eine Blase gemäß *Bild 6.3 c* wird.

Die theoretischen Rechnungen lassen sich so fortsetzen, daß man auch die Oberfläche und das Volumen der Blasen bzw. Tropfen erhält. Die praktische Bedeutung dieser recht umständlichen Rechnungen ist nur sehr gering. Denn der Scheitelradius R_0 ist zunächst unbekannt und läßt sich nur aus photographischen



Aufnahmen von entstehenden Blasen und Tropfen ermitteln. Erst nachdem auf diesem Wege R_0 bestimmt ist, läßt sich die Oberfläche und das Volumen berechnen. Der hierfür erforderliche Rechenaufwand läßt sich erheblich vermindern, wenn man für die Kontur eine Näherungsgleichung annimmt, die von POUTANEN und JOHNSON [6.3] angegeben wurde. Mit den Bezeichnungen von Bild 6.4 gilt die Beziehung:

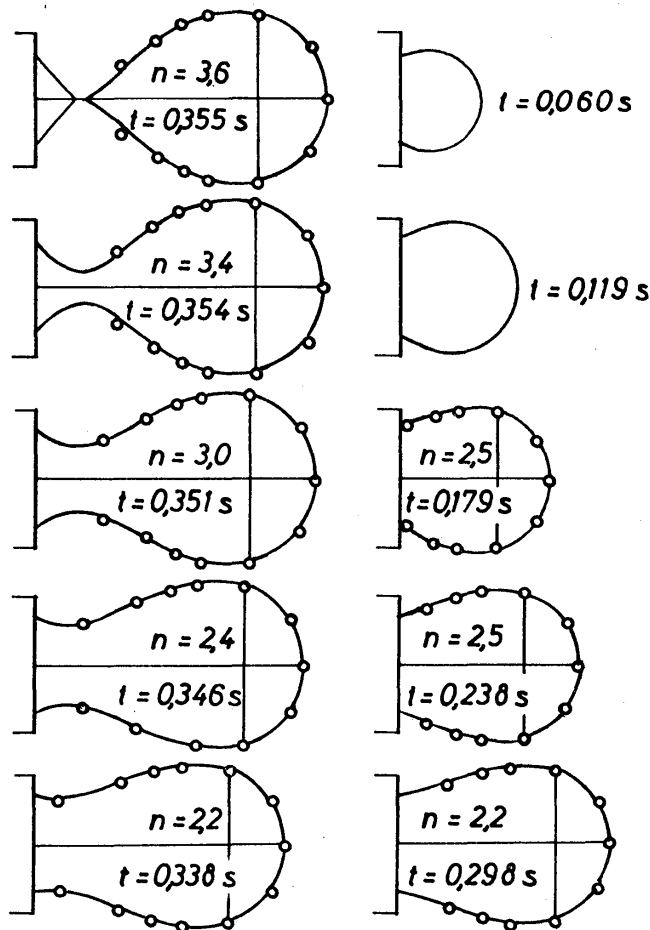
$$r^n \theta = 1, \quad (6.12)$$

Bild 6.4
Konturen von Blasen und Tropfen,
berechnet nach Gl.(6.12)

r und θ sind die Polarkoordinaten, und n ist ein Zahlenwert. In Bild 6.4 sind für $n = 2, 4$ und 8 die nach Gl.(6.12) berechneten Konturen dargestellt. Man sieht unmittelbar, daß hiermit die Kontur in der Nähe des Düsenrandes, auf dem die Blase oder der Tropfen haftet, nicht richtig erfaßt wird. Auch in der Nähe des Scheitels müssen sich geringe Abweichungen von wirklichen Konturen ergeben. Wie weit die Anpassung an wirkliche Blasen gelingt, geht aus Bild 6.5 hervor, das von POUTANEN und JOHNSON übernommen wurde. Dargestellt sind die Konturen zu verschiedenen Zeiten t während der Entstehung einer Stickstoffblase in Wasser. Die nach Gl.(6.12) berechneten Werte sind durch Kreise kenntlich gemacht. Es zeigt sich, daß die Blasenform überraschend gut durch Gl.(6.12) beschrieben wird; ausgenommen werden muß lediglich ein sehr kleiner Bereich in der Nähe des Blasenfußes. Für die Grenzfläche A_p und das Volumen V_p ergeben sich folgende Gleichungen:

$$A_p = 2\pi \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\theta^{2/n}} \sqrt{1 + \frac{1}{(n\theta)^2}} d\theta, \tag{6.13}$$

$$V_p = -\pi \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\sin^3 \theta}{\theta^{3/n}} \left(1 + \frac{1}{n\theta \tan \theta}\right) d\theta. \tag{6.14}$$



Die Größe der Grenzfläche A_p ist für den Stoffübergang während der Blasen- oder Tropfenbildung von Bedeutung. Aus dem Volumen V_p im Moment des LoslöSENS vom Düsenrand läßt sich der Durchmesser d_p einer volumgleichen Kugel berechnen. Einfacher ist jedoch die unmittelbare Ausmessung von photographischen Aufnahmen von Blasen und Tropfen nach LoslöSEN von der Düse. Die weiteren Eigenschaften von Blasen und Tropfen werden im folgenden getrennt behandelt.

Bild 6.5
Vergleich zwischen photographisch ermittelten und nach Gl. (6.12) berechneten Konturen von Stickstoffblasen in Wasser [6.3]

6.2 Dynamik der Blasenbildung an Düsen

Unter technisch üblichen Bedingungen bilden sich die Blasen mit großer Geschwindigkeit, also innerhalb sehr kurzer Zeiten. Der dynamische Ablauf der Blasenbildung läßt sich bislang noch nicht streng theoretisch verfolgen. Man ist in den meisten Fällen auf empirische Gleichungen angewiesen, mit deren Hilfe man die für den Ingenieur bedeutsamen Größen, wie Durchmesser und Bildungsfrequenz, zumindest näherungsweise berechnen kann.

Zur Untersuchung der Blasenbildung läßt man die Blasen entweder an einer Düse, die zumeist tief in eine Flüssigkeitssäule eintaucht, oder an der in einer ebenen Platte befindlichen Bohrung entstehen. Es hat sich gezeigt, daß die an beiden Versuchsanordnungen entstehenden Blasen verschieden große Abreißdurchmesser haben. Aus diesem Grunde muß die Blasenbildung also stets unter Berücksichtigung der Versuchsanordnung betrachtet werden.

6.21 Blasendurchmesser

Bildet sich die Blase am freien Ende einer Düse, die in eine nach allen Richtungen unendlich ausgedehnte, ruhende Flüssigkeit ragt, so treten im Augenblick des Loslösens vom Düsenrand die Auftriebskraft, die Oberflächenspannungskraft, die Widerstandskraft und die Trägheitskraft auf. Unter Vernachlässigung der Trägheitskraft und der Annahme, daß der Widerstandsbeiwert der Blase konstant ist, stellte MERSMANN [6.4] folgende Gleichung für den Blasendurchmesser d_p auf:

$$d_p = \left\{ \frac{3 \sigma d}{g \varrho} + \left[\left(\frac{3 \sigma d}{g \varrho} \right)^2 + \frac{15 \dot{V}^2 d}{g} \right]^{1/2} \right\}^{1/3}. \quad (6.15)$$

Den Voraussetzungen zufolge dürfte diese Gleichung nur für kleine Werte des Volumstromes \dot{V} gelten. Andererseits zeigte sich aber, daß Gl. (6.15) offensichtlich alle den Blasendurchmesser beeinflussenden Größen enthält. Ihr Anwendungsbereich soll durch Vergleich mit Meßwerten überprüft werden. Dazu erweist es sich aber als sinnvoll, eine dimensionslose Schreibweise einzuführen. Dividiert man Gl. (6.15) durch $(3 \sigma d/g \varrho)^{1/3}$, so erhält man

$$d_p^* \equiv \frac{d_p}{(3 \sigma d/g \varrho)^{1/3}} = \left\{ 1 + \left[1 + 1,028 \frac{We^2}{Fr} \right]^{1/2} \right\}^{1/3}. \quad (6.16)$$

Hierin sind We die Weberzahl und Fr die Froudezahl mit folgenden Definitionen:

$$We \equiv \frac{w_d^2 d \varrho^2}{\sigma}, \quad (6.17)$$

$$Fr \equiv \frac{w_d^2}{g d}. \quad (6.18)$$

Mit $w_d = 4 \dot{V}/d^2 \pi$ wird die mittlere Gasgeschwindigkeit in der Düse bezeichnet. Zur Vereinfachung der Schreib- und Darstellungsweise wird der Zahlenfaktor 1,028 durch 1,000 ersetzt und der dann entstehende Ausdruck in der geschweiften Klammer mit Φ bezeichnet:

$$\Phi \equiv 1 + [1 + We^2/ Fr]^{1/2}. \quad (6.19)$$

Damit erhält die von MERSMANN aufgestellte Gleichung für den Blasendurchmesser die Form:

$$d_p^* \equiv \frac{d_p}{(3 \sigma d/g \varrho)^{1/3}} = \Phi^{1/3}. \quad (6.20)$$

Das Kennzahlenverhältnis

$$\frac{We^2}{Fr} \equiv \frac{w_d^2 d^3 \varrho^2 g}{\sigma^2} = \frac{16}{\pi^2} \frac{\dot{V}^2 \varrho^2 g}{\sigma^2 d} \quad (6.21)$$

läßt sich als Kräfteverhältnis auffassen, gebildet mit der Trägheitskraft, der Auftriebskraft und dem Quadrat der Oberflächenspannungskraft. Bei quasi-

statischer, also unendlich langsamer Blasenbildung ist $\dot{V} \approx 0$ und der Einfluß der Trägheitskraft entfällt, wie im vorangegangenen Abschnitt bereits festgestellt wurde. Für $We^2/Fr = 0$ wird $\Phi = 2$ und

$$d_p^* = \frac{d_p}{(3\sigma d/\rho g)^{1/3}} = 1,26. \tag{6.22}$$

Nach kurzer Umformung wird hieraus:

$$\frac{d_p}{d} = 1,26 \left(\frac{3\sigma}{\rho g d^2} \right)^{1/3} = 1,817 \left(\frac{Fr}{We} \right)^{1/3}. \tag{6.23}$$

Diese letzten beiden Gleichungen gelten für die quasistatische Blasenbildung. Hiervon läßt Gl. (6.23) erkennen, daß der auf den Düsendurchmesser d bezogene Blasendurchmesser d_p eine Funktion von We/Fr ist, worauf früher ebenfalls schon hingewiesen wurde. Der Blasendurchmesser wird mit zunehmender Oberflächenspannung größer. Das ist auf die mit σ steigende Haftung der Blase am Düsenrand zurückzuführen. Ihre Überwindung erfordert eine größere Auftriebskraft, die mit dem Blasendurchmesser zunimmt.

Den Blasendurchmesser und gleichzeitig die Blasenbildungsfrequenz bei der Entstehung von Einzelblasen haben SIEMES [6.2] sowie EVERSOLE, WAGNER und STACKHOUSE [6.5] gemessen. Ferner haben SIEMES und GÜNTHER [6.6] Meßwerte für den mittleren Durchmesser der im Schwarm befindlichen Blasen mitgeteilt. Bei diesen Versuchen wurden verschiedene Gas-Flüssigkeits-Systeme und verschieden große Düsendurchmesser verwendet. Geändert wurde jeweils der Volumstrom des Gases. Nähere Angaben zu den Meßwerten findet man in *Tabelle 6.1*. Die Meßwerte wurden gemäß den obigen theoretischen Überlegungen als d_p^* gerechnet und in *Bild 6.6* dargestellt. Sie lassen sich durch die Kurven *a*, *b* und *c* ausgleichen.

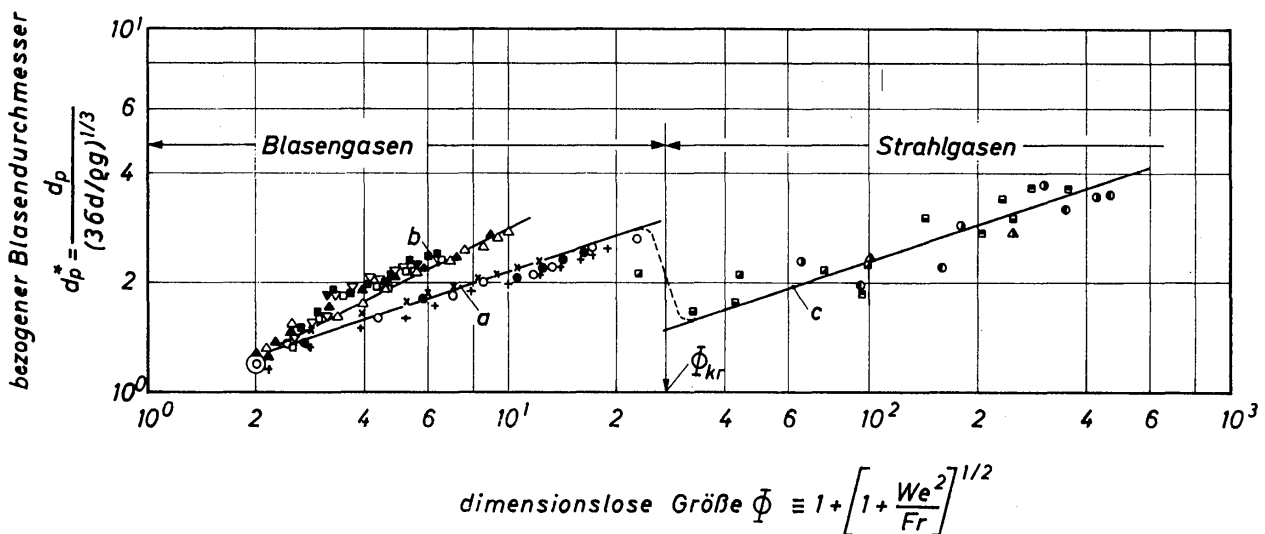


Bild 6.6. Bezogener Blasendurchmesser d_p^* , abhängig von der Kennzahl Φ für die Bereiche des Blasengases (Kurven *a* und *b*) und des Strahlgases (Kurve *c*), wenn sich die Blasen an einer Einzeldüse bilden. Bedeutung der Zeichen siehe *Tabelle 6.1*

Tabelle 6.1: Angaben zu den Meßwerten für Blasendurchmesser und Blasenbildungsfrequenz

System	Zitat	Zeichen in Bild-Nr.	Düsen- durchmesser d (mm)	Oberflächen- spannung σ (N/m=10 ³ dyn/cm)	$f_{p_{\max}}$ (s ⁻¹)	Ga	d/b
Luft-Wasser	[6.2]	+ 6.6/6.8/6.9/6.10	4,3	$7,2 \cdot 10^{-2}$	30	$9,00 \cdot 10^5$	1,124
Luft-Wasser	[6.2]	○ „	2,7	$7,2 \cdot 10^{-2}$	35	$2,23 \cdot 10^5$	0,706
Luft-Wasser	[6.2]	● „	1,5	$7,2 \cdot 10^{-2}$	43	$3,83 \cdot 10^4$	0,392
Luft-Wasser	[6.2]	× „	1,07	$7,2 \cdot 10^{-2}$	45	$1,39 \cdot 10^4$	0,280
Luft-Wasser	[6.2]	△ „	0,55	$7,2 \cdot 10^{-2}$	32	$1,88 \cdot 10^3$	0,1436
Luft-Wasser	[6.2]	▲ „	0,41	$7,2 \cdot 10^{-2}$	32	$7,80 \cdot 10^2$	0,1070
Stickstoff- <i>n</i> -Butanol	[6.5]	□ „	0,17	$2,42 \cdot 10^{-2}$	49	$2,98 \cdot 10^0$	0,0686
Stickstoff- <i>n</i> -Propanol	[6.5]	▼ „	0,17	$2,34 \cdot 10^{-2}$	45	$8,01 \cdot 10^0$	0,0696
Stickstoff-Äthanol	[6.5]	■ „	0,17	$2,19 \cdot 10^{-2}$	42	$2,55 \cdot 10^1$	0,0704
Stickstoff-Nitrobenzol	[6.5]	▽ „	0,17	$4,33 \cdot 10^{-2}$	44	—	0,0626
Luft-Wasser	[6.6]	▣ 6.6, Kurve <i>c</i>	0,5	$7,2 \cdot 10^{-2}$			
Luft-Wasser	[6.6]	■ „	1,0	$7,2 \cdot 10^{-2}$			
Luft-Wasser-Nekal-Lösung	[6.6]	▣ „	1,0	$4,7 \cdot 10^{-2}$			
Luft-Wasser-Nekal-Lösung	[6.6]	● „	1,0	$3,8 \cdot 10^{-2}$			
Luft-Wasser	[6.6]	● „	1,5	$7,2 \cdot 10^{-2}$			
Luft-Wasser	[6.6]	▲ „	2,0	$7,2 \cdot 10^{-2}$			

Kurve *a* gibt die theoretische Gl.(6.20) wieder, sie wird durch zahlreiche Meßwerte von SIEMES in ausgezeichnete Weise bestätigt. Die Meßwerte gelten für die Entstehung von Einzelblasen im System Luft/Wasser. Kurve *a* endet in dem durch $\Phi = 2$ und $d_p^* = 1,26$ gegebenen Punkt. Dieser Punkt kennzeichnet die quasistatische Blasenbildung. Die Durchmesser der hierbei entstehenden Blasen lassen sich mittels Gl.(6.23) berechnen. Der in *Bild 6.6* eingezeichnete Doppelkreis umschließt alle die Meßwerte, die von SIEMES für den Fall der quasistatischen Blasenbildung mitgeteilt wurden. Somit wird also auch der durch die Gleichungen (6.22) bzw. (6.23) erfaßte Grenzfall für den Blasendurchmesser sehr gut experimentell bestätigt. Zu dem gleichen Ergebnis sind auch VAN KREVELEN und HOFTIJZER [6.7] nach Auswertung zahlreicher Meßwerte gekommen. Für zwei von SIEMES mitgeteilte Meßreihen, bei denen Düsen mit einem Durchmesser $d = 0,41$ mm und $d = 0,55$ mm verwendet wurden, und für die Meßreihen von EVERSOLE, WAGNER und STACKHOUSE liegen die Meßwerte oberhalb von Kurve *a*; sie werden in *Bild 6.6* durch Kurve *b* ausgeglichen, für die die Beziehung

$$d_p^* = 0,89 \Phi^{1/2} \quad (6.24)$$

gilt. Nach Beobachtungen von SIEMES zog bei diesen beiden Meßreihen jeweils eine große Blase unmittelbar hinter sich noch eine kleinere Blase aus der Düse heraus. Nur wenige Millimeter oberhalb der Düse vereinigten sich beide Blasen. Durch Gl.(6.24) wird der Durchmesser der durch die Vereinigung entstandenen Blase festgelegt. Es leuchtet daher ein, daß dieser größer sein muß als der durch Kurve *a* bestimmte. Die größere Steigung von Kurve *b* ist dadurch begründet, daß sich der Durchmesser der Zweitblase mit zunehmendem Volumstrom des Gases dem der ersten Blase annähert. Auf die Besonderheiten der Blasenbildung an Düsen mit sehr kleinem Durchmesser wird im Zusammenhang mit der Blasenbildungsfrequenz nochmals eingegangen. Hingewiesen sei darauf, daß EVERSOLE, WAGNER und STACKHOUSE die Bildung von Doppelblasen nicht in ihrem Bericht erwähnen.

Die bisher besprochenen Ergebnisse gelten für den Bereich des Blasengasens. Unter Blasengasen versteht man die Form der Flüssigkeitsbegasung, bei der sich Einzelblasen bilden. Mit zunehmendem Volumstrom \dot{V} oder, genauer gesagt, mit zunehmenden Werten von We^2/Fr steigt der Blasendurchmesser stetig an, was durch die Kurven *a* und *b* in *Bild 6.6* zum Ausdruck kommt. Dabei nehmen die Trägheitskräfte für die Bildung und für die Bewegung der Blase nach erfolgtem Ablösen vom Düsenrand stetig zu, während gleichzeitig der Einfluß der Oberflächenspannung zurückweicht. Die Folge ist, daß die Form der Blase immer stärker von der einer Kugel abweicht. Zunächst entstehen ellipsoidisch, dann schirmartig und schließlich vollkommen regellos geformte Blasen. Diese Verformung der Blasen kann aber nicht nur unter dem Einfluß der Trägheitskräfte, sondern ebenfalls unter dem Einfluß eines starken hydrostatischen Druckes stattfinden. Selbst sehr kleine Blasen, die sich in einer unter hohem Druck stehenden Flüssigkeit bilden, können bereits sehr unregelmäßig geformt sein. Für alle diese

Fälle liefert Gl. (6.20) bzw. Kurve *a* in *Bild 6.6* den Durchmesser einer volumgleichen Kugel.

Mit dem Volumstrom ändert sich nicht nur der Blasendurchmesser, sondern auch die Frequenz der Blasenbildung. Sie steigt zunächst linear mit dem Volumstrom an und nähert sich schließlich einem konstanten Wert. Die mit dem Wachsen der Blasen bei konstanter Bildungsfrequenz ablaufenden Vorgänge sind in stark schematisierter Form in *Bild 6.7* angegeben. Der Volumstrom des Gases in der Düse erhöht sich von \dot{V}_a über \dot{V}_b nach \dot{V}_c . Unter Vernachlässigung der mit wachsendem Blasendurchmesser zunehmenden Auftriebskräfte bleibt der Abstand der Blasenmittelpunkte unverändert. Die Folge ist jedoch, daß sich die Blasen beim Volumstrom \dot{V}_c berühren; sie sind lediglich durch eine dünne Flüssigkeitslamelle getrennt. Wird der Volumstrom des Gases weiterhin erhöht, beispielsweise bis auf \dot{V}_d , dann wird diese Lamelle zwischen den ersten beiden Blasen zerstört. Die Blasen bilden sich nicht mehr am Düsenrand, sondern an der Kuppe des in die Flüssigkeit hineinstoßenden Gasstrahles. Es vollzieht sich der Übergang vom Blasenblasen zum Strahlblasen, dem zweiten Bereich der Blasenbildung.

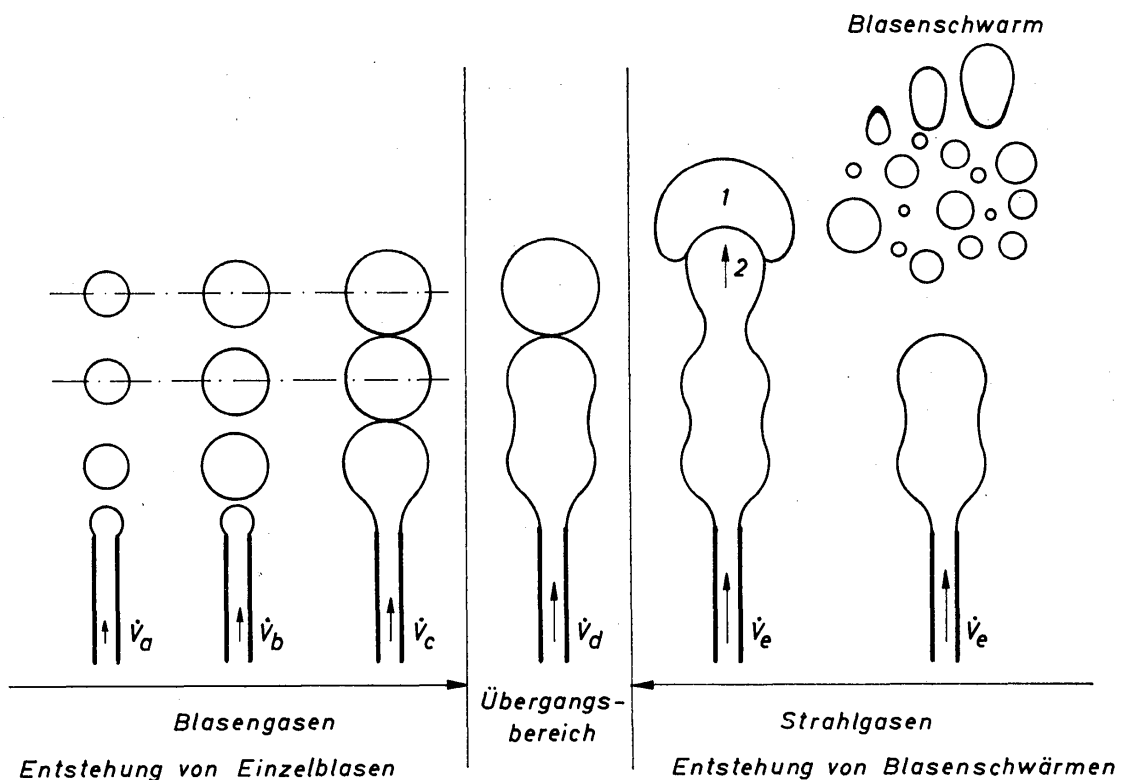


Bild 6.7. Schematisierte Darstellung von der Blasenbildung in den Bereichen des Blasenblasens und des Strahlblasens

Noch während des Strahlblasens findet mit zunehmendem Volumstrom \dot{V} des Gases eine Deformation der sich bildenden Blasen statt. Die Blasen haben also keineswegs immer die in *Bild 6.7* angedeutete Kugelform, sondern gehen mit wachsendem Volumstrom in die Form abgeplatteter Ellipsoide über und können bei \dot{V}_d eine sehr regellose Form aufweisen. Das bedeutet, daß im Bereich des Strahlblasens mit zunehmendem Volumstrom der Einfluß der Oberflächenspannungskraft stetig abnimmt.

Beim Strahlgasen tritt ein vollkommen veränderter Mechanismus der Blasenbildung in Kraft. Erhöht man den Volumstrom von \dot{V}_d auf \dot{V}_e , dann zieht die bereits abgelöste Blase 1 unmittelbar eine gleiche große Blase 2 aus der Strahlkuppe heraus. Blase 2 gerät in das Unterdruckgebiet der Blase 1, wird dadurch zusätzlich beschleunigt und stößt in Blase 1 hinein. Unter der Wirkung der hierbei auftretenden Trägheitskräfte und der starken Wirbel innerhalb beider Blasen führt ihr Zusammenstoß zu einer Zerteilung der gesamten Gasmasse. Auf diesen Vorgang und seine Ursachen haben RENNIE und EVANS [6.8] bereits aufmerksam gemacht. Wie unterschiedlich die Zerteilung der ursprünglichen Blase verlaufen kann, lassen photographische Aufnahmen von ROWE und PARTRIDGE [6.9] sehr gut erkennen. Es entsteht ein Blasenschwarm, bestehend aus Blasen mit sehr unterschiedlichem Durchmesser. Der mittlere Durchmesser dieser Blasen muß kleiner sein als derjenige Blasendurchmesser, der sich bei angenommenen Blasen gasen einstellen würde.

SIEMES und GÜNTHER (6.6) haben das Strahlgasen untersucht und den mittleren Blasendurchmesser des Schwarms angegeben. Die umgerechneten Meßwerte sind in *Bild 6.6* eingetragen und durch Kurve *c* ausgeglichen worden. Für Kurve *c* gilt die Beziehung:

$$d_p^* = 0,50 \Phi^{1/3}, \quad (6.25)$$

die mit guter Näherung durch

$$d_p^* = 0,50 \left(\frac{We^2}{Fr} \right)^{1/6} \quad (6.26)$$

ersetzt werden darf. Hieraus entsteht durch Umformung

$$\frac{d_p}{d} = 0,72 Fr^{1/6}, \quad (6.27)$$

womit sofort deutlich wird, daß die Oberflächenspannung im Bereich des Strahlgasens keinen Einfluß mehr auf den mittleren Blasendurchmesser ausübt.

Beim Übergang vom Blasen gasen zum Strahlgasen nimmt der mittlere Durchmesser des Blasenschwarms ab. Bemerkenswert ist jedoch, daß d_p^* auf Grund der vorhandenen Meßwerte im Bereich des Strahlgasens die gleiche Abhängigkeit von Φ aufweist wie im Bereich des Blasen gasens. Der Übergangsbereich soll durch einen kritischen Wert von Φ bzw. von We^2/Fr gekennzeichnet werden. Aus *Bild 6.6* erhält man:

$$\Phi_{kr} = 27,$$

$$\left(\frac{We^2}{Fr} \right)_{kr} \equiv \left(\frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\dot{V}^2 \rho^2 g}{\sigma^2 d} \right)_{kr} = 675.$$

Diese Werte sind noch nicht als sehr zuverlässig anzusehen, sondern geben nur die zu erwartende Größenordnung für Φ und We^2/Fr an. Es ist auch sicher, daß sich der Übergang vom Blasen- zum Strahlgasen über einen gewissen Bereich

von Φ bzw. We^2/Fr erstreckt. Aus diesem Grunde ist auch der Übergang in *Bild 6.6* durch eine geneigte Linie angedeutet worden.

In diesem Zusammenhang scheint ein Hinweis auf den Einfluß des Druckes auf die Blasenbildung von Interesse zu sein. Beim kritischen Wert des Verhältnisses We^2/Fr ist der Volumstrom \dot{V} um so kleiner, je größer die Dichte des Gases, also der Druck, ist, unter dem die Blasenbildung erfolgt. Das heißt, daß die Deformation der Blasen und somit auch der Übergang vom Blasen- zum Strahlgasen bei um so niedrigeren Werten des Volumstromes \dot{V} erfolgt, je höher der Druck ist. Beim Übergang vom Blasen- zum Strahlgasen nimmt der Blasendurchmesser, wie man aus der Definitionsgleichung für d_p^* ersieht, mit steigendem Druck ab.

Die Aufteilung der Blasenbildung in die Bereiche des Blasengases und des Strahlgasens kann für den praktischen Betrieb von Blasensäulen und Siebböden von erheblicher Bedeutung sein. Obgleich in diesen Vorrichtungen die Blasen nicht an Einzeldüsen entstehen, sondern gleichzeitig an einer großen Zahl von eng benachbarten Düsen oder Bohrungen, stimmen die grundsätzlichen Vorgänge weitgehend überein.

Im Bereich des Blasengases bilden sich stets einzelne Blasen mit konstantem Durchmesser. Alle Blasen haben daher auch die gleiche Aufstiegs geschwindigkeit. Der Aufstieg erfolgt in verhältnismäßig geordneter Form. Die Folge ist eine verhältnismäßig geringe Verwirbelung und Durchmischung der Flüssigkeit quer zur und in Aufstiegsrichtung der Blasen.

Im Gegensatz dazu ist die Verwirbelung und Durchmischung der Flüssigkeit im Bereich des Strahlgasens sehr groß. Denn die hierbei auftretenden Blasen schwärme haben wegen der unterschiedlichen Durchmesser auch unterschiedliche Aufstiegs geschwindigkeiten. Im Zusammenhang mit den Gesetzen der Schwarmbewegung wird noch erläutert werden, daß es bei der Schwarmbewegung sehr leicht zu örtlichen Rückströmungen kommen kann. Diese können auch durch ungleichmäßige Verteilungen der Blasen ausgelöst werden, die besonders leicht bei Blasen schwärmen mit unterschiedlichem Durchmesser auftreten.

Soll somit in einer Blasenschicht eine Längsdurchmischung möglichst vermieden werden, so wird man sich darum bemühen, die Blasen durch Blasengasen zu erzeugen. Ist die Längsdurchmischung indes erwünscht, so wird man dem Strahlgasen zur Blasenbildung den Vorzug geben.

6.22 Blasenbildungsfrequenz

Die Frequenz der Blasenbildung wird nur für den Bereich des Blasengases betrachtet. Im Bereich des Strahlgasens bildet sich aus einer Primärblase oder auch unmittelbar aus dem Gasstrahl heraus ein Blasen schwarm, dessen Bildungsfrequenz nicht mehr eindeutig definiert werden kann. Im Bereich des Blasengases dagegen läßt sich die Blasenbildungsfrequenz f_p mittels eines Stroboskops oder auch mittels photographischer bzw. elektrischer Meßverfahren bestimmen. SIEMES [6.2] sowie EVERSOLE, WAGNER und STACKHOUSE [6.5] haben Meßwerte mitgeteilt, die für eine weitere Umrechnung geeignet sind. SIEMES beobachtete

die Bildungsfrequenz von Luftblasen in Wasser und änderte den Düsendurchmesser von $d = 0,41$ mm bis $d = 4,3$ mm. Die anderen Autoren haben die Frequenz von Stickstoffblasen in *n*-Butanol, *n*-Propanol, Äthanol und Nitrobenzol gemessen und dabei eine Düse mit dem Durchmesser $d = 0,17$ mm verwendet. Alle Meßreihen zeigten grundsätzlich die gleiche Tendenz. Die Frequenz steigt mit zunehmendem Volumstrom des Gases zunächst sehr steil an und geht dann in einen stetig flacher werdenden Verlauf über. Im Bereich sehr hoher Volumströme wird die Frequenz offenbar unabhängig vom Volumstrom. Die dabei auftretenden maximalen Frequenzen $f_{p_{max}}$ sind in einer Spalte der Tabelle 6.1 zusammengestellt. Aus diesen Angaben lassen sich die vom System und vom Düsendurchmesser mit Sicherheit ausgeübten Einflüsse auf die maximale Frequenz nicht erkennen. Das gleiche gilt auch für den Einfluß des Volumstromes des Gases. Zur Klärung der Zusammenhänge ist es also sinnvoll, eine allgemeine Darstellungsweise mittels Kennzahlen zu verwenden.

Zur dimensionslosen Darstellung der Blasenbildungsfrequenz wurde zunächst die Strouhalzahl

$$Sr \equiv \frac{f_p d}{w_d} \tag{6.28}$$

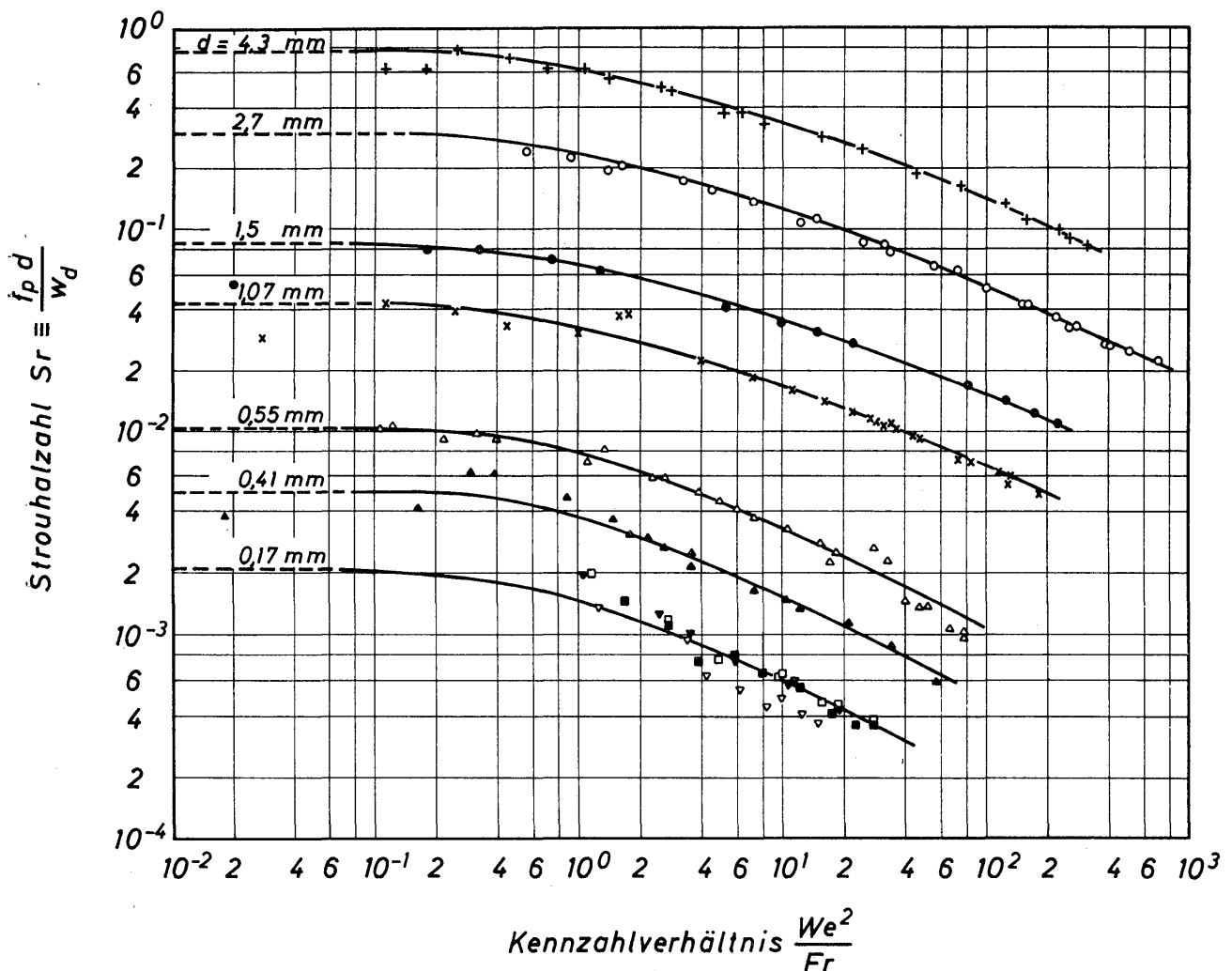


Bild 6.8. Abhängigkeit der Strouhalzahl Sr vom Kennzahlverhältnis We^2/Fr mit dem Düsendurchmesser als Parameter; Bedeutung der Zeichen siehe Tabelle 6.1

über dem bereits im Zusammenhang mit dem Blasendurchmesser verwendeten Verhältnis We^2/Fr aufgetragen. *Bild 6.8* zeigt diese Darstellung, in der sieben Kurven die jeweils für einen bestimmten Düsendurchmesser d mitgeteilten Meßwerte ausgleichen. Die für $d = 4,3$ mm bis $d = 0,41$ mm geltenden Meßwerte stammen von SIEMES und die für $d = 0,17$ mm von EVERSOLE, WAGNER und STACKHOUSE. Die unterste Kurve gleicht die Meßwerte von vier Versuchsreihen für verschiedene Gas-Flüssigkeits-Systeme aus (siehe Tabelle 6.1).

Die in *Bild 6.8* eingezeichneten Kurven zeigen einen fast gleichartigen Verlauf. Im Bereich kleiner Werte für We^2/Fr ist die Strouhalzahl Sr offenbar konstant, d.h. also, daß die Frequenz f_p proportional der Geschwindigkeit w_d bzw. des Volumstroms \dot{V} ist. Im Bereich hoher Werte von We^2/Fr ist Sr näherungsweise proportional $(We^2/Fr)^{-1/2}$, d.h. daß die Frequenz f_p unabhängig von der Gasgeschwindigkeit bzw. vom Volumstrom \dot{V} ist.

Da alle durch die Meßwerte gelegten Kurven nahezu parallel verlaufen und durch Verschiebung in Ordinatenrichtung zur Deckung gebracht werden können, liegt die Vermutung nahe, daß nur noch eine weitere dimensionslose Größe die Abhängigkeit der Strouhalzahl bestimmt. Diese Größe muß, wie aus der Auftragung in *Bild 6.8* hervorgeht, in jedem Falle den Düsendurchmesser d enthalten. Es wird daher die Galileizahl $Ga = g d^3/\nu^2$ als zusätzliche Kennzahl herangezogen, wobei ν die kinematische Viskosität der Flüssigkeit ist. Ermittelt man für alle Versuchsreihen die Galileizahl, deren Werte in Tabelle 6.1 angegeben sind, und trägt bei $We^2/Fr = 10$ auftretende Werte der Strouhalzahl über der Galileizahl

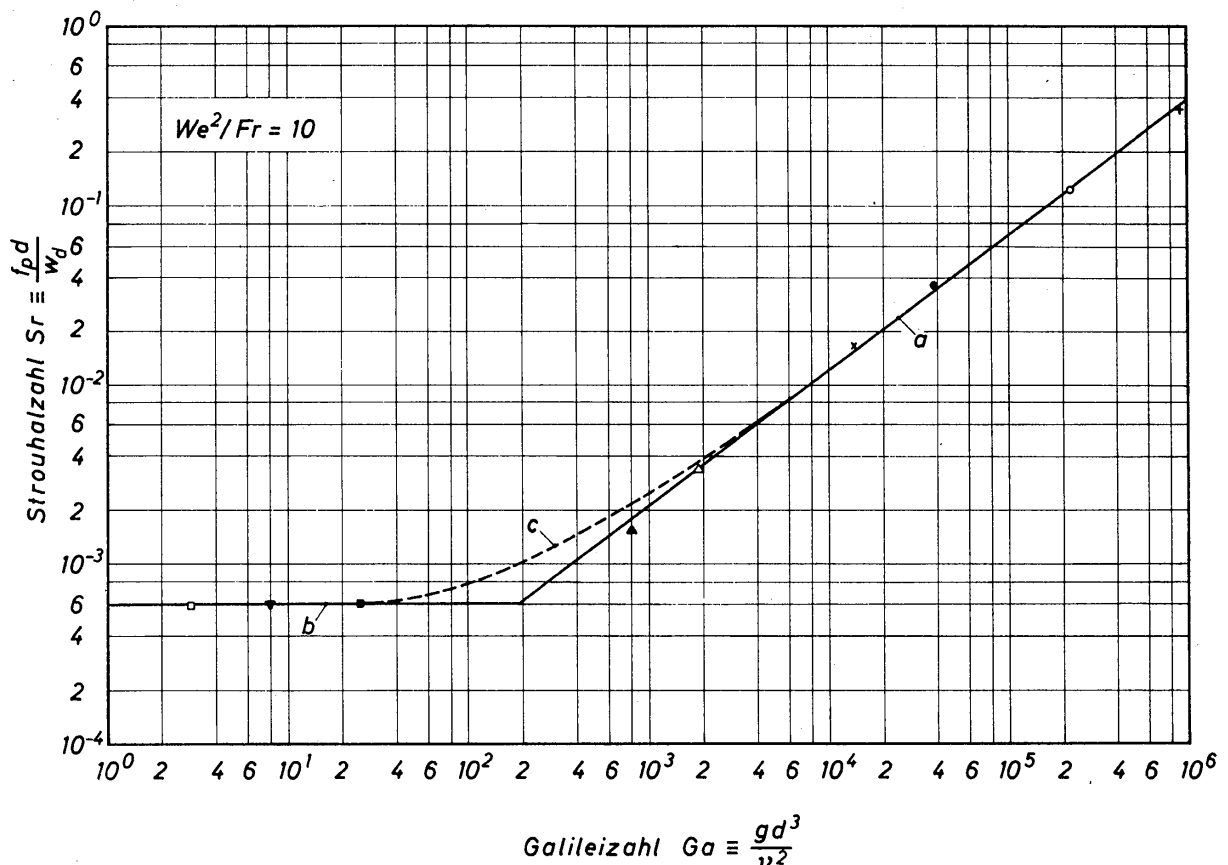


Bild 6.9. Abhängigkeit der Strouhalzahl Sr von der Galileizahl Ga für $We^2/Fr = 10$; Bedeutung der Zeichen siehe Tabelle 6.1

auf, so ergibt sich die Darstellung in *Bild 6.9*. Im Bereich großer Werte der Galileizahl ist die Strouhalzahl Sr proportional $Ga^{0,75}$. Im Bereich kleiner Werte von Ga ist die Strouhalzahl unabhängig von der Galileizahl. Auf die Bedeutung der Kurven b und c wird später noch näher eingegangen. Die von SIEMES mitgeteilten Meßwerte liegen auf der Kurve a ; nur diese Meßwerte sollen im folgenden noch verwendet werden. Dividiert man die hierfür berechneten Strouhalzahlen durch $Ga^{0,75}$ und trägt das Verhältnis $Sr/Ga^{0,75}$ über dem Verhältnis We^2/Fr auf, so fallen, was durch *Bild 6.10* auch bestätigt wird, fast alle Meßwerte zusammen.

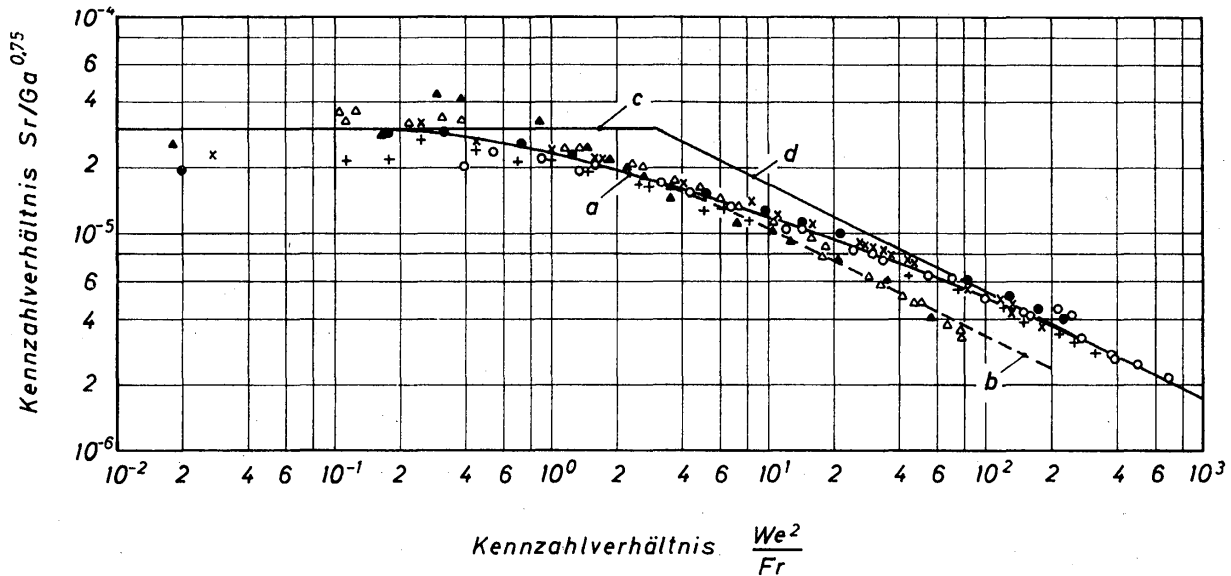


Bild 6.10. Zusammenhang zwischen $Sr/Ga^{0,75}$ und We^2/Fr für $Ga > 200$; a und b bezeichnen die Ausgleichskurven durch die Meßwerte, c die untere Grenzkurve für sehr kleine Werte von We^2/Fr und d die obere Grenzkurve für sehr große Werte von We^2/Fr ; Bedeutung der Zeichen siehe Tabelle 6.1

Die mit a bezeichnete Ausgleichskurve läuft im Bereich kleiner Werte für We^2/Fr in die Grenzkurve c und im Bereich großer Werte für We^2/Fr in die Grenzkurve d ein. Kurve a gleicht die Meßwerte für Düsendurchmesser von 4,3 mm bis 1,07 mm aus und Kurve b diejenigen für die beiden kleinsten Düsendurchmesser von 0,55 mm und 0,41 mm. Die Abweichungen sind darauf zurückzuführen, daß sich bei den kleinen Düsen, wie bereits erläutert wurde, Doppelblasen mit unterschiedlichem Durchmesser bildeten. Die gemessenen Frequenzen beziehen sich dabei auf die großen Blasen und können daher nicht für die Blasenbildung aussagekräftig sein. Es scheint daher sinnvoll zu sein, die durch Kurve b ausgeglichenen Meßwerte von den weiteren Betrachtungen auszuschließen.

Für die untere Grenzkurve c gilt die Beziehung:

$$Sr = 3 \cdot 10^{-5} Ga^{0,75}. \tag{6.29}$$

Hieraus folgt die dimensionsbehaftete Gleichung

$$f_p = 3 \cdot 10^{-5} \frac{g^{0,75} d^{1,25} w_d}{\nu^{1,5}} = 3,82 \cdot 10^{-5} \frac{g^{0,75} \dot{V}}{d^{0,75} \nu^{1,5}}. \tag{6.30}$$

Somit ist die Blasenbildungsfrequenz im Bereich sehr geringer Gasbelastungen eine lineare Funktion des Volumstroms \dot{V} des Gases und proportional $d^{-0,75}$, so daß die Frequenz mit zunehmendem Düsendurchmesser kleiner wird.

Für die obere Grenzkurve d läßt sich die Gleichung

$$Sr = 5 \cdot 10^{-5} (Fr/We^2)^{0,50} Ga^{0,75} \quad (6.31)$$

aufstellen, woraus man die maximale Blasenbildungsfrequenz

$$f_{p_{\max}} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\sigma g^{0,25}}{\rho d^{0,25} \nu^{1,5}} \quad (6.32)$$

erhält. Sie ist unabhängig von der Gasbelastung und nur noch eine schwache Funktion des Düsendurchmessers. Bemerkenswert ist der starke Einfluß der Viskosität. Es leuchtet aber unmittelbar ein, daß die Frequenz mit zunehmender Viskosität der Flüssigkeit kleiner werden muß. Zu beachten ist ferner, daß im Bereich sehr niedriger Werte We^2/Fr die Frequenz unabhängig von der Oberflächenspannung aber eine lineare Funktion der Gasgeschwindigkeit ist. Im Bereich großer Werte We^2/Fr hingegen ist die Frequenz, unabhängig von der Gasgeschwindigkeit, aber eine lineare Funktion der Oberflächenspannung.

Mit den hier vermittelten Kenntnissen über die Blasenbildungsfrequenz ist nur ein erster Einblick in einen sehr verwickelten Vorgang möglich. Zahlreiche Fragen sind noch unvollständig oder gar nicht zu beantworten. Es sind noch umfangreiche Messungen und gründliche theoretische Untersuchungen erforderlich, um ein vollständiges Bild von der Blasenentstehung zu erhalten. Zu zwei bereits angeschnittenen Fragen sollen noch einige Bemerkungen gemacht werden. SIEMES [6.2] weist darauf hin, daß bei den kleinsten der von ihm verwendeten Düsen mit $d = 0,55$ mm und $d = 0,41$ mm die Blasenbildung (Blasendurchmesser und Frequenz) deshalb nach anderen Gesetzen verläuft als bei den größeren Düsen, weil die Laplace-Konstante b einen bestimmten Wert unterschreitet. In Tabelle 6.1 ist das Verhältnis d/b angegeben. Wenn dieser Hinweis tatsächlich Bedeutung hat, dann müßte man als Grenze vielleicht einen Wert von etwa $d/b = 0,2$ annehmen. In diesem Zusammenhang sei nochmals auf die Meßwerte von EVERSOLE, WAGNER und STACKHOUSE [6.5] verwiesen, die in *Bild 6.9* durch Kurve b ausgeglichen sind und keine Abhängigkeit von der Galileizahl erkennen lassen. Da gemäß Tabelle 6.1 die Meßwerte dieser Verfasser für $d/b < 0,2$ gelten, besteht zwischen diesen und den zwei Meßreihen von SIEMES, die in *Bild 6.9* durch dreieckige Zeichen kenntlich gemacht sind, eine gewisse Verbindung. Es liegt daher nahe, die Kurven a und b durch die gestrichelte Kurve c zu verbinden und somit einen Übergangsbereich zu schaffen. Die zwei Meßwerte von SIEMES liegen dann etwas zu niedrig. Auf diesen Umstand hat SIEMES auch bereits aufmerksam gemacht, ohne daß es ihm jedoch gelang, für die Bildung von Doppelblasen eine andere Frequenz anzugeben, die in jedem Falle aber größer sein muß als die unmittelbar gemessene. Mit diesen zusätzlichen Informationen wird man mit a und b Grenzkurven eines durchgehenden Kurvenzuges bezeichnen. Im Verlauf dieses Kurvenzuges ändert sich der Einfluß des Düsendurchmessers d und der Flüssigkeitsviskosität ν auf

die Blasenbildungsfrequenz. Diese Hinweise können für die Planung weiterer Untersuchungen über die Blasenbildung von Interesse sein.

6.3 Dynamik der Blasenbildung an Lochplatten

Für die technische Praxis ist die Blasenbildung an den Bohrungen von Siebböden genannten Lochplatten von großem Interesse, wie sie in Rektifizier- und Absorptionskolonnen häufig verwendet werden. Der Grundvorgang der Blasenbildung wird an einer Einzelbohrung studiert, deren Durchmesser d sehr klein im Vergleich zu dem der Platte ist. Die anderen für den Betrieb von Siebböden üblichen Bedingungen werden bei den Untersuchungen an Einzelbohrungen aber weitgehend beachtet. Diese sind die verhältnismäßig geringe Flüssigkeitshöhe, die Strömung der Flüssigkeit parallel zur Plattenoberfläche sowie die Gasräume unterhalb der Platte und oberhalb der Flüssigkeitsschicht. Ferner ist noch die Dicke der Platte für die Blasenbildung von Bedeutung. Diese Aufzählung zeigt also, daß der für die Praxis bedeutsame Fall der Blasenbildung auf Siebböden von wesentlich mehr Einflußgrößen abhängt als die Blasenbildung an Einzeldüsen. Es kann daher auch nicht verwundern, wenn die Blasenbildung auf Siebböden noch nicht in befriedigender Weise geklärt ist.

Zur Erläuterung einiger Versuchsergebnisse sollen zunächst zwei der am häufigsten verwendeten Versuchseinrichtungen, die in *Bild 6.11* in schematisierter Form angegeben sind, betrachtet werden. Innerhalb eines zylindrischen Gefäßes befindet sich eine ebene Platte, deren Dicke s ist, mit der Bohrung vom Durchmesser d . Die auf der Platte vorhandene Flüssigkeit hat die Schichthöhe h . Das vom Gas eingenommene Volumen unterhalb der Platte wird mit V_1 und das oberhalb der Flüssigkeit befindliche wird mit V_2 bezeichnet.

Da das linke Gefäß oben offen ist, ist $V_2 = \infty$. Das Gas wird von unten in die Apparatur eingeleitet; sein Volumstrom ist \dot{V} .

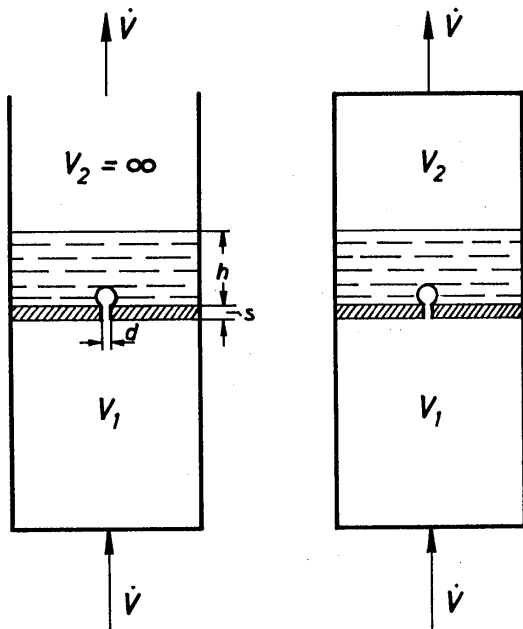


Bild 6.11. Schematische Darstellung der verwendeten Versuchsaufbauten

DAVIDSON und AMICK [6.10] stellten in Vorversuchen fest, daß der Blasendurchmesser d_p bei konstantem Volumstrom \dot{V} mit zunehmendem Kammervolumen V_1 zunächst konstant bleibt und nach Überschreiten eines kritischen Wertes V_{1kr} sehr steil ansteigt. Das kritische Kammervolumen hängt offensichtlich vom Volumstrom \dot{V} des Gases, vom Bohrungsdurchmesser d , von den Dichten des

Gases und der Flüssigkeit und nach Angaben von HUHGES, HANDLOS, EVANS und MAYCOCK [6.11] von der Schallgeschwindigkeit innerhalb des Gases ab. Der Anstieg des Blasendurchmessers mit dem Kammervolumen erfolgt solange, bis das Kammervolumen V_1 so groß geworden ist, daß sich während der Blasenbildung keine Druckschwankungen mehr bemerkbar machen. In technischen Anlagen ist das Kammervolumen V_1 wahrscheinlich groß genug, damit die Blasenbildung bei konstantem Druck erfolgen kann und somit unabhängig von V_1 ist. Bei Laboratoriumsanlagen zur Untersuchung der Blasenbildung sind die drei möglichen Bereiche aber von großer Bedeutung, da für sie jeweils andere Gesetzmäßigkeiten gefunden werden. Ohne genaue Angaben über die Größe des Kammervolumens lassen sich die an Laboratoriumsanlagen gefundenen Ergebnisse nicht auf technische Anlagen übertragen.

Die von DAVIDSON und AMICK [6.10] mitgeteilten Meßwerte für den Blasendurchmesser gelten für $V_1 < V_{1kr}$, wobei der Bohrungsdurchmesser zwischen 0,34 mm und 15,8 mm verändert wurde. Von MAHONEY und WENZEL [6.12] wurde gleichzeitig V_1 und V_2 verändert, und die Versuche ergaben, daß der Blasendurchmesser bzw. die Blasenbildungsfrequenz von beiden Volumina abhängen kann. Insbesondere konnten diese Autoren zeigen, daß die Blasenbildungsfrequenz bei kleinem Volumen V_1 viel größer ist als bei großem. Von HAYES, HARDY und HOLLAND [6.13] wurde unter anderem auch der Einfluß der Plattendicke s auf den Blasendurchmesser d_p untersucht. Mit zunehmender Plattendicke s bei konstantem Bohrungsdurchmesser d ergeben sich die gleichen Verhältnisse wie bei abnehmendem Kammervolumen V_1 , d. h. die Blasenfrequenz wird größer und der Blasendurchmesser entsprechend kleiner. Für die in der Praxis verwendeten Plattendicken ist deren Einfluß auf die Blasenbildung aber nicht feststellbar.

In einer Untersuchung von SULLIVAN, HARDY und HOLLAND [6.14] wurde unter anderem festgestellt, daß die Geschwindigkeit der über die Lochplatte strömenden Flüssigkeit nur einen sehr geringen Einfluß auf die Blasenbildungsfrequenz und somit auch auf den Blasendurchmesser ausübt. Im Bereich sehr kleiner Volumenströme für das Gas ist dieser Einfluß nicht mehr feststellbar.

In den letzten beiden der zitierten Arbeiten wurde versucht, die Blasenbildungsfrequenz zu berechnen. Beim Vergleich der theoretischen und experimentellen Ergebnisse ergaben sich Abweichungen bis zu $\pm 100\%$. Auf eine Angabe der teilweise sehr verwickelten Gleichungen, die sich nur durch Probieren auswerten lassen, wird auf Grund der noch zu großen Unsicherheit verzichtet.

Einige wenige Meßwerte für den Blasendurchmesser, die HAYES, HARDY und HOLLAND [6.13] sowie MAHONEY und WENZEL [6.12] angegeben haben, wurden nach dem in Abschnitt 6.21 erläuterten Verfahren umgerechnet und in *Bild 6.12* dargestellt. Nähere Angaben zu den Meßwerten findet man in Tabelle 6.2. Die Meßwerte beider Forschergruppen lassen erkennen, daß der Blasendurchmesser im Bereich kleiner Werte von Φ bzw. We^2/Fr von diesen Größen unabhängig ist. In diesem Bereich konstanten Blasendurchmessers ändert sich die Blasenbildungsfrequenz $f_p = \dot{V}/V_p$ linear mit dem Volumstrom des Gases. Im Bereich größerer

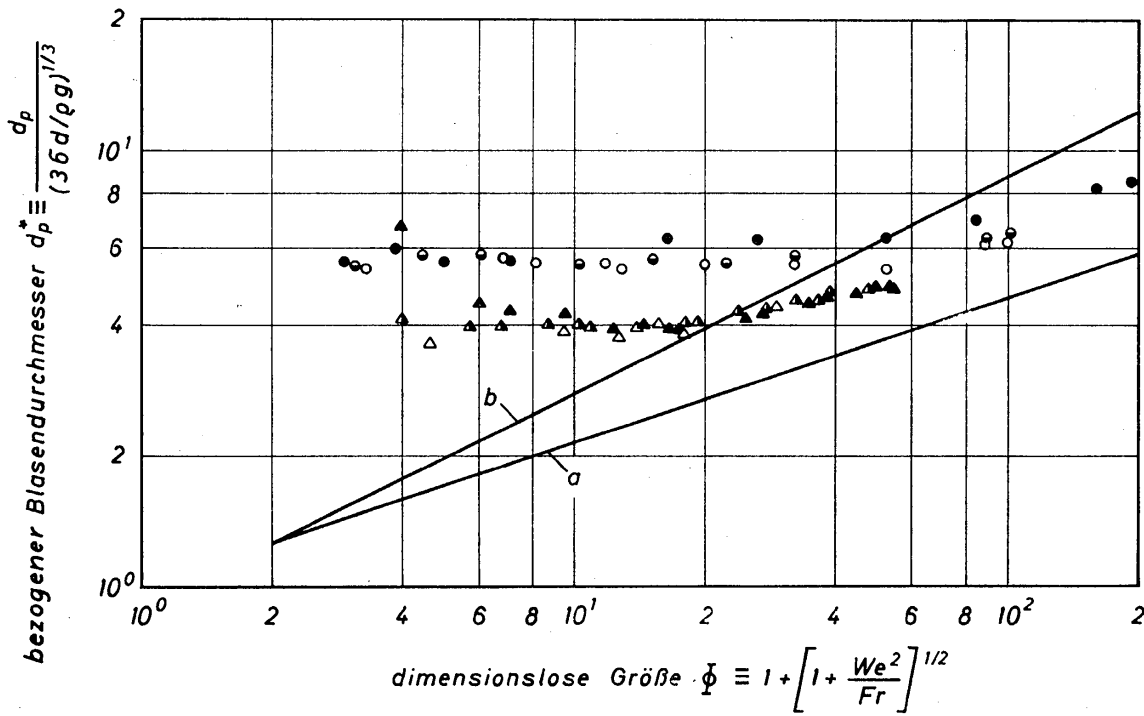


Bild 6.12. Bezogener Blasendurchmesser d_p , abhängig von der Kennzahl Φ für die Blasenbildung an einer Einzelbohrung in einer ebenen Platte. Bedeutung der Zeichen siehe Tabelle 6.2; Kurve *a* nach Gl.(6.20) und Kurve *b* nach Gl.(6.24)

Werte von Φ bzw. We^2 / Fr steigt d_p offensichtlich mit den genannten Kennzahlen an. In diesem Bereich ist näherungsweise die Blasenbildungsfrequenz konstant und der Blasendurchmesser veränderlich.

Um diese Meßwerte mit denen vergleichen zu können, die sich bei der Blasenbildung an Düsen ergeben, sind in *Bild 6.12* die hierfür zutreffenden Kurven *a* und *b* eingezeichnet worden. Im Bereich großer Werte von Φ verlaufen die Meßwerte zwischen beiden Kurven. Man ist also geneigt, anzunehmen, daß die Mechanismen der Blasenbildung in diesem Bereich für Düsen und Bohrung weitgehend übereinstimmen.

Tabelle 6.2: Angaben zu den in Bild 6.12 dargestellten Meßwerten

System	Zitat	Oberflächenspannung σ (N/m = 10^3 dyn/cm)	Bohrungs- durchmesser d (mm)	V_1 (cm ³)	V_2 (cm ³)	Zeichen
Luft-Wasser	[6.12]	$7,2 \cdot 10^{-2}$	3,17	∞	1990	▲
Luft-Wasser	[6.12]	$7,2 \cdot 10^{-2}$	3,17	1302	∞	▲
Luft-Wasser	[6.12]	$7,2 \cdot 10^{-2}$	3,17	5520	2607	△
Luft-Glycerin	[6.13]	$6,3 \cdot 10^{-2}$	3,97	800	∞	●
Luft-Glycerin	[6.13]	$6,3 \cdot 10^{-2}$	3,18	800	∞	◐
Luft-Glycerin	[6.13]	$6,3 \cdot 10^{-2}$	2,38	800	∞	○

Im Bereich kleiner Werte von We^2/Fr müssen aber erhebliche Unterschiede vorhanden sein. Denn die an Bohrungen entstehenden Blasen haben einen etwa 4 mal so großen Durchmesser wie die an Düsen entstandenen.

Auf einen weiteren Unterschied zwischen der Blasenbildung an Düsen (siehe *Bild 6.6*) und der an Bohrungen sei noch hingewiesen. Bei der Blasenbildung an Düsen hatte sich bei $\Phi_{kr} = 27$ ein Übergang von der Bildung von Einzelblasen zu der von Blasenschwärmen ergeben. Die Blasenschwärme entstehen durch Auflösen großer Einzelblasen in einem nicht genau bekannten Abstand vom Düsenrand. Aus *Bild 6.12* möchte man nun entnehmen, daß bei der Blasenbildung an Bohrungen keine Auflösung der großen Blasen in mehrere kleine erfolgt. Diese Annahme ist aber nicht unbedingt gerechtfertigt. Der angegebene Blasendurchmesser ergab sich rechnerisch aus einer Frequenzmessung, die keineswegs Aussagen über das spätere Verhalten der Blase liefert. Weiterhin war die Flüssigkeitshöhe bei den Untersuchungen sehr gering, so daß die Blase möglicherweise die Oberfläche der Flüssigkeit erreichte, bevor sie sich bei sehr großer Flüssigkeitshöhe aufgelöst hätte. Zur Klärung dieser Frage, die für den Stoffaustausch auf Böden sehr wichtig ist, sind noch weitere Versuche notwendig.

6.4 Widerstand von Blasen

Behandelt wird zunächst der Widerstand von Blasen, die sich in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit bewegen. Die Bewegung soll durch benachbarte Blasen und durch Gefäßwände nicht gestört werden. Als Sonderfall wird anschließend die Bewegung von zylindrisch geformten Blasen betrachtet, die in einem senkrecht angeordneten Rohr aufsteigen und dessen Querschnitt nahezu vollständig ausfüllen.

Der Widerstand von Blasen ist eine Funktion ihrer Steiggeschwindigkeit. Es bleibt sich daher gleich, ob man Gesetze für die eine oder die andere Größe aufstellt. In den folgenden Abschnitten werden für die verschiedenen Blasen jeweils Widerstandsgesetze mitgeteilt. Diese hängen in starkem Maße von der Form der Blase ab. Im Verlauf instationärer Bewegungsabschnitte ändert sich die Form der Blase fortlaufend, es sei denn, ihre Form wird durch äußere Bedingungen erzwungen, wie es bei der Zylinderblase der Fall ist. Während der stationären Bewegung klingt die Formänderung weitgehend ab. Die frei bewegliche Blase richtet sich so aus, daß die größte Fläche der Bewegungsrichtung zugewandt ist. Eine ähnliche Beobachtung macht man auch bei der Bewegung unregelmäßig geformter fester Partikeln, worauf bereits früher eingegangen wurde. Der Unterschied zu den festen Partikeln besteht aber nicht nur darin, daß die Blase ihre Form sehr leicht ändern kann, sondern zusätzlich darin, daß die Oberfläche der Blasen beweglich ist. Daher muß man damit rechnen, daß während der Bewegung im Innern der Blase Zirkulationsströmungen auftreten, die das Verhalten der Blasen mitbestimmen können. Weiterhin können für die Bewegung bzw. für den Widerstand von Blasen oberflächenaktive Stoffe von erheblicher Bedeutung sein, die häufig als Verschmutzung in Flüssigkeiten vorhanden sind und sich in der Phasengrenzfläche

anreichern. Somit ist also bereits sicher, daß die Widerstandsgesetze für Blasen keinesfalls so einfach sein können wie die für feste Körper. Zum leichteren Verständnis dieser Gesetze sollen einige Bemerkungen über die wichtigsten Formen der Blasen und über ihre Bewegung vorausgeschickt werden.

6.41 Allgemeine Beschreibung der Blasenformen und der Blasenbewegung

In *Bild 6.13* sind die für die nachfolgenden Betrachtungen wichtigen Blasenformen schematisiert angegeben. Dabei wird einer Einteilung gefolgt, die PEEBLES und GARBER [6.15] im Rahmen einer umfassenden Studie über die Blasenbewegung vorschlugen. Sehr kleine Blasen haben gemäß *Bild 6.13 a* Kugelgestalt. Auf Grund zahlreicher experimenteller Beobachtungen kommt man zu dem Schluß, daß die Kugelschale unbeweglich ist und die Blase in strömungstechnischer Hinsicht die Eigenschaften einer Feststoffkugel besitzt. Dieses Verhalten läßt sich mit dem dominierenden Einfluß der Kapillarspannung $4\sigma/d_p$ erklären. Bei starrer Phasengrenzfläche können auch keine Wirbelbewegungen im Innern der Blase auftreten. Die Bewegung solcher Blasen erfolgt im Stokesschen Bereich, für den bereits alle maßgebenden Gesetze im Abschnitt 5.11 besprochen wurden. Dabei wurde auch auf die Mängel der Stokesschen Theorie hingewiesen, die für technische Zwecke aber zumeist belanglos sind. Der Aufstieg von Kugelblasen mit starrer Phasengrenzfläche erfolgt auf gerader Bahn, wenn man die mit dem Auge kaum wahrnehmbaren Pendelbewegungen vernachlässigt. Aus der Beobachtung des Aufstiegsweges läßt sich also die Steiggeschwindigkeit mit genügender Genauigkeit ermitteln. Der Durchmesser d_p , den eine in Wasser aufsteigende Luftblase äußerstenfalls annehmen darf, damit sich die Blase noch wie eine starre Kugel verhält, kann etwa 0,2 mm betragen.

Mit zunehmendem Blasendurchmesser macht sich die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche bemerkbar und man erkennt, wie in *Bild 6.13 b* angedeutet, die im Blaseninnern auftretenden Zirkulationsströmungen. Da der Geschwindigkeitsgradient an der beweglichen Phasengrenzfläche kleiner ist als an der starren, ist der Widerstand von Blasen stets kleiner als der Widerstand starrer Partikeln, die die Form der betrachteten Blase haben. Entsprechend ist die Steiggeschwindigkeit von Blasen stets größer als diejenige formgleicher starrer Partikeln. Diese Aussagen gelten ganz allgemein, also auch für die weiteren in *Bild 6.13* noch dargestellten Blasenformen.

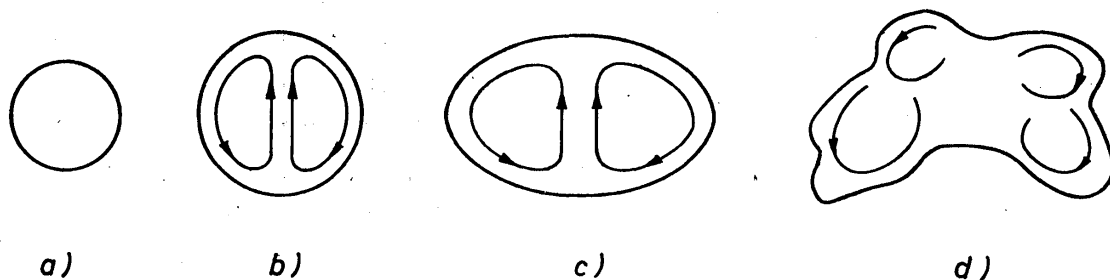


Bild 6.13. Schematisierte Blasenformen; a) Kugelblase ohne innere Zirkulation, b) Kugelblase mit innerer Zirkulation, c) ellipsoidische Blase und d) regellos geformte Blase (Schirmblasen)

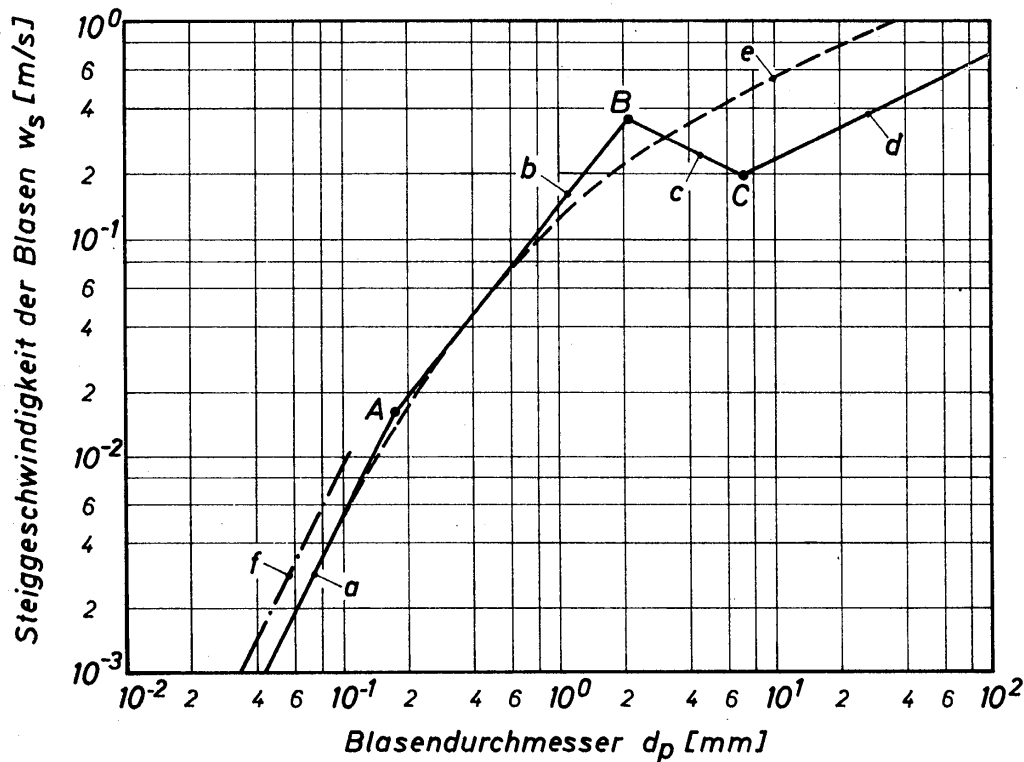


Bild 6.14. Steiggeschwindigkeit von Luftblasen (Kurvenzug $a-b-c-d$) und von starren Kugeln (Kurve e) im Wasser; Kurve f gilt unter Berücksichtigung der Hadamard-Rybczynski-Korrektur

Um den Vergleich zwischen dem Verhalten von Blasen und starren Partikeln anschaulicher zu machen, sind in *Bild 6.14* ihre Steiggeschwindigkeiten über dem Durchmesser d_p aufgetragen. Der aus den Abschnitten a , b , c und d bestehende Linienzug gilt für Blasen und die Kurve e für kugelförmige Partikeln mit starrer Grenzfläche. Die jeweils oberen Grenzen der einzelnen Blasenbereiche werden mit A , B und C bezeichnet. Der Durchmesser d_p gilt für die jeweils volumgleiche Kugel. Der für Blasen geltende Linienzug wurde nach Gleichungen berechnet, die erst im folgenden Abschnitt mitgeteilt werden. Die für starre Partikeln gezeichnete Kurve e ist mittels des Widerstandsgesetzes von KASKAS bestimmt worden, welches, was ausdrücklich betont sei, für starre Kugeln gilt. Den Rechnungen liegt die Annahme zugrunde, daß Luftblasen in Wasser aufsteigen, wobei die Temperatur 20°C und der Druck 1 bar betragen.

Im Bereich a treten die bereits erwähnten Blasen mit starrer Phasengrenzfläche auf. Somit muß also der Kurvenabschnitt a mit der Kurve e übereinstimmen. Kurve a folgt aus dem Stokesschen Widerstandsgesetz. Im Bereich b ist die Phasengrenzfläche der noch kugelförmigen Blase beweglich, und ihre Steiggeschwindigkeit weicht mit zunehmendem Durchmesser immer mehr von derjenigen für die vergleichbare starre Kugel ab. An der oberen Grenze, Punkt B , ist mit $d_p = 2$ mm die Steiggeschwindigkeit der Luftblase $0,34$ m/s und die der starren Kugel nur $0,22$ m/s. Die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche hat also dazu geführt, daß die Luftblase $1,55$ mal so schnell aufsteigt wie die starre Kugel. Bei weiterem Anwachsen der Blase ändert sich die Form ziemlich plötzlich. Aus der Kugel wird ein abgeflachtes Rotationsellipsoid, das in *Bild 6.13c* dargestellt

ist. Die charakteristischen Längen solcher Blasen wurden von CALDERBANK und LOCHIEL [6.16] gemessen und zusammen mit den Angaben anderer Forscher abhängig vom Durchmesser d_p einer volumgleichen Kugel dargestellt. Dabei ergab sich, daß das Achsenverhältnis der ellipsoidischen Blasen zunächst zunimmt und ab einem bestimmten Wert für d_p konstant bleibt.

Auch bei ellipsoidischen Blasen treten im Innern Zirkulationsströmungen auf. Für die Steiggeschwindigkeit dieser Blase sind zwei in entgegengesetzter Richtung wirkende Einflüsse zu beachten. Die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche trägt zur Erhöhung der Steiggeschwindigkeit bei. Vergleicht man jedoch die Steiggeschwindigkeit der ellipsoidischen Blase mit der einer volumgleichen starren Kugel, dann kann die Blase die kleinere Steiggeschwindigkeit aufweisen. In *Bild 6.14* gibt Kurve c das Verhalten der Blase wieder. Ihre Steiggeschwindigkeit nimmt mit dem Durchmesser d_p ab. Das ist darauf zurückzuführen, daß die Blase mit wachsendem Durchmesser ihre Form weiterhin ändert. Das Rotationsellipsoid wird in zunehmendem Maße abgeflacht, so daß fast scheibenförmige Blasen entstehen. Gleichzeitig verursachen die periodisch auftretenden Wirbel hinter der Blase eine taumelnde Bewegung, so daß die Blase auf einer schraubenähnlichen Bahn aufsteigt. Die Steigung der Schraubenbahn wird mit zunehmendem Durchmesser d_p kleiner. Das heißt aber, daß der von der Blase auf der Schraubenbahn zurückgelegte Weg mit d_p zunimmt. Zur Berechnung der Steiggeschwindigkeit wird jedoch nur der in senkrechter Richtung überwundene Höhenunterschied verwendet. Die Steiggeschwindigkeit muß somit immer kleiner sein als die wirkliche Bahngeschwindigkeit. Der Unterschied zwischen beiden Geschwindigkeiten nimmt mit dem Durchmesser d_p einer volumgleichen Kugel zu. Damit ergibt sich also, daß der in *Bild 6.14* dargestellte Kurvenabschnitt c nur sehr wenig über den wahren physikalischen Vorgang des Blasenanstiegs aussagt.

Ein noch weiteres Anwachsen des Blasen Volumens führt schließlich zu den in *Bild 6.13d* skizzierten nahezu regellos geformten Blasen. Mit etwas Phantasie vermag man jedoch Ähnlichkeit mit einem geöffneten Schirm zu erkennen und spricht daher auch von Schirmblasen. Dabei können sich über begrenzte Zeitabschnitte innerhalb verschiedener Teilbereiche der Blase gegensinnig rotierende Wirbel ausbilden, die zu einer erneuten Umformung der Blase führen. Regellos geformte Blasen zeichnen sich also durch stete Formänderungen aus, wodurch gleichzeitig auch Änderungen in der Bewegungsrichtung hervorgerufen werden. Eine Periodizität ist dabei aber nicht feststellbar. Die Steiggeschwindigkeit ist, was aus *Bild 6.14* auch hervorgeht, kleiner als bei volumgleichen Kugeln mit starrer Schale. Sie nimmt aber mit dem Durchmesser zu.

6.42 Widerstandsgesetze für Blasen

Zwischen dem Widerstand und der Steiggeschwindigkeit w_s einer Blase besteht ein einfacher Zusammenhang, der in Abschnitt 5.33 bereits hergeleitet wurde und sowohl für Partikeln mit starrer als auch für solche mit beweglicher Phasengrenzfläche gilt. Diese Beziehung lautet:

$$w_s^2 = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho}\right) \frac{g d_p}{\zeta}. \quad (6.33)$$

Hierin bedeuten ρ_p die Dichte des Blasengases, ρ die Dichte der umgebenden Flüssigkeit, g Erdbeschleunigung, d_p Blasendurchmesser und ζ den Widerstandsbeiwert, der durch

$$\zeta \equiv \frac{W/F}{\rho w_s^2/2} \quad (6.34)$$

definiert ist. Mit W wird die Widerstandskraft und mit $F = d_p^2 \pi/4$ die Querschnittsfläche der volumgleichen Kugel bezeichnet. Vernachlässigt man im Kräftegleichgewicht die Schwerkraft der Blase, dann kann in Gl.(6.33) das Dichteverhältnis ρ_p/ρ entfallen, und man erhält die einfachere Beziehung:

$$w_s^2 = \frac{4}{3} \frac{g d_p}{\zeta}. \quad (6.35)$$

Nach dem Widerstandsbeiwert aufgelöst, folgt

$$\zeta = \frac{4}{3} \frac{g d_p}{w_s^2}. \quad (6.36)$$

Gemessen wird bei Versuchen immer die Steiggeschwindigkeit w_s . Mittels Gl.(6.36) berechnet man sodann den Wert des Widerstandsbeiwertes. Für ζ läßt sich dann ein Gesetz in geeigneter dimensionsloser Form aufstellen. Mittels Gl.(6.35) wird dann umgekehrt wieder die Steiggeschwindigkeit berechnet.

Im folgenden werden die von PEEBLES und GARBER [6.15] entwickelten Gesetze für die verschiedenen Blasenformen mitgeteilt. Diese Gesetze gelten für den Aufstieg einzelner Gasblasen in unendlich ausgedehnten Flüssigkeiten. Wärme- und Stoffaustauschvorgänge sind während der Steigbewegung ausgeschlossen. Darüber hinaus sollen sich in der Phasengrenzfläche keine grenzflächenaktiven Stoffe befinden.

Im Bereich a (siehe *Bilder 6.13* und *6.14*) treten Kugelblasen mit starrer Grenzfläche auf. Somit gelten also die von STOKES hergeleiteten Gesetze für starre Kugeln. Unter Vernachlässigung von ρ_p gegen ρ lautet die Gleichung für die Steiggeschwindigkeit:

$$w_{s,a} = \frac{1}{18} \frac{g d_p^2}{\nu}. \quad (6.37)$$

Nach Einsetzen in Gl.(6.36) folgt dann für die Widerstandszahl das theoretische Gesetz:

$$\zeta_a = \frac{24}{Re_s}. \quad (6.38)$$

Die Reynoldszahl Re_s ist definiert durch

$$Re_s \equiv \frac{w_s d_p}{\nu}. \quad (6.39)$$

Für Gl.(6.38) ergeben sich als untere Grenze $Re_s = 0$ und als obere Grenze $Re_{sA} = 2,2$. Obgleich die Oberflächenspannung die Kugelgestalt der Blase mitbestimmt, übt sie keinen Einfluß auf den Blasenwiderstand aus. Das ist dadurch bedingt, daß die Kapillarspannung $4\sigma/d_p$ bei sehr kleinen Blasen vor allem durch d_p bestimmt wird. Für die normalen Flüssigkeiten ändert sich σ lediglich um einen Faktor 2 bis 3, so daß die Kapillarspannung im Vergleich zu den anderen Spannungen immer schon dann groß ist, wenn der Blasendurchmesser d_p nur klein genug ist.

Im Bereich *b* treten Kugelblasen mit innerer Zirkulation auf. Für die Steiggeschwindigkeit ermittelten PEEBLES und GARBER die Beziehung:

$$w_{s,b} = 0,136 \frac{g^{0,76} d_p^{1,28}}{\nu^{0,52}}. \tag{6.40}$$

GRASSMANN [6.17] wies darauf hin, daß diese Gleichung mit hinreichender Genauigkeit durch

$$w_{s,b} = 0,146 \sqrt{\frac{g^{3/2} d_p^{5/2}}{\nu}} \tag{6.41}$$

ersetzt werden kann. Nach Einführen von Gl.(6.40) in Gl.(6.36) erhält man nach Umformung das Widerstandsgesetz:

$$\zeta_b = \frac{18,7}{Re_s^{0,68}}. \tag{6.42}$$

Die untere Gültigkeitsgrenze ist $Re_{sA} = 2,2$; für die obere Gültigkeitsgrenze fanden PEEBLES und GARBER:

$$Re_{sB} = 4,02 K_F^{0,214}. \tag{6.43}$$

Mit K_F wird eine Kennzahl bezeichnet, die nur Stoffwerte der Flüssigkeit enthält und daher Flüssigkeitskennzahl genannt werden soll:

$$K_F \equiv \frac{\rho \sigma^3}{g \eta^4} = \frac{Re_s^4 Fr_s}{We_s^3}. \tag{6.44}$$

Mit Fr_s und We_s werden die Froude- und die Weberzahl bezeichnet:

$$Fr_s \equiv \frac{w_s^2}{g d_p}, \tag{6.45}$$

$$We_s \equiv \frac{w_s^2 d_p \rho}{\sigma}. \tag{6.46}$$

Man erkennt hieraus, daß die obere Grenze des Bereichs *b* bereits von der Oberflächenspannung abhängt. Zurückzuführen ist das darauf, daß nach Überschreiten dieser Grenze die Deformation der kugelförmigen zur ellipsoidischen Blase beginnt. Aus Bild 6.14 entnimmt man an der oberen Grenze von Abschnitt *b* für d_p den Wert 2,1 mm und für w_s den Wert 0,35 m/s. Das führt mit $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ für Wasser bei 20 °C zu $Re_{sB} = 735$. Bei Annahme starrer Kugeln hätte man

bereits nahezu den Newtonschen Widerstandsbereich erreicht, in dem die Widerstandszahl konstant ist. Für $Re_{s,B} = 735$ ergibt sich für starre Kugeln $\zeta = 0,58$ und gemäß Gl. (6.42) für Blasen $\zeta_B = 0,21$, also ein erheblich niedrigerer Wert.

Im Bereich *c* treten abgeflachte ellipsoidische Blasen mit innerer Zirkulation auf. PEEBLES und GARBER ermittelten aus Meßwerten für die Steiggeschwindigkeit die folgende Beziehung:

$$w_{s,c} = 1,91 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho d_p}}. \quad (6.47)$$

Nach Einsetzen in Gl. (6.36) erhält man das Widerstandsgesetz zu

$$\zeta_c = 0,366 \frac{g \rho d_p^2}{\sigma} = 0,366 \frac{We_s}{Fr_s}. \quad (6.48)$$

Es wurde festgestellt, daß innerhalb des Bereiches *c* die Weberzahl konstant ist, $We_s = 3,64$. Somit läßt sich das Widerstandsgesetz auch in der Form

$$\zeta_c = \frac{13,32}{Fr_s} \quad (6.49)$$

schreiben. Für die obere Bereichsgrenze wurde aus den Meßwerten folgende Gleichung ermittelt:

$$Re_{s,c} = 3,10 K_F^{0,25}. \quad (6.50)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (6.44) und $We_s = 3,64$ wird hieraus

$$Fr_{s,c} = 0,525. \quad (6.51)$$

Dieses Ergebnis deutet bereits an, daß oberhalb dieser Grenze die Bewegung der Blasen nur noch durch Auftriebs- und Trägheitskräfte bestimmt wird. Die Oberflächenspannung hat allein im Bereich *c* Einfluß auf die Blasenbewegung.

Im Bereich *d* treten regellos geformte Blasen auf. GRASSMANN [6.17] empfiehlt in diesem Bereich eine von DAVIES und TAYLOR [6.18] mitgeteilte Gleichung:

$$Fr_s = 0,51. \quad (6.52)$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten. Die geringe Abweichung zwischen den Gleichungen (6.51) und (6.52) ist offensichtlich auf Meßunsicherheiten zurückzuführen, die bei der Beobachtung regellos geformter Blasen unvermeidbar sind. Aus Gl. (6.52) erhält man die Steiggeschwindigkeit zu

$$w_s = 0,714 \sqrt{g d_p}, \quad (6.53)$$

die mit dem Blasendurchmesser wieder zunimmt. Für die Widerstandszahl ergibt sich im Bereich *d* ein konstanter Wert:

$$\zeta_d = 2,61. \quad (6.54)$$

Für starre Kugeln ist $\zeta = 0,44$. Die regellos geformten Blasen haben gegenüber starren Kugeln also einen etwa 6 mal größeren Widerstand, obgleich die Grenzfläche beweglich ist. Der durch die laufende Formänderung verursachte große Formwiderstand der Blase ist in diesem Bereich von ausschlaggebender Bedeutung.

6.43 Korrekturen für Kugelblasen

In den beiden voraufgegangenen Abschnitten ist die Bedeutung der beweglichen Phasengrenzfläche für die Steiggeschwindigkeit und den Widerstand von Blasen eingehend erörtert worden. Eine theoretische Untersuchung dieses Einflusses erweist sich bei Kugelblasen als möglich und wurde unabhängig voneinander von HADAMARD und von RYBCZYNSKI untersucht. Da diese Arbeiten nur schwer zugänglich sind, sei auf die ausführliche Wiedergabe der Rechnungen durch LEVICH [6.19] verwiesen. HADAMARD und RYBCZYNSKI berechneten unter der Annahme schleichender Strömung innerhalb und außerhalb der Kugelblase die Steiggeschwindigkeit w_{sH} und kamen zu dem folgenden Ergebnis:

$$w_{sH} = \frac{1}{18} \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho}\right) \frac{g d_p^2}{\nu} \left[\frac{1 + \frac{\eta_p}{\eta}}{\frac{2}{3} + \frac{\eta_p}{\eta}} \right]. \quad (6.55)$$

Hierin bedeuten der Ausdruck vor der eckigen Klammer die von STOKES berechnete Steiggeschwindigkeit w_s und der Ausdruck in der eckigen Klammer die Hadamard-Rybczynski-Korrektur:

$$K_{HR} \equiv \frac{1 + \frac{\eta_p}{\eta}}{\frac{2}{3} + \frac{\eta_p}{\eta}}. \quad (6.56)$$

K_{HR} ist eine Funktion des Viskositätsverhältnisses η_p/η , wobei η_p die dynamische Viskosität des Blasengases und η die der umgebenden Flüssigkeit bedeuten. Da die Hadamard-Rybczynski-Korrektur auch für die Bewegung von Tropfen in Gasen und Flüssigkeiten Bedeutung hat, ist η_p stets die Viskosität jenes Mediums, welches die Partikel bildet. Ist η_p sehr klein im Vergleich zu η , dann nimmt die Korrektur ihren größten Wert, nämlich $K_{HR} = 3/2$, an. Das bedeutet also, daß eine Blase im äußersten Falle 1,5 mal schneller in einer Flüssigkeit aufsteigen kann als eine Partikel von gleicher Dichte, aber starrer Grenzfläche. Man erkennt weiterhin aus Gl. (6.56), daß bei der Bewegung von Tropfen in Gasen die Hadamard-Rybczynski-Korrektur im allgemeinen vernachlässigbar ist. Bewegen sich die Tropfen jedoch in einer Flüssigkeit, dann kann die Korrektur von gleicher Bedeutung sein wie bei der Bewegung von Blasen in Flüssigkeiten. Für eine in Wasser aufsteigende Luftblase mit $\eta_p/\eta = 0,0182$ wird $K_{HR} = 1,46$. In Bild 6.14 ist die um diesen Faktor vergrößerte Steiggeschwindigkeit durch Linie f dargestellt. Als Widerstandsgesetz für eine Kugel mit beweglicher Phasengrenzfläche erhält man

$$\zeta_{\text{HR}} = \frac{24}{K_{\text{HR}} Re_{sH}}. \quad (6.57)$$

Hierin sind ζ_{HR} und Re_{sH} mit der Geschwindigkeit w_{sH} definiert. Für $\eta_p/\eta \ll 1$ erhält man mit $K_{\text{HR}} = 3/2$ den Widerstandsbeiwert zu $\zeta_{\text{HR}} = 16/Re_{sH}$. Der Widerstand einer Kugel mit beweglicher Phasengrenzfläche ist kleiner als der einer starren Kugel. Dieses Ergebnis wird durch einige im Schrifttum mitgeteilte Versuchswerte auch bestätigt [6.19 und 6.20]. Dabei muß aber beachtet werden, daß die Meßwerte im Bereich sehr kleiner Reynoldszahlen stets durch das Stokessche Gesetz und erst ab einer bestimmten Reynoldszahl durch das Gesetz von HADAMARD und RYBCZYNSKI erfaßt werden. Somit verhalten sich die Blasen und Tropfen im Bereich sehr kleiner Reynoldszahlen stets wie starre Körper. Die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche macht sich den Messungen zufolge sehr plötzlich bemerkbar und führt dann zu einer sprungartigen Erniedrigung des Widerstands [6.21 und 6.22].

LEVICH [6.19] erklärt die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment mit der Wirkung grenzflächenaktiver Substanzen. Im Bereich sehr kleiner Blasendurchmesser sollen diese Substanzen die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche unterdrücken, so daß die von STOKES berechnete Steiggeschwindigkeit mit experimentellen Ergebnissen übereinstimmt. Erst im Bereich größerer Blasendurchmesser (Bereich *b* in *Bild 6.14*) macht sich die Beweglichkeit der Grenzfläche plötzlich bemerkbar. Meßwerte zeigen, daß sich die Steiggeschwindigkeit sprungartig erhöht. Im Bereich größerer Durchmesser trifft aber die Annahme schleichender Umströmung nicht mehr zu. Trotzdem vermitteln die umfangreichen Untersuchungen von LEVICH einen wertvollen Einblick in die Vorgänge, die innerhalb einer beweglichen Phasengrenzfläche ablaufen können. Sie sind besonders auch dann von Bedeutung, wenn an der Phasengrenzfläche Diffusionsströme auftreten. Die von HADAMARD und RYBCZYNSKI durchgeführten Rechnungen sind mit den gleichen Schwächen behaftet wie die von STOKES. In allen Fällen sind die Trägheitsglieder in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt worden. Mit einer Verfeinerung der hydrodynamischen Rechnungen befaßt man sich in neuerer Zeit in mehreren Arbeiten. Erwähnt seien die von ACKERET [6.23], LEVICH [6.19], CHAO [6.24], HAMIELEC und JOHNSON [6.25] und MOORE [6.26]. Dabei geht man teilweise von der Vorstellung aus, daß sich um die Kugelblase herum eine Grenzschichtströmung ausbildet und der Geschwindigkeitsgradient in der Phasengrenzfläche verschwindet. Als Ergebnis erhält man das von LEVICH [6.19] erstmalig mitgeteilte Widerstandsgesetz

$$\zeta_L = \frac{48}{Re_L}. \quad (6.58)$$

Bemerkenswert ist, daß der Widerstandsbeiwert doppelt so groß ist wie für die starre Kugel nach STOKES, und somit die Steiggeschwindigkeit nur noch halb so groß ist. Dieses Ergebnis steht zunächst im Widerspruch mit der Wirkung der

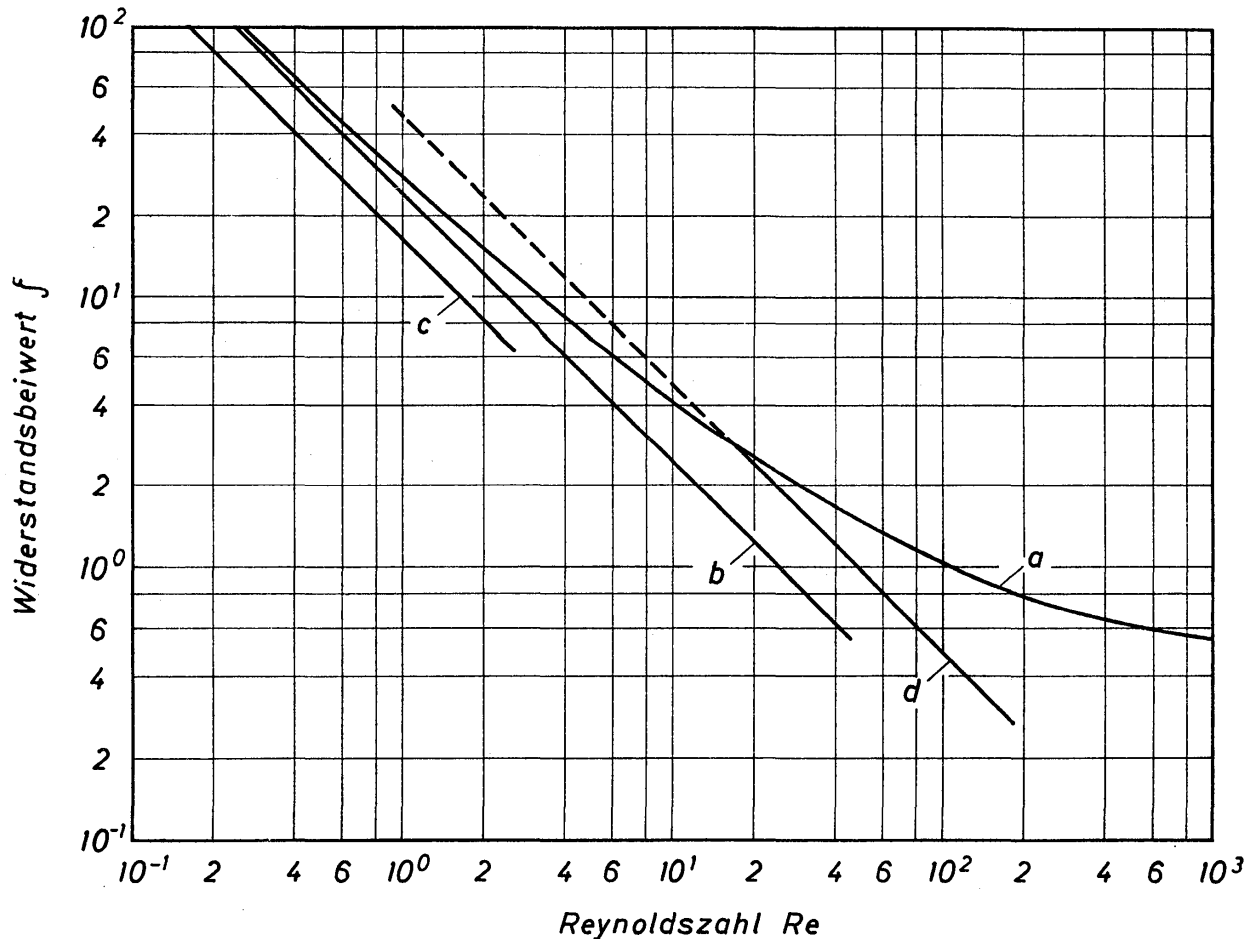


Bild 6.15. Widerstandsgesetze für Kugeln mit starrer und beweglicher Phasengrenzfläche, Kurve a und b für starre Kugeln, Kurve c nach HADAMARD und RYBCZYNSKI: gemäß Gl.(6.57) mit $K_{HR} = 3/2$ und Kurve d nach LEVICH gemäß Gl.(6.58)

beweglichen Grenzfläche, zu dessen Aufklärung *Bild 6.15* beitragen kann. Dargestellt werden hierin durch Kurve a das Widerstandsgesetz von KASKAS für starre Kugeln, durch Kurve b das ebenfalls für starre Kugeln geltende Stokessche Gesetz, durch Kurve c das Gesetz von HADAMARD und RYBCZYNSKI für Kugeln mit beweglicher Grenzfläche bei Annahme von $K_{HR} = 3/2$ und durch Kurve d schließlich das Gesetz von LEVICH gemäß Gl.(6.58). Der gestrichelte Teil von Kurve d muß als praktisch bedeutungslos angesehen werden, da er oberhalb der für starre Kugeln geltenden Kurve a liegt. Nur der ausgezogene und unterhalb von Kurve a liegende Teilabschnitt der Kurve d bringt den Einfluß der beweglichen Phasengrenzfläche richtig zum Ausdruck. Die untere Gültigkeitsgrenze von Gl.(6.58) liegt etwa bei $Re = 16$. Die obere Gültigkeitsgrenze hängt, wie in Abschnitt 6.42 näher ausgeführt wurde, von der Flüssigkeitskennzahl K_F ab. Einige im Schrifttum bekannt gewordene Meßwerte bestätigen den Verlauf von Kurve d , andere liegen aber auch, wie SIEMES [6.2] aufzeigte, sowohl oberhalb als auch unterhalb von Kurve d , in jedem Falle aber oberhalb der Kurve b . Daraus folgt also, daß es bislang noch nicht gelungen ist, den Widerstand von Kugeln mit beweglicher Grenzfläche eindeutig theoretisch zu bestimmen. Für den Ingenieur werden daher die im Abschnitt 6.42 mitgeteilten Gleichungen zur Anwendung empfohlen.

6.44 Steiggeschwindigkeit zylindrischer Blasen in senkrechten Röhren

Steigen Gasblasen gemäß *Bild 6.16* in einem mit Flüssigkeit gefüllten senkrechten Rohr auf, so füllen sie bei genügend großem Volumen den Rohrquerschnitt fast vollständig aus. Zwischen Blase und Rohrwand befindet sich ein dünner Flüssigkeitsfilm, in dem die Flüssigkeit relativ zur aufsteigenden Blase abwärts strömt und in das hinter der Blase befindliche Unterdruckgebiet umgelenkt wird. Bei Vorhandensein vieler Blasen wird die Flüssigkeit mit geringer Geschwindigkeit aufwärts gefördert. Für einige Querschnitte sind in *Bild 6.16* die in der Flüssigkeit auftretenden Geschwindigkeitsprofile angegeben. Man darf in erster Näherung annehmen, daß Blasendurchmesser d_p und Rohrdurchmesser d nur wenig voneinander abweichen. Vergrößert man das Blasenvolumen, so führt das wegen $d_p \approx \text{const}$ zu einer größeren Länge der Blase. Dabei bleibt jedoch das Verhältnis aus Blasenvolumen und Mantelfläche der Zylinderblase unverändert. Man wird daher erwarten dürfen, daß die Länge der Zylinderblase für ihre Steiggeschwindigkeit ohne Bedeutung ist. Bei nicht zu langen Blasen wird das durch Experimente bestätigt [6.27].

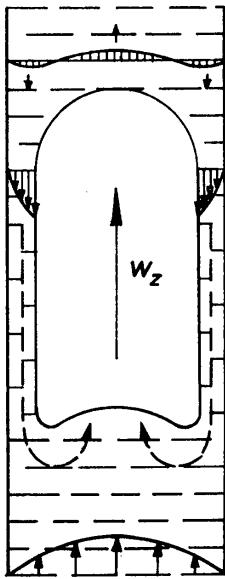


Bild 6.16. Zur Erläuterung des Aufstieges einer Zylinderblase im senkrechten Rohr

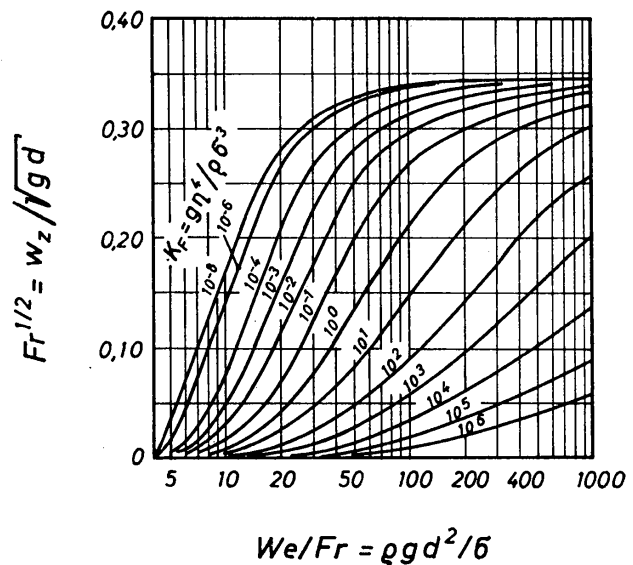


Bild 6.17. Dimensionslose Darstellung für die Steiggeschwindigkeit zylindrischer Blasen in senkrechten Röhren

Die Steiggeschwindigkeit w_z einzelner Zylinderblasen ist in zahlreichen Experimentalarbeiten untersucht worden. WHILE und BEARDMORE [6.28] faßten alle bekannten, fremden und zahlreiche eigene Meßwerte zusammen, wobei sie die drei Kennzahlen $Fr \equiv w_z^2/gd$, $We/Fr \equiv \rho g d^2/\sigma$ und $K_F \equiv g \eta^4/\rho \sigma^3$ verwendeten. Die Steiggeschwindigkeit w_z ist allein in der Froudezahl enthalten. Diese wurde gemäß *Bild 6.17*, abhängig von We/Fr , mit der Flüssigkeitskennzahl K_F als Parameter dargestellt. Für die Froudezahl ergibt sich ein oberer Grenzwert von $Fr = 0,119$ bzw. $Fr^{1/2} = 0,345$. Die Steiggeschwindigkeit wird bei gegebenem Wert We/Fr um so größer, je kleiner K_F ist. GRASSMANN [6.17] deutet die Flüssigkeitskennzahl als das Verhältnis aus der Erdbeschleunigung g und einer für die

Molekülbewegung charakteristischen Beschleunigung $\rho \sigma^3 / \eta^4$. Je größer die Beschleunigung, desto größer ist die Beweglichkeit der Moleküle. Die Flüssigkeitskennzahl wird also mit zunehmender Beweglichkeit der Moleküle kleiner. Es leuchtet daher unmittelbar ein, daß die Steiggeschwindigkeit der Blasen mit abnehmenden Werten für die Flüssigkeitskennzahl zunehmen muß. Die Brauchbarkeit der von WHILE und BEARDMORE entwickelten Korrelation wurde durch umfangreiche Untersuchungen von BROWN [6.29] nochmals bestätigt.

In einer Reihe von Arbeiten wurde die Umströmung von Blasen beim Aufsteigen in senkrechten Rohren theoretisch untersucht [6.30, 6.31, 6.32, 6.33]. Diese Untersuchungen sind deshalb von besonderer Bedeutung, da die Strömung um die Blase auch deren Form bestimmt. Unter anderem zeigte sich, daß eine kugelförmige Blase von genügend großem Durchmesser während des Aufstiegs im Rohr unter der Wirkung der Trägheitskräfte in eine schirmförmige Blase umgebildet wird. Dieses Ergebnis ist auch für die Bewegung einzelner Blasen in einem unbegrenzten Flüssigkeitsraum, die im Abschnitt 6.42 behandelt wurde, von Bedeutung. Es ergibt sich eine weitgehende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. In einer weiteren theoretischen Untersuchung von STREET und TEK [6.34] ist besonders auf das Verhalten des Flüssigkeitsfilms zwischen der Blase und der Rohrwand eingegangen worden. Die berechneten Wandschubspannungen stimmen sehr gut mit experimentell bestimmten Werten, die von NICKLIN, WILKES und DAVIDSON [6.35] mitgeteilt wurden, überein. Ebenfalls mit der Bewegung zylindrischer Blasen in senkrechten Rohren beschäftigten sich GRASSMANN, BÜTTIKER und CATHREIN [6.36]. Diese Autoren haben die Wandschubspannung gemessen und besonders hervorgehoben, daß die auf die Rohrwand ausgeübte Kraft der Bewegungsrichtung der Blasen entgegengerichtet ist. Mit der zeitlichen Änderung der auftretenden Drücke befaßten sich STREET und TEK [6.37] im Rahmen einer Experimentalarbeit.

6.5 Steiggeschwindigkeit von Blasen in nicht-Newtonschen Flüssigkeiten

Das Verhalten von Blasen in nicht-Newtonschen Flüssigkeiten ist bislang nur wenig untersucht worden. Trotzdem haben sich aber schon einige interessante Ergebnisse herausgestellt, auf die hingewiesen werden soll. ASTARITA und APUZZO

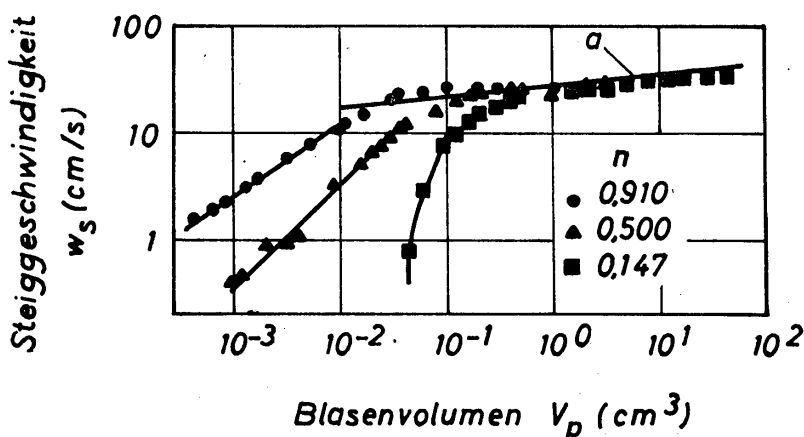


Bild 6.18. Steiggeschwindigkeit von Luftblasen in drei verschiedenen Ostwald-Flüssigkeiten; Kurve *a* nach Gl.(6.60)

[6.21] haben die Steiggeschwindigkeit von Luftblasen in viskosen und viskoelastischen Flüssigkeiten gemessen. Die verschiedenen Eigenschaften der nicht-Newton'schen Flüssigkeiten ergaben sich durch Lösung von Carbopol, Carboxymethyl-Cellulose und anderer Stoffe in Wasser.

In *Bild 6.18* sind die gemessenen Steiggeschwindigkeiten w_s in Wasser-Carbopol-Lösungen über dem Blasenvolumen V_p aufgetragen. Das Fließverhalten dieser Lösungen läßt sich mit guter Näherung durch den Ostwald-Ansatz (siehe Abschnitt 3.21)

$$\tau = K \left(- \frac{dw}{dr} \right)^n \quad (6.59)$$

wiedergeben. Darin bedeuten τ Schubspannung, K Ostwald-Faktor, dw/dr Geschwindigkeitsgradient und n Flüssigkeitsindex. Bei den verwendeten Carbopolkonzentrationen änderte sich n von 0,910 bis 0,147. Die Lösung mit dem niedrigsten Wert des Flüssigkeitsindex zeigte ein sehr ausgeprägtes nicht-Newton'sches Verhalten.

Im Bereich kleinen Blasenvolumens V_p ergibt sich für die Steiggeschwindigkeit in jeder der drei Lösungen eine gesonderte Kurve. Nach Erreichen eines bestimmten Blasenvolumens werden die Meßwerte jedoch alle durch Kurve *a* ausgeglichen, die mit $V_p = d_p^3 \pi / 6$ aus Gl.(6.53) folgt:

$$w_s = 0,794 g^{1/2} V_p^{1/6}. \quad (6.60)$$

Diese Beziehung gilt für den Fall, daß die Form der Blase ziemlich regellos ist, wie sie in *Bild 6.13d* dargestellt ist. Bedingt durch die steten Formänderungen wird in der Umgebung der Blasen ein sehr kräftiger Impulsaustausch erzwungen, so daß die nicht-Newton'schen Eigenschaften der Flüssigkeit örtlich verschwinden. Somit steigen also regellos geformte Blasen in Newton'schen und in nicht-Newton'schen Flüssigkeiten mit der gleichen Geschwindigkeit auf. Die Steiggeschwindigkeit ist für diese Blasenformen keine Funktion der Viskosität. Diese Aussage gilt auf Grund weiterer Meßergebnisse von ASTARITA und APUZZO auch für stark viskoelastische Flüssigkeiten.

Die Form der Blasen beim Aufstieg in den Carbopol-Lösungen stimmte mit den in *Bild 6.13* angegebenen vollkommen überein. Wie in Newton'schen Flüssigkeiten hatten die Blasen mit zunehmendem Volumen zunächst die Form von Kugeln, dann die Form abgeplatteter Ellipsoide und schließlich die schon genannte regellose Form.

Es ist bislang noch nicht möglich gewesen, für die kugel- und ellipsoidförmigen Blasen empirische oder theoretische Gesetze zur Berechnung der Steiggeschwindigkeit aufzustellen. ASTARITA und APUZZO haben den Versuch unternommen, Gesetze für die Steiggeschwindigkeit von Kugelblasen aus denen für starre Kugeln herzuleiten. Sie können jedoch nur dann Aussicht auf Gültigkeit haben, wenn sich die Gesetze für starre Kugeln als brauchbar erwiesen haben. Für starre Kugeln ist die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit in Ostwald-Flüssigkeiten bereits

häufiger berechnet worden. Die hierzu bemerkenswertesten Arbeiten lieferten SLATTERY [6.38] sowie WASSERMAN und SLATTERY [6.39]. Diese Autoren verglichen die theoretischen Ergebnisse mit experimentellen und stellten keine sehr befriedigende Übereinstimmung fest. Die dadurch offenbar gewordenen Mängel der Theorie sind wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß der Ostwald-Ansatz das Verhalten der Flüssigkeiten bei dem speziellen Problem der Kugelumströmung nicht in ausreichender Form zu beschreiben vermag.

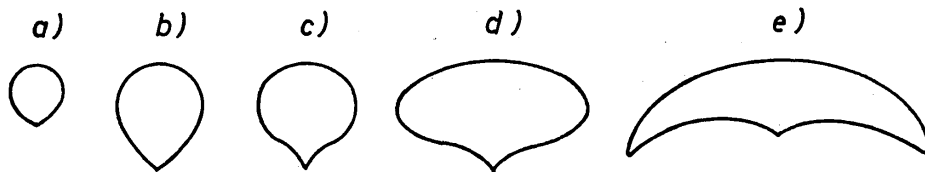


Bild 6.19. Formen von Luftblasen, die in viskoelastischen Flüssigkeiten aufsteigen, gezeichnet nach photographischen Aufnahmen von ASTARITA und APUZZO [6.21]

Aus der Arbeit von ASTARITA und APUZZO [6.21] lassen sich noch einige beachtenswerte Hinweise auf die Form von Gasblasen beim Aufstieg durch stark viskoelastische Flüssigkeiten entnehmen. In *Bild 6.19* sind einige charakteristische Blasenformen dargestellt. Auffallend ist zunächst, daß die Blasen stromabwärts eine Spitze ausbilden. Die genannten Autoren weisen ferner darauf hin, daß die Krümmung sehr kleiner Blasen (*a* und *b*) über den gesamten Umfang konvex ist, während oberhalb eines kritischen Blasenvolumens die Krümmung über den Umfang von konvex zu konkav wechselt. Beim Überschreiten des kritischen Blasenvolumens vergrößert sich die Steiggeschwindigkeit sprunghaft.

6.6 Tropfenbildung in Flüssigkeiten

Die Bildung von Tropfen in Flüssigkeiten muß ähnlichen Gesetzen folgen, wie sie in den Abschnitten 6.2 und 6.3 für Blasen angegeben wurden. Es liegen jedoch nicht genügend Versuchsergebnisse vor, um sie mit ausreichender Sicherheit in der für Blasen gewählten Art darstellen zu können.

NULL und JOHNSON [6.40] haben in einer bemerkenswerten Arbeit die Bildung des Tropfens an einer Bohrung und den Durchmesser nach der Ablösung theoretisch untersucht. Es ergab sich eine recht gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Theorie und denen zahlreicher Experimente. Die Anwendung der Theorie erfordert indes umfangreiche Rechnungen, zu deren Erleichterung sieben Diagramme aufgestellt wurden. Auf ihre Wiedergabe wird hier verzichtet. Die Gültigkeitsgrenze der Theorie läßt sich mittels der bisher vorliegenden Versuchsergebnisse noch nicht angeben.

Ein einfacheres und offenbar sehr zuverlässiges Verfahren zur Berechnung des Durchmessers von Tropfen, die sich an einer Düse bilden, haben SCHEELE und MEISTER [6.41] entwickelt. Auf halbtheoretischem Wege gelangten diese Forscher zu der folgenden Beziehung:

$$\frac{1}{F} \left(\frac{d_p}{d} \right)^3 = \frac{6 \sigma}{d^2 g \Delta \rho} + \frac{120}{\pi} \frac{\eta \dot{V}}{d_p^2 d^3 g \Delta \rho} - \left\{ \frac{4}{3} \right\} \frac{24}{\pi^2} \frac{\rho_p \dot{V}^2}{d^5 g \Delta \rho} + \frac{27}{\pi} \left[\left(\frac{\dot{V}}{g \Delta \rho} \right)^2 \frac{\rho_p \sigma}{d^7} \right]^{1/3}. \quad (6.61)$$

Es bedeuten d_p Tropfendurchmesser, d Düsendurchmesser, σ Grenzflächenspannung, g Erdbeschleunigung, $\Delta \rho$ Differenz der Dichten der beiden Flüssigkeiten, η dynamische Viskosität der umgebenden Flüssigkeit, \dot{V} Volumstrom der tropfenbildenden Flüssigkeit und ρ_p deren Dichte. Mit F wird der nach HARKINS und BROWN [6.42] benannte Korrekturfaktor bezeichnet, der das nach dem Abreißen des Tropfens an der Düse haften bleibende Flüssigkeitsvolumen berücksichtigt.

Die ersten drei auf der rechten Seite von Gl. (6.61) stehenden Glieder lassen sich als Kräfteverhältnisse deuten. Das erste Glied stellt das Verhältnis aus Oberflächenspannungs- und Auftriebskraft, das zweite das Verhältnis aus Widerstands- und Auftriebskraft und das dritte das Verhältnis aus Trägheits- und Auftriebskraft dar. Der vierte Ausdruck berücksichtigt das noch während des Abschnürvorganges in den Tropfen einströmende Flüssigkeitsvolumen. Bei der Auswertung von Gl. (6.61) ergibt sich eine gewisse Schwierigkeit, da der zu berechnende Tropfendurchmesser auch im Widerstandsterm auftritt. Dieser Term wird jedoch vernachlässigbar klein für sehr große Werte von d_p . Im allgemeinen wird man so vorgehen, daß man im ersten Rechnungsgang den Widerstandsterm unberücksichtigt läßt und anschließend Korrekturrechnungen durchführt. Der Faktor F ist in *Bild 6.20* über $(1/F)(d_p/d)^3$ dargestellt. Für sehr große Werte von $(1/F)(d_p/d)^3$ nähert sich F dem Wert 1. Das ist auch verständlich, da bei sehr großen Tropfendurchmessern das an der Düse haften bleibende Flüssigkeitsvolumen vernachlässigbar klein wird.

Gl. (6.61) wurde mit zahlreichen Meßwerten verglichen, die aus Versuchen mit verschiedenen Flüssigkeitssystemen stammen. In *Bild 6.21* sind als Beispiel einige

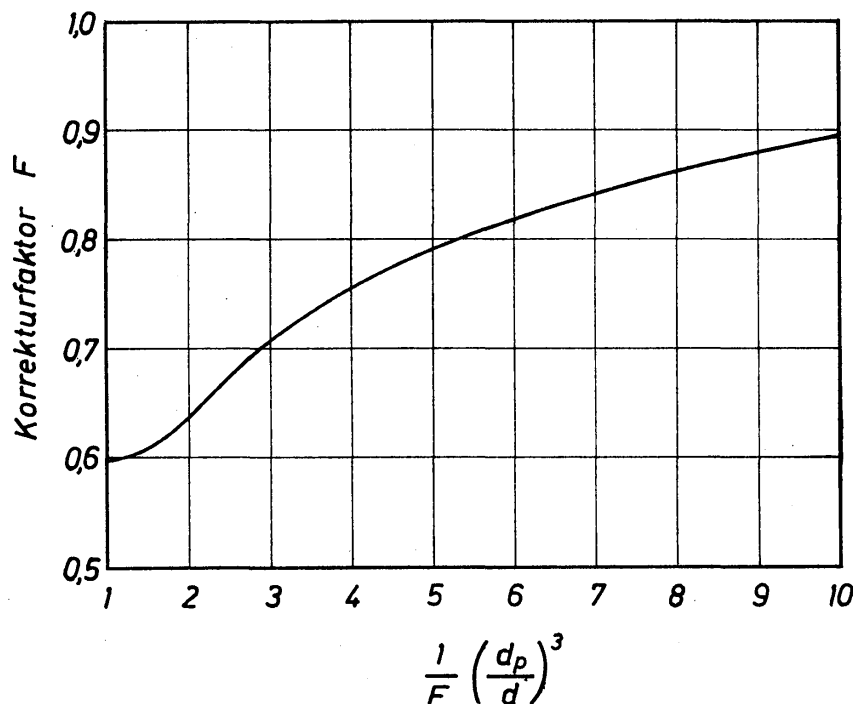


Bild 6.20
Korrekturfaktor F zur
Auswertung von Gl. (6.61)

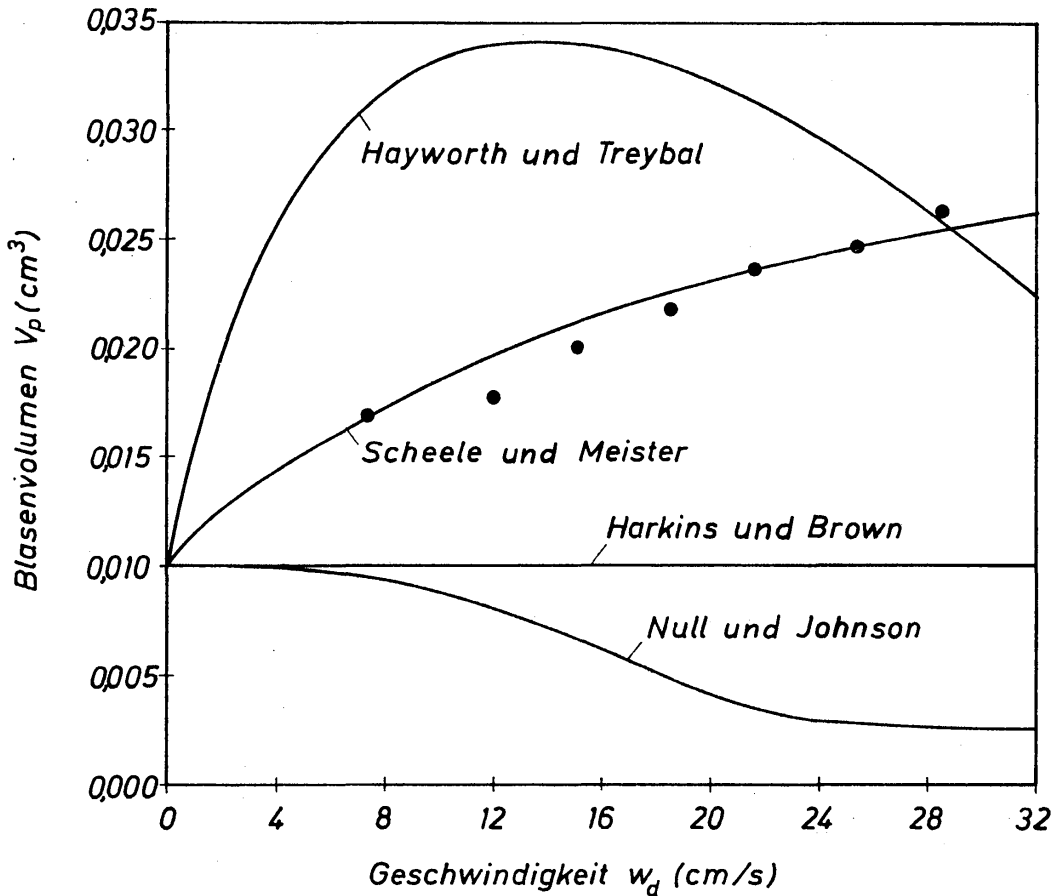


Bild 6.21. Vergleich von Meßwerten für das Tropfenvolumen V_p , abhängig von der Geschwindigkeit w_d in der Düse, mit Gleichungen von mehreren Forschern

Meßwerte für das Volumen V_p von Heptantropfen, die sich in Glycerin bilden, abhängig von der Geschwindigkeit w_d , in der Düse dargestellt. Der Düsendurchmesser d betrug bei dieser Versuchsreihe 0,813 mm. Zum Vergleich sind die nach Gl. (6.61) sowie nach Gleichungen von NULL und JOHNSON [6.40], HARKINS und BROWN [6.42] und HAYWOTRH und TREYBAL [6.43] eingezeichnet. Es ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung der Meßwerte mit Gl. (6.61) von SCHEELE und MEISTER [6.41]. Für alle von diesen Forschern durchgeführten Versuche betrug die Streuung der Meßwerte im Mittel $\pm 11\%$.

Gl. (6.61) wurde für den Fall entwickelt, daß sich innerhalb der Düse, an deren Spitze sich der Tropfen bildet, ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil ausbildet. Hierfür ist im allgemeinen eine sehr lange Düse erforderlich. Bei kurzen Düsen oder Bohrungen in Blechplatten muß man ein kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil erwarten. Auch für diesen Fall kann Gl. (6.61) angewendet werden, wenn man den im Trägheitsterm in der geschweiften Klammer stehenden Zahlenwert $\{4/3\}$ gegen 1 austauscht.

Bei großen Werten des Volumstromes \dot{V} bzw. der mittleren Flüssigkeitgeschwindigkeit $w_d = 4\dot{V}/\pi d^2$ in der Düse werden sich die Tropfen nicht mehr an der Düsen Spitze bilden. Es wird vielmehr ein Flüssigkeitsstrahl die Düse verlassen, der sich dann in der umgebenden Flüssigkeit in Tropfen auflöst. Die Durchmesser der dabei entstehenden Tropfen lassen sich nicht mehr nach Gl. (6.61) berechnen. Die obere Gültigkeitsgrenze von Gl. (6.61) ist erreicht, wenn w_d gleich der Strahl-

geschwindigkeit w_{ds} geworden ist. Hierfür haben SCHEELE und MEISTER die folgende Gleichung hergeleitet:

$$\frac{w_{ds}^2 \rho_p d}{\sigma} = 3 \left(1 - \frac{d}{d_p} \right). \quad (6.62)$$

Auch diese Gleichung gibt Versuchswerte sehr gut wieder. Ist statt eines parabelförmigen ein kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil in der Düse zu erwarten, dann ist der Zahlenwert 3 durch 4 zu ersetzen.

Nachdem die Tropfen entstanden sind, muß man mit der Möglichkeit rechnen, daß sie sich im weiteren Bewegungsablauf vereinigen oder daß sie in mehrere kleinere Tropfen zerfallen. Während dieser Vorgänge bildet sich ein maximaler Tropfendurchmesser aus, der mit den im Bewegungsraum herrschenden Bedingungen vereinbar ist. Hiermit hat man sich in vielen Arbeiten beschäftigt, von denen einige genannt seien [6.44 und 6.45]. Hingewiesen sei schließlich noch auf eine Arbeit von CHRISTIANSEN und HIXSON [6.46], in der die Auflösung eines in eine Flüssigkeit eintauchenden Flüssigkeitsstrahles behandelt wird.

6.7 Tropfenbildung in Gasen (Zerstäubung)

6.71 Ziel und technische Anwendung der Zerstäubung

Das Ziel der Zerstäubung besteht darin, ein gegebenes Flüssigkeitsvolumen in Tropfen von vorgeschriebenem Durchmesser aufzuteilen. Je kleiner die Tropfen sind, desto größer wird die erzeugte Oberfläche, die für die Durchführung vieler technischer Prozesse von Bedeutung ist. Bezeichnet man mit \dot{V} das in der Zeiteinheit zu zerstäubende Flüssigkeitsvolumen und mit d_p den Durchmesser des als Kugel angenommenen Tropfens, dann erhält man die in Tabelle 6.3 angegebenen Werte für die bezogene Zahl der Tropfen z/\dot{V} und für die bezogene Oberfläche A/\dot{V} .

Tabelle 6.3:

Bezogene Tropfenzahl z/\dot{V} , Oberfläche A/\dot{V} und Mindestenergie E_{\min}/\dot{V}

d_p (m)	z/\dot{V} (m ³ /s) ⁻¹	A/\dot{V} (m ² /(m ³ /s))	E_{\min}/\dot{V} für Wasser Nm/(m ³ /s)
10 ⁻³	1,9 · 10 ⁹	6 · 10 ³	4,32 · 10 ⁴
10 ⁻⁴	1,9 · 10 ¹²	6 · 10 ⁴	4,32 · 10 ⁵
10 ⁻⁵	1,9 · 10 ¹⁵	6 · 10 ⁵	4,32 · 10 ⁶
10 ⁻⁶	1,9 · 10 ¹⁸	6 · 10 ⁶	4,32 · 10 ⁷

Zerstäubt man in der Zeiteinheit ein Flüssigkeitsvolumen von $\dot{V} = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 1 \text{ l/s}$ zu Tropfen mit dem Durchmesser $d = 10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$, so ist die Zahl der Tropfen z gleich $1,9 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-3} = 1,9 \cdot 10^{12}$ und die erzeugte Oberfläche gleich $6 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^2 \text{ m}^2$. Ein Liter Flüssigkeit ist also so zerteilt worden, daß

eine Oberfläche von 600 m^2 entsteht. Zur Erzeugung frischer Oberfläche muß gegen die Oberflächenspannung σ Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit ist $E_{\min} = \sigma A$; bezogen auf den Volumstrom erhält man $E_{\min}/\dot{V} = \sigma A/\dot{V}$. Für die Zerstäubung von Wasser mit $\sigma = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ ist die mindestens erforderliche Zerstäubungsarbeit in Tabelle 6.3 angegeben. Sowohl die auf den Volumstrom bezogene Oberfläche als auch die bezogene Mindestenergie sind umgekehrt proportional dem Tropfendurchmesser. Verkleinerung des Tropfendurchmessers um einen Faktor 10 führt zu einer Vergrößerung der Oberfläche und der erforderlichen Mindestenergie um den gleichen Faktor.

Die tatsächlich für die Zerstäubung aufzuwendende Energie ist erheblich größer als die theoretisch berechnete. Denn die angelieferte Energie wird umgewandelt in

freie Grenzflächenenergie,
 kinetische Energie der Tropfen auf Grund von Translation,
 Rotation und
 Schwingungen,
 Reibungsenergie,
 thermische Energie und
 elektrische Energie.

Es überrascht daher nicht, daß der Wirkungsgrad der Zerstäubung außerordentlich schlecht ist und Werte zwischen 1% und 0,1% aufweist. Es liegen also sehr ähnliche Verhältnisse vor wie bei der Zerkleinerung fester Stoffe [6.47].

Die durch Zerstäubung erreichbare große Oberfläche ist insbesondere für den Wärme- und Stoffaustausch von ausschlaggebender Bedeutung. Erwähnt sei in diesem Zusammenhang die Zerstäubungstrocknung, wobei die Lösung zerstäubt wird; das Lösungsmittel verdampft und der gelöste Stoff fällt als Pulver an. Praktische Anwendungsbeispiele sind die Herstellung von Trockenmilch und Waschmitteln sowie zahlreicher anderer pulverförmiger Stoffe. In Verbrennungsmotoren wird der flüssige Brennstoff zerstäubt, damit er möglichst schnell und gleichmäßig verdampft und mit dem Gas ein brennbares Gemisch erzeugt. Die schnelle und gleichmäßige Verdampfung von Tröpfchen ist auch der Anlaß zur Zerstäubung von Wasser, um die Luft in Klimaanlageanlagen zu befeuchten. Zur Brandbekämpfung wird das Wasser ebenfalls zerstäubt, damit die bei der Verdampfung benötigte Wärme dem Brandherd wirkungsvoll entzogen werden kann. Beim Farbspritzen wird der Farbstoff zerstäubt, um ihn möglichst gleichmäßig auf Flächen einfachster und kompliziertester Form auftragen zu können. Die Anwendung der Zerstäubung zur gleichmäßigen Verteilung von flüssigen Lösungen wird auch bei der Schädlingsbekämpfung in der Landwirtschaft angewendet. An der gleichen Stelle spielt die Zerstäubung von Wasser in Beregnungsanlagen eine immer größere Rolle. Von technischer großer Bedeutung ist ferner die Zerstäubung von flüssigem Stahl und anderen Metallen zur Erzeugung von Metallpulvern als Grundlage der modernen Sinterwerkstoffe. Das sind nur einige der technisch bedeutsamsten Anwendungen.

Es hat sich dabei schon erkennen lassen, daß es offensichtlich nicht immer darauf ankommt, die Flüssigkeit in kleinstmögliche Tropfen aufzulösen. Bei der Bepflanzung von Feldern darf der Tropfen nicht so klein sein, daß er bereits bei sehr schwacher Luftbewegung fortgetragen wird; das gleiche gilt auch für die Zerstäubung von Wasser bei der Brandbekämpfung oder von Farbstoffen. Andererseits darf aber auch der Tropfendurchmesser nicht zu groß werden, da dann der Tropfen zu langsam verdampft und dadurch der Prozeß zu lange dauert und der Apparat unnötig groß wird. Beim Farbspritzen würden zu große Tropfen eine ungleichmäßige Dicke der Farbschicht hervorrufen. Somit werden also von technischer und wirtschaftlicher Seite zahlreiche Forderungen an die Zerstäubung gestellt, deren Erfüllung nur möglich ist, wenn man die physikalischen Grundlagen der Zerstäubung beherrscht.

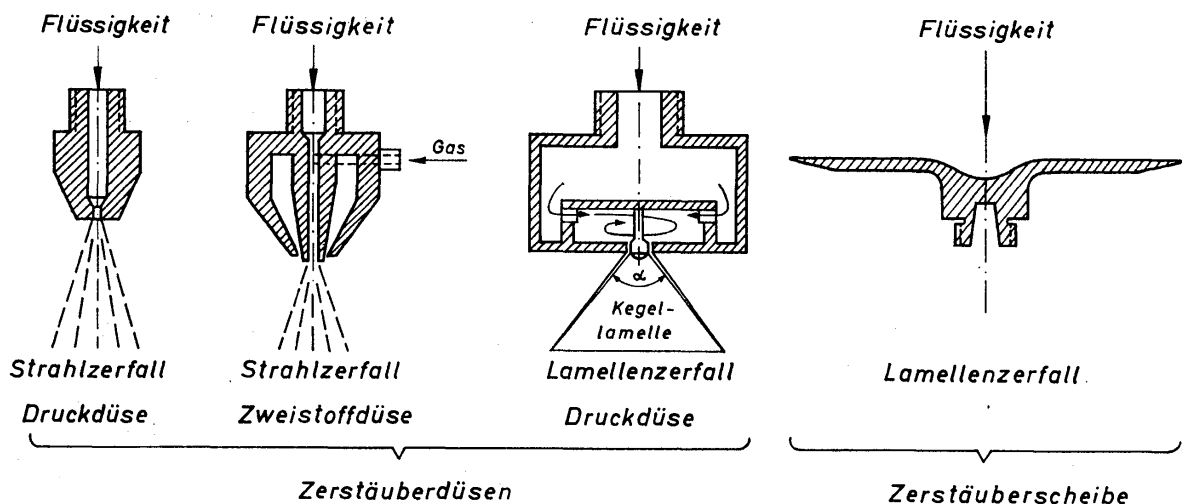


Bild 6.22. Einige Beispiele für Zerstäuberdüsen und eine Zerstäuberscheibe

Die wichtigsten Vorrichtungen zur Zerstäubung von Flüssigkeiten sind Düsen und rotierende Elemente, wie Scheiben und Hohlzylinder. In *Bild 6.22* sind einige Skizzen angegeben, an Hand derer die Wirkungsweise erklärt werden soll. Die einfachste Form hat die Druckdüse. Durch Umwandlung von Druckenergie in kinetische Energie schießt der Flüssigkeitsstrahl mit hoher Geschwindigkeit in den umgebenden Gasraum. Die Auflösung des Flüssigkeitsstrahles beginnt in einem um so kürzeren Abstand von der Düsenöffnung, je größer die Strahlgeschwindigkeit ist. Weiterhin sind aber auch die Formgebung der Düse und die Rauigkeit der Düsenoberfläche für diesen Abstand von Bedeutung. Da sich das umgebende Medium im Ruhezustand befindet, ergibt sich zwischen dem Strahl und dem Gas eine große Relativgeschwindigkeit. Diese läßt sich aber auch dadurch erzielen, daß man bei sehr geringer Strahlgeschwindigkeit dem Gas die hohe Geschwindigkeit erteilt. Dieses Prinzip ist bei der Zweistoffdüse verwirklicht. Die Flüssigkeit steht dabei unter sehr geringem Druck, was für manche Anwendungsfälle von Vorteil sein kann. In der Zweistoffdüse wird das Gas tangential in eine Ringkammer geleitet, so daß es den Flüssigkeitsstrahl am Düsenaustritt ringförmig umschließt. Die Auflösung des Strahles erfolgt in dem in *Bild 6.22*

dargestellten Fall außerhalb der Düse. Die Konstruktion läßt sich leicht so verändern, daß der Strahlzerfall bereits innerhalb der Düse eingeleitet wird. Im allgemeinen ergibt sich dann jedoch ein ungünstigeres Tropfenspektrum. Sehr günstige Zerstäubungsbedingungen ergeben sich mittels einer von KIRSCHBAUM [6.48] vorgeschlagenen Düse, die so gestaltet ist, daß zwei Gasstrahlen den Flüssigkeitsstrahl umschließen.

Bei der Druck- und Zweistoffdüse wird zur Vorbereitung der Zerstäubung ein Flüssigkeitsstrahl erzeugt. Die nach diesem Prinzip arbeitenden Düsen sollen Strahldüsen genannt werden. Bei einer zweiten Gruppe, in der die Lamellendüsen zusammengefaßt werden, wird zur Einleitung der Zerstäubung eine Flüssigkeitslamelle erzeugt. Da der hierfür erforderliche Aufwand nicht sehr groß ist, konnte man also hoffen, die günstigsten Voraussetzungen für die Erzeugung sehr feiner Tropfen geschaffen zu haben. In *Bild 6.22* ist ein Beispiel angegeben. Die Flüssigkeit gelangt zunächst in eine Vorkammer und strömt von hier tangential in eine Drallkammer. Auf dem Wege vom Kammerumfang zur Mitte erhöht sich bei konstantem Drall die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit. In der Nähe der Drallachse wird die Flüssigkeit durch einen Ringspalt nach außen gedrückt. Durch das Zusammenwirken der hierbei erzwungenen Axialgeschwindigkeit mit der Umfangsgeschwindigkeit bildet sich eine kegelförmige Flüssigkeitslamelle mit dem Öffnungswinkel α aus. Mit zunehmendem Abstand von der Düsenöffnung löst sich die Lamelle langsam auf, und es bilden sich die Tropfen. Die Lamellenbildung läßt sich auch auf anderem Wege erreichen. Richtet man z. B. zwei Flüssigkeitsstrahlen unter geeignetem, im allgemeinen aber sehr spitzem Winkel gegeneinander, dann bildet sich eine ebene Flüssigkeitslamelle.

Eine weitere, insbesondere bei der Zerstäubung von Suspensionen angewendete Möglichkeit bieten rotierende Scheiben. Diesen wird die Flüssigkeit in der Scheibenachse zugeführt. Sie verteilt sich unter der Wirkung von Zentrifugal- und Reibungskräften gleichmäßig als dünner Film über die ganze Scheibenfläche. Durch richtige Abstimmung von Volumstrom der Flüssigkeit, Scheibenradius und Drehzahl läßt sich am Rand der Platte ein nahezu beliebig dünner Flüssigkeitsfilm erzeugen. Seine Auflösung kann wie bei einer Lamelle erfolgen. Je nach Betriebsbedingungen sind aber auch andere Auflösungsmerkmale vorhanden. Auch für die Zerstäuberscheibe sind viele verschiedene Konstruktionen denkbar. Ganz ähnliche Verhältnisse wie bei der rotierenden Scheibe erhält man auch bei rotierenden Hohlzylindern. Hierbei strömt die Flüssigkeit an der Innenwand des Hohlzylinders nach unten und bildet am freien Rand eine Flüssigkeitslamelle. Die Beschreibung der Zerstäubervorrichtungen hat erkennen lassen, daß die Tropfen entweder durch Strahlzerfall oder durch Lamellenzerfall erzeugt werden. Auf diese beiden Mechanismen wird im folgenden zunächst näher eingegangen.

6.72 Strahlzerfall

Bild 6.23 zeigt die verschiedenen Formen des Strahlzerfalls, wobei sich die Strahlgeschwindigkeit von a) nach c) erhöht. Bei sehr kleiner Strahlgeschwindigkeit

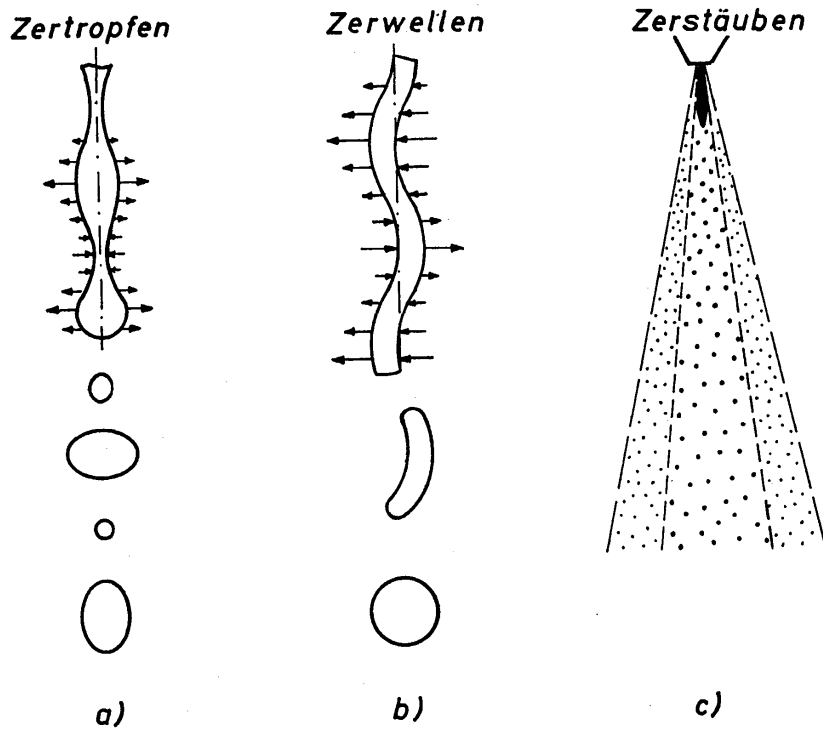


Bild 6.23
Formen des Strahlzerfalls
in schematisierter Form

zertropft der Strahl gemäß *Bild 6.23 a*. Bedingt durch Anfangsstörungen führen rotationssymmetrische Schwingungen, die durch die von der umgebenden Luft ausgeübten Kräfte noch verstärkt werden, zum tropfenförmigen Strahlzerfall. Bei Erhöhung der Strahlgeschwindigkeit erfolgt die Auflösung auf Grund transversaler wellenförmiger Schwingungen gemäß *Bild 6.23 b*. Es bilden sich zunächst kurze Flüssigkeitsfäden, aus denen die Oberflächenspannungskraft nach Abklingen der anderen Kräfte die Tropfenform herbeiführt. Tritt der Strahl schließlich mit sehr hoher Geschwindigkeit aus der Düse aus, dann setzt unmittelbar an der Düsenöffnung jene Art des Strahlzerfalls ein, die man Zerstäuben nennt. Dabei werden aus dem Strahl fadenförmige Flüssigkeitsteilchen herausgerissen, aus denen sich die Tropfen bilden. Die größten Tropfen befinden sich im Strahlkern und die kleineren vornehmlich in einem den Kern umschließenden Ringstrahl. Eine erste, wenn auch noch grobe Einteilung der drei Zerfallformen des Strahls gab v. OHNESORGE [6.49] an. Diese Einteilung geht aus *Bild 6.24* hervor. Mit der Weberzahl

$$We \equiv \frac{w_d^2 d \varrho_p}{\sigma} \quad (6.63)$$

und der Reynoldszahl des Strahls

$$Re \equiv \frac{w_d d \varrho_p}{\eta_p} \quad (6.64)$$

wurde das Verhältnis $We^{1/2}/Re \equiv \eta_p / \sqrt{\sigma \varrho_p d}$ gebildet, das unabhängig von der Geschwindigkeit w_d ist, und über Re aufgetragen. In den letzten Definitionsgleichungen bedeuten w_d die mittlere Strahlgeschwindigkeit an der Düsenöffnung, d den Strahldurchmesser an dieser Stelle, σ die Oberflächenspannung sowie η_p und ϱ_p die dynamische Viskosität und die Dichte der Flüssigkeit, aus der die

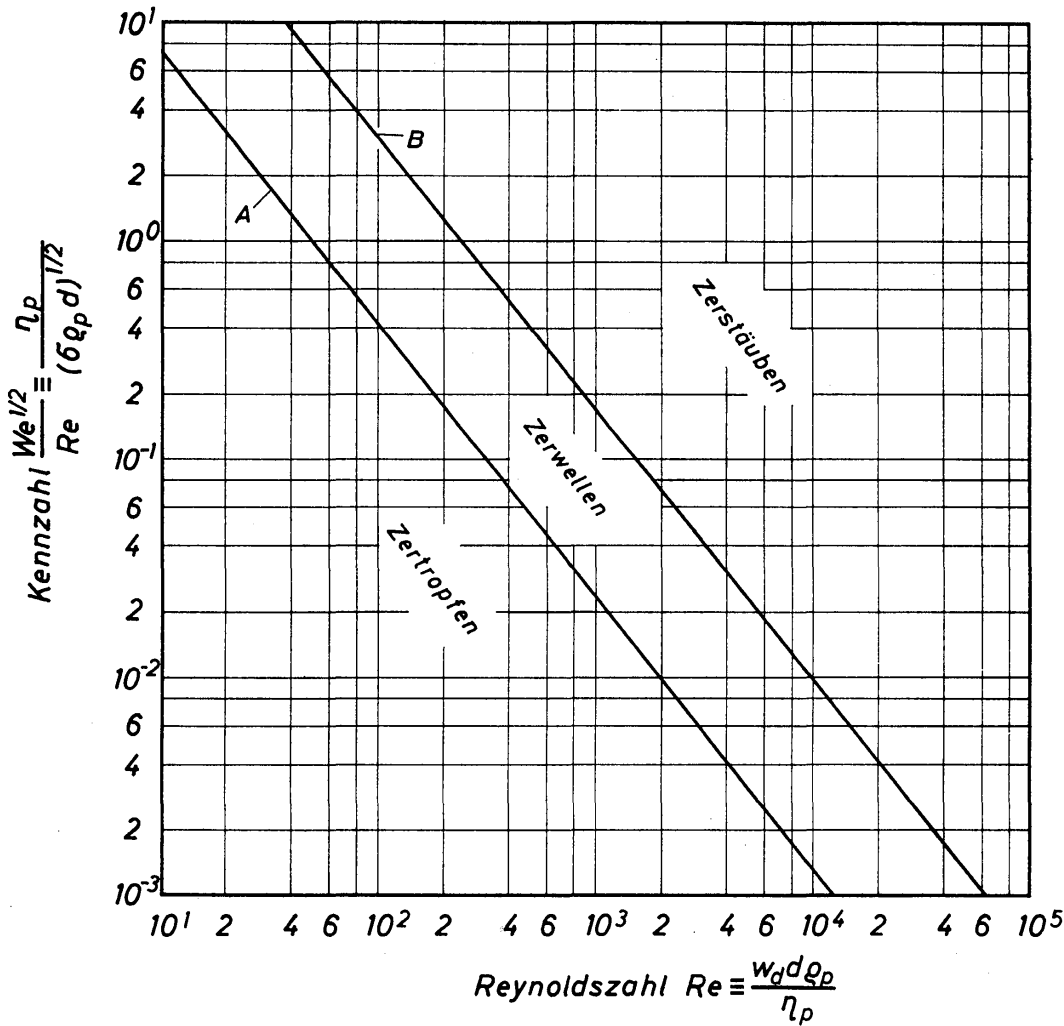


Bild 6.24. Bereiche des Strahlzerfalls. Kurve A nach Gl.(6.65) und Kurve B nach Gl.(6.66)

Tropfen gebildet werden. Die Grenze zwischen Zertropfen und Zerwellen ist durch die empirische Beziehung

$$We_A = \frac{1,74 \cdot 10^4}{Re^{1/2}} \tag{6.65}$$

und die Grenze zwischen Zerwellen und Zerstäuben durch

$$We_B = \frac{8,32 \cdot 10^5}{Re^{0,48}} \tag{6.66}$$

gegeben. Für technische Verhältnisse ist es ausreichend, diese Beziehung durch die etwas einfachere

$$We_B = \frac{9,4 \cdot 10^5}{Re^{1/2}} \tag{6.67}$$

zu ersetzen. Hieraus folgt dann die zur Zerstäubung erforderliche Geschwindigkeit zu

$$w_d \geq 2,45 \cdot 10^2 \frac{\sigma^{0,4} \eta_p^{0,2}}{d^{0,6} \rho_p^{0,6}} \tag{6.68}$$

Die Grenzen sind nicht scharf ausgeprägt; es folgt vielmehr ein fließender Übergang von einem zum anderen Bereich.

Die erste Untersuchung über das Zertropfen eines reibungsfreien Flüssigkeitsstrahles führte Lord RAYLEIGH [6.50] durch. Hiernach setzt der Zerfall des Strahles ein, wenn die Wellenlänge der angenommenen rotationssymmetrischen Schwingungen größer wird als der Umfang des ungestörten Strahles. Die am stärksten anwachsende Schwingung hat die Wellenlänge

$$l = \pi \sqrt{2} d = 4,44 \cdot d. \quad (6.69)$$

Dadurch ist auch die Länge der Flüssigkeitsfäden festgelegt, aus denen sich ein Tropfen bildet. Sein Durchmesser d_p , bezogen auf den Strahldurchmesser d , ist

$$\frac{d_p}{d} = 1,436. \quad (6.70)$$

WEBER [6.51] hat die Rechnungen von RAYLEIGH auf reibungsbehaftete Flüssigkeiten erweitert und erhielt

$$\frac{d_p}{d} = 1,436 \left[1 + 3 \frac{We^{1/2}}{Re} \right]^{1/6}. \quad (6.71)$$

Hierin tritt diejenige Größe auf, die v. OHNESORGE zur Abgrenzung der Strahlzerfallsbereiche heranzog. Wegen $We^{1/2}/Re \equiv \eta_p/(\sigma \rho_p d)^{1/2}$ geht Gl.(6.71) mit $\eta_p = 0$ in Gl.(6.70) über.

Der für die technische Praxis interessierende Vorgang der Strahlzerstäubung läßt sich noch nicht theoretisch erfassen; man ist daher zur Ermittlung des Durchmessers der entstehenden Tropfen auf Versuche angewiesen. Den Auflösungs Vorgang kann man sich auf Grund photographischer Aufnahmen [6.52] in vereinfachter Form wie folgt vorstellen. Aus einem Strahl werden kleine, zumeist fadenförmige Flüssigkeitselemente herausgerissen, aus denen nach möglicherweise nochmaliger Unterteilung gemäß den von RAYLEIGH und WEBER erkannten Vorgängen die Tropfen entstehen. Der Auflösungs Vorgang erfolgt demnach in mindestens zwei Stufen. In der ersten Stufe, in welcher sich die Flüssigkeitsfäden bilden, sind offensichtlich die mit der Turbulenz verknüpften Kräfte von maßgebender Bedeutung. Da die Turbulenz statistischen Gesetzen gehorcht, muß man mit sehr unterschiedlichen Abmessungen der entstehenden Flüssigkeitsfäden und den daraus wiederum entstehenden Tropfen rechnen. Das Durchmesserpektrum der Tropfen folgt zumeist einfachen statistischen Verteilungsfunktionen.

Eingehende Untersuchungen von TROESCH [6.53], MUGELE [6.54], HAAS [6.55] und HINZE [6.56] ergaben, daß sich unter vergleichbaren Bedingungen stets ein größter Tropfen mit dem Durchmesser $d_{p_{\max}}$ ergibt. Wenn zeitweilig größere Tropfen vorhanden sind, dann zerfallen sie wieder. Das Tropfenspektrum weist somit eine obere Grenze auf, die von den im Zerstäubungsraum herrschenden Bedingungen abhängt. Im einfachsten Falle kann man sich das Auftreten eines größten Tropfens wie folgt vorstellen. Ein Tropfen ist stabil und besitzt den

großen Durchmesser $d_{p_{\max}}$, wenn die Widerstandskraft mit der Kapillarkraft im Gleichgewicht steht. Bezeichnet man mit ζ den Widerstandsbeiwert des Tropfens, mit w_r seine Geschwindigkeit, relativ zum umgebenden Medium, und mit ρ die Dichte dieses Mediums, dann muß also gelten:

$$\zeta \frac{1}{2} \rho w_r^2 \frac{d_{p_{\max}}^2 \pi}{4} = \sigma d_{p_{\max}} \pi. \quad (6.72)$$

Hieraus folgt der maximale Durchmesser zu

$$d_{p_{\max}} = \frac{8}{\zeta} \frac{\sigma}{w_r^2 \rho}. \quad (6.73)$$

In dimensionsloser Schreibweise läßt sich dieses Ergebnis mittels einer kritischen Weberzahl ausdrücken:

$$We_{kr} \equiv \frac{w_r^2 \rho d_{p_{\max}}}{\sigma} = \frac{8}{\zeta}. \quad (6.74)$$

Ein stabiler Tropfen stellt sich somit bei einem konstanten Wert der Weberzahl ein. Ist die Weberzahl eines Tropfens größer als We_{kr} , dann wird der Tropfen zerfallen. Ist hingegen die Weberzahl kleiner als We_{kr} , dann ist grundsätzlich eine Vereinigung zweier Tropfen möglich. Voraussetzung ist dafür aber, daß zwei Tropfen zusammenprallen. Die Wahrscheinlichkeit einer Tropfenvereinigung nimmt mit zunehmendem Abstand von der Düse rasch ab. Es ist also gerechtfertigt, mittels der angestellten Überlegungen einen maximalen Tropfendurchmesser bestimmen zu wollen. Man muß indes feststellen, daß sowohl der Widerstandsbeiwert als auch die Relativgeschwindigkeit des Tropfens unbekannt sind und bislang nicht berechnet werden können. Man versucht daher, für den maximalen Tropfendurchmesser eine empirische Gleichung aufzustellen, in der nur bekannte Betriebsdaten für eine Zerstäuberdüse auftreten.

Von TROESCH [6.53] wurde folgende Gleichung aufgestellt:

$$4,8 \cdot 10^{-5} We_{\max} = \left[1 + 10^6 \frac{We_{\max}}{Re_{\max}^2} \right]^{1/12} \left(1 - 0,5 \frac{\rho}{\rho_p} \right). \quad (6.75)$$

Die Weber- und die Reynoldszahl sind wie folgt definiert:

$$We_{\max} \equiv \frac{w_d^2 \rho_p d_{p_{\max}}}{\sigma}. \quad (6.76)$$

$$Re_{\max} \equiv \frac{w_d d_{p_{\max}} \rho_p}{\eta_p}. \quad (6.77)$$

Zu beachten ist, daß beide Kennzahlen mit der Strahlgeschwindigkeit an der Düsenöffnung definiert sind; ferner bedeuten ρ_p und ρ die Dichten der Flüssigkeit und des Gases und η_p die dynamische Viskosität der Flüssigkeit. Das Verhältnis $We_{\max}/Re_{\max}^2 \equiv \eta_p^2/\sigma \rho_p d_{p_{\max}}$ dient vor allem zur Berücksichtigung der Viskosität der zu zerstäubenden Flüssigkeit, worauf im Zusammenhang mit Gl. (6.71) bereits

hingewiesen wurde. Wegen der zwölften Wurzel ändert sich der Ausdruck in der eckigen Klammer nur wenig und kann in erster Näherung als konstant angesehen werden. Der Einfluß der Gasdichte wird durch ρ/ρ_p berücksichtigt. In erster Näherung kann der Ausdruck in der runden Klammer gleich 1 gesetzt werden. Somit läßt sich also die Weberzahl näherungsweise als konstant ansehen und mit dem kritischen Wert gemäß Gl. (6.74) vergleichen. Für den maximalen Tropfendurchmesser folgt dann

$$d_{p_{\max}} = \text{const} \frac{\sigma}{w_d^2 \rho_p}. \quad (6.78)$$

Im Gegensatz zu Gl. (6.73) ist die unbekannte Relativgeschwindigkeit des Tropfens w_r durch die bekannte Strahlgeschwindigkeit w_d ersetzt. Der maximale Tropfendurchmesser nimmt mit der Strahlgeschwindigkeit sehr stark ab. Für die weiteren Ausführungen ist es von Interesse, zu vermerken, daß der maximale Tropfendurchmesser unabhängig vom Strahldurchmesser ist. Das ist auf Grund der Überlegungen, die zu Gl. (6.73) führten, auch verständlich. Ferner sei darauf hingewiesen, daß die Viskosität des Gases in Gl. (6.75) nicht berücksichtigt ist.

Die von TROESCH mitgeteilte Gl. (6.75) wurde für rotierende Druckzerstäuber und für übliche Druckluftzerstäuber experimentell überprüft, wobei sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Meßwerten ergab. Troesch äußerte bereits die Vermutung, daß diese Gleichung auch für andere Zerstäubertypen brauchbare Ergebnisse liefern wird. Diese Vermutung wird zumindest für verschiedene Formen von Druckdüsen durch Untersuchungen von MUGELE [6.54] bestätigt. Troesch verwendet weiterhin Gl. (6.75) zur Berechnung des entstehenden Durchmesserpektrums der Tropfen. Zu diesem Thema haben weiterhin NELSON und STEVENS [6.57], GRETZINGER und MARSHALL [6.58] sowie CONSIGLIO und SLIEPCEVICH [6.59] in neueren Untersuchungen wertvolle Beiträge geliefert.

Eine für das Durchmesserpektrum wichtige Größe ist der mittlere Tropfendurchmesser. Die hierfür möglichen Definitionen sind von MUGELE und EVANS [6.60] in einer grundlegenden Arbeit über die Zerstäubung zusammengestellt worden. Im folgenden wird stets der nach SAUTER [6.61] benannte mittlere Durchmesser \bar{d}_p angegeben, durch den das Volumen des Zerstäubungsproduktes mit dessen Oberfläche ins Verhältnis gesetzt wird. Dieser Durchmesser wird immer dann bevorzugt, wenn für die Berechnung von Stoffübergangsvorgängen eine charakteristische Abmessung des Tropfenkollektivs benötigt wird. Der Sauterdurchmesser ist wie folgt definiert:

$$\bar{d}_p = \frac{\sum_{i=1}^n (d_{p,i}^3 N_i)}{\sum_{i=1}^n (d_{p,i}^2 N_i)}. \quad (6.79)$$

Mit N_i wird die Zahl der Tropfen innerhalb eines engen Bereiches des Tropfenpektrums bezeichnet, für den sich der Durchmesser $d_{p,i}$ angeben läßt.

Aus umfangreichen Untersuchungen an Druckdüsen gemäß *Bild 6.22* haben TANASAWA und TOYODA [6.62] die folgende empirische Gleichung für den mittleren Tropfendurchmesser \bar{d}_p ermittelt:

$$\frac{\bar{d}_p}{d} = 47 \left(\frac{\sigma g}{\rho_p w_d^4} \right)^{1/4} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)^{1/4} \left\{ 1 + 3,31 \left(\frac{\eta_p^2}{\sigma \rho_p d} \right)^{1/2} \right\}. \quad (6.80)$$

Mit den dimensionslosen Größen $We \equiv w_d^2 d \rho_p / \sigma$, $Re \equiv w_d d \rho_p / \eta_p$ und $Fr \equiv w_d^2 / g d$ wird hieraus:

$$\frac{\bar{d}_p}{d} = 47 \left(\frac{\rho_p / \rho}{We Fr} \right)^{1/4} \left\{ 1 + 3,31 \frac{We^{1/2}}{Re} \right\}. \quad (6.81)$$

Die wichtigste Aussage dieser Gleichungen ist unzweifelhaft der nahezu lineare Anstieg des mittleren Tropfendurchmessers mit dem Düsendurchmesser. Diese Abhängigkeit ist durch den in *Bild 6.23c* angedeuteten Kernstrahl bedingt. Mit zunehmendem Düsendurchmesser d dehnt sich das Kernstrahlgebiet weiter aus, und die Zahl der großen Tropfen nimmt zu. Ferner zeigt sich, daß der mittlere Tropfendurchmesser umgekehrt proportional der Strahlgeschwindigkeit w_d ist. Sind bei einer Zerstäubung die Flüssigkeit und das Gas gegeben, so gilt der näherungsweise Zusammenhang

$$\bar{d}_p = \text{const} \frac{d}{w_d}, \quad (6.82)$$

der den Einfluß der wichtigsten Betriebsgrößen in einfacher Form aufzeigt. Der mittlere Tropfendurchmesser nimmt, wie Gl. (6.80) ebenfalls erkennen läßt, mit abnehmender Dichte ρ des umgebenden Mediums zu. Hieran ist vor allem bei Zerstäubungsprozessen unter Vakuum und erhöhtem Druck zu denken. Nach Angaben der genannten Forscher ist der maximale Tropfendurchmesser etwa 2- bis 2,5mal größer als der mittlere.

Die Zerstäubung von Flüssigkeiten mittels Gasströmen von hoher Geschwindigkeit in Zweistoffdüsen (siehe *Bild 6.22*) haben NUKIYAMA und TANASAWA [6.63] untersucht. Für den nach SAUTER benannten mittleren Tropfendurchmesser, definiert durch Gl. (6.79), ermittelten sie die empirische Gleichung:

$$\bar{d}_p = 0,585 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_p w_r^2}} + 53,2 \left(\frac{\dot{V}}{\dot{V}_g} \right)^{1,5} \left(\frac{\eta_p}{\sqrt{\sigma \rho_p}} \right)^{0,45}. \quad (6.83)$$

Da die Gleichung nicht dimensionsrichtig ist, sind folgende Einheiten zu beachten: σ (N/m); ρ_p (kg/m³); w_r (m/s); \dot{V} (m³/s); \dot{V}_g (m³/s); η_p (kg/ms) und \bar{d}_p (m). Neben den bereits bekannten Größen sind w_r die Relativgeschwindigkeit zwischen Gas und Flüssigkeitsstrahl, \dot{V}_f der Volumstrom der Flüssigkeit und \dot{V}_g der Volumstrom des Gases. Gl. (6.83) gibt eine große Zahl von Meßwerten in befriedigender Weise wieder, was auch von anderen Forschern bestätigt wird [6.64 und 6.65].

6.73 Lamellenzerfall

Es sind zahlreiche Düsenkonstruktionen für die Bildung ebener und konischer Flüssigkeitslamellen bekannt [6.66]. Ebene Lamellen lassen sich beispielsweise dadurch erzeugen, daß man zwei Flüssigkeitsströme unter spitzem Winkel gegeneinander richtet. Die Lamellenebene steht dabei senkrecht auf der durch die Flüssigkeitsströme gelegten Ebene. Zur Erzeugung konischer Lamellen wird der Flüssigkeit neben einer Längsgeschwindigkeit gleichzeitig eine Umfangsgeschwindigkeit aufgezwungen.

Mit der Ausbildung einer Lamelle haben sich DOMBROWSKI, HASSON und WARD [6.67], FRASER, EISENKLAM, DOMBROWSKI und HASSON [6.68] sowie DOMBROWSKI und JOHNS (6.69) theoretisch und experimentell befaßt. Aus diesen Untersuchungen ergab sich, daß die mittlere Lamellengeschwindigkeit mit genügender Genauigkeit gleich der mittleren Flüssigkeitgeschwindigkeit in der Düsenöffnung ist. Das heißt dann aber, daß die Filmdicke und die Ausbreitung der Lamelle durch die Kontinuitätsbedingung festgelegt sind. Bei genügend großer Austrittsgeschwindigkeit darf man davon ausgehen, daß sich die Lamelle mit zunehmendem Abstand von der Düse ausbreitet und dann zerfällt. Die Lamellendicke nimmt unter dieser Bedingung stetig ab, wobei Werte in der Größenordnung einiger μm erreicht werden können.

Eine Vorstellung vom Aussehen ebener Flüssigkeitslamellen liefert die schematisierte Darstellung in *Bild 6.25*. Nach Verlassen der Düse stellt sich zunächst eine glatte Lamelle ein, deren Schichtdicke δ mit zunehmendem Abstand von der

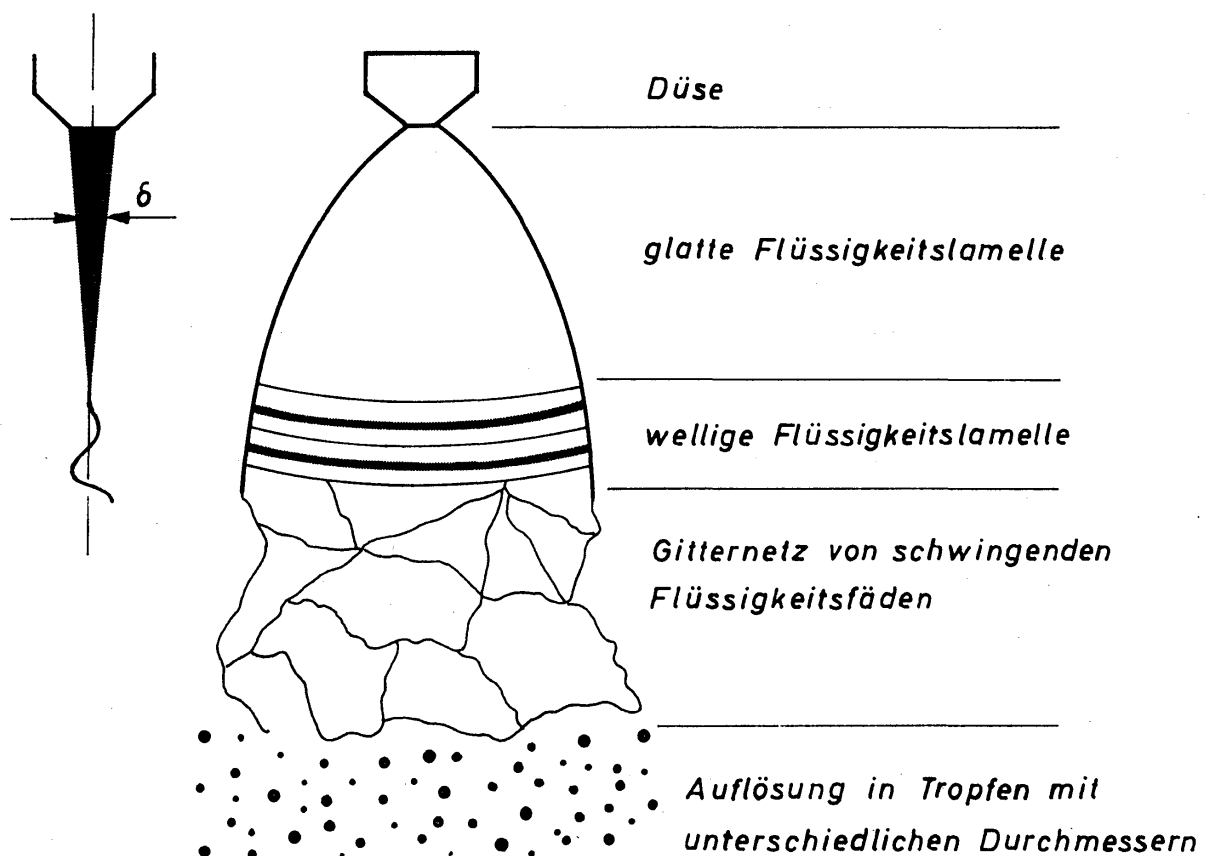


Bild 6.25. Schematische Darstellung einer ebenen Flüssigkeitslamelle

Düse abnimmt. Die Instabilität dieser Lamelle führt zur Ausbildung sinusförmiger Wellen, deren Anwachsen schließlich zu ihrer Auflösung und Bildung von Flüssigkeitsfäden führt. Der Durchmesser der Flüssigkeitsfäden ist größer als die Schichtdicke δ der Lamelle, aus der sie entstehen. Die Auflösung der Flüssigkeitsfäden in Tropfen erfolgt wiederum auf Grund einer Instabilität, und zwar in gleicher Weise wie der von RAYLEIGH [6.50] und WEBER [6.51] behandelte Strahlzerfall. Die Gleichung, die sich beim Lamellenzerfall für den mittleren Tropfendurchmesser ergibt, stimmt daher in formaler Hinsicht mit der von WEBER mitgeteilten Gl.(6.71) weitgehend überein:

$$\bar{d}_p = 1,75 d_F \left[1 + 3 \frac{\eta}{(\sigma \varrho_p d_F)^{1/2}} \right]^{1/6}. \quad (6.84)$$

Der nach SAUTER benannte Durchmesser \bar{d}_p ist durch Gl.(6.79) definiert worden. Unbekannt ist in Gl.(6.84) der Durchmesser der Flüssigkeitsfäden d_F , für den DOMBROWSKI und JOHNS [6.69] folgende theoretische Gleichung angeben:

$$d_F = 0,9614 \left(\frac{\sigma K}{w_L^2 \varrho_p} \right)^{1/3} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} \right)^{1/6} \left\{ 1 + 0,625 \left[\frac{K \eta_p^3 \varrho^4 w_L^7}{\varrho_p^2 \sigma^5} \right]^{1/3} \right\}^{1/5}. \quad (6.85)$$

Neben den bereits bekannten Größen bedeuten w_L die Lamellengeschwindigkeit und K (m^2) einen von verschiedenen Einflüssen abhängigen Düsenfaktor. Nach Angaben in den bereits genannten Untersuchungen [6.67 bis 6.69] läßt sich die Lamellengeschwindigkeit mit ausreichender Genauigkeit mittels des Widerstandsbeiwertes ζ_D der Düse berechnen.

$$w_L = \sqrt{2 \Delta p / (\varrho_p \zeta_D)}. \quad (6.86)$$

Mit Δp wird die Differenz aus den in der Düse und im Zerstäubungsraum herrschenden Drücken bezeichnet. Bei den verwendeten Düsen lag der Widerstandsbeiwert ζ_D zwischen 1,06 und 1,26. Im Vergleich dazu beträgt der Widerstandsbeiwert scharfkantiger Bohrungen im Bereich großer Reynoldszahlen etwa 1,7. Der für die Düsen kleinere Widerstandsbeiwert ist darauf zurückzuführen, daß die Form der Düsen der Strömung besser angepaßt ist. Unsicherheiten im Widerstandsbeiwert, die in der Größenordnung von $\pm 15\%$ liegen, wirken sich auf den mittleren Tropfendurchmesser nur mit $\pm 5\%$ aus und sind daher noch erträglich. Bei höheren Genauigkeitsansprüchen muß der Widerstandsbeiwert für jede Düse durch einen Versuch bestimmt werden.

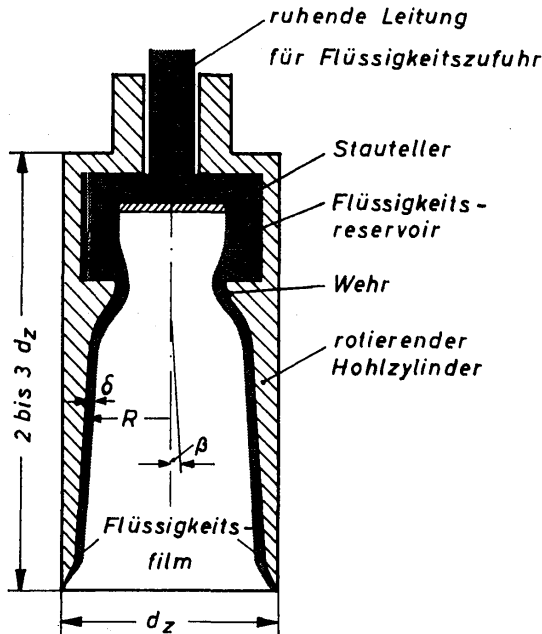
Ferner tritt in Gl.(6.85) die dimensionsbehaftete Größe K (m^2) auf, die sowohl von der Düsenform als auch von den Stoffwerten der Flüssigkeit und der Druckdifferenz abhängt. Die Größe von K sollte stets durch ein Experiment bestimmt werden. Bei den Versuchen von FRASER, EISENKLAM, DOMBROWSKI und HASSON [6.68] lag K zwischen $1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ und $3,15 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$.

Die Tropfenbildung aus konischen Lamellen ist noch nicht so gründlich untersucht worden wie die aus ebenen Lamellen. Für einen mittleren Tropfendurchmesser sind bislang nur grobempirische Gleichungen von sehr beschränkter Gültigkeit mitgeteilt worden [6.70] bis [6.73]. Da nach allen Untersuchungen der

Zerfall von konischen und ebenen Lamellen die gleichen charakteristischen Merkmale aufweist, sollte man annehmen dürfen, daß auch für den mittleren Tropfendurchmesser die gleiche Beziehung, nämlich Gl. (6.84) mit Gl. (6.85) gilt. In einem einzigen Experiment ist dann lediglich der Düsenfaktor K zu bestimmen, was aber auch für den Fall der ebenen Lamelle erforderlich ist.

6.74 Zerstäubung durch rotierende Hohlzylinder

Bei vielen Zerstäubungsaufgaben, wie beispielsweise der Brennstoffzerstäubung, wird eine über den Umfang möglichst gleichmäßige Tropfenverteilung gefordert. Mit den üblichen Zerstäuberdüsen läßt sich diese Forderung nicht in zufrieden-



stellender Weise erfüllen. Man hat daher den rotierenden Hohlzylinder, für den Bild 6.26 ein Beispiel zeigt, entwickelt. Grundlegende Untersuchungen über das Verhalten der Flüssigkeit innerhalb des rotierenden Zylinders und über die Tropfenentstehung haben HINZE und MILBORN [6.74], EMSLIE, BONNER und PECK [6.75] sowie FRASER, DOMBROWSKI und ROUTLEY [6.76 und 6.77] durchgeführt.

Bild 6.26. Schematische Darstellung eines rotierenden Hohlzylinders

Dem rotierenden Zylinder, dessen Durchmesser d_z und dessen Länge etwa 2 bis $3 d_z$ sein sollen, wird die Flüssigkeit durch ein ruhendes Rohr zugeleitet. Die Flüssigkeit prallt auf einen Stauteller und gelangt von hier in ein Flüssigkeitsreservoir, das dazu dienen soll, eine gleichmäßige Verteilung der Flüssigkeit über die Innenwand des Zylinders zu erzielen. Vom Reservoir strömt die Flüssigkeit über ein Wehr an die Innenwand, die um den Winkel β gegen die Vertikale geneigt ist. Der untere Rand der Innenwand läuft in eine scharfe Spitze aus. Ist die Zentrifugalbeschleunigung groß im Vergleich zur Erdbeschleunigung, dann läßt sich die Filmdicke δ der Flüssigkeit aus dem Gleichgewicht von Zentrifugal- und Reibungskraft berechnen. Nach EMSLIE, BONNER und PECK [6.75] gilt dann die Beziehung:

$$\delta = \left(\frac{3 \dot{V} \nu_p}{2 \pi r^2 \omega^2 \sin \beta} \right)^{1/3} \quad (6.87)$$

Definiert man eine Reynoldszahl gemäß

$$Re \equiv \frac{\dot{V}}{2 \pi r \nu_p}, \quad (6.88)$$

so erhält man:

$$\delta = \frac{1}{(\sin \beta)^{1/3}} \left(\frac{3 \nu_p^2}{r \omega^2} \right)^{1/3} Re^{1/3}. \tag{6.89}$$

In den letzten Gleichungen bedeuten \dot{V} den Volumstrom der Flüssigkeit, ν_p deren kinematische Viskosität, r den inneren Radius des Zylinders und $\omega = 2 \pi n$ die Winkelgeschwindigkeit mit n als Drehzahl

Die Gleichungen (6.87) und (6.89) gelten nur dann, wenn die Zentrifugalbeschleunigung $r \omega^2$ groß im Vergleich zur Erdbeschleunigung g ist. Daß die Schwerkraft vernachlässigt worden ist, erkennt man auch daran, daß $\delta = \infty$ für $\sin \beta = 0$ wird, und somit der Flüssigkeitsfilm an einer senkrechten Wand haftet, ohne abzufließen. Eine zu große Filmdicke ist in jedem Falle zu vermeiden, da sonst Wellen- und Schwallbewegungen auftreten können, die zu einer zeitlich und örtlich veränderlichen Filmdicke führen. Am unteren Rande des Hohlzylinders muß aber die Filmdicke unter allen Betriebsbedingungen konstant sein, damit eine möglichst gleichmäßige Tropfenverteilung über den Umfang erreicht wird. Die Vermutung, daß sich eine ungleichmäßig aufgebene Flüssigkeit auf dem Wege bis zum unteren Zylinderrand gleichmäßig verteilen wird, hat sich, wie Experimente zeigten, nicht bestätigt. Voraussetzung für die örtlich und zeitlich konstante Filmdicke am unteren Zylinderrand ist also eine sehr gleichmäßige Flüssigkeitsaufgabe und eine glatte Filmoberfläche.

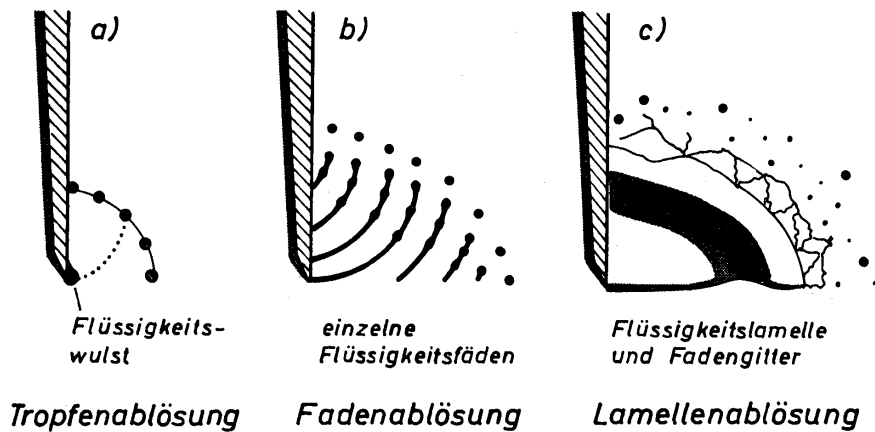


Bild 6.27. Flüssigkeitszerstäubung durch rotierende Hohlzylinder bei konstanter Drehzahl n und von a) bis e) ansteigendem Volumstrom \dot{V} ; Drehrichtung im Uhrzeigersinn

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ergeben sich die in *Bild 6.27* angedeuteten Formen der Tropfenbildung. Die Darstellungen a) bis c) gelten unter der Voraussetzung konstanter Drehzahl und steigendem Volumstrom \dot{V} . Die Rotation erfolgt im Uhrzeigersinn. Bei sehr kleinem Volumstrom bildet sich an der Außenseite der Zylinderunterkante gemäß *Bild a* ein ringförmiger Flüssigkeitswulst, aus dem unmittelbar die Tropfen entstehen. Bei gleichem Abstand der Tropfenbildungszentren über den Zylinderumfang kann man eine sehr gleichmäßige Tropfengröße erwarten. Mit zunehmendem Volumstrom löst sich der Wulst auf, und es bilden sich Flüssigkeitsfäden, die auf Grund ihrer Instabilität zu Tropfen

zerfallen. Bei sehr hohem Volumstrom entsteht schließlich die Flüssigkeitslamelle, die nach Übergang in den instabilen Zustand in ein Gitternetz schwingender Fäden zerfällt, aus denen die Tropfen entstehen. Die Lamellenbildung setzt ein, wenn die Weberzahl We größer wird als ein kritischer Wert We_L . Hierfür haben HINZE und MILBORN [6.74] eine empirische Gleichung aufgestellt, die sich in der Form

$$We_{kr} = 2,55 \left(\frac{\sigma d_z^3}{\rho_p \dot{V}^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\rho_p \sigma d_z}{\eta_p^2} \right)^{0,278} \quad (6.90)$$

schreiben läßt. Die Weberzahl ist definiert durch

$$We_{kr} \equiv \frac{\rho_p \omega_{kr}^2 d_z^3}{\sigma}, \quad (6.91)$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Löst man Gl.(6.90) nach der kritischen Drehzahl auf, so erhält man:

$$n_{kr} = 0,254 \frac{d_z^{1,14} \sigma^{1,473}}{\dot{V}^{1,667} \rho_p^{1,195} \eta_p^{0,278}} \quad (6.92)$$

Damit sich eine Lamelle ausbildet, muß die Drehzahl n größer als n_{kr} sein. Versuche von OCHMANN [6.78] haben bestätigt, daß das Einsetzen der Lamellenbildung durch Gl.(6.90) richtig wiedergegeben wird.

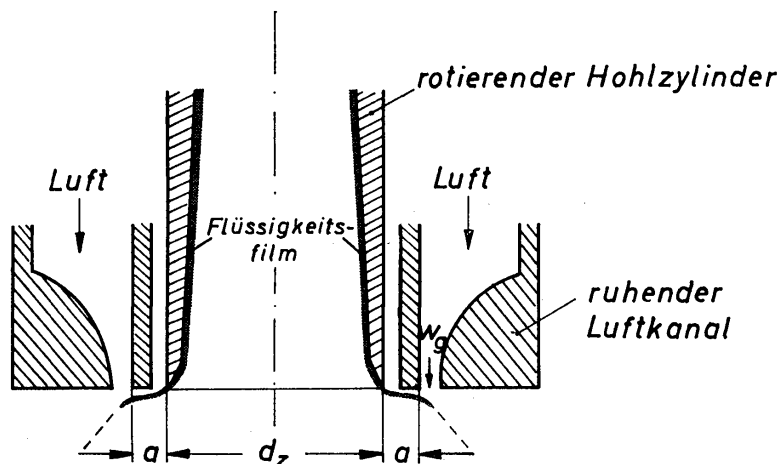


Bild 6.28. Anordnung für die Zerstäubung durch rotierende Hohlzylinder unter Einwirkung eines Gasstromes

In Bild 6.27 ist der Zerstäubungsvorgang dargestellt, wie er in einer Gasatmosphäre auftritt, in der nur Bewegungen vorhanden sind, die durch die Zerstäubung selbst hervorgerufen werden. Unter technischen Bedingungen findet die Zerstäubung indes sehr häufig unter der Einwirkung eines Gasstrahles statt. Für die in Bild 6.28 gezeigte Anordnung haben FRASER, DOMBROWSKI und ROUTHLEY [6.79] die Zerstäubung experimentell untersucht und für den mittleren Tropfendurchmesser nach SAUTER \bar{d}_p (m), definiert durch Gl.(6.79), die folgende halbempirische Gleichung aufgestellt:

$$\bar{d}_p = 6 \cdot 10^{-6} + 5,9 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\dot{V} \sigma}{\rho w_L^3 a} \right]^{1/2} \frac{\nu^{0,21}}{(1 + d_z/a)^{1/4}} \frac{1 + 0,065/M_{gf}^{3/2}}{\left(\frac{1}{2} w_{gf}^2 - w_{gf} + 1 \right)^{1/2}} \quad (6.93)$$

Hierin bedeuten σ (N/m) Oberflächenspannung, \dot{V} (m³/s) Volumstrom der Flüssigkeit, ρ (kg/m³) Dichte des Gases, w_L (m/s) Geschwindigkeit der Flüssigkeitslamelle, a (m) Abstand des Gasspaltes vom Zylinder (siehe *Bild 6.28*), d_z (m) Zylinderdurchmesser, $\nu_r = \nu_p/\nu_{\text{H}_2\text{O}}$ bezogene kinematische Viskosität, mit ν_p für die zerstäubte Flüssigkeit und mit $\nu_{\text{H}_2\text{O}}$ für Wasser bei gleicher Temperatur, $\dot{M}_{gf} = \dot{M}_g/\dot{M}$ Verhältnis der Massenströme mit \dot{M}_g für das Gas und \dot{M} für die Flüssigkeit und schließlich $w_{gf} = w_g/w_L$ Verhältnis der Geschwindigkeiten. Die Geschwindigkeit w_L der Flüssigkeitslamelle ist gleich der Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders:

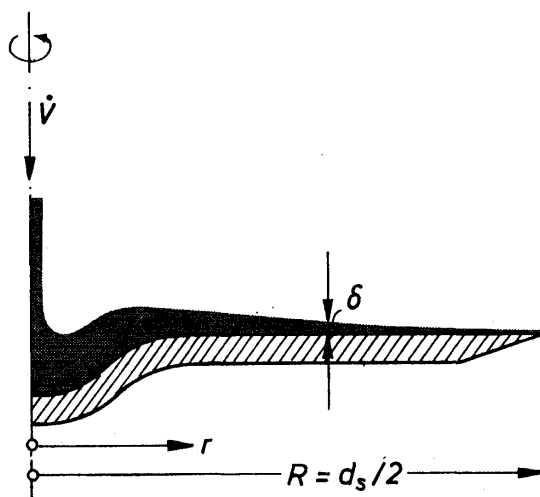
$$w_L = d_z \pi n. \quad (6.94)$$

Die Versuche führte man mit einem Zylinder von $d_z \approx 100$ mm durch, wobei w_g zwischen 100 und 300 m/s, \dot{M} zwischen 250 und 500 kg/h, \dot{M}_{gf} zwischen 0,17 und 9,6 und n zwischen 25 und 100 s⁻¹ geändert wurden. Die Versuche zeigten, daß sich eine sehr günstige Zerstäubung für $a \approx 5$ mm ergibt. Aus Gl. (6.93) geht hervor, daß der mittlere Tropfendurchmesser mit zunehmender Umfangsgeschwindigkeit w_L und Gasgeschwindigkeit w_g abnimmt, mit zunehmendem Volumstrom \dot{V} und ansteigender Viskosität ν_p der Flüssigkeit aber zunimmt. Ferner wird vorausgesetzt, daß der Gasstrom auf eine noch nicht im Zerfall befindliche Lamelle trifft.

Der Nachteil aller Zerstäubungsvorrichtungen besteht vor allem darin, daß der Volumstrom der Flüssigkeit um so niedriger ist, je kleiner der mittlere Tropfendurchmesser sein soll. Zur Überwindung dieses Nachteils hat SCHMIDT [6.80] einen bemerkenswerten Vorschlag gemacht. Danach ist der Hohlzylinder unten geschlossen und besitzt eine poröse Wand, durch die die Flüssigkeit auf Grund der Zentrifugalkraft hindurchtritt. Bei Beachtung bestimmter Betriebszustände ergeben sich bei diesem Zerstäuber besonders enge Tropfenspektren. Da die Poren der Zylinderwand sehr klein sind, lassen sich mit dieser Einrichtung nur sehr saubere Flüssigkeiten zerstäuben.

6.75 Zerstäubung durch rotierende Scheiben

Im einfachsten Falle hat die Scheibe die in *Bild 6.29* angegebene Form. In der



Mitte besitzt sie eine als Flüssigkeitsreservoir dienende Vertiefung. In Richtung zum äußeren Scheibenrand nimmt die Filmdicke stetig ab. Ihr Wert ist bereits häufiger berechnet worden.

Bild 6.29. Schema der Flüssigkeitsverteilung auf einer rotierenden Zerstäuberscheibe

Im Rahmen einer sehr bedeutsamen Untersuchung über die Zerstäubung ging BÄR [6.81] davon aus, daß der Strömungszustand des Films laminar ist und allein Reibungs- und Fliehkräfte an einem Flüssigkeitselement angreifen. Das Kräftegleichgewicht führt dann zu folgender Beziehung für die Filmdicke:

$$\delta = \left(\frac{3 \dot{V} \nu_p}{2\pi r^2 \omega^2} \right)^{1/3} . \quad (6.95)$$

Hierin bedeuten \dot{V} den Volumstrom der Flüssigkeit, ν_p deren kinematische Viskosität, r den örtlichen Radius und $\omega = 2\pi n$ die Winkelgeschwindigkeit mit n als Drehzahl. Mit Gl. (6.85) ergibt sich Übereinstimmung, wenn $\sin \beta = 1$ gesetzt wird.

Eine sehr gründliche Untersuchung über die Strömung auf der ebenen Zerstäuber-scheibe führte SIEMENS [6.82] durch. Er wendete dabei ein Verfahren an, das v. KÁRMÁN [6.83] vorgeschlagen und COCHRAN [6.84] bereits für die Untersuchung einer sehr ähnlichen Strömung angewendet hat. Die Strömung auf der rotierenden Scheibe, zu deren Berechnung die Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung zur Verfügung stehen, ist dreidimensional. Im einzelnen ergeben sich die drei Geschwindigkeitskomponenten und der Druck. Da jedoch bei dünnen Flüssigkeitsfilmen die vertikale Geschwindigkeitskomponente vernachlässigt werden darf, folgt sofort, daß der Druck konstant ist. Somit reduziert sich das ursprünglich aus vier gekoppelten Gleichungen bestehende System auf ein System mit zwei Gleichungen. SIEMENS hat nachgewiesen, daß eine solche Vereinfachung zulässig ist. Es verbleiben somit nur noch die Geschwindigkeitskomponenten w_r und w_φ für die radiale Richtung und für die Umfangsrichtung.

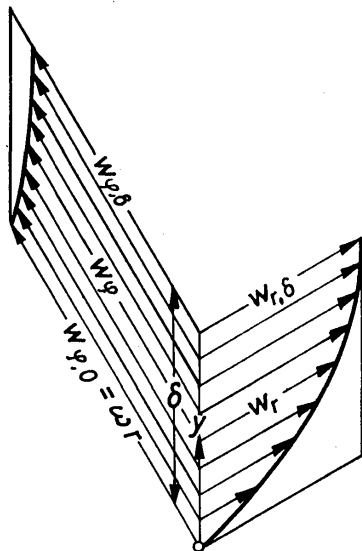


Bild 6.30 vermittelt zunächst eine Vorstellung vom qualitativen Verlauf der beiden Geschwindigkeitskomponenten, abhängig vom Scheibenabstand y . An der freien Oberfläche wird $y = \delta$. An dieser Stelle erreicht die radiale Komponente w_r ihren größten Wert $w_{r,\delta}$; an der Plattenoberfläche ist bei $y = 0$ auch $w_r = 0$.

Bild 6.30. Qualitative Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten w_r und w_φ für die radiale Richtung und die Umfangsrichtung vom Scheibenabstand

Da angenommen wird, daß an der freien Oberfläche keine Schubspannung auftritt, ist der Geschwindigkeitsgradient $dw_r/dy = 0$. Die Geschwindigkeitskomponente w_φ ist an der Oberfläche der Scheibe gleich deren Umfangsgeschwindigkeit ωr . Mit zunehmendem Wandabstand y wird w_φ kleiner und erreicht an der freien Oberfläche ihren niedrigsten Wert $w_{\varphi,\delta}$. Die Geschwindigkeitsabnahme ist aber nur sehr gering, und man kann mit guter Näherung $w_{\varphi,\delta}/\omega r = 1$ setzen.

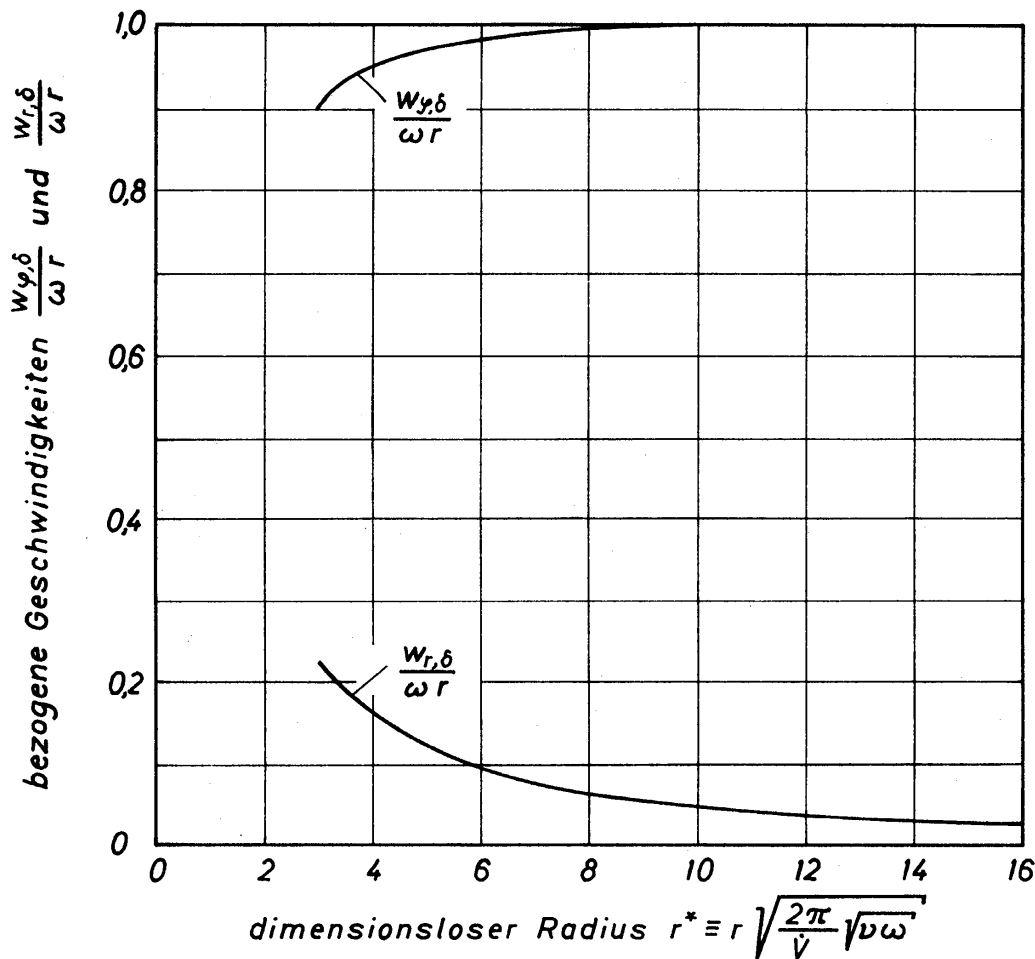


Bild 6.31. Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverhältnisse $w_{\varphi,\delta}/\omega r$ und $w_{r,\delta}/\omega r$ vom dimensionslosen Scheibenradius r

Das geht auch aus *Bild 6.31* hervor, in dem dieses Geschwindigkeitsverhältnis abhängig vom dimensionslosen Scheibenradius

$$r^* \equiv r \sqrt{\frac{2\pi}{V} \sqrt{\nu_p \omega}} \quad (6.96)$$

aufgetragen ist. Die Rechnungen haben ergeben, daß sich der Flüssigkeitsfilm für $r^* > 5$ in Umfangsrichtung nahezu mit der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe bewegt. In *Bild 6.31* ist ferner die bei $y = \delta$ auftretende bezogene radiale Geschwindigkeit $w_{r,\delta}/\omega r$ aufgetragen.

Aus den numerischen Rechnungen von SIEMENS [6.82] läßt sich für die Filmdicke δ die bereits von BÄR [6.81] mitgeteilte Gl. (6.95) ermitteln. Dieses Ergebnis war zu erwarten, nachdem festgestellt wurde, daß die Umfangsgeschwindigkeit der Flüssigkeit für $r^* \geq 5$ mit genügender Genauigkeit gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Platte ist. Da auf der Scheibe eine geordnete Strömung ohne zu große Relativgeschwindigkeiten in Umfangsrichtung angestrebt wird, gestattet die angegebene Grenze eine Abschätzung des Mindestdurchmessers ebener Zerstäuberscheiben. Mit $r^* = 5$ muß der Scheibendurchmesser nach Gl. (6.96) für eine nahezu schlupffreie Umfangsgeschwindigkeit am Scheibenrand mindestens die Größe

$$d_{s_{\min}} = 4 \frac{\sqrt{V}}{\sqrt[4]{\nu_p \omega}} \quad (6.97)$$

aufweisen. Bei gegebener Scheibe muß hiernach bei einer Verdopplung des Volumstromes die Scheibendrehzahl vervielfacht werden. Die Filmdicke verringert sich hierbei entsprechend Gl.(6.95) auf die Hälfte.

Nach Umformung von Gl.(6.95) erhält man die Gleichung für die Filmdicke in der folgenden Schreibweise:

$$\delta = \left(\frac{3 \nu_p^2}{r \omega^2} \right)^{1/3} Re_r^{1/3}. \quad (6.98)$$

Hierin ist $Re_r \equiv \dot{V}/(2 \pi r \nu_p)$ mit dem veränderlichen Radius r gebildet. Die Gl.(6.98) stimmt formal mit einer Gleichung für die Schichtdicke von an senkrechten Wänden herabrieselnden Flüssigkeitsfilmen überein, wenn man die Zentrifugalbeschleunigung $r \omega^2$ durch die Erdbeschleunigung g und den örtlichen Scheibenumfang $2 \pi r$ durch die Breite der senkrechten Wand ersetzt. Da die Strömung von Flüssigkeitsfilmen an senkrechten Wänden bereits sehr gründlich untersucht ist, wird man die dabei erzielten Ergebnisse auf die Filmströmung an rotierenden Scheiben zu übertragen versuchen. So wird man zunächst erwarten dürfen, daß Gl.(6.98) nur bis zu $Re_r = 400$ gilt. Dieses ist der Wert für die kritische Reynoldszahl, oberhalb welcher der Strömungszustand turbulent ist. In diesem Bereich gilt für die Filmdicke die Beziehung [6.85]:

$$\delta_t = 0,302 \left(\frac{3 \nu_p^2}{r \omega^2} \right)^{1/3} Re_r^{8/15}. \quad (6.99)$$

Für die mittleren Geschwindigkeiten der radialen Komponente ergeben sich bei laminarer Strömung die Beziehung

$$\bar{w}_r = \left(\frac{r \omega^2 \nu_p}{3} \right)^{1/3} Re_r^{2/3} \quad (6.100)$$

und bei turbulenter Strömung

$$\bar{w}_{r,t} = 3,315 \left(\frac{r \omega^2 \nu_p}{3} \right)^{1/3} Re_r^{7/15}. \quad (6.101)$$

Ferner ist bei laminarer Strömung

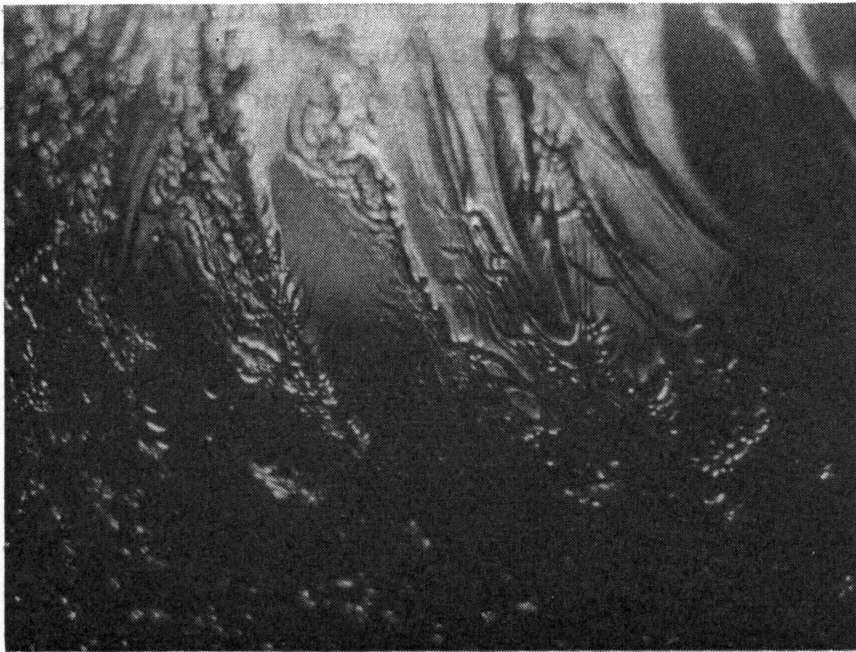
$$w_{r,\delta} = \frac{3}{2} \bar{w}_r. \quad (6.102)$$

Der Zusammenhang zwischen der dimensionslosen Koordinate r^* und der Reynoldszahl Re_r ist durch die Beziehung

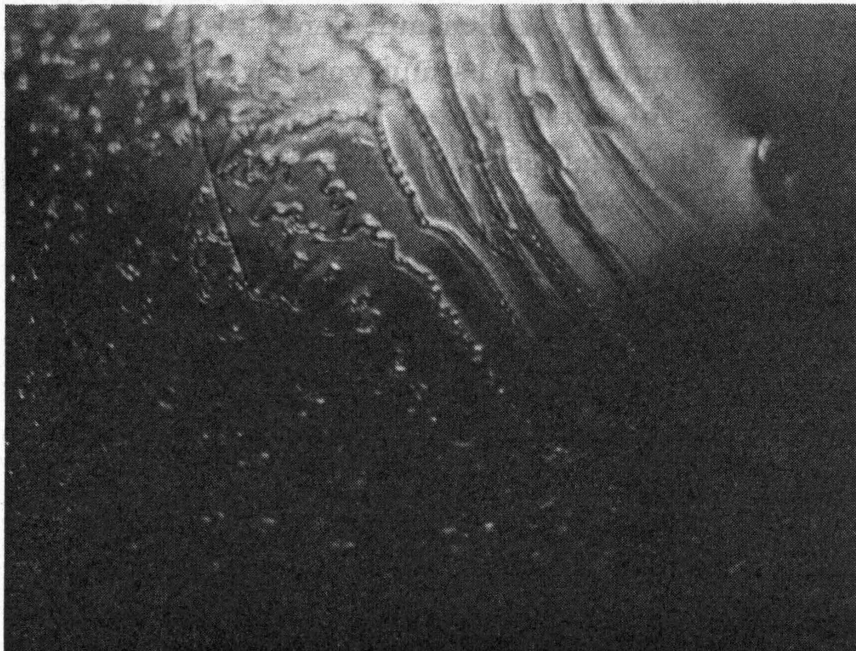
$$r^* = \left[\frac{r \omega^{1/2} \nu_p^{1/2}}{Re_r} \right]^{1/2} \quad (6.103)$$

gegeben.

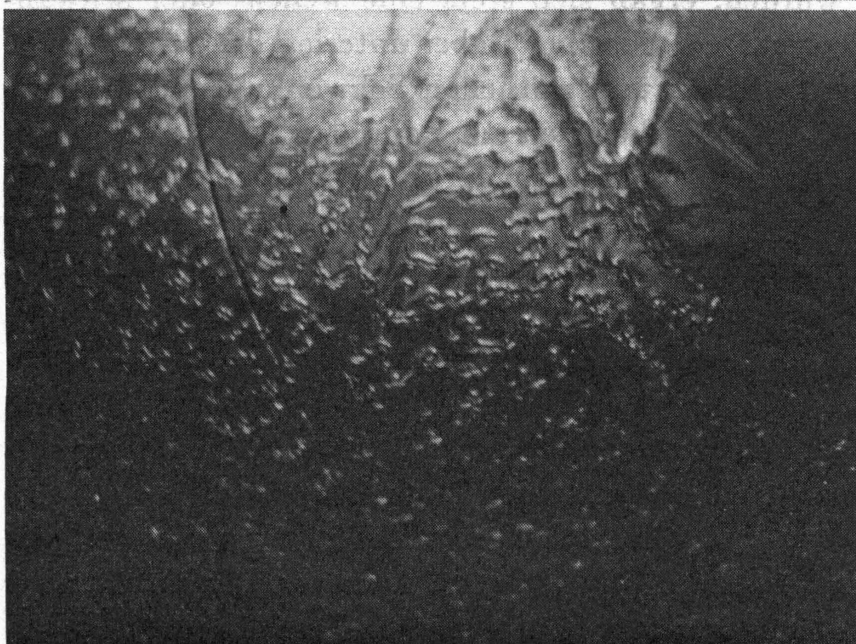
Die Bewegung des Flüssigkeitsfilms auf der Scheibe ist für die Tropfenbildung von maßgebender Bedeutung. Experimentelle Untersuchungen von SCHMID [6.86] ergaben, daß die Filmströmung bereits bei sehr kleinen Werten der Reynoldszahl wellig wird. Einigermaßen brauchbare photographische Aufnahmen ließen sich



a)



b)



c)

Bild 6.32 a bis c. Schwall- und Wellenbildung bei der Flüssigkeitsbewegung auf rotierenden Scheiben; Drehrichtung im Uhrzeigersinn (weitere Erläuterung im Text)

mit den verfügbaren Einrichtungen nur bei verhältnismäßig niedrigen Drehzahlen machen. Die bei den Versuchen verwendete Flüssigkeit war Wasser. In *Bild 6.32* sind drei Aufnahmen wiedergegeben, für die folgende Bedingungen gelten:

Bild	Volumstrom \dot{V} (m ³ /s)	Drehzahl n (s ⁻¹)	Scheibenradius R (m)
6.32 a	$47,2 \cdot 10^{-6}$	5,0	0,1
6.32 b	$27,8 \cdot 10^{-6}$	20,0	0,1
6.32 c	$13,9 \cdot 10^{-6}$	50,0	0,1

Die Drehrichtung der Scheibe erfolgt im Uhrzeigersinn. *Bild 6.32b* läßt die Entwicklung der Wellen im Verlauf der Flüssigkeitsbewegung von der Scheibenachse zum äußeren Rand besonders deutlich erkennen. Ausgehend von der Scheibenachse treten offensichtlich zunächst Wellen auf, deren Front eine ausgeprägte Kreisform besitzt. Mit zunehmendem Abstand von der Scheibenachse beginnen sich die Wellen aufzulösen. Die entstehenden Wellenfragmente weisen eine girlandenähnliche Form auf. Mit zunehmender Drehzahl und gleichzeitig abnehmendem Volumstrom erfolgt die Wellenauflösung gemäß *Bild 6.32c* bereits in geringerer Entfernung von der Scheibenachse. Aus *Bild 6.32a* geht schließlich besonders deutlich hervor, daß bei sehr großem Volumstrom und gleichzeitig sehr niedriger Drehzahl die Wellenbewegung in eine Schwallbewegung übergeht. Von ESPIG und HOYLE [6.87] sind im Bereich verhältnismäßig niedriger Reynoldszahlen die durch die Wellen bedingten Maximalwerte der Filmdicke gemessen worden. Dabei zeigte sich die große Ähnlichkeit mit den Gesetzen, die die wellige Filmströmung an senkrechten Wänden beschreiben. In diesem Zusammenhang sei auf die Ausführungen in Abschnitt 14.1 hingewiesen.

Unter allen Bedingungen, die bezüglich des Volumstromes und der Drehzahl in weiten Grenzen verändert wurden, ergab sich stets eine wellen- oder schwallförmige Flüssigkeitsbewegung auf der Scheibe. Dabei unterlag die Schichtdicke der Flüssigkeit sehr starken örtlichen und zeitlichen Schwankungen. Da diese Schwankungen unvermeidbar sind, ergeben sich am Rand der Scheibe auch notwendigerweise örtlich und zeitlich stark veränderliche Bedingungen für die Tropfenbildung. Das heißt also, daß man stets ein Durchmesserspektrum für die Tropfen erhält. Es ist unter praktisch üblichen Bedingungen nicht möglich, Tropfen von einheitlicher Größe zu erzeugen. Man kann sich immer nur darum bemühen, Betriebsbedingungen einzustellen, die zu einem möglichst engen Tropfenspektrum führen. Hierzu ist es erforderlich, daß sich am Scheibenrand eine möglichst geringe Dicke δ des Flüssigkeitsfilms einstellt. Aus Gl. (6.98) ergeben sich dann unmittelbar die praktisch zu treffenden Maßnahmen.

Die Auflösung der Flüssigkeit in Tropfen erfolgt bei Scheiben in nahezu der gleichen Weise wie bei Hohlzylindern (siehe *Bild 6.27*). Bei konstanter Drehzahl, aber zunehmendem Volumstrom der Flüssigkeit bilden sich die Tropfen zunächst un-

mittelbar am Scheibenrand (Bereich der Tropfenablösung), sodann lösen sie sich von Flüssigkeitsfäden ab (Bereich der Fadenablösung) und schließlich entstehen die Tropfen aus einer zerfallenen Flüssigkeitslamelle (Bereich der Lamellenablösung). GRAVE [6.88] hat umfangreiche Untersuchungen durchgeführt und Grenzen für die erwähnten Bereiche ermittelt. Die bei den Versuchen verwendeten Flüssigkeiten waren Wasser und zwei Öle, deren Stoffwerte in Tabelle 6.4 zusammengestellt sind.

Tabelle 6.4: Stoffwerte für die von GRAVE verwendeten Flüssigkeiten

Flüssigkeit	Temperatur °C	Dichte ρ_p kg/m ³	Oberflächen- spannung σ N/m	Viskosität	
				η_p Ns/m ²	$\nu_p = \eta_p / \rho_p$ m/s
Wasser	15	999	$7,34 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-3}$	$1,15 \cdot 10^{-6}$
Öl 1	25	880	$2,98 \cdot 10^{-2}$	$19,26 \cdot 10^{-3}$	$21,9 \cdot 10^{-6}$
Öl 2	25	871	$3,12 \cdot 10^{-2}$	$79,80 \cdot 10^{-3}$	$91,6 \cdot 10^{-6}$

Die bei den Versuchen verwendete ebene Zerstäuberscheibe hatte einen Durchmesser von $d_s = 0,19$ m. Bei weiteren Untersuchungen, die MONKERUD [6.89] durchführte, wurden Scheiben mit Durchmessern von $d_s = 0,13$ m und $0,28$ m verwendet.

Die von GRAVE und MONKERUD ermittelten Bereiche für die verschiedenen Formen der Flüssigkeitsauflösung sind in *Bild 6.33* angegeben. Als Koordinaten wurden Kombinationen dimensionsloser Kennzahlen verwendet, die erstmalig von HINZE und MILBORN [6.74] vorgeschlagen wurden. Mit

$$We \equiv \frac{\omega^2 d_s^3 \rho_p}{\sigma} \quad (6.104)$$

wird die Weberzahl, mit

$$Z \equiv \frac{\eta_p^2}{\rho_p \sigma d_s} \quad (6.105)$$

die Zerstäuberscheibe, die nach früheren Ausführungen als Verhältnis aus der Weberzahl und dem Quadrat einer geeigneten Reynoldszahl anzusehen ist, und mit

$$\dot{V}^* = \frac{\dot{V}^2 \rho_p}{\sigma d_s^3} \quad (6.106)$$

die Volumstromkennzahl bezeichnet. Ferner ist $K_F \equiv \rho_p \sigma^3 / g \cdot \eta_p^4$ die bereits früher verwendete Flüssigkeitskennzahl. Für die Koordinaten von *Bild 6.33* wurden derartige Kombinationen dieser Kennzahlen gewählt, daß sich die Grenzen zwischen der Faden- und Lamellenablösung und zum Zerstäuben als je eine Kurve ohne zusätzliche Parameter abbilden lassen.

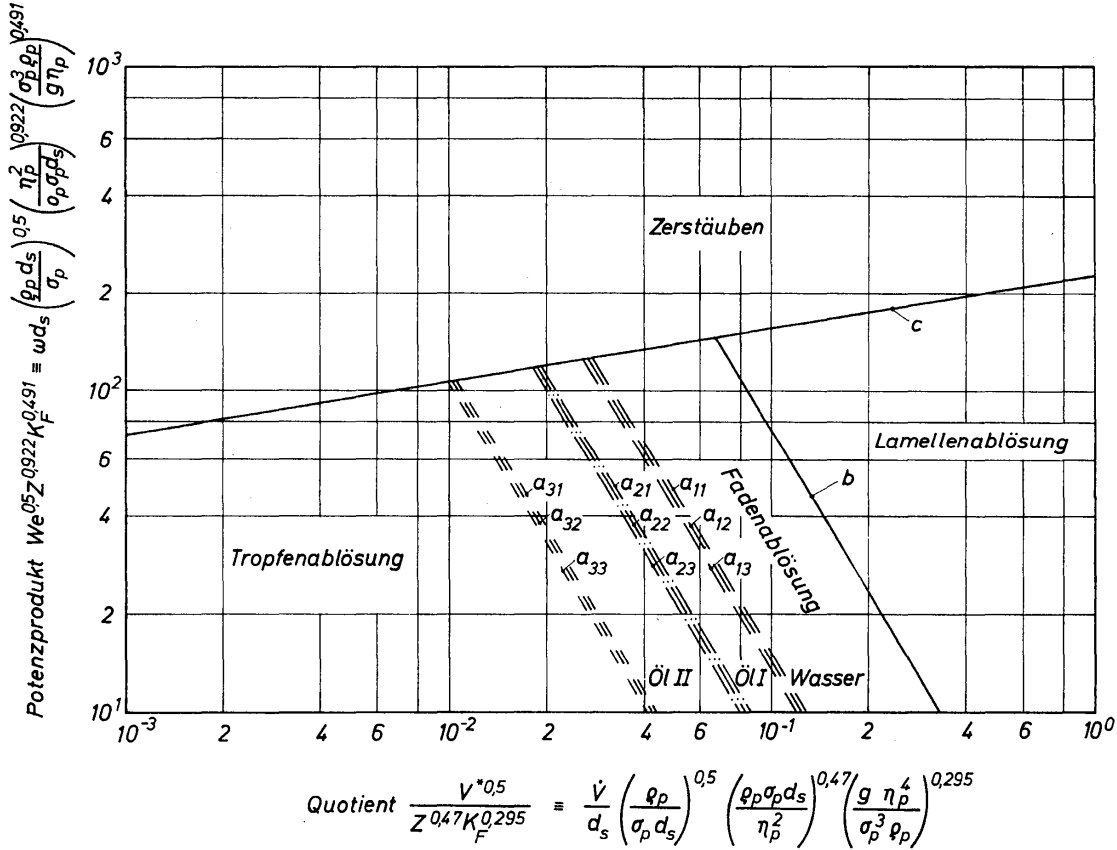


Bild 6.33. Darstellung der Ablösungsbereiche bei der Flüssigkeitszerstäubung mittels rotierender ebener Scheiben

Auf der Ordinate ist das Produkt $We^{0,5} Z^{0,92} K_F^{0,49}$ aufgetragen, das als wichtigste Größe die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n$ mit der Drehzahl n enthält. Die Abszisse wird durch den Quotienten $\dot{V}^{*0,5} / Z^{0,47} K_F^{0,295}$ gebildet, in dem der Volumstrom \dot{V} die wichtigste Betriebsgröße ist.

Die Grenzkurven a_{11} bis a_{33} trennen den Bereich der Tropfenablösung vom Bereich der Fadenablösung. Für diese Grenze fand GRAVE eine Beziehung, die sich in den vorliegenden Koordinaten wie folgt schreiben läßt:

$$We^{0,5} Z^{0,922} K_F^{0,491} = 4,53 \cdot 10^{-2} (\log K_F)^{1,77} Z^{0,14} \left(\frac{\dot{V}^{*0,5}}{Z^{0,47} K_F^{0,295}} \right)^{-\frac{5}{3}}. \quad (6.107)$$

Entsprechend dem Parameter, der durch das Potenzprodukt von $(\log K_F)$ und Z vor der Klammer gebildet wird, werden die an drei Scheiben mit drei Flüssigkeiten gefundenen Grenzen durch neun Kurven wiedergegeben.

Die Kurve b stellt die Grenze zwischen der Faden- und der Lamellenablösung dar. Für diese Grenze haben bereits HINZE und MILBORN [6.74] auf Grund von Untersuchungen an rotierenden Hohlzylindern die folgende Beziehung angegeben:

$$\dot{V}^* \cdot We^{0,6} Z^{0,167} = 1,77. \quad (6.108)$$

Die Messungen von GRAVE und MONKERUD zeigten, daß diese Beziehung auch für den Faden-Lamellen-Übergang an der ebenen Scheibe gilt. In den Koordinaten von Bild 6.33 lautet diese Gleichung

$$We^{0,5} Z^{0,92} K_F^{0,49} = 1,61 \left(\frac{\dot{V}^{*0,5}}{Z^{0,47} K_F^{0,295}} \right)^{-\frac{5}{3}}. \quad (6.109)$$

Der Übergang zum Zerstäuben schließlich erfolgt an der Kurve c , für welche die folgende Gleichung gilt:

$$We^{0,5} Z^{0,92} K_F^{0,49} = 2,3 \cdot 10^2 \left(\frac{\dot{V}^{*0,5}}{Z^{0,47} K_F^{0,295}} \right)^{1/6}. \quad (6.110)$$

Für die Dimensionierung ebener Zerstäuberscheiben ist diese Gleichung von außerordentlicher Bedeutung, gestattet sie doch die Auslegung der Scheiben für den angestrebten, günstigen Betriebszustand des Zerstäubers. Zur praktischen Anwendung wird sie nach der Zerstäubungsdrehzahl n_z aufgelöst, oberhalb der die Flüssigkeit direkt am Scheibenrand zerstäubt wird:

$$n_z = 36,6 g^{0,54} \dot{V}^{0,166} \rho_p^{0,203} \nu_p^{0,16} d_s^{-0,75} \sigma^{-0,203}. \quad (6.111)$$

Als Näherungsgleichung folgt hieraus:

$$n_z = 36,6 g^{0,54} \frac{\dot{V}^{1/6} \rho_p^{1/5} \nu_p^{1/6}}{d_s^{3/4} \sigma^{1/5}}. \quad (6.112)$$

Mit dem Volumstrom \dot{V} steigt die zum Zerstäuben erforderliche Drehzahl n_z schwach an, mit zunehmendem Scheibendurchmesser d_s dagegen wird sie kleiner. Sind der Volumstrom und die Flüssigkeit vorgegeben, so bleibt eine der beiden Größen n_z oder d_s frei verfügbar, und die Zerstäubung könnte in beliebiger Kombination mit einer kleinen Scheibe bei hohen Drehzahlen oder bei niedrigen Drehzahlen mit einer großen Scheibe erfolgen. Neben konstruktiven Erfordernissen sind indes durch die Strömungsverhältnisse auf der Scheibe in beiden Richtungen Grenzen gegeben. Die kleinen Durchmesser werden durch Schwallströmungen der Flüssigkeit begrenzt. Zuverlässige Beziehungen fehlen hierfür jedoch noch und erfordern weitere Versuche. Gleiches gilt für die bei der Vergrößerung des Scheibendurchmessers auftretende Grenze. Hier wird der Bereich des Zerstäubens durch die mangelnde Benetzung der Scheibe abgegrenzt. Das zeigt auch eine Betrachtung der Filmdicke δ_{zR} , die sich beim Zerstäuben am Scheibenrand einstellt. Aus den Gleichungen (6.95) und (6.111) erhält man hierfür

$$d_{zR} = 3,3 \cdot 10^{-2} g^{-0,36} \dot{V}^{0,232} \nu_p^{0,226} \sigma^{0,135} d_s^{-0,167} \rho_p^{-0,135}. \quad (6.113)$$

Bei festem Volumstrom \dot{V} nimmt hiernach die Filmdicke beim Zerstäuben mit der sechsten Wurzel aus dem Scheibendurchmesser d ab, so daß bei einer Vergrößerung der Scheibe der Flüssigkeitsfilm schließlich aufreißen kann und die Oberfläche nicht mehr vollständig benetzt ist.

Bei den mit Ölen durchgeführten Versuchen stellte sich heraus, daß die Grenzen zwischen benachbarten Ablösungsbereichen sehr scharf ausgeprägt sind. Aus diesem Grunde ist es gerechtfertigt, die in *Bild 6.33* dargestellten Grenzlinien anzugeben und durch Gleichungen auszudrücken. Bei den Versuchen mit Wasser hingegen ergaben sich stets begrenzte Übergangsbereiche. Für diesen Fall stellen die Grenzlinien Mittelwerte dar.

Um eine Vorstellung von der Flüssigkeitsauflösung in den verschiedenen Bereichen zu erhalten, sollen im folgenden noch einige photographische Aufnahmen besprochen werden.

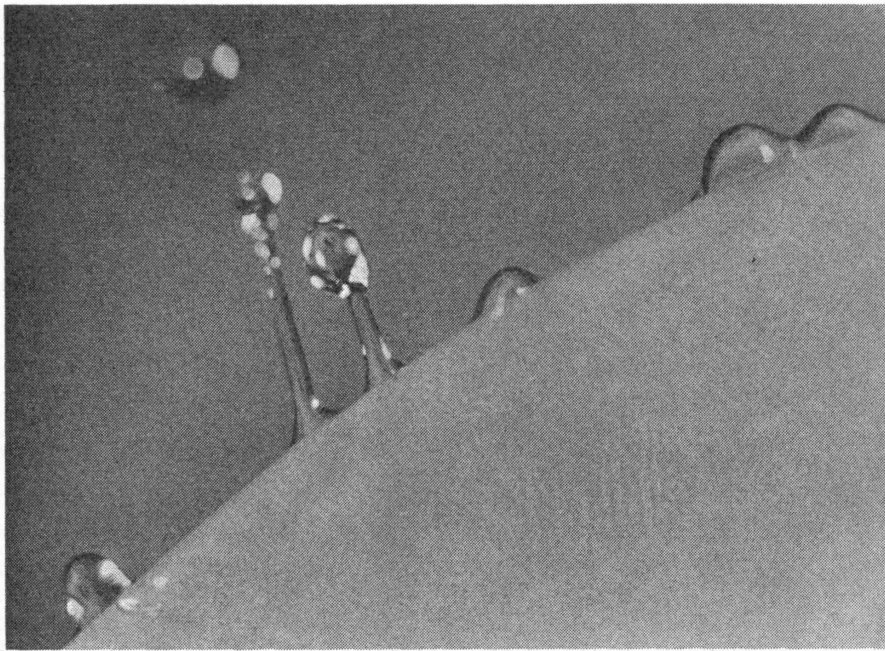
In *Bild 6.34* sind drei für die Tropfenbildung charakteristische Aufnahmen wiedergegeben. Die Aufnahmen *a* und *b* gelten für Wasser und die Aufnahme *c* für das Öl 2 (siehe Tabelle 6.4). Aus Aufnahme *c* geht besonders deutlich hervor, daß der sich ablösende Tropfen einen Flüssigkeitsfaden nachzieht. Bei genügend großer Entfernung des Tropfens von der Scheibenkante löst sich nicht nur der Tropfen von dem Faden, sondern auch der Faden vom Scheibenrand. Der losgelöste Faden zerfällt dann in eine Reihe kleinerer Tropfen, die Sekundärtropfen. Auf Grund dieser Zerfallvorgänge erhält man bei der Tropfenablösung ein sehr breites Durchmesserspektrum mit großem mittlerem Tropfendurchmesser.

Bild 6.35 zeigt einige für die Fadenablösung charakteristische Aufnahmen. Die Aufnahmen *a* und *b* gelten für Öl 2, wobei die Drehzahl von $n = 470$ auf 1100 min^{-1} erhöht wurde, und Aufnahme *c* gilt für Wasser. Zu der sehr gleichmäßigen Form der Fadenbildung kommt es nur bei Flüssigkeiten mit hoher Viskosität. Die Größe der entstehenden Tropfen ist sehr einheitlich. Durch Vergleich der Aufnahmen *a* und *b* erkennt man, daß die Fadenlänge mit steigender Drehzahl abnimmt. Die längsten Fäden beobachtet man unmittelbar nach dem Übergang von der Tropfen- zur Fadenablösung. Wird bei konstantem Volumstrom die Drehzahl stetig erhöht, dann tritt der Fadenzerfall in Tropfen bei Erreichen der Zerstäubungsdrehzahl n_z unmittelbar an der Scheibenkante auf. Da sich die Zahl der Fäden mit zunehmender Drehzahl erhöht, erhält man bei Erreichen von n_z auch die kleinsten Tropfen.

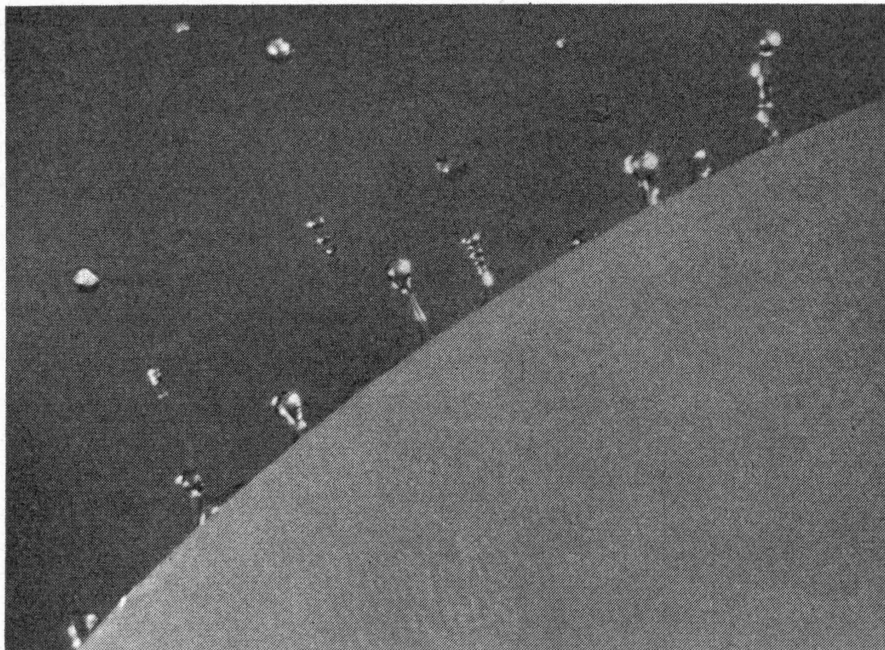
In *Bild 6.36* sind vier Aufnahmen von der Lamellenablösung zusammengestellt. Die Aufnahmen *a*, *b* und *c* gelten für Öl 2 und die Aufnahme *d* für Wasser. Aus Aufnahme *a*, die für $n = 270 \text{ min}^{-1}$ gilt, erkennt man sehr deutlich, daß sich am Lamellenrand ein Flüssigkeitswulst bildet, aus dem dann Fäden entstehen, die schließlich zu Tropfen zerfallen. Mit zunehmender Erhöhung der Drehzahl, $n = 840 \text{ min}^{-1}$ für Aufnahme *b* und $n = 2200 \text{ min}^{-1}$ für Aufnahme *c*, beginnt die Auflösung der Lamelle in geringerem Abstand von der Scheibe. Der Tropfendurchmesser wird dabei stetig kleiner.

Aus allen Beobachtungen und einer großen Zahl von photographischen Aufnahmen ging hervor, daß bei Lamellenablösung ein verhältnismäßig breites Tropfenspektrum auftritt. Bildeten sich die Tropfen auf Grund von Drehzahlerhöhung wieder am Scheibenrand, dann ergaben sich nicht nur kleinere Tropfen, sondern auch schmale Durchmesserspektren. Aus diesem Grunde sollte man sich also immer bemühen, den Betriebspunkt einer Zerstäuberscheibe so zu wählen, daß sich keine Lamelle bildet.

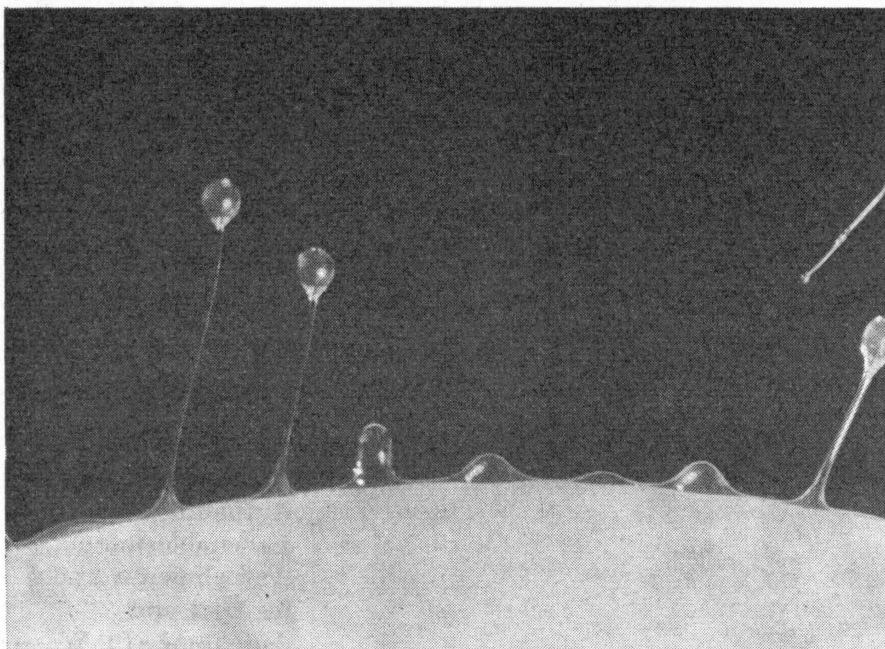
Grundsätzlich wird man davon ausgehen müssen, daß die Tropfen um so kleiner sind, je dünner der Flüssigkeitsfilm am Scheibenrand ist. Theoretisch ist es möglich, die Betriebsbedingungen durch geschickte Wahl des Scheibenradius, der Drehzahl und des Volumstromes so einzustellen, daß man beliebige Filmdicken erhält. Indes können Benetzungsschwierigkeiten dazu führen, daß ein bestimm-



a)

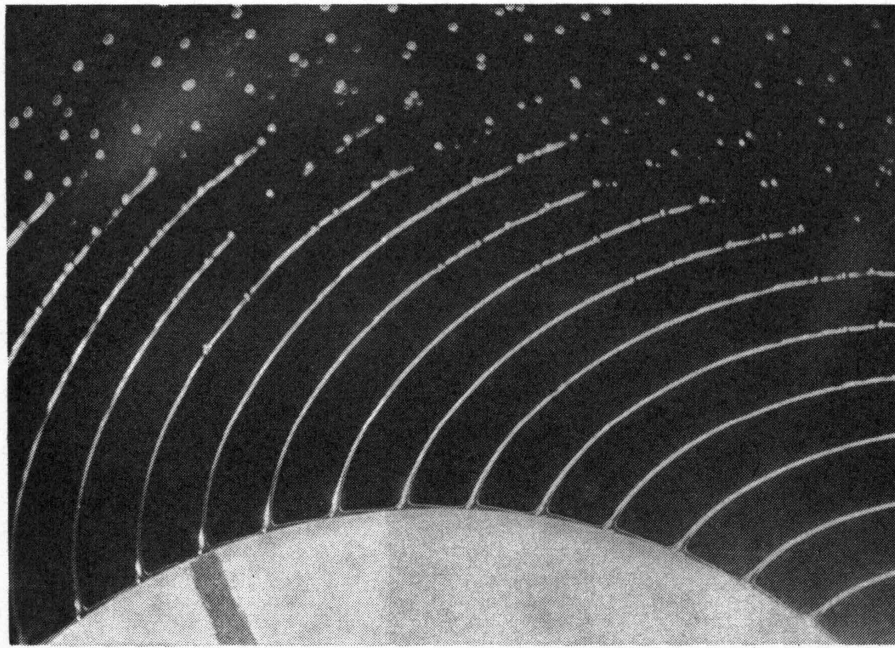


b)

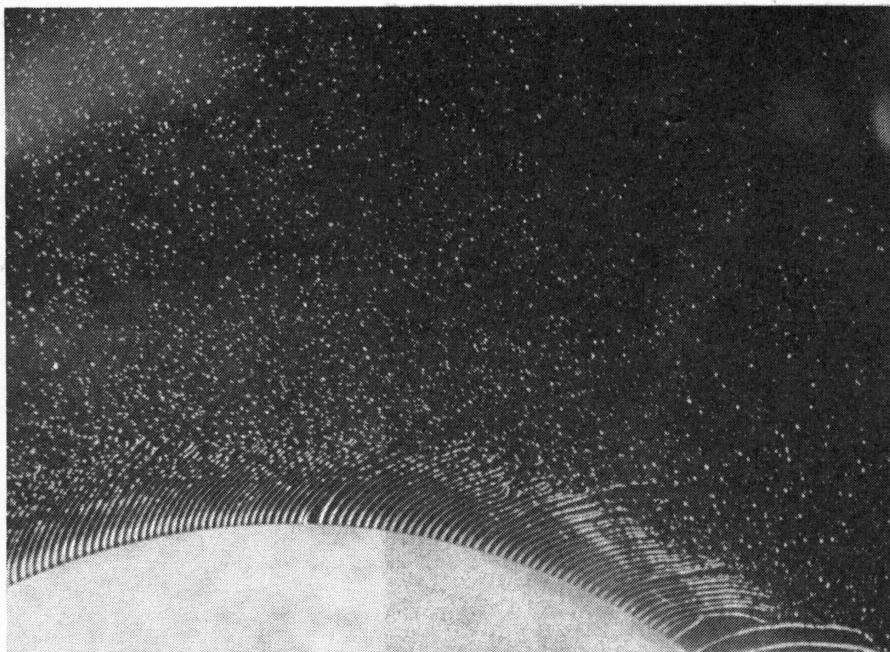


c)

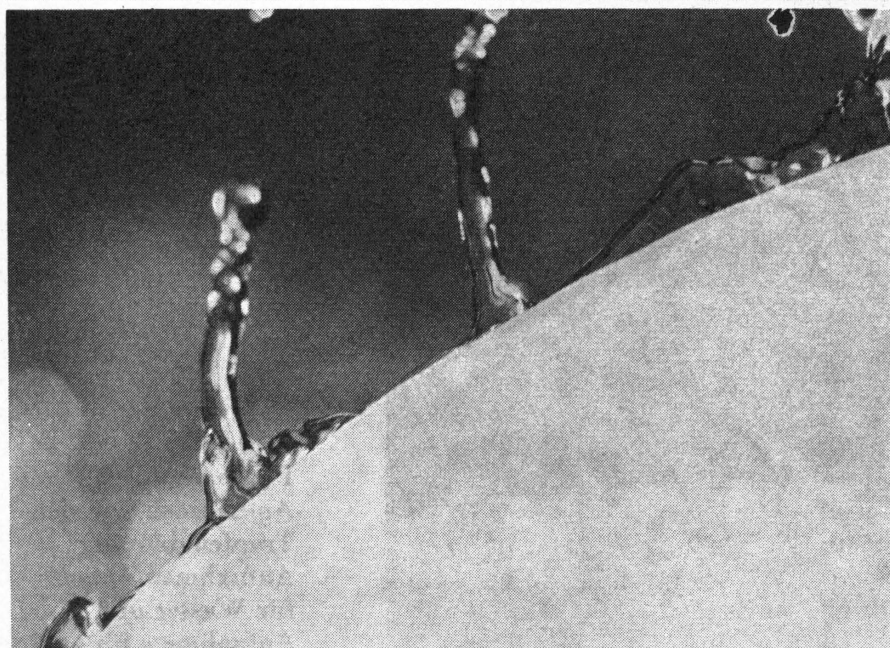
Bild 6.34
Photographische
Aufnahmen von der
Tropfenablösung;
Aufnahmen *a* und *b*
für Wasser und
Aufnahme *c* für Öl 2



a)

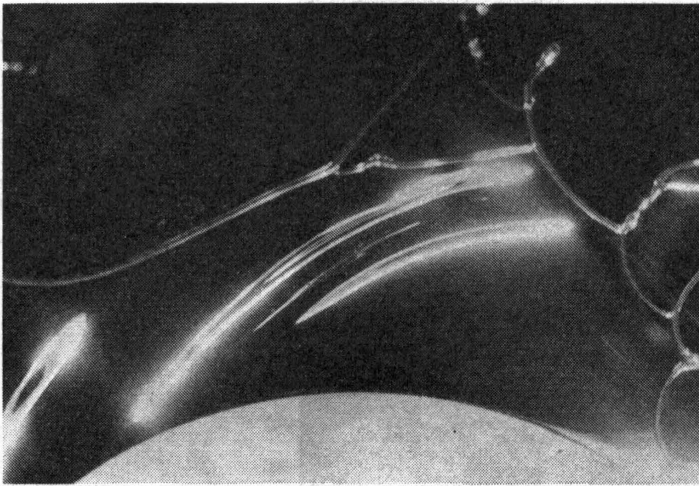


b)

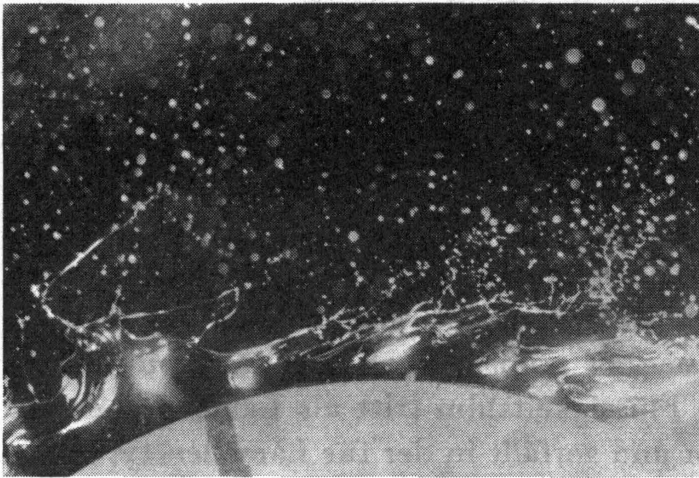


c)

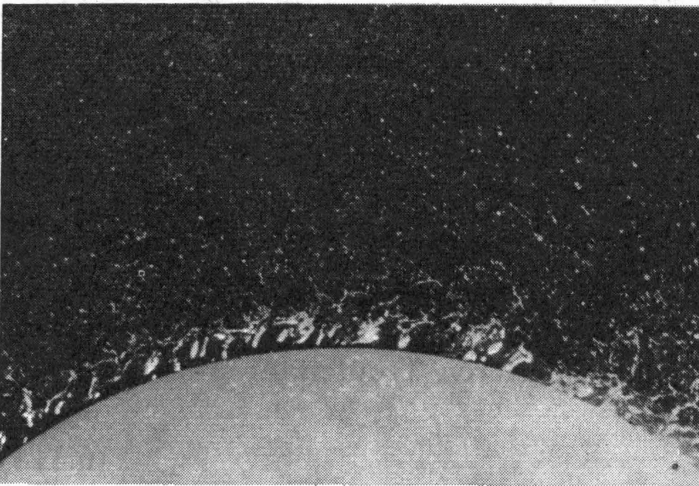
Bild 6.35
Photographische
Aufnahmen von der
Fadenablösung;
Aufnahmen *a* und *b*
für Öl 2 und
Aufnahme *c* für Wasser



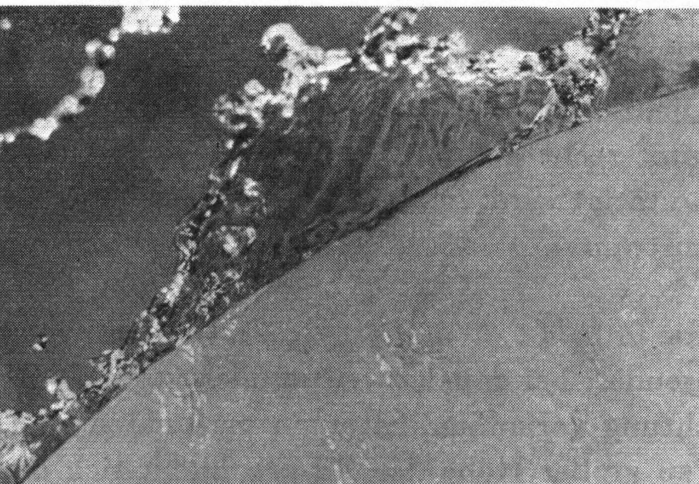
a)



b)



c)



d)

Bild 6.36
 Photographische Aufnahmen von der
 Lamellenablösung; Aufnahmen a,
 b und c für Öl 2 und Aufnahme d
 für Wasser

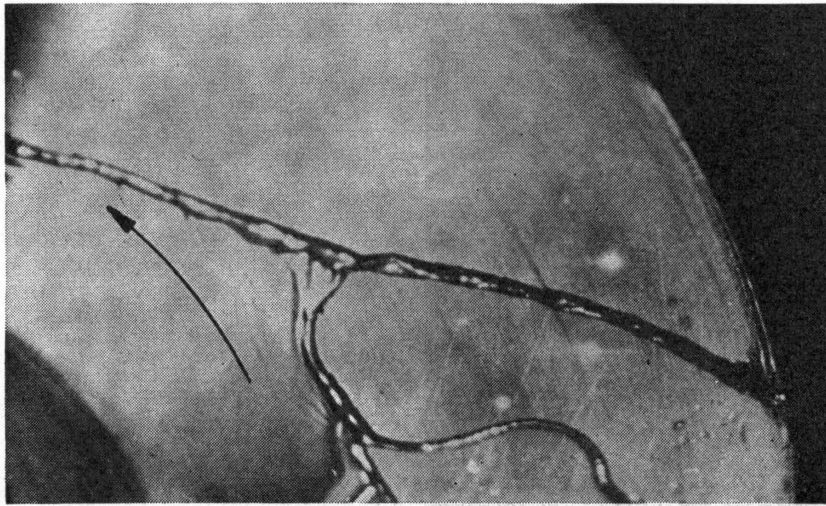


Bild 6.37. Photographische Aufnahme von der Ausbildung von Flüssigkeitsstrahlen

ter unterster Wert für die Filmdicke nicht unterschritten werden kann. Bei mangelnder Benetzung zerreißt der Flüssigkeitsfilm auf der Scheibe, und es treten einzelne Flüssigkeitsstrahlen auf, die in sehr große Tropfen zerfallen. In *Bild 6.37* ist eine photographische Aufnahme wiedergegeben, die die Strahlenbildung auf einer Scheibe zeigt. Sind die Betriebsbedingungen so gewählt worden, daß die Filmdicke am Scheibenrand noch einen zu großen Wert hat, dann bilden sich entweder Flüssigkeitsfäden oder der Flüssigkeitsfilm tritt als Lamelle über den Scheibenrand hinaus in den Gasraum und zerfällt in der für Lamellen typischen Form. Die günstigsten Bedingungen für die Erzeugung von Tropfen mit kleinstem Durchmesser ergeben sich dann, wenn die Tropfenbildung unmittelbar am Scheibenrand erfolgt. Das heißt aber, daß man bestrebt sein sollte, an der unteren Grenze des Betriebsbereiches zu arbeiten. Diese von den Benetzungseigenschaften abhängige Grenze ist noch nicht bekannt. Sie muß für jede zu zerstäubende Flüssigkeit durch Versuche bestimmt werden.

Für die Tropfendurchmesser sind bereits verschiedene Gleichungen bekanntgeworden [6.70, 6.81, 6.90, 6.91]. Erwähnt sei hier die von FRASER und EISENKLAM [6.70] mitgeteilte Gleichung für den mittleren Tropfendurchmesser:

$$\bar{d}_p \text{ [m]} = 0,425 \left(\frac{\sigma}{n^2 R \rho_p} \right)^{1/2} \quad (6.114)$$

Hierin sind σ (kg/s²) die Oberflächenspannung, n (s⁻¹) die Drehzahl, R (m) der Scheibenradius und ρ_p (kg/m³) die Dichte der Flüssigkeit. Der nach Gl. (6.114) berechnete Tropfendurchmesser stimmt recht gut mit Meßwerten von SCHMID [6.86] überein, was durch *Bild 6.38* bestätigt wird. SCHMID führte seine Versuche mit Wasser durch, wobei der Volumstrom $\dot{V} = 13,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} = 50 \text{ l/h}$ und $R = 0,1 \text{ m}$ betragen.

Neben der einfachen Scheibenform, die in *Bild 6.29* dargestellt ist, werden häufig auch solche Scheibenzerstäuber verwendet, bei denen zwei parallel angeordnete Kreisscheiben durch in radialer Richtung verlaufende Rippen verbunden sind. Bei ausreichender Länge und nicht zu großer Höhe der Rippen bildet sich der

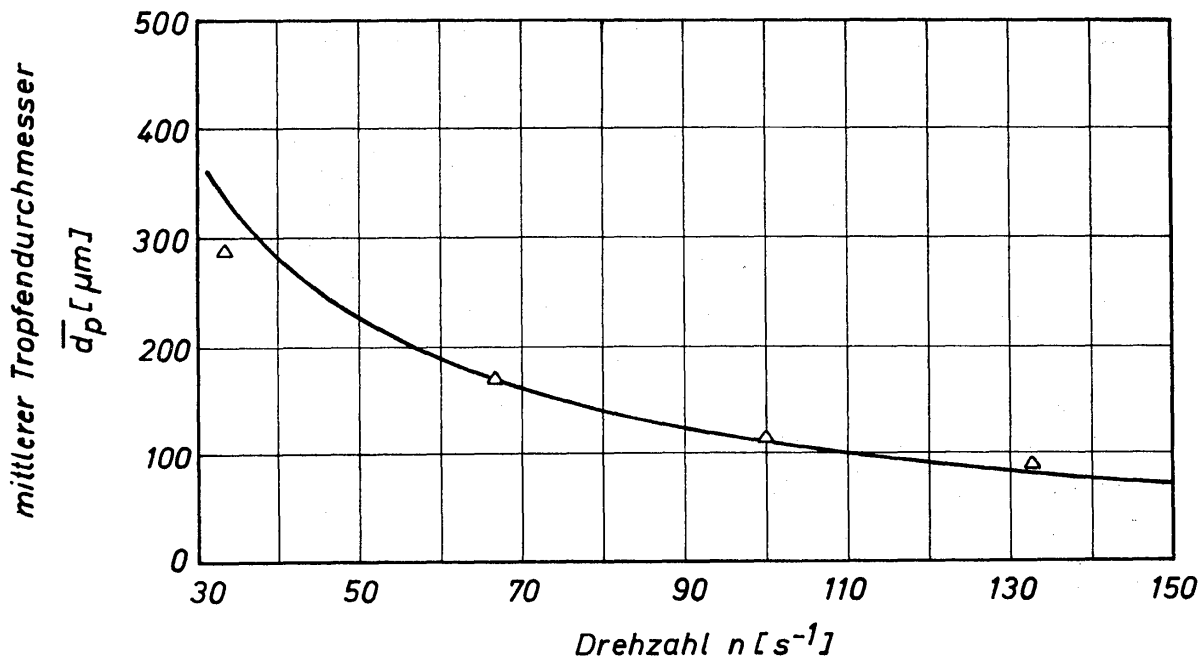


Bild 6.38. Abhängigkeit des mittleren Tropfendurchmessers von der Drehzahl; Meßwerte von SCHMID [6.86], Kurve nach Gl.(6.114)

Flüssigkeitsfilm vornehmlich an der Rippenoberfläche aus. Die Einhaltung der für die Zerstäubung günstigsten Betriebsbedingungen ist bei berippten Scheiben noch schwieriger als bei ebenen Scheiben. Untersuchungen über die Zerstäubung mittels Rippenscheiben haben insbesondere MARSHALL und Mitarbeiter [6.92] bis [6.95] durchgeführt. Es sei nochmals betont, daß ein unbefriedigendes Zerstäubungsergebnis fast immer darauf zurückzuführen ist, daß die Scheiben außerhalb des günstigsten Zerstäubungsbereiches betrieben werden.

Die Zerstäubung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten mittels rotierender Scheiben ist bislang kaum untersucht worden. Die Ergebnisse einige Experimente deuten jedoch darauf hin, daß kein wesentlicher Unterschied zwischen der Zerstäubung Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten besteht [6.89]. Das ist wahrscheinlich dadurch bedingt, daß die Schubspannung beim Zerstäuben nicht die entscheidende Einflußgröße ist. Darüber hinaus darf man vermuten, daß sich die nicht-Newtonschen Flüssigkeiten wegen der hohen absoluten Schergefälle in ihrem Verhalten den Newtonschen Flüssigkeiten wieder annähern. Hingewiesen sei in diesem Zusammenhang auf eine Arbeit von VACHAGIN, ZINNATULIN und TYABIN [6.96], in welcher die Filmströmung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten auf rotierenden Körpern theoretisch untersucht wurde.

6.8 Bewegung von Tropfen

6.81 Widerstand von Tropfen

Betrachtet wird der Widerstand von Tropfen, die sich innerhalb eines ruhenden flüssigen Mediums bewegen. Die den Tropfen bildende Phase bezeichnet man häufig als die diskontinuierliche und die umgebende als die kontinuierliche Phase.

Zwischen der kontinuierlichen und diskontinuierlichen Phase sei ein Stoffaustausch ausgeschlossen. Eine Bewegung der kontinuierlichen Phase ist nur soweit zulässig, als sie durch die aufsteigenden oder absinkenden Tropfen hervorgerufen wird. Diese Bewegungen sind örtlich begrenzt. Eine von außen aufgezwungene Bewegung der kontinuierlichen Phase liegt also nicht vor. Damit kann man Einflüsse auf den Tropfenwiderstand, die aus der Bewegung der kontinuierlichen Phase herrühren, außer acht lassen. Weiterhin wird zunächst vorausgesetzt, daß nur die Bewegung einzelner Tropfen betrachtet wird, die unbeeinflusst von Gefäßwänden erfolgt.

Zur dimensionslosen Darstellung des Strömungswiderstandes W verwendet man den durch Gl. (6.34) definierten Widerstandsbeiwert $\zeta \equiv (W/F)/(\rho w_s^2/2)$. Hierin sind w_s die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit des Tropfens, ρ die Dichte der kontinuierlichen Phase und F die größte Querschnittsfläche des Tropfens, senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung. Diese Fläche wird auch Spantfläche genannt. Da der Tropfen bei veränderlicher Sinkgeschwindigkeit w_s seine Form und somit auch seine Spantfläche F ändert, vereinbart man, daß $F = d_p^2 \pi/4$ ist, wobei d_p den Durchmesser einer volumgleichen Kugel bedeutet. Diese Vereinbarung ist deshalb sinnvoll, weil Tropfen mit sehr kleinem Volumen stets Kugelform besitzen. Abweichungen von der Kugelform treten erst bei größeren Tropfen auf.

Die Größe des Widerstandsbeiwertes ζ muß im allgemeinen experimentell bestimmt werden. Zu dem Zweck mißt man die Sink- bzw. die Steiggeschwindigkeit w_s der Tropfen. Mittels der aus Gl. (6.33) folgenden Beziehung

$$\zeta = \frac{4}{3} \left| \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho} \right) \right| \frac{g d_p}{w_s^2} \quad (6.115)$$

ist es dann möglich, ζ zu berechnen. Diese Berechnungsgleichung für ζ ist für alle auftretenden Tropfenformen gültig.

Verhalten sich die Tropfen wie starre Kugeln, dann zeigen Theorie und Experiment, daß der Widerstandsbeiwert ζ allein eine Funktion der durch Gl. (6.39) definierten Reynoldszahl $Re_s \equiv |w_s| d_p/\nu$ ist. Von diesem Zusammenhang wird Gebrauch gemacht, um einen ersten Überblick über die im Schrifttum bekanntgewordenen Meßwerte zu erhalten. Angaben zu diesen Meßwerten sind in *Tabelle 6.5* zusammengestellt. Bei der Mehrzahl der Versuche wurde als kontinuierliche Phase Wasser verwendet, während die diskontinuierliche Phase verändert wurde, so daß sich hierfür sehr unterschiedliche Werte für die Dichte ρ_p und Viskosität ν_p ergaben. Bei den verwendeten Systemen änderte sich die Grenzflächenspannung σ zwischen den Grenzen $3,00 \cdot 10^{-4}$ N/m und $4,44 \cdot 10^{-2}$ N/m, mithin über etwa zwei Zehnerpotenzen. Weiterhin sind in *Tabelle 6.5* die Werte der erweiterten Flüssigkeitskennzahl $K_F \rho / |\rho - \rho_p|$, die für jede Meßreihe in den *Bildern 6.39* und *6.41* bis *6.43* verwendeten Zeichen und die Schriftumszitate vermerkt. Die Flüssigkeitskennzahl $K_F \equiv \sigma^3 \rho / g \eta^4$ ist bereits durch Gl. (6.44) definiert worden.

Tabell 6.3. Angaben zu den Messwerten für die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit von Tropfen

Nr.	Kontinuierliche Phase		Diskontinuierliche Phase			Systemwerte		Zeichen in Bild 6.39 und 6.41 bis 6.43	Zitat	
	Stoff	Dichte ρ (kg/m ³)	Viskosität η (kg/m s)	Stoff	Dichte ρ_p (kg/m ³)	Viskosität η_p (kg/m s)	σ (N/m)			$K_F \frac{\rho}{ \rho - \rho_p }$
1	Wasser	997,0	$8,960 \cdot 10^{-4}$	Tetrabromäthan	2953,9	$9,464 \cdot 10^{-3}$	$3,62 \cdot 10^{-2}$	$3,81 \cdot 10^9$	±	[6.97]
2	Wasser	997,0	$8,960 \cdot 10^{-4}$	Tetrachlorkohlenstoff	1584,3	$9,296 \cdot 10^{-4}$	$4,16 \cdot 10^{-2}$	$1,93 \cdot 10^{10}$	■	[6.97]
3	Wasser	997,0	$8,960 \cdot 10^{-4}$	Chlorbenzol	1100,8	$7,625 \cdot 10^{-4}$	$3,54 \cdot 10^{-2}$	$6,78 \cdot 10^{10}$	○	[6.97]
4	Wasser	997,0	$8,960 \cdot 10^{-4}$	Äthylchloracetat	1145,1	$1,101 \cdot 10^{-3}$	$1,46 \cdot 10^{-2}$	$3,31 \cdot 10^9$	□	[6.97]
5	Wasser	997,0	$8,960 \cdot 10^{-4}$	Nitrotoluol	1157,8	$2,093 \cdot 10^{-3}$	$2,66 \cdot 10^{-2}$	$1,83 \cdot 10^{10}$	■	[6.97]
6	Wasser	997,0	$8,960 \cdot 10^{-4}$	Tetrachloräthan	1581,3	$1,502 \cdot 10^{-3}$	$3,13 \cdot 10^{-2}$	$8,33 \cdot 10^9$	○	[6.97]
7	Wasser	997,5	$1,140 \cdot 10^{-3}$	Benzol	887,0	$6,8 \cdot 10^{-4}$	$3,00 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{10}$	○	[6.98]
8	Wasser	998,6	$1,080 \cdot 10^{-3}$	Kerosin	807,1	$1,47 \cdot 10^{-3}$	$4,04 \cdot 10^{-2}$	$2,59 \cdot 10^{10}$	●	[6.98]
9	Wasser	997,5	$1,060 \cdot 10^{-3}$	SAE 10 W-Öl	865,0	$7,21 \cdot 10^{-2}$	$1,85 \cdot 10^{-2}$	$3,81 \cdot 10^9$	○	[6.98]
10	Wasser	998,2	$1,000 \cdot 10^{-3}$	Nonylalkohol	824,2	$1,62 \cdot 10^{-2}$	$4,90 \cdot 10^{-3}$	$6,89 \cdot 10^7$	○	[6.98]
11	Wasser	970,5	$1,560 \cdot 10^{-3}$	Butylalkohol	866,0	$2,78 \cdot 10^{-3}$	$6,00 \cdot 10^{-4}$	$3,35 \cdot 10^4$	✕	[6.98]
12	Furfurol	1145,0	$1,340 \cdot 10^{-3}$	Wasser	1011,0	$9,60 \cdot 10^{-4}$	$1,50 \cdot 10^{-3}$	$1,04 \cdot 10^6$	▼	[6.98]
13	Wasser	960,0	$1,450 \cdot 10^{-3}$	Methyläthylketon	837,0	$6,00 \cdot 10^{-4}$	$3,00 \cdot 10^{-4}$	$4,68 \cdot 10^3$	■	[6.98]
14	wäßrige Sukrose (20%)	1060,0	$1,390 \cdot 10^{-3}$	Benzol	872,0	$5,90 \cdot 10^{-4}$	$3,01 \cdot 10^{-2}$	$4,45 \cdot 10^9$	▽	[6.98]
15	Wasser	994,7	$9,300 \cdot 10^{-4}$	Methylisobutylketon	815,5	$6,00 \cdot 10^{-4}$	$9,80 \cdot 10^{-3}$	$7,22 \cdot 10^7$	○	[6.98]
16	Wasser	997,8	$9,500 \cdot 10^{-4}$	Pentachloräthan	1674,0	$2,03 \cdot 10^{-3}$	$4,24 \cdot 10^{-2}$	$1,39 \cdot 10^{10}$	■	[6.98]
17	Wasser	998,0	$9,500 \cdot 10^{-4}$	Heptylsäure	920,0	$4,27 \cdot 10^{-3}$	$6,90 \cdot 10^{-3}$	$5,28 \cdot 10^8$	◇	[6.98]
18	Wasser	997,3	$8,968 \cdot 10^{-4}$	Tetrabromäthan	2947,4	$9,289 \cdot 10^{-3}$	$3,59 \cdot 10^{-2}$	$3,73 \cdot 10^9$	+	[6.99]
19	Wasser	996,6	$8,968 \cdot 10^{-4}$	Dibromäthan	2154,1	$1,585 \cdot 10^{-3}$	$3,19 \cdot 10^{-2}$	$4,39 \cdot 10^9$	◆	[6.99]
20	Wasser	997,0	$8,946 \cdot 10^{-4}$	Tetrachloräthylen	1614,3	$8,903 \cdot 10^{-4}$	$4,44 \cdot 10^{-2}$	$2,25 \cdot 10^{10}$	○	[6.99]
21	Wasser	995,7	$7,797 \cdot 10^{-4}$	Tetrachlorkohlenstoff	1577,0	$8,702 \cdot 10^{-4}$	$4,06 \cdot 10^{-2}$	$3,14 \cdot 10^{10}$	■	[6.99]
22	Wasser	997,1	$8,958 \cdot 10^{-4}$	Brombenzol	1488,1	$1,072 \cdot 10^{-3}$	$3,79 \cdot 10^{-2}$	$1,75 \cdot 10^{10}$	▲	[6.99]
23	Wasser	997,7	$8,814 \cdot 10^{-4}$	Äthylbromid	1447,8	$4,908 \cdot 10^{-4}$	$3,00 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{10}$	△	[6.99]
24	Wasser	997,0	$8,996 \cdot 10^{-4}$	Nitrotoluol	1157,6	$2,036 \cdot 10^{-3}$	$2,65 \cdot 10^{-2}$	$1,80 \cdot 10^{10}$	■	[6.99]
25	Wasser	997,2	$8,835 \cdot 10^{-4}$	Nitrobenzol	1194,7	$1,738 \cdot 10^{-3}$	$2,40 \cdot 10^{-2}$	$1,18 \cdot 10^{10}$	□	[6.99]
26	Wasser	996,9	$9,036 \cdot 10^{-4}$	Chlorbenzol	1099,5	$7,606 \cdot 10^{-4}$	$3,67 \cdot 10^{-2}$	$7,30 \cdot 10^{10}$	○	[6.99]
27	Wasser	997,9	$9,471 \cdot 10^{-4}$	Anilin	1017,6	$3,542 \cdot 10^{-3}$	$2,80 \cdot 10^{-3}$	$1,41 \cdot 10^8$	■	[6.99]
28	Glycerin (90,75%)	1231,0	$1,410 \cdot 10^{-1}$	Tetrachloräthylen	1615,0	$9,260 \cdot 10^{-4}$	$1,34 \cdot 10^{-2}$	$4,30 \cdot 10^0$	△	[6.100]
29	Glycerin (96%)	1243,0	$3,360 \cdot 10^{-1}$	Tetrachloräthylen	1615,0	$9,260 \cdot 10^{-4}$	$9,71 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-1}$	▲	[6.100]
30	Maisstärkesirup	1395,0	$5,140 \cdot 10^{-1}$	Tetrachloräthylen	1614,0	$9,260 \cdot 10^{-4}$	$3,52 \cdot 10^{-2}$	$5,26 \cdot 10^0$	■	[6.100]
31	Wasser + CMC I	1000,0	$4,130 \cdot 10^{-2}$	Tetrachloräthylen	1612,0	$9,260 \cdot 10^{-4}$	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$6,70 \cdot 10^4$	●	[6.100]
32	Wasser + CMC II	1000,0	$1,287 \cdot 10^{-1}$	Tetrachloräthylen	1612,0	$9,260 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-2}$	$1,62 \cdot 10^2$	○	[6.100]
33	Wasser + CMC III	1000,0	$2,850 \cdot 10^{-1}$	Tetrachloräthylen	1612,0	$9,260 \cdot 10^{-4}$	$3,02 \cdot 10^{-2}$	$1,36 \cdot 10^0$	○	[6.100]

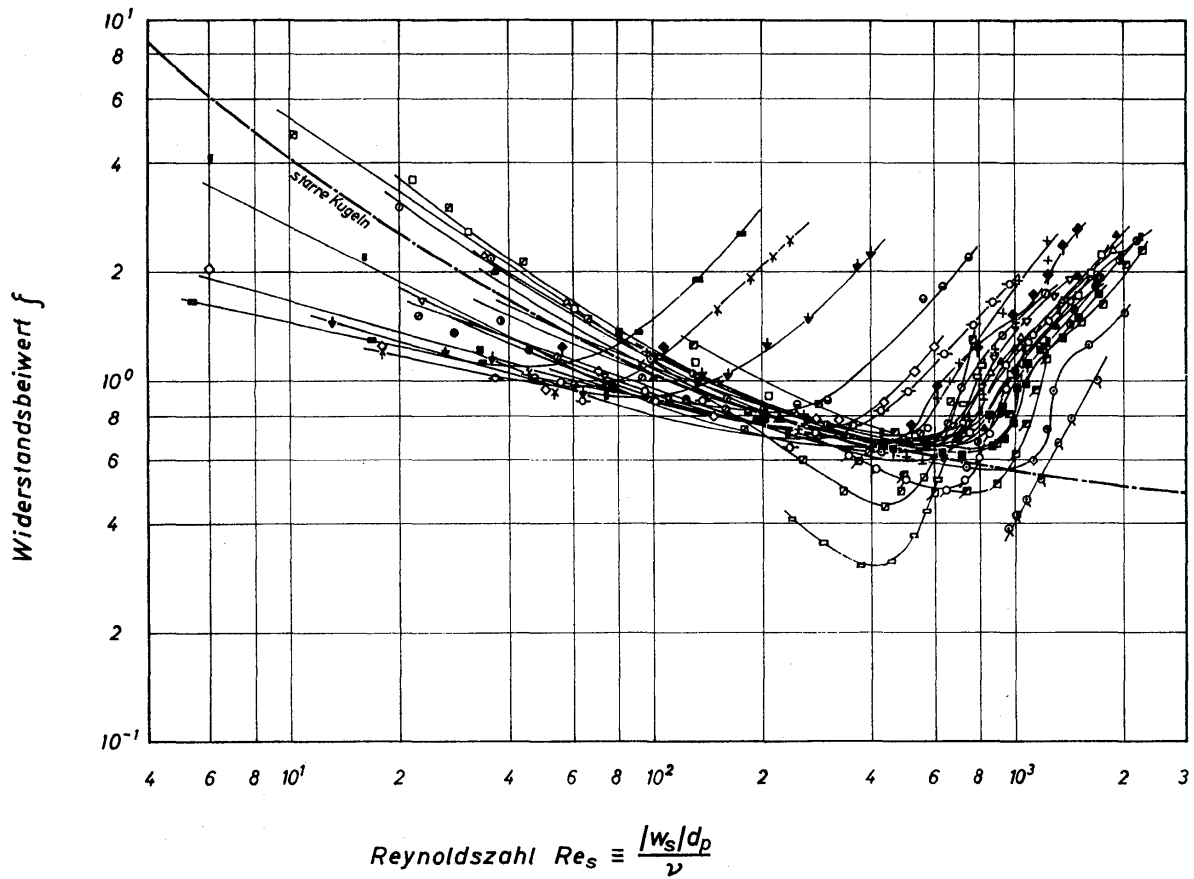


Bild 6.39. Widerstandsbeiwerte für Tropfen, abhängig von der Reynoldszahl Re_s , für die in Tabelle 6.5 angegebenen Versuchsreihen 1 bis 27; als kontinuierliche Phase wurde fast ausschließlich Wasser verwendet

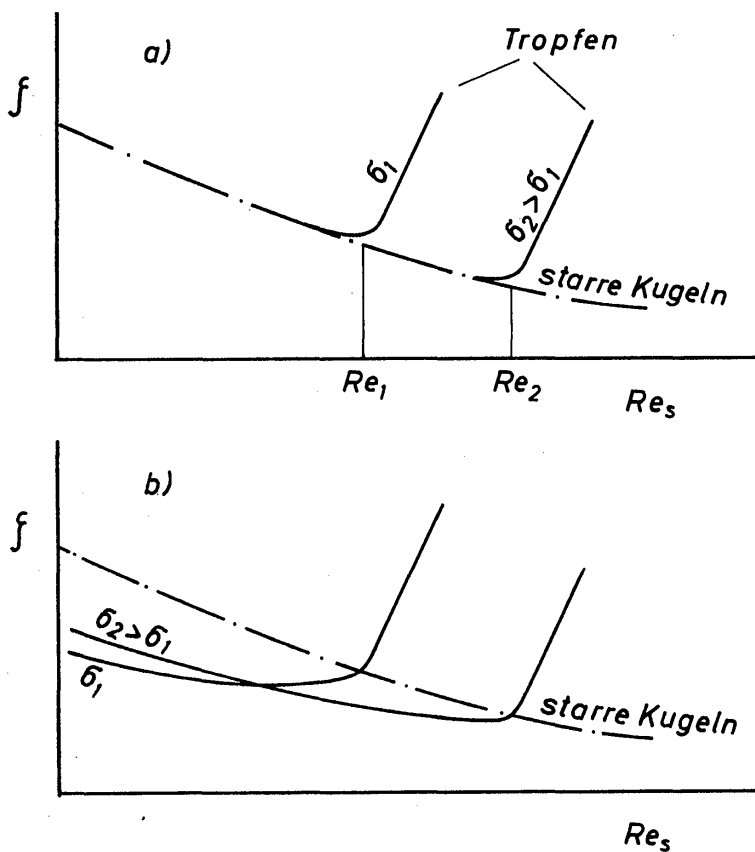


Bild 6.40. Zur Erläuterung der grundsätzlichen Einflüsse auf den Widerstandsbeiwert von Tropfen

In *Bild 6.39* sind für die Meßreihen 1 bis 27 die berechneten Widerstandsbeiwerte abhängig von der Reynoldszahl Re , dargestellt. Zum Vergleich gibt die strichpunktierte Linie das Widerstandsgesetz für starre Kugeln gemäß Gl. (5.07) wieder. Die durch die Meßwerte gelegten Ausgleichskurven zeigen zwei charakteristische Eigenschaften, die an Hand von *Bild 6.40* erläutert werden sollen. Alle Ausgleichskurven weisen ab einer bestimmten Reynoldszahl darauf hin, daß der Widerstandsbeiwert mit zunehmender Reynoldszahl steil ansteigt. Der Anstieg setzt, was in *Bild 6.40 a* angedeutet ist, bei um so kleineren Werten der Reynoldszahl ein, je niedriger die Grenzflächenspannung σ ist. Der zunehmende Widerstand ist nach allen Beobachtungen dadurch bedingt, daß die Tropfen die ursprüngliche Kugelform einbüßen. Es bilden sich ellipsoidische Tropfenformen aus, wobei die Hauptachsen periodischen Längenänderungen unterworfen sind. Man spricht von einer Pulsation der Tropfen. Den Beobachtungen zufolge steigt der Widerstand so lange an, bis der Tropfen auf Grund der anwachsenden Trägheitskräfte in mehrere kleinere Tropfen aufgelöst wird. Je geringer die Grenzflächenspannung σ ist, desto geringer können auch die von außen auf den Tropfen einwirkenden Kräfte sein, um ihn zu deformieren und schließlich zu zerstören.

An den in *Bild 6.39* dargestellten Kurven fällt weiterhin auf, daß sie in vielen Fällen im Bereich niedriger Reynoldszahlen erheblich unterhalb der Kurve für die starre Kugel liegen. Dieser Kurvenverlauf ist in *Bild 6.40 b* nochmals deutlich hervorgehoben. Dabei ist darauf hingewiesen, daß der Abstand von der für starre Kugeln geltenden Kurve um so größer ist, je kleiner die Grenzflächenspannung ist. In dem betrachteten Kurvenbereich ist der Widerstand von Tropfen geringer als der von starren Kugeln, was auf die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche zurückzuführen ist. Hierauf war bei der Erörterung des Blasenwiderstandes bereits ausführlich eingegangen worden. Es sei jedoch betont, daß die von HADAMARD und RYBCZYNSKI angegebenen Korrekturen nicht ganz ausreichen, die bei Tropfen beobachtete Widerstandsverminderung zu erklären. Mit der Zirkulationsströmung in Tropfen haben sich GARNER und HAYCOCK [6.101] sowie HORTON, FRITSCH und KINTNER [6.102] im Rahmen experimenteller Untersuchungen befaßt. In diesem Zusammenhang sind jedoch weitere Untersuchungen erforderlich. Festzuhalten ist, daß die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche den Widerstand der Tropfen vermindert, wenn man zum Vergleich eine volumgleiche starre Kugel heranzieht. Diese Widerstandsverminderung muß selbstverständlich auch im Bereich des steilen Kurvenanstiegs wirksam sein. Hier tritt dann jedoch zusätzlich die periodisch veränderliche Tropfenform mit einer sehr starken Widerstandserhöhung auf. Im Bereich des steilen Kurvenanstiegs überlagern sich also mehrere für den Widerstand maßgebende Einflüsse.

In *Bild 6.41* sind die Meßwerte der in *Tabelle 6.5* aufgeführten Versuchsreihen 28 bis 33 dargestellt. Bei den Versuchsreihen 31 bis 33 wurde dem Wasser Methylcellulose in verschiedenen Konzentrationen (CMC I bis CMC III) zugesetzt. Während die Dichte des Wassers erhalten blieb, änderte sich die Viskosität in ganz erheblichem Maße. Obgleich man damit rechnen muß, daß durch Zugabe von Methylcellulose die Flüssigkeit nicht-Newtonsche Eigenschaften erhält, weisen

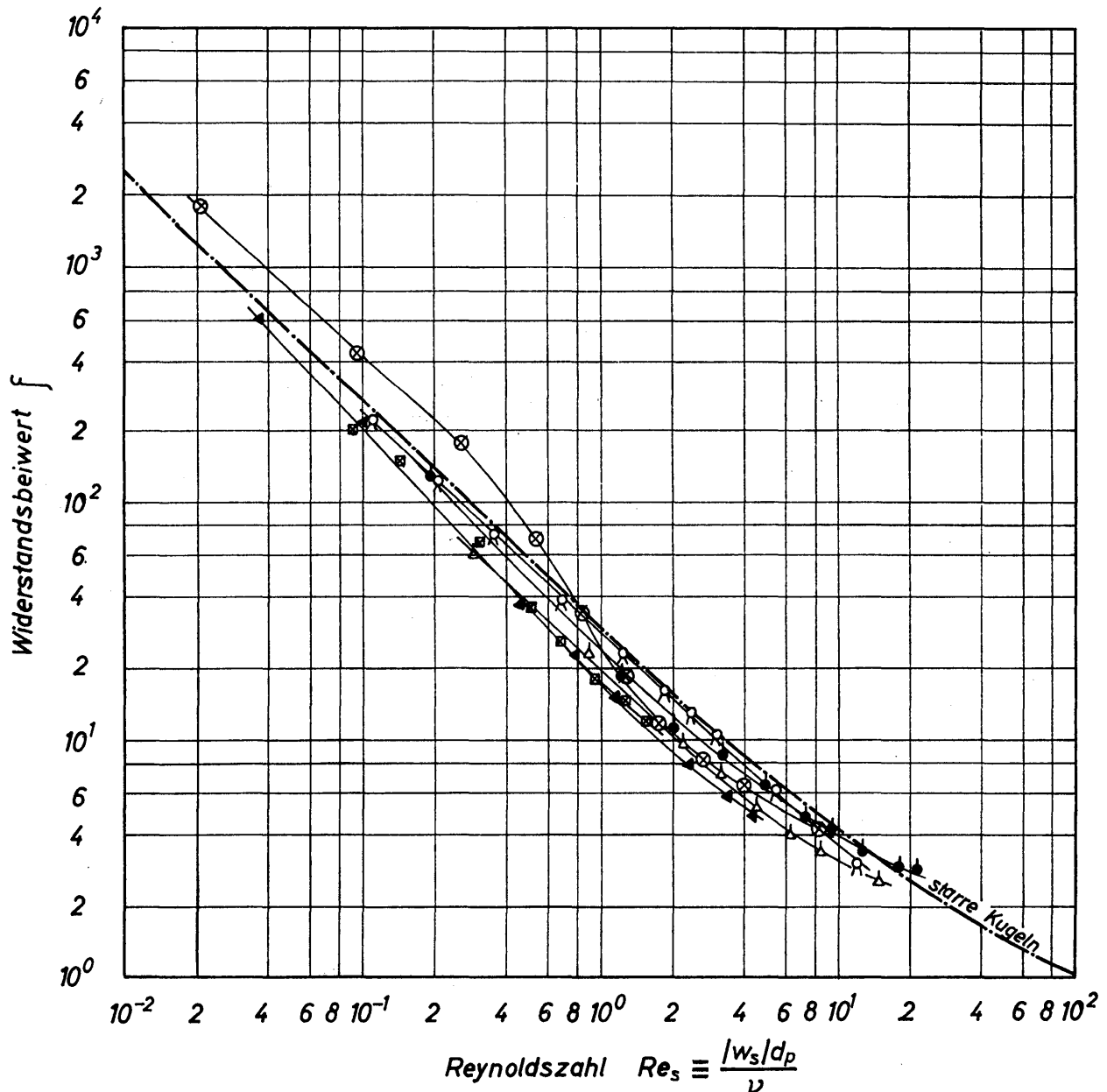


Bild 6.41. Widerstandsbeiwert ζ für Tropfen, abhängig von der Reynoldszahl Re_s , für die in Tabelle 6.5 angegebenen Versuchsreihen 28 bis 33; als kontinuierliche Phase wurden Flüssigkeiten mit sehr hoher Viskosität verwendet

die Meßwerte für den Widerstandsbeiwert doch darauf hin, daß die Tropfenbewegung wie in Newtonschen Flüssigkeiten erfolgte. Zu beachten ist, daß der Widerstand von Tropfen etwa gleich dem Widerstand starrer Kugeln ist, wenn sich die Tropfen in hochviskosen Flüssigkeiten bewegen.

Da eine theoretische Berechnung des Tropfenwiderstandes noch nicht möglich ist, erweist es sich als notwendig, aus Meßwerten empirische Gleichungen abzuleiten. Zu dem Zweck haben HU und KINTNER [6.98] mittels einer Dimensionsanalyse Kennzahlen ermittelt und mit ihrer Hilfe die folgenden empirischen Gleichungen aufgestellt:

$$\zeta We_s \left(\frac{K_F \varrho}{|\varrho - \varrho_p|} \right)^{0,15} = \frac{4}{3} \left\{ Re_s \left(\frac{|\varrho - \varrho_p|}{K_F \varrho} \right)^{0,15} + 0,75 \right\}^{1,275}, \quad (6.116)$$

$$\zeta We_s \left(\frac{K_F \varrho}{|\varrho - \varrho_p|} \right)^{0,15} = 0,045 \left\{ Re_s \left(\frac{|\varrho - \varrho_p|}{K_F \varrho} \right)^{0,15} + 0,75 \right\}^{2,37}. \quad (6.117)$$

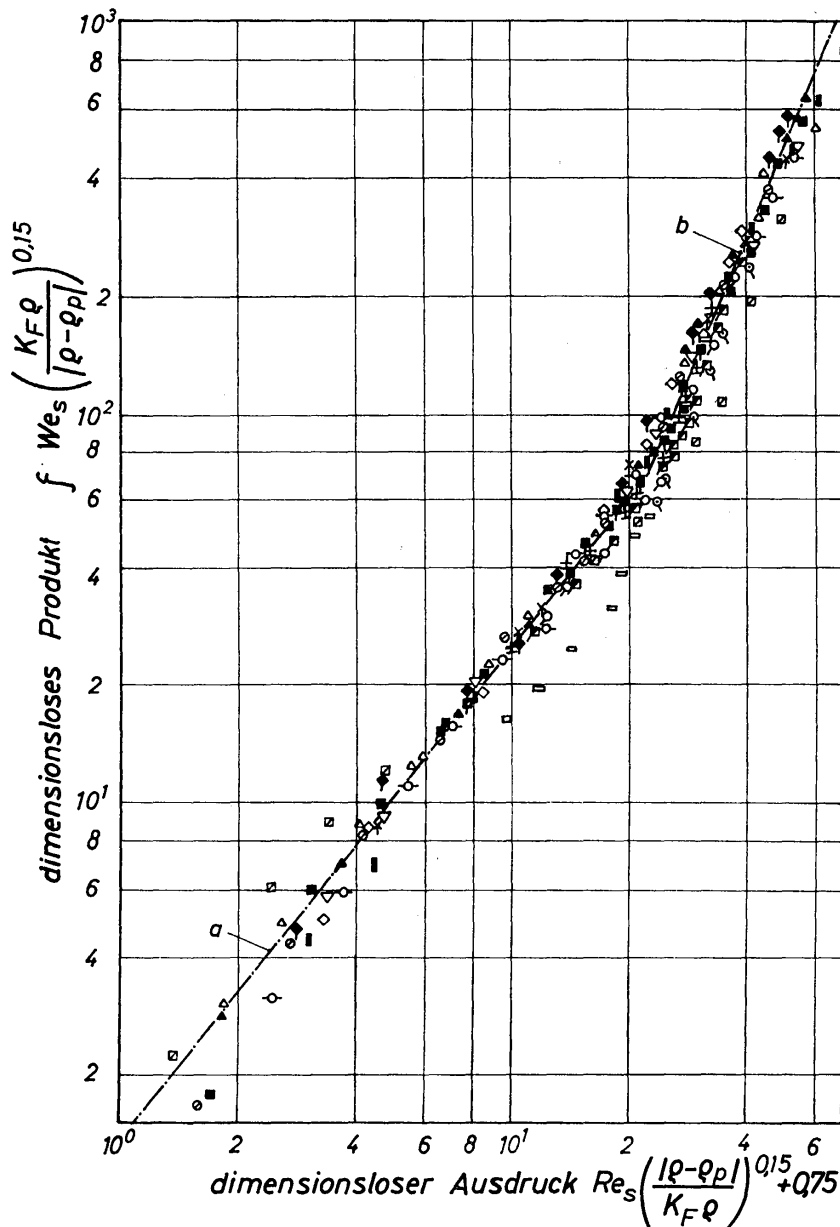


Bild 6.42. Darstellung der Widerstandsbeiwerte für Tropfen. Kurve *a* nach Gl.(6.116) und Kurve *b* nach Gl.(6.117). Zur Erklärung der Meßwerte siehe Tabelle 6.5

Hierin ist $We_s \equiv w_s^2 \rho d_p / \sigma$ die mit der Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit w_s definierte Weberzahl. In den *Bildern* 6.42 und 6.43 ist Gl.(6.116) durch Kurve *a* und Gl.(6.117) durch Kurve *b* dargestellt. Durch diese Kurven werden nicht nur die Meßwerte von HU und KINTNER, sondern auch die von KLEE und TREYBAL [6.97] sowie von KINTNER [6.99] recht gut ausgeglichen.

Die Kurven *a* und *b* schneiden sich bei einem Abszissenwert von

$$Re_s \left(\frac{|\rho - \rho_p|}{K_F \rho} \right)^{0,15} + 0,75 = 22,4, \quad (6.118)$$

dem ein Ordinatenwert von

$$\zeta We_s \left(\frac{K_F \rho}{|\rho - \rho_p|} \right)^{0,15} = 70 \quad (6.119)$$

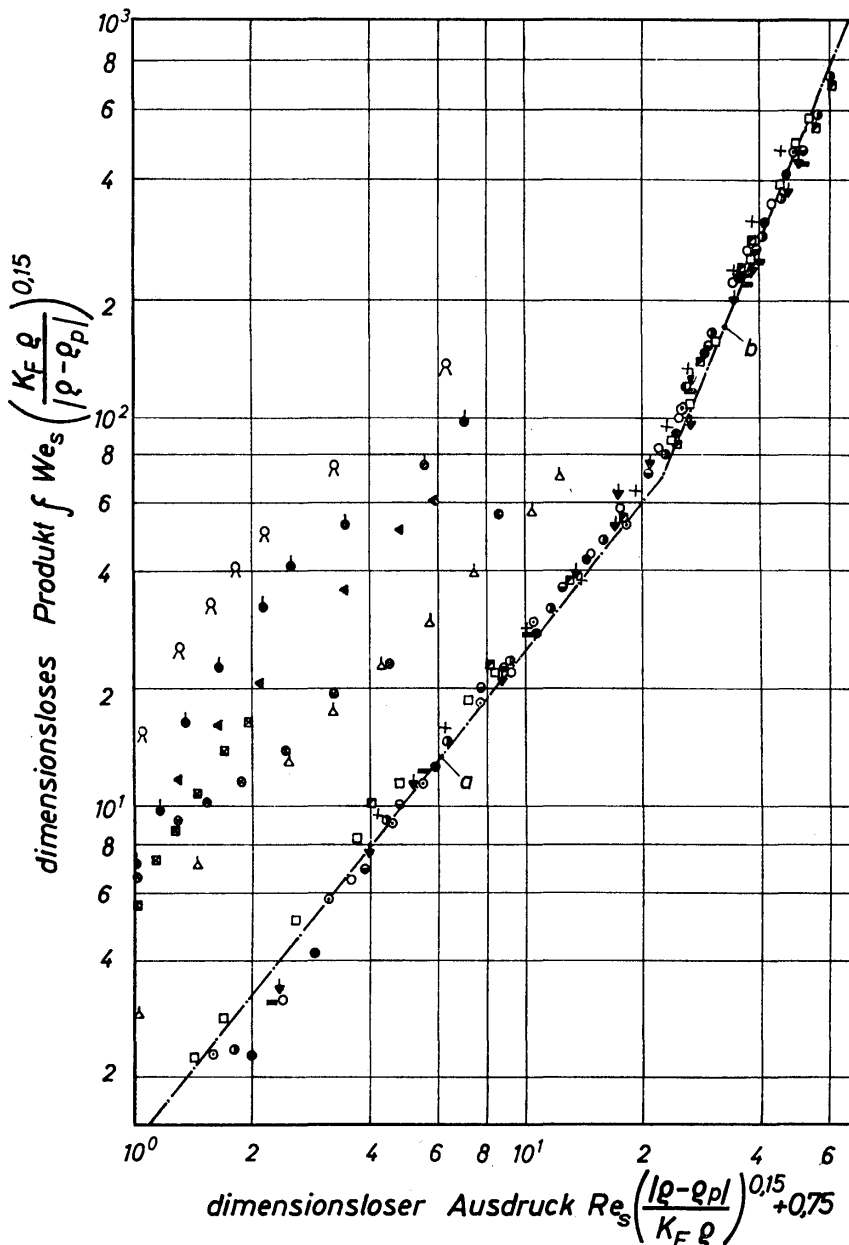


Bild 6.43. Darstellung der Widerstandsbeiwerte für Tropfen. Kurve *a* nach Gl.(6.116) und Kurve *b* nach Gl.(6.117). Zur Erklärung der Meßwerte siehe Tabelle 6.5

zugeordnet ist. Im Bereich der Kurve *a* nimmt der Widerstandsbeiwert mit zunehmender Reynoldszahl ab und die Geschwindigkeit mit wachsendem Tropfendurchmesser zu. Im Bereich der Kurve *b* hingegen steigt der Widerstandsbeiwert mit zunehmender Reynoldszahl an, und die Geschwindigkeit wird mit zunehmendem Tropfendurchmesser kleiner. Im Schnittpunkt der Kurven *a* und *b* liegt somit das Minimum des Widerstandsbeiwertes und das Maximum der Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit der Tropfen. Für den Schnittpunkt haben HU und KINTNER aus ihren Meßwerten eine gesonderte Gleichung, nämlich

$$\left(\frac{Re_s}{We_s}\right) = 0,816 \left(\frac{K_F \rho}{|\rho - \rho_p|}\right)^{0,238} \quad (6.120)$$

aufgestellt. Eine Kontrolle mittels weiterer Meßwerte für Flüssigkeitssysteme mit niedrigerer Grenzflächenspannung ergab die geringfügig veränderte Beziehung

$$\left(\frac{Re_s}{We_s}\right) = 0,41 \left(\frac{K_F \varrho}{|\varrho - \varrho_p|}\right)^{0,27}. \quad (6.121)$$

Hieraus erhält man die maximale Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit allein als Funktion von Stoffwerten:

$$w_{s_{\max}} = 2,44 \frac{\sigma}{\eta} \left(\frac{|\varrho - \varrho_p|}{K_F \varrho}\right)^{0,27}. \quad (6.122)$$

Der hierzu gehörige Tropfendurchmesser $(d_p)_{w_{s_{\max}}}$ ergibt sich, wenn man die aus den Gleichungen (6.121) und (6.118) folgende Beziehung

$$We_s = 52,8 \left(\frac{|\varrho - \varrho_p|}{K_F \varrho}\right)^{0,12} \quad (6.123)$$

nach dem Tropfendurchmesser auflöst:

$$(d_p)_{w_{s_{\max}}} = 52,8 \frac{\sigma}{w_{s_{\max}}^2 \varrho} \left(\frac{|\varrho - \varrho_p|}{K_F \varrho}\right)^{0,12} = 8,88 \frac{\eta^2}{\varrho \sigma} \left(\frac{K_F \varrho}{|\varrho - \varrho_p|}\right)^{0,42}. \quad (6.124)$$

Der Tropfendurchmesser ist also ebenfalls allein eine Funktion der Stoffwerte des Systems.

Die obere Grenze der in *Bild 6.39* dargestellten Kurven für den Widerstandsbeiwert ist dann erreicht, wenn der Tropfendurchmesser d_p seinen maximalen Wert $d_{p_{\max}}$ angenommen hat. Überschreiten dieses Wertes führt zur Auflösung in mehrere kleinere Tropfen. Für den maximalen Tropfendurchmesser haben HU und KINTNER die grobempirische Gleichung

$$d_{p_{\max}} = 0,1205 \left(\frac{\sigma}{|\varrho - \varrho_p|}\right)^{1/2} \quad (6.125)$$

aufgestellt. Setzt man σ in kg/s^2 und $|\varrho - \varrho_p|$ in kg/m^3 ein, so erhält man $d_{p_{\max}}$ in m. Zusammenfassend darf man feststellen, daß die von HU und KINTNER [6.98] mitgeteilten Gleichungen (6.116) und (6.117) eine sehr große Zahl von Meßwerten in befriedigender Weise wiedergeben, wenn die Viskosität der kontinuierlichen Phase nicht zu groß ist. Nach Untersuchungen von CALDERBANK und KORCHINSKI [6.103] sollte die Viskosität η nicht größer als $5 \cdot 10^{-3}$ (kg/ms) = 5 (cP) sein. Das kommt auch in *Bild 6.43* zum Ausdruck, in dem die Meßwerte der Versuchsreihen 28 bis 33 (siehe *Tabelle 6.5*), für die die Viskosität der kontinuierlichen Phase zwischen $\eta = 1,287 \cdot 10^{-1}$ (kg/ms) und $\eta = 4,130 \cdot 10^{-1}$ (kg/ms) lag, dargestellt sind und weit oberhalb der Kurve *a* liegen. Befriedigende Gleichungen, die auch diese Meßwerte mit genügender Genauigkeit erfassen, müssen noch entwickelt werden.

Ähnliche Gleichungen wie HU und KINTNER haben auch KRISHNA, VENKATESWARLU und NARASIMHAMURTY [6.104] aufgestellt. Eine Kontrolle mit den Meßwerten der Versuchsreihen 1 bis 27 ergab jedoch, daß diese Gleichungen die Meßwerte nicht so gut ausgleichen wie die von HU und KINTNER. Ähnliche Einschränkungen gelten auch für Gleichungen von KLEE und TREYBAL [6.97], LICHT und NARASIMHAMURTY [6.100] und HARMATHY [6.105].

Die Gleichungen von HU und KINTNER gestatten die Berechnung des Widerstandsbeiwertes ζ und mittels der Definitionsgleichung (6.34) die des Widerstandes W . Dafür müssen jedoch die Durchmesser d_p und die Geschwindigkeit w_s des Tropfens bekannt sein. Viel häufiger soll jedoch der Durchmesser bei angegebener Geschwindigkeit oder die Geschwindigkeit bei gegebenem Durchmesser bestimmt werden. In diesen Fällen ist in den Gleichungen (6.116) und (6.117) der Widerstandsbeiwert ζ durch Gl. (6.115) zu ersetzen. Die genannten Gleichungen lassen sich dann nach w_s auflösen. Es ist also ohne Schwierigkeit möglich, bei bekanntem Durchmesser d_p die Geschwindigkeit w_s zu berechnen. Ist indes die Geschwindigkeit bekannt und soll der Durchmesser bestimmt werden, dann muß für d_p zunächst ein geschätzter Wert vorgegeben und durch wiederholte Rechnungen kontrolliert werden. Diese umständlichen Rechnungen ließen sich vermeiden, wenn man eine Darstellungsweise gemäß *Bild 5.11* wählen würde, in der Ar über w_s^+ aufgetragen ist. Hierbei tritt der Durchmesser nur in Ar und die Geschwindigkeit nur in w_s^+ auf. Eine fast gleichwertige Darstellungsweise wurde auch bereits von REINHART [6.106] angewendet, der die Sinkgeschwindigkeit von Tropfen in Luft bei Drücken zwischen etwa 0,5 und 4 bar gemessen hat. Ob sich für die Bewegung von Tropfen in Gasen und in Flüssigkeiten einheitliche Gesetze aufstellen lassen, ist bislang noch nicht mit Sicherheit zu sagen.

Die bisherigen Ausführungen betrafen stets den Fall, daß sich die Tropfen in einer theoretisch allseitig unendlich ausgedehnten Umgebung bewegen; Randeinflüsse sollten somit ausgeschlossen sein. Tatsächlich lassen sich aber Randeinflüsse nicht immer vermeiden, und man muß daher ihre Größe kennen. HARMATHY [6.105] und STROM und KINTNER [6.107] haben sich mit diesem Problem beschäftigt und geben sowohl Gleichungen als auch graphische Darstellungen zur Berechnung des Randeinflusses an. Erwähnt sei in diesem Zusammenhang auch eine Arbeit von RAGHAVENDRA und RAO [6.108], in der über umfangreiche Messungen zur Bestimmung der Geschwindigkeit von Tropfenschwärmen berichtet wird, in denen die Tropfen in mehreren vorgeschriebenen Formen angeordnet sind.

6.82 Deformationen und Pulsationen von Tropfen

Deformationen und Pulsationen von Tropfen führen sowohl zu einer Erhöhung des Widerstandes als auch zu einer Vergrößerung der Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten. Man ist also aus verschiedenen Gründen daran interessiert, die Ursachen und Auswirkungen der Deformationen und Oszillationen genau zu kennen. Befriedigende Aussagen lassen sich zur Zeit hierüber kaum machen. Man befindet sich noch im Stadium des Sammelns von Beobachtungsergebnissen.

Einen zusammenfassenden Überblick über Deformationen und Pulsationen hat KINTNER [6.97] gegeben. Ursache der Deformation sind offensichtlich die über den Tropfenumfang veränderlichen Druck- und Reibungskräfte. Als Ursache der Pulsationen wird die periodische Bildung und Ablösung der Wirbel hinter dem umströmten Tropfen angesehen [6.109 und 6.110]. Diese Vorgänge können durch

die Anwesenheit oberflächenaktiver Stoffe in sehr starkem Maße beeinflußt werden. Hierauf hat insbesondere LEVICH [6.19] hingewiesen. In einer neueren Arbeit haben auch VALENTINE, SATHER und HEIDEGER [6.109] einen wertvollen Beitrag zur Klärung der damit zusammenhängenden Fragen geliefert. Verlässliche Gleichungen über die bei der Pulsation auftretenden Frequenzen und Amplituden können aber noch nicht mitgeteilt werden. Die Wirkung der oberflächenaktiven Substanzen besteht darin, daß die Grenzflächenspannung herabgesetzt wird. Da die Strömungsgeschwindigkeit über den Umfang des Tropfens veränderlich ist, ergibt sich eine auch über den Umfang veränderliche Konzentration der grenzflächenaktiven Substanz und mithin auch der Grenzflächenspannung. Der somit vorhandene Gradient der Grenzflächenspannung kann für die Deformation und Pulsation von ausschlaggebender Bedeutung sein [6.111 und 6.112]. Eine sehr gute Beschreibung der Vorgänge in der Phasengrenzfläche haben SIGWART und NASSENSTEIN [6.113] geliefert. Örtliche Änderungen in der Größe der Grenzflächenspannung können selbstverständlich auch im Rahmen aller normalen Vorgänge des Wärme- und Stoffübergangs auftreten. Die Klärung der hiermit zusammenhängenden Probleme stößt insbesondere deshalb auf so große Schwierigkeiten, weil es kaum möglich ist, den Einfluß der Grenzflächenspannung von anderen Einflüssen zu trennen.

Von erheblicher technischer Bedeutung ist das Verhalten der Tropfen in Strömungsfeldern. Die Deformation und Auflösung von Tropfen in Gasströmungen hat LANE [6.114] in einer bemerkenswerten Arbeit untersucht. Erwähnt sei in diesem Zusammenhang auch die Untersuchung von REINHART [6.106] über die Deformation während des freien Falls in Luft.

Schrifttum

- [6.1] ● F. BASHFORTH und H. ADAMS, *An attempt to test the theories of capillary action*, Cambridge 1883
- [6.2] W. SIEMES, Gasblasen in Flüssigkeiten, *Chem.-Ing.-Techn.* 26 (1954) 8/9, 479–96 und 614–30
- [6.3] A. A. POUTANEN und A. I. JOHNSON, Studies of bubble formation and rise, *Can. J. Chem. Eng.* 38 (1960) 4, 93–101
- [6.4] A. MERSMANN, Druckverlust und Schaumhöhen von gasdurchströmten Flüssigkeitsschichten auf Siebböden, *VDI-Forschungsh.* 491, VDI-Verlag, Düsseldorf 1962
- [6.5] W. G. EVERSOLE, G. H. WAGNER und E. STACKHOUSE, Rapid formation of gas bubbles in liquids, *Ind. Eng. Chem.* 33 (1941) 11, 1459–62
- [6.6] W. SIEMES und K. GÜNTER, Gasdispersion in Flüssigkeiten durch Düsen bei hohen Durchsätzen, *Chem.-Ing.-Techn.* 28 (1956) 6, 389–95
- [6.7] D. W. VAN KREVELEN und D. J. HOFTIJZER, Studies of gas bubble formation, *Chem. Eng. Progr.* 46 (1950) 1, 29–35
- [6.8] J. RENNIE und F. EVANS, The formation of froths and foams above sieve plates, *Brit. Chem. Eng.* 7 (1962) 7, 498–502
- [6.9] P. N. ROWE und B. A. PARTRIDGE, A note on the initial motion and break-up of a two-dimensional air bubble in water, *Chem. Eng. Sci.* 19 (1964) 81–2

- [6.10] L. DAVIDSON und E. H. AMICK, Formation of gas bubbles at horizontal orifices, *AICHE J.* 2 (1956) 3, 337–42
- [6.11] R. R. HUGHES, A. E. HANDLOS, H. D. EVANS und R. L. MAYCOCK, The formation of bubbles at simple orifices, *Chem. Eng. Progr.* 51 (1955) 12, 557–63
- [6.12] J. F. MAHONEY und L. A. WENZEL, Formation of moderate-size bubbles, *AICHE J.* 9 (1963) 5, 641–5
- [6.13] W. B. HAYES, B. W. HARDY und C. D. HOLLAND, Formation of gas bubbles at submerged orifices, *AICHE J.* 5 (1959) 3, 319–24
- [6.14] S. L. SULLIVAN, B. W. HARDY und C. D. HOLLAND, Formation of gas bubbles at orifices submerged beneath liquids, *AICHE J.* 10 (1964) 6, 848–54
- [6.15] F. N. PEEBLES und H. J. GARBER, Studies of the motion of gas bubbles in liquids, *Chem. Eng. Progr.* 49 (1953) 2, 88–97
- [6.16] P. H. CALDERBANK und A. C. LOCHIEL, Mass transfer coefficients, velocities and shapes of carbon dioxide bubbles in free rise through distilled water, *Chem. Eng. Sci.* 19 (1964) 485–503
- [6.17] ● P. GRASSMANN, *Physikalische Grundlagen der Verfahrenstechnik*, 2. Auflage, Verlag Sauerländer, Aarau/Frankfurt am Main 1970
- [6.18] R. M. DAVIES und G. TAYLOR, The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes, *Proc. Roy. Soc. (London) A* 200 (1949/1950) 1062, 375–90
- [6.19] ● V. G. LEVICH, *Physicochemical Hydrodynamics*, Übersetzung aus dem Russischen, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N. Y.) 1962
- [6.20] J. A. REDFIELD und G. HOUGHTON, Mass transfer and drag coefficients for single bubbles at Reynolds numbers of 0,02–5000, *Chem. Eng. Sci.* 20 (1965) 131–9
- [6.21] G. ASTARITA und G. APUZZO, Motion of gas bubbles in non-Newtonian liquids, *AICHE J.* 11 (1965) 5, 815–20
- [6.22] F. H. GARNER und D. HAMMERTON, Circulation inside gas bubbles, *Chem. Eng. Sci.* 3 (1954) 1, 1–11
- [6.23] J. ACKERET, Über exakte Lösungen der Stokes-Navier-Gleichungen inkompressibler Flüssigkeiten bei veränderten Grenzbedingungen, *Z. angew. Math. Physik* 3 (1952) 4, 259–71
- [6.24] B. T. CHAO, Motion of spherical gas bubbles in a viscous liquid at large Reynolds numbers, *Physic. Fluids* 5 (1962) 1, 69–79
- [6.25] A. E. HAMIELEC und A. I. JOHNSON, Viscous flow around spheres at intermediate Reynolds numbers, *Can. J. Chem. Eng.* 40 (1962) 2, 41–5
- [6.26] D. W. MOORE, The boundary layer on a spherical gas bubble, *J. Fluid Mech.* 16 (1963) 161–76
- [6.27] A. D. K. LAIRD und D. CHISHOLM, Pressure and forces along cylindrical bubbles in a vertical tube, *Ind. Eng. Chem.* 48 (1956) 8, 1361–4
- [6.28] E. T. WHITE und R. H. BEARDMORE, The velocity of rise of single cylindrical air bubbles through liquids contained in vertical tubes, *Chem. Eng. Sci.* 17 (1962) 351–61
- [6.29] R. A. S. BROWN, The mechanics of large gas bubbles in tubes, *Can. J. Chem. Eng.* 43 (1965) 4, 217–30
- [6.30] F. P. BRETHERTON, The motion of long bubbles in tubes, *J. Fluid Mech.* 10 (1961) 2, 166–88
- [6.31] J. K. WALTERS und J. F. DAVIDSON, The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid, Part 1: The two-dimensional bubble, *J. Fluid Mech.* 12 (1962) 3, 408–16
- [6.32] J. K. WALTERS und J. F. DAVIDSON, The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid, Part 2: The three-dimensional bubble and the toroidal bubble, *J. Fluid Mech.* 17 (1963) 3, 321–36

- [6.33] T. D. TAYLOR und A. ACRIVOS, On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 18 (1964) 3, 466–76
- [6.34] J. R. STREET und M. R. TEK, Dynamics of bullet shaped bubbles encountered in vertical gas liquid slug flow, *AIChE J.* 11 (1965) 4, 644–50
- [6.35] D. J. NICKLIN, J. C. WILKES und J. F. DAVIDSON, Two-phase flow in vertical tubes, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 40 (1962) 61–8
- [6.36] P. GRASSMANN, R. BÜTTIKER und E. CATHREIN, Messung und Theorie der Wand-schubspannung bei Zweiphasenströmung im Rohr, *Forsch. Ingenieurwes.* 30 (1964) 4, 105–8
- [6.37] J. R. STREET und M. R. TEK, Unsteady state gas-liquid slug flow through vertical pipe, *AIChE J.* 11 (1965) 4, 601–7
- [6.38] J. C. SLATTERY, Approximation to the drag force on a sphere moving slowly through either on Ostwald-de Waele or a Sisko fluid *AIChE J.* 8 (1962) 5, 663–7
- [6.39] M. L. WASSERMANN und J. C. SLATTERY, Upper and lower bounds on the drag coefficient of a sphere in a power-model fluid, *AIChE J.* 10 (1964) 3, 383–8
- [6.40] H. R. NULL und H. F. JOHNSON, Drop formation in liquid-liquid systems from single nozzles, *AIChE J.* 4 (1958) 3, 273–81
- [6.41] G. F. SCHEELE und B. J. MEISTER, Drop formation at low velocities in liquid-liquid systems, *AIChE J.* 14 (1968) 1, 9–19
- [6.42] W. D. HARKINS und F. E. BROWN, The determination of surface tension (free surface energy), and the weight of falling drops: The surface tension of water and benzene by the capillary height method, *J. Amer. Chem. Soc.* 41 (1919) 4, 499–524
- [6.43] C. B. HAYWORTH und R. E. TREYBAL, Drop formation in two-liquid-phase systems, *Ind. Eng. Chem.* 42 (1950) 6, 1174–181
- [6.44] C. A. SLEICHER, Maximum stable drop size in turbulent flow, *AIChE J.* 8 (1962) 4, 471–7
- [6.45] G. V. JEFFREYS und J. L. HAWKSLEY, Coalescence of liquid droplets in two-component two-phase systems, *AIChE J.* 11 (1965) 3, 413–24
- [6.46] R. M. CHRISTIANSEN und A. N. HIXSON, Break up to a liquid jet in a denser liquid, *Ind. Eng. Chem.* 49 (1957) 6, 1017–24
- [6.47] H. RUMPF, Über grundlegende physikalische Probleme bei der Zerkleinerung, erschienen in *Symposium Zerkleinern*, 1.30, Verlag Chemie, Weinheim und VDI-Verlag, Düsseldorf 1962
- [6.48] E. KIRSCHBAUM, Die Zweistoffdüse in der Zerstäubungstrocknung, *Chem.-Ing.-Techn.* 25 (1953) 10, 620–2
- [6.49] W. v. OHNESORGE, Die Bildung von Tropfen an Düsen und die Auflösung flüssiger Strahlen, *Z. angew. Math. Mech.* 16 (1936) 6, 355–8
- [6.50] LORD RAYLEIGH, On the instability of jets, *Proc. London Math. Soc.* 10 (1878) 4–13
- [6.51] C. WEBER, Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles, *Z. angew. Math. Mech.* 11 (1931) 136–54
- [6.52] D. W. LEE und R. C. SPENCER, Photographic studies of fuel sprays, *NACA Techn. Note* 454 (1933)
- [6.53] H. A. TROESCH, Die Zerstäubung von Flüssigkeiten, *Chem.-Ing.-Techn.* 26 (1954) 6, 311–20
- [6.54] R. A. MUGELE, Maximum stable droplets in dispersoids, *AIChE J.* 6 (1960) 1, 3–8
- [6.55] F. C. HAAS, Stability of droplets suddenly exposed to a high velocity gas stream, *AIChE J.* 10 (1964) 6, 920–4
- [6.56] J. O. HINZE, Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion processes, *AIChE J.* 1 (1955) 3, 289–95
- [6.57] P. A. NELSON und W. F. STEVENS, Size distribution of droplets from centrifugal spray nozzles, *AIChE J.* 7 (1961) 1, 80–6

- [6.58] J. GRETZINGER und W. R. MARSHALL, Characteristics of pneumatic atomization, *AICHE J.* 7 (1961) 2, 312-8
- [6.59] J. A. CONSIGLIO und C. M. SLIEPCEVICH, Effect of liquid physical properties and flow rates on the surface area of sprays from a pressure atomizer, *AICHE J.* 3 (1957) 3, 418-27
- [6.60] R. A. MUGELE und H. D. EVANS, Droplet size distribution in sprays, *Ind. Eng. Chem.* 43 (1951) 6, 1317-24
- [6.61] J. SAUTER, Determining the efficiency of atomization by its fineness and uniformity, *NACA Techn. Memo* 396 (1927)
- [6.62] Y. TANASAWA und S. TOYODA, On the atomization of liquid jet issuing from a cylindrical nozzle, *The Technology Reports of the Tohoku University* 21 (1955) 2, 135-6
- [6.63] S. NUKIYAMA und S. TANASAWA, An experiment on the atomization of liquid, *Trans. Soc. Mech. Eng. (Japan)* 5 (1939) 1-4
- [6.64] H. C. LEWIS, D. G. EDWARDS, M. J. GOGLIA, R. I. RISE und L. W. SMITH, Atomization of liquids in high velocity gas streams, *Ind. Eng. Chem.* 40 (1948) 1, 67-74
- [6.65] H. D. BITRAN, Atomization of liquids in supersonic air jets, *Ind. Eng. Chem.* 47 (1955) 1, 23-8
- [6.66] N. DOMBROWSKI und R. P. FRASER, A photographic investigation into the disintegration of liquid sheets, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* 1954/55, 101-30
- [6.67] N. DOMBROWSKI, D. HASSON und D. E. WARD, Some aspects of liquid flow through fan spray nozzles, *Chem. Eng. Sci.* 12 (1960) 35-50
- [6.68] R. P. FRASER, P. EISENKLAM, N. DOMBROWSKI und D. HASSON, Drop formation from rapidly moving liquid sheets, *AICHE J.* 8 (1962) 5, 672-80
- [6.69] N. DOMBROWSKI und W. R. JOHNS, The aerodynamic instability and disintegration of viscous liquid sheets, *Chem. Eng. Sci.* 18 (1963) 203-14
- [6.70] R. P. FRASER und P. EISENKLAM, Liquid atomization and the drop size of sprays, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 34 (1956) 294-319
- [6.71] R. P. FRASER, P. EISENKLAM und N. DOMBROWSKI, Liquid atomization in chemical engineering, *Brit. Chem. Eng.* 2 (1957) 414-7
- [6.72] R. W. TATE und W. R. MARSHALL, Atomization by centrifugal pressure nozzles, *Chem. Eng. Progr.* 49 (1953) 169-74 und 226-34
- [6.73] G. M. TORNER und R. W. MOULTON, Drop-size distribution from spray nozzles, *Chem. Eng. Progr.* 49 (1953) 185-90
- [6.74] J. O. HINZE und H. MILBORN, Atomization of liquids by means of a rotating cup, *J. Appl. Mech.* 17 (1950) 6, 145-53
- [6.75] A. G. EMSLIE, F. T. BONNER und L. G. PECK, Flow of a viscous liquid on a rotating disc, *J. Appl. Physics* 29 (1958) 5, 858-62
- [6.76] R. P. FRASER, N. DOMBROWSKI und J. H. ROUTLEY, The production of uniform liquid sheets from spinning cups, *Chem. Eng. Sci.* 18 (1963) 315-21
- [6.77] R. P. FRASER, N. DOMBROWSKI und J. H. ROUTLEY, The filming of liquids by spinning cups, *Chem. Eng. Sci.* 18 (1963) 323-37
- [6.78] J. OCHMANN, Ein Beitrag zur Auslegung von Rotationszerstäubern, *Energie-techn.* 16 (1966) 5, 209-13
- [6.79] R. P. FRASER, N. DOMBROWSKI und J. H. ROUTLEY, The atomization of a liquid sheet by an impinging air stream, *Chem. Eng. Sci.* 18 (1963) 339-53
- [6.80] P. SCHMIDT, Zerteilen von Flüssigkeiten in gleich große Tropfen, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5/6, 375-9
- [6.81] P. BÄR, Über die physikalischen Grundlagen der Zerstäubungstrocknung, Diss. TH Karlsruhe 1935
- [6.82] H.-J. SIEMENS, Hydrodynamische Untersuchungen an Zerstäuberscheiben, Diplomarbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin, 1966

- [6.83] TH. v. KÁRMÁN, Über laminare und turbulente Reibung, *Z. angew. Math. Mech.* 1 (1921) 233–52
- [6.84] W. G. COCHRAN, The flow due to a rotating disc, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 30 (1934) 365–75
- [6.85] H. BRAUER, Strömung und Wärmeübergang bei Rieselfilmen, *VDI-Forschungsh.* 457, VDI-Verlag, Düsseldorf 1956
- [6.86] K.-J. SCHMID, *Aufbau einer Versuchseinrichtung und experimentelle Untersuchungen zur Flüssigkeitszerstäubung mittels einer rotierenden Zerstäuberscheibe*, Dipl.-Arbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin, 1967
- [6.87] H. ESPIG und R. HOYLE, Waves in a thin liquid layer, *J. Fluid Mech.* 22 (1965) 4, 671–7
- [6.88] B. GRAVE, Die Flüssigkeitsablösung an rotierenden Zerstäuberscheiben, Dipl.-Arbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin, 1967
- [6.89] E. MONKERUD, *Experimentelle Untersuchung der Flüssigkeitsablösung an ebenen Zerstäuberscheiben*, Studienarbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin, 1968
- [6.90] R. P. FRASER, P. EISENKLAM und R. DOMBROWSKI, Rotary atomizer, *British Chem. Eng.* 2 (1957) 9, 496–501
- [6.91] J. KANTER, Untersuchungen an Rotationszerstäubern, *Wiss. Z. TU Dresden* 12 (1963) 2, 864–70
- [6.92] C. R. ADLER und W. R. MARSHALL, Performance of spinning disk atomizers, *Chem. Eng. Progr.* 47 (1951) 10, 515–22 und 12, 601–8
- [6.93] S. J. FRIEDMAN, F. A. GLUCKERT und W. A. MARSHALL, Centrifugal disk atomization, *Chem. Eng. Progr.* 48 (1952) 4, 181–91
- [6.94] R. W. TATE und W. R. MARSHALL, Atomization by centrifugal pressure nozzles, *Chem. Eng. Progr.* 49 (1953) 4, 169–74, und 5, 226–34
- [6.95] W. M. HERRING und W. R. MARSHALL, Performance of vaned-disk atomizers, *AIChE J.* 1 (1955) 2, 200–9
- [6.96] K. D. VACHAGIN, N. K. ZIUNATULIN und N. V. TYABIN, Film flow of a non-Newtonian liquid on a rotating surface, *Int. Chem. Eng.* 6 (1966) 2, 228–32
- [6.97] A. J. KLEE und R. E. TREYBAL, Rate of rise or fall of liquid drops, *AIChE J.* 2 (1956) 4, 444–7
- [6.98] S. HU und R. C. KINTNER, The fall of single liquid drops through water, *AIChE J.* 1 (1955) 1, 42–8
- [6.99] ● R. C. KINTNER, Drop phenomena affecting liquid extraction, erschienen in *Advances in Chemical Engineering*, Band 4, S. 51–94, Academic Press, New York/London 1963
- [6.100] W. LICHT und G. NARASIMHAMURTY, Rate of fall of single liquid droplets, *AIChE J.* 1 (1955) 3, 366–77
- [6.101] F. H. GARNER und P. J. HAYCOCK, Circulation in liquid drops, *Proc. Roy. Soc. A* 252 (1959) 457–75
- [6.102] T. J. HORTON, T. R. FRITSCH und R. C. KINTNER, Experimental determination of circulation velocities inside drops, *Can. J. Chem. Eng.* 43 (1965) 3, 143–6
- [6.103] P. H. CALDERBANK und J. J. O. KORCHINSKI, Circulation in liquid drops, *Chem. Eng. Sci.* 6 (1956) 2, 65–78
- [6.104] P. M. KRISHNA, D. VENKATESWARLU und G. S. R. NARASIMHAMURTY, Fall of liquid drops in water, *J. Chem. Eng. Data* 4 (1959) 4, 336–43
- [6.105] T. Z. HARMATHY, Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent, *AIChE J.* 6 (1960) 2, 281–8
- [6.106] A. REINHART, Das Verhalten fallender Tropfen, *Chem.-Ing.-Techn.* 36 (1964) 7, 740–6

- [6.107] J. R. STROM und R. C. KINTNER, Wall effect for the fall of single drops, *AICHE J.* 4 (1958) 2, 153-6
- [6.108] N. M. RAGHAVENDRA und M. N. RAO, Studies of momentum transfer in the case of assemblages of liquid drops falling in a stagnant column of an immiscible liquid, *Ind. J. Technol.* 3 (1965) 10, 303-7
- [6.109] R. S. VALENTINE, N. F. SATHER und W. J. HEIDEGER, The motion of drops in viscous media, *Chem. Eng. Sci.* 20 (1965) 719-28
- [6.110] R. R. SCHROEDER und R. C. KINTNER, Oszillations of drops falling in a liquid field, *AICHE J.* 11 (1965) 1, 5-8
- [6.111] J. H. GIBBONS, G. HOUGHTON und J. COULL, Effect of a surface active agent on the velocity of rise of benzene drops in water, *AICHE J.* 8 (1962) 2, 274-6
- [6.112] E. R. ELZINGA und J. T. BANCHERO, Some observations on the mechanics of drops in liquid-liquid systems, *AICHE J.* 7 (1961) 394-9
- [6.113] K. SIGWART und H. NASSENSTEIN, Zum Mechanismus des Stofftransports durch die Grenzflächen zweier flüssiger Phasen, *VDI-Z.* 98 (1956) 11, 453-61
- [6.114] W. R. LANE, Shatter of drops in streams of air, *Ind. Eng. Chem.* 43 (1951) 6, 1312-7

7 Bewegung von Partikelschwärmen

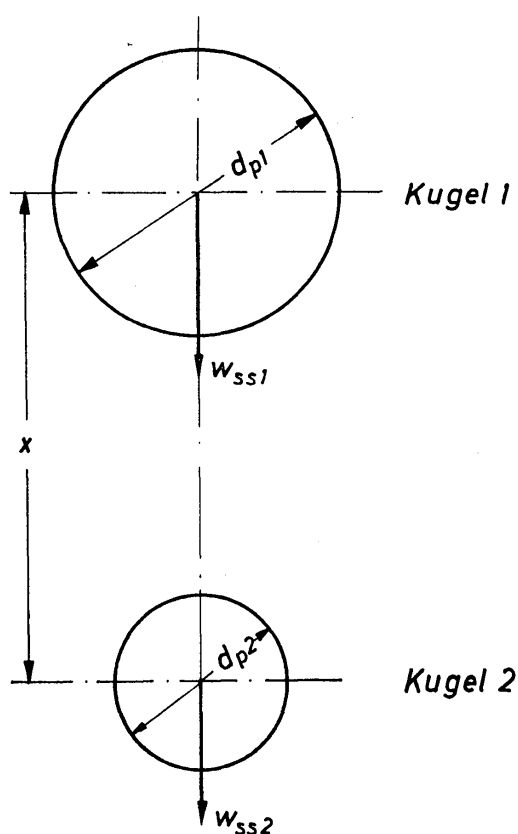
Wann immer in technischen Prozessen Partikeln auftreten, so ist das fast ausschließlich im Schwarmverband. Es ist daher eine bedeutsame Aufgabe, auf der Grundlage der in den vorangegangenen Abschnitten besprochenen Gesetze für Einzelpartikeln die Schwarmgesetze zu entwickeln. Partikelschwärme können sowohl von Feststoffkörnern als auch von Gasblasen und Flüssigkeitstropfen gebildet werden. Für diese drei Arten von Partikeln lassen sich, was bereits bei der Behandlung von Einzelpartikeln erkannt wurde, im Bereich der schleichenden Bewegung einheitliche Gesetze aufstellen.

Die größte Schwierigkeit bei der Entwicklung der Schwarmgesetze bereitet die Festlegung der Partikelanordnung innerhalb des Schwarms. Für theoretische Untersuchungen kann man die Partikeln in einem Gitter mit vorgeschriebenen Abständen anordnen oder aber eine statistischen Verteilungsgesetzen gehorchende räumliche Anordnung annehmen. Beide Anordnungsvorschriften haben für die Behandlung praktischer Probleme Bedeutung erlangt.

Im Grenzfall besteht ein Schwarm nur aus zwei Partikeln. Die hierfür bereits theoretisch und experimentell ermittelten Gesetze bei verschiedenen Anordnungen werden zunächst erörtert. Da die Partikeln Kugelform besitzen sollen, spricht man von Kugelpaaren.

7.1 Bewegung von Kugelpaaren

7.1.1 Bewegung von zwei Kugeln entlang der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte



Es soll die in *Bild 7.1* dargestellte Anordnung betrachtet werden, bei der sich zwei Kugeln hintereinander in Richtung der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte bewegen. Der Durchmesser der Kugeln sei d_{p1} und d_{p2} , wobei d_{p1} größer, wie in *Bild 7.1* angegeben, oder kleiner als d_{p2} sein kann. Die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln werden mit w_{ss1} und w_{ss2} bezeichnet, wobei der Index ss darauf hinweisen soll, daß es sich um die Sinkgeschwindigkeit der Kugeln innerhalb eines Schwarms handelt. Ferner bedeutet x den Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten.

Bild 7.1. Anordnung und Bezeichnungen für die Bewegung eines Kugelpaares in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte

Bei sehr großem Abstand bewegen sich beide Kugeln unabhängig voneinander; es gelten daher die Widerstandsgesetze der Einzelkugel. Für die schleichende Bewegung gilt dann das Stokessche Gesetz:

$$\zeta_{\infty,i} = \frac{24}{Re_{s,i}}. \quad (7.1)$$

Mit dem Index $i = 1$ oder 2 werden die beiden Kugeln gekennzeichnet. Hierin sind $\zeta_{\infty,i}$ der Widerstandsbeiwert einer starren Kugel, die sich in einem unendlich ausgedehnten Fluid bewegt und $Re_{s,i}$ die Reynoldszahl. Diese Kennzahlen sind wie folgt definiert:

$$\zeta_{\infty,i} \equiv \frac{W_{\infty,i}/F_i}{\rho w_{s,i} |w_{s,i}|/2}, \quad (7.2)$$

$$Re_{s,i} \equiv \frac{|w_{s,i}| d_{p,i} \rho}{\eta}. \quad (7.3)$$

Es bedeuten $W_{\infty,i}$ die Widerstandskraft bei der Kugelbewegung im unendlich ausgedehnten Fluid, F_i die größte Querschnittsfläche der Kugel, $w_{s,i}$ deren Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit, ρ die Dichte und η die dynamische Viskosität des Fluids. Der Gültigkeitsbereich des Stokesschen Gesetzes erstreckt sich bei nicht zu hohen Genauigkeitsansprüchen bis $Re_{s,i} = 1$. Die Widerstandskraft $W_{\infty,i}$ folgt aus dem Stokesschen Gesetz zu

$$W_{\infty,i} = 3 \pi \eta d_{p,i} w_{s,i}. \quad (7.4)$$

Verringert man den Abstand x zwischen den Kugelmittelpunkten so weit, daß eine gegenseitige Beeinflussung auftritt, dann soll für den Widerstand jeder der beiden Kugeln die Beziehung

$$W_i = \lambda_i 3 \pi \eta d_{p,i} w_{s,i}. \quad (7.5)$$

gelten. Mit λ_i wird der bei der Schwarmbewegung für jede Kugel auftretende Korrekturfaktor des Widerstandes bezeichnet. Dividiert man Gl.(7.5) durch Gl.(7.4), dann folgt

$$\frac{W_i}{W_{\infty,i}} = \lambda_i. \quad (7.6)$$

so daß der Korrekturfaktor λ_i gleich dem Verhältnis der Widerstandskräfte bei Schwarm- und Einzelbewegung ist. Definiert man den Widerstandsbeiwert für die sich im Schwarm bewegende Kugel

$$\zeta_i = \frac{W_i/F_i}{\rho w_{s,i} |w_{s,i}|/2} \quad (7.7)$$

mit der Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit der betrachteten Kugel für $x = \infty$, dann gilt auch

$$\frac{\zeta_i}{\zeta_{\infty,i}} = \lambda_i. \quad (7.8)$$

Im Stokesschen Bewegungsbereich lautet somit das Widerstandsgesetz für die im Schwarm befindlichen Kugeln:

$$\zeta_i = \lambda_i \frac{24}{Re_{s,i}}. \tag{7.9}$$

Schließlich läßt sich der Korrekturfaktor λ_i mittels der Gleichung

$$3 \pi \eta d_{p,i} w_{s,i} = \lambda_i 3 \pi \eta d_{p,i} w_{ss,i} \tag{7.10}$$

auch als Geschwindigkeitsverhältnis

$$\frac{w_{s,i}}{w_{ss,i}} = \lambda_i \tag{7.11}$$

deuten. Wird bei der Schwarmbewegung der Widerstand im Vergleich zur Einzelkornbewegung verringert ($W_i < W_{\infty,i}$), dann wird die Geschwindigkeit vergrößert ($w_{ss,i} > w_{s,i}$).

Für die Bewegung eines Kugelpaares, dessen Anordnung in *Bild 7.1* skizziert ist, muß das Verhältnis der Widerstandsbeiwerte $\zeta_i/\zeta_{\infty,i}$ allein eine Funktion des bezogenen Abstandes $x/d_{p,i}$ und des Durchmesserverhältnisses d_{p_1}/d_{p_2} sein:

$$\frac{\zeta_i}{\zeta_{\infty,i}} = f\left(\frac{x}{d_{p,i}}; \frac{d_{p_1}}{d_{p_2}}\right). \tag{7.12}$$

Den genauen Zusammenhang haben STIMSON und JEFFEREY [7.1] theoretisch bestimmt. Mittels einer konformen Abbildung führten sie Bipolarkoordinaten ein und konnten daher die Randbedingungen auf beiden Kugeloberflächen gleichzeitig erfüllen. Numerisch wurden die erzielten Gleichungen aber nur für den Fall $d_{p_1} = d_{p_2}$ ausgewertet. Für $d_{p_1} \neq d_{p_2}$ hat BAYER [7.2] die sehr umfangreichen numerischen Rechnungen mittels eines Digitalrechners durchgeführt.

In den *Bildern 7.2* und *7.3* ist das Verhältnis der Widerstandsbeiwerte, abhängig vom bezogenen Abstand $x/d_{p,i}$, für verschiedene Werte des Durchmesserverhältnisses d_{p_1}/d_{p_2} dargestellt. Das Verhältnis der Widerstandsbeiwerte ist in allen Fällen kleiner als 1. Das heißt also, daß bei der Bewegung von Kugelpaaren der Widerstand jeder der beiden Kugeln durch die Anwesenheit der anderen herabgesetzt wird. Am stärksten wird in jedem Falle der Widerstandsbeiwert der kleineren Kugel vermindert, unabhängig davon, ob die größere Kugel der kleineren vorausseilt oder nacheilt.

Als Sonderfall ergibt sich die Bewegung gleich großer Kugeln, für die $d_{p_1}/d_{p_2} = 1$ und $x/d_{p_1} = x/d_{p_2} = x/d_p$. Beide Kugeln haben den gleichen Widerstand $W = W_1 = W_2$ und bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit $w_{ss} = w_{ss_1} = w_{ss_2}$. Beim geringsten Abstand der Kugelmittelpunkte mit $x/d_p = 1$ wird das Verhältnis der Widerstände W/W_{∞} und der Widerstandsbeiwerte ζ/ζ_{∞} zu 0,645. Gemäß Gl.(7.11) wird das Verhältnis der Geschwindigkeiten dann zu $w_{ss}/w_s = 1,55$. Im Schwarm wird also der Widerstand der Kugeln verringert und ihre Geschwindigkeit erhöht.

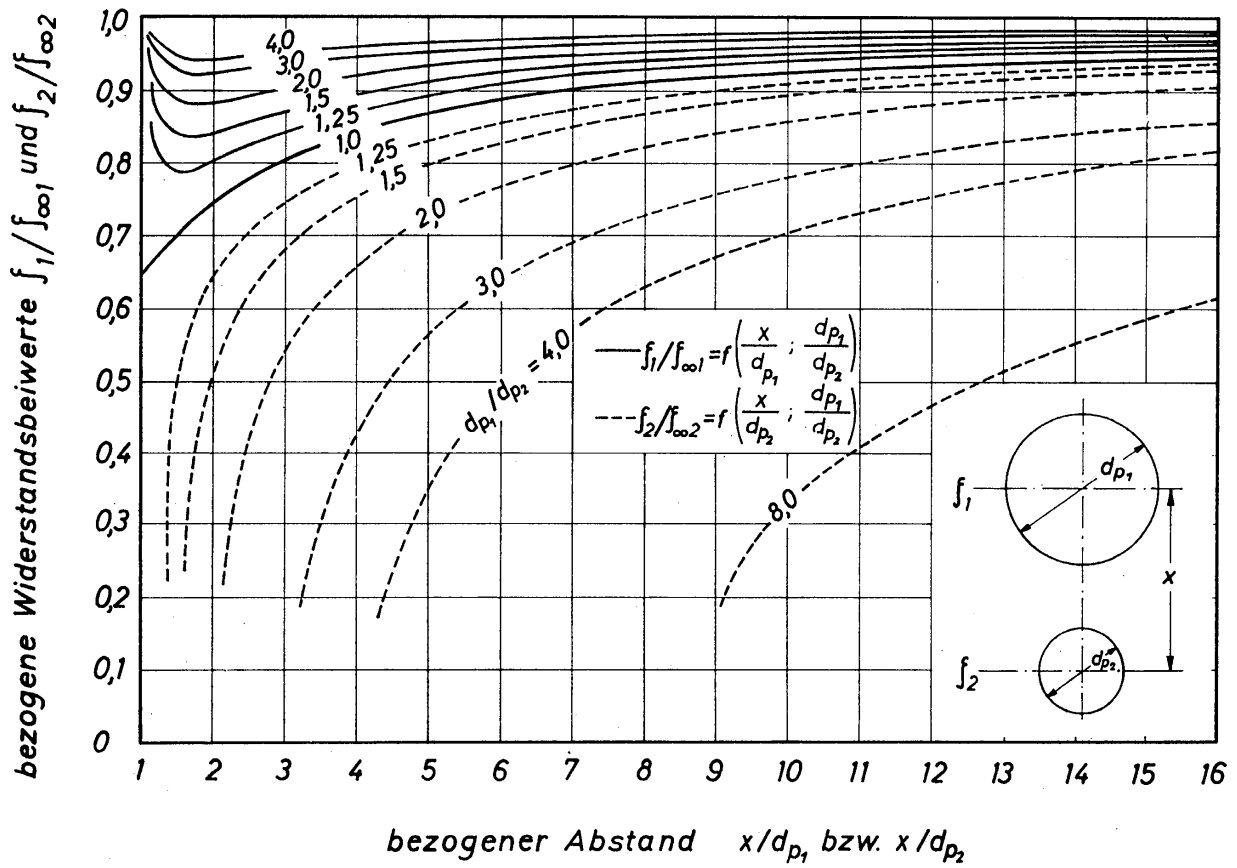


Bild 7.2. Bezogene Widerstandsbeiwerte für die Bewegung von Kugelpaaren, wenn die kleine Kugel der großen vorausleitet

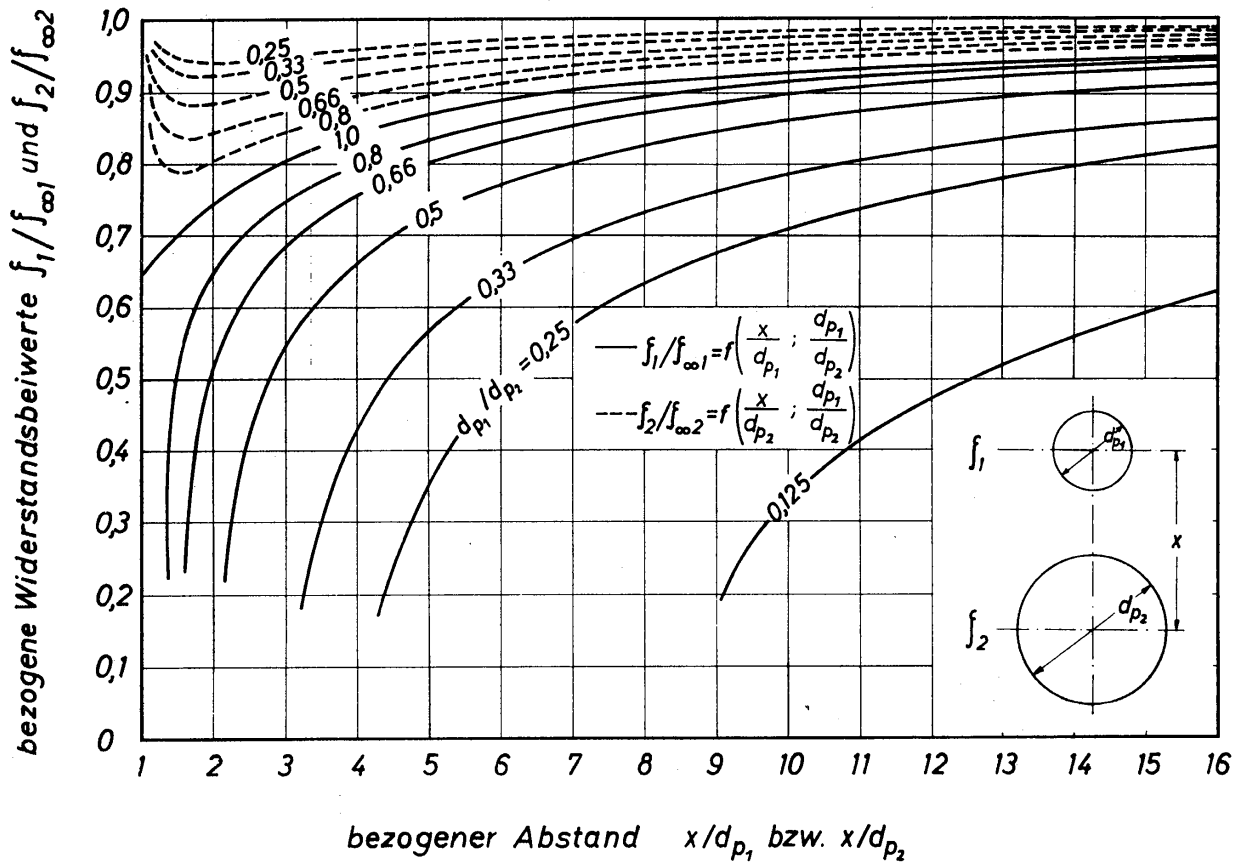


Bild 7.3. Bezogene Widerstandsbeiwerte für die Bewegung von Kugelpaaren, wenn die große Kugel der kleinen vorausleitet

Haben die Kugeln eines Paares verschieden große Durchmesser, so sind auch ihre Geschwindigkeiten unterschiedlich groß. Das heißt aber, daß sich zwei ungleich große Kugeln im Verlauf ihrer Sink- oder Steigbewegung entweder nähern oder voneinander entfernen. Bei freier Sink- oder Steigbewegung ist somit keine stationäre Bewegung eines Kugelpaares möglich. Bei ungleichen Durchmessern ist die Bewegung eines Kugelpaares immer instationär. Da die theoretischen Rechnungen nur für die stationäre Umströmung gelten, sind die in den *Bildern* 7.2 und 7.3 dargestellten Ergebnisse für ungleich große Kugeln nur dann von praktischer Bedeutung, wenn die Kugeln in einem bestimmten Abstand festgehalten werden und das umgebende Medium die Bewegung ausführt.

Experimentell sind die theoretischen Rechnungen für Kugeln mit gleichem Durchmesser von EVERSON, HALL und WARD [7.3], von BART, zitiert in [7.4], sowie von HAPPEL und PFEFFER [7.5], geprüft worden. In *Bild* 7.4 sind die Meßwerte dargestellt. Die Abweichungen von der Kurve, die nach der theoretischen Gleichung von STIMSON und JEFFEREY [7.1] berechnet wurde, betragen nicht mehr als etwa $\pm 2\%$. Es besteht also eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Die höchsten Werte der bei den Versuchen aufgetretenen Reynoldszahlen betragen 0,05 bzw. 0,018 und weisen darauf hin, daß die Versuche mit Sicherheit im Stokesschen Bereich durchgeführt wurden.

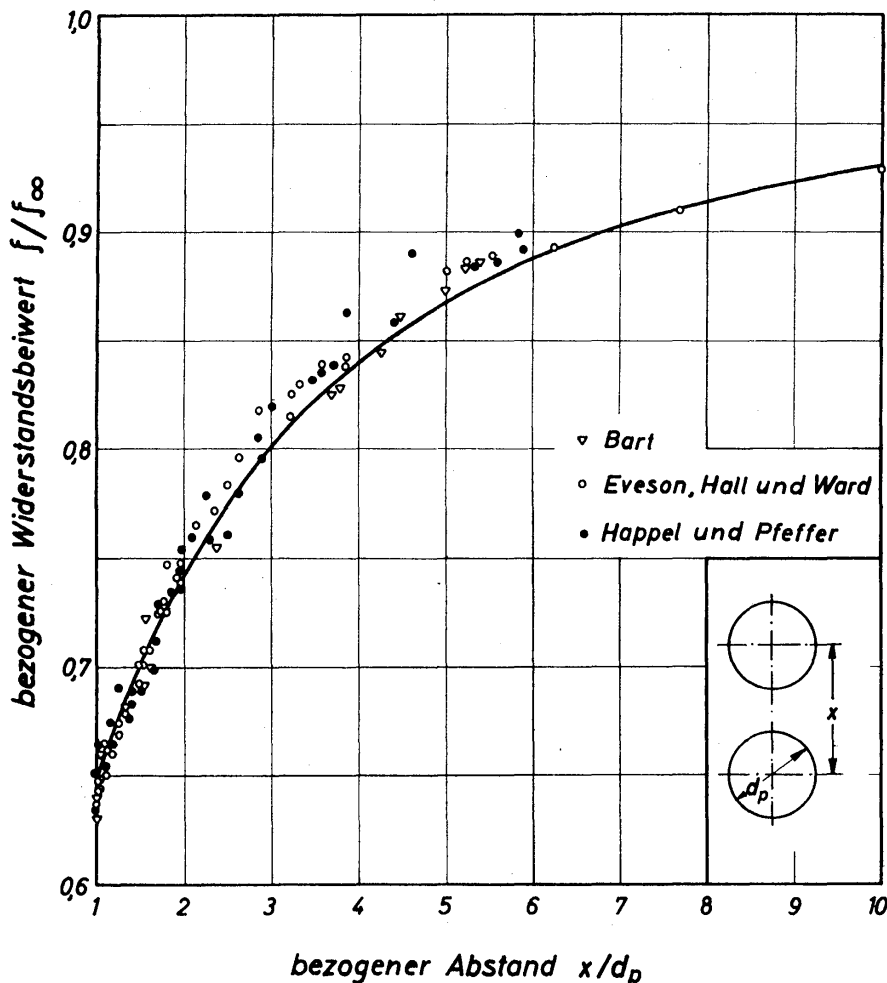


Bild 7.4. Vergleich zwischen theoretisch und experimentell bestimmten Widerstandsbeiwerten von Kugelpaaren mit gleichem Durchmesser

ISAAKYAN und GASPARYAN [7.6] führten ebenfalls Versuche mit Kugelpaaren durch, wobei die Reynoldszahlen jedoch zwischen 0,07 und 1,0 lagen. Die Meßwerte streuten so stark, daß die Autoren sich entschlossen, zunächst die Bewegung von einzelnen Kugeln zu untersuchen. Die Messungen wurden zwischen $Re_s = 0,024$ und $Re_s = 2,78$ durchgeführt. Es wurde beobachtet, daß die Kugel teils geradlinig absank, teils aber auch oszillierende Bewegungen durchführte, wobei Amplitude und Wellenlänge mit der Reynoldszahl zunahmen. Wie bereits im Abschnitt 5.21 erörtert wurde, ist die oszillierende Bewegung im Bereich sehr kleiner Reynoldszahlen auf die Bildung von Ringwirbeln hinter der Kugel zurückzuführen. Da die theoretischen Rechnungen von STOKES derartige Strömungsvorgänge nicht berücksichtigen, ist eine Übereinstimmung mit den genannten Meßwerten auch nicht zu erwarten. Die Versuche von ISAAKYAN und GASPARYAN [7.6] haben gezeigt, daß die obere Gültigkeitsgrenze für die theoretisch bestimmten Widerstandsgesetze nicht höher als $Re_s \approx 0,07$ angenommen werden darf.

Neben dem exakten Verfahren, welches STIMSON und JEFFEREY [7.1] erstmalig anwendeten, wird häufig zur näherungsweise Berechnung des Widerstandes von Kugelpaaren die von SMOLUCHOWSKI [7.7] entwickelte Reflexionsmethode herangezogen. Hierbei ist es nicht möglich, die Randbedingungen an beiden Kugeln gleichzeitig zu erfüllen. Ausgehend von einer getrennten Erfüllung der Randbedingungen wird die gleichzeitige Erfüllung durch wiederholte Reflexion der Geschwindigkeitsfelder angestrebt. Die Zahl der erforderlichen Reflexionen ist um so größer, je kleiner der Kugelabstand ist. Begrenzt man daher den Rechenaufwand auf ein erträgliches Maß, dann erhält man nur im Bereich größerer Werte des bezogenen Abstandes verläßliche Werte für das Verhältnis der Widerstandsbeiwerte. Die Reflexionsmethode ist in der Folge auch von FAXÉN [7.8] sowie von HAPPEL und BRENNER [7.4] zur Berechnung des Widerstandes von Kugelschwärmen angewendet worden. Ähnliche Rechnungen hat auch KYNEH [7.9] durchgeführt.

Die bisherigen Angaben beziehen sich immer auf die Bewegung von Kugelpaaren in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit. SONSHINE und BRENNER [7.10] haben im Gegensatz dazu die Bewegung von zwei und mehr Kugeln gleichen Durchmessers d_p in der Achse eines unendlich langen Zylinders mit dem Durchmesser D theoretisch untersucht. Das Geschwindigkeitsverhältnis hängt dann nicht nur vom Abstandsverhältnis x/d_p , sondern zusätzlich noch vom Durchmesser Verhältnis d_p/D ab.

7.12 Bewegung von zwei Kugeln bei beliebiger Anordnung

Die Anordnung der Kugeln ist in *Bild 7.5* angegeben. Die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ist unter dem Winkel β gegen die Horizontale geneigt. Für $\beta = 90^\circ$ ergibt sich der im voraufgegangenen Abschnitt behandelte Sonderfall der Bewegung beider Kugeln in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte. Für jeden anderen Wert des Winkels β bewegen sich die Kugeln auf parallelen Bahnen. Als

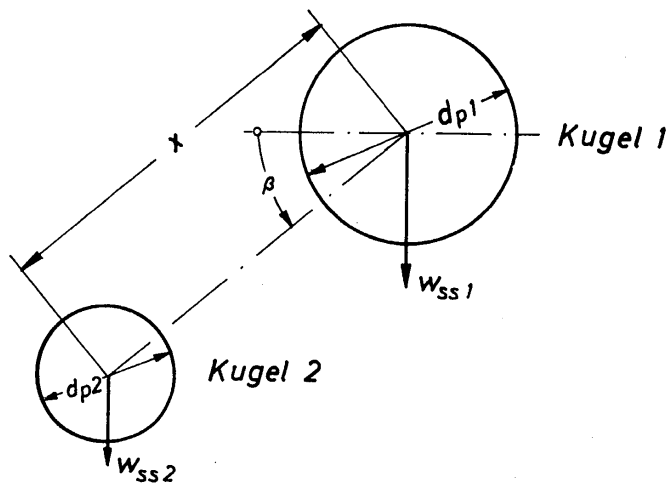


Bild 7.5
Bezeichnungen bei beliebiger
Anordnung eines Kugelpaares

zweiter Sonderfall ergibt sich dabei für $\beta = 0^\circ$ die Bewegung senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte.

Für das Verhältnis der Widerstandsbeiwerte gilt bei beliebiger Anordnung die allgemeine Beziehung:

$$\frac{\zeta_i}{\zeta_{\infty,i}} = f\left(\frac{x}{d_{p,i}}; \frac{d_{p1}}{d_{p2}}; \beta\right). \tag{7.13}$$

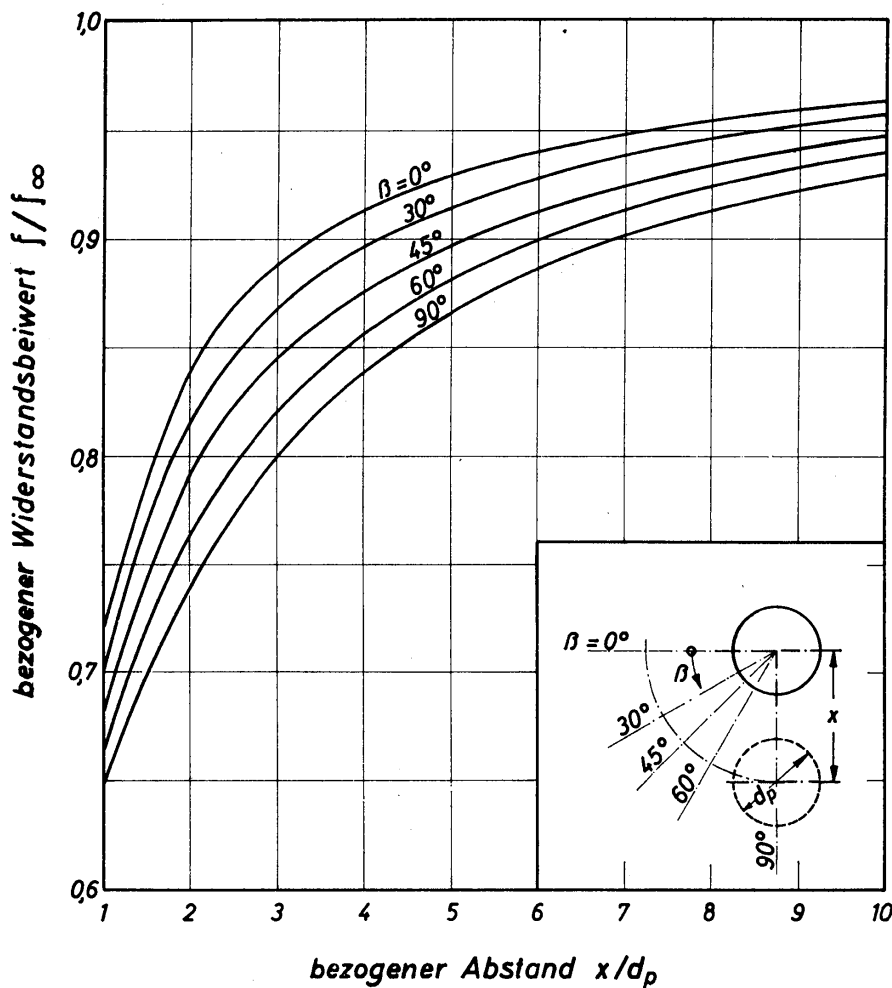
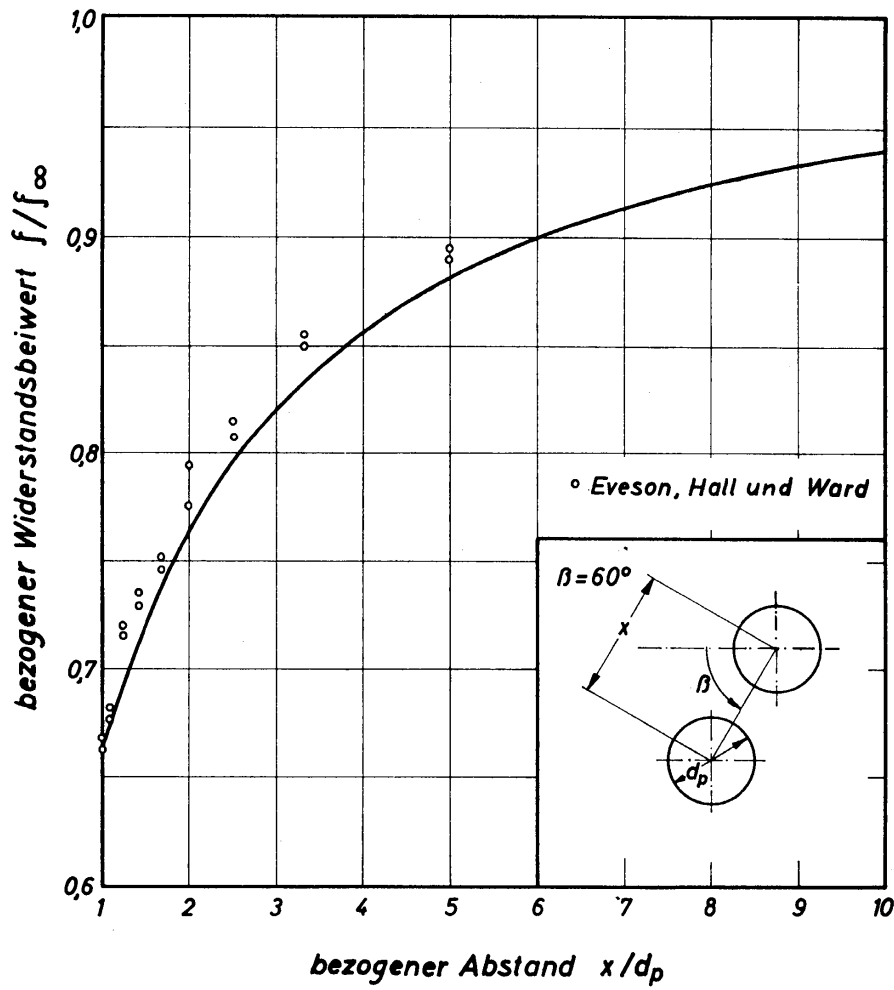


Bild 7.6. Bezogene Widerstandsbeiwerte für zwei gleich große Kugeln, deren Verbindungslinie der Mittelpunkte mit der Horizontalen die Winkel $\beta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ und 90° einschließt



Bilder 7.7 bis 7.10
Vergleich zwischen
den theoretisch
berechneten Kurven
für die bezogenen
Widerstandsbeiwerte
mit Meßwerten bei ver-
schiedenen Winkeln β

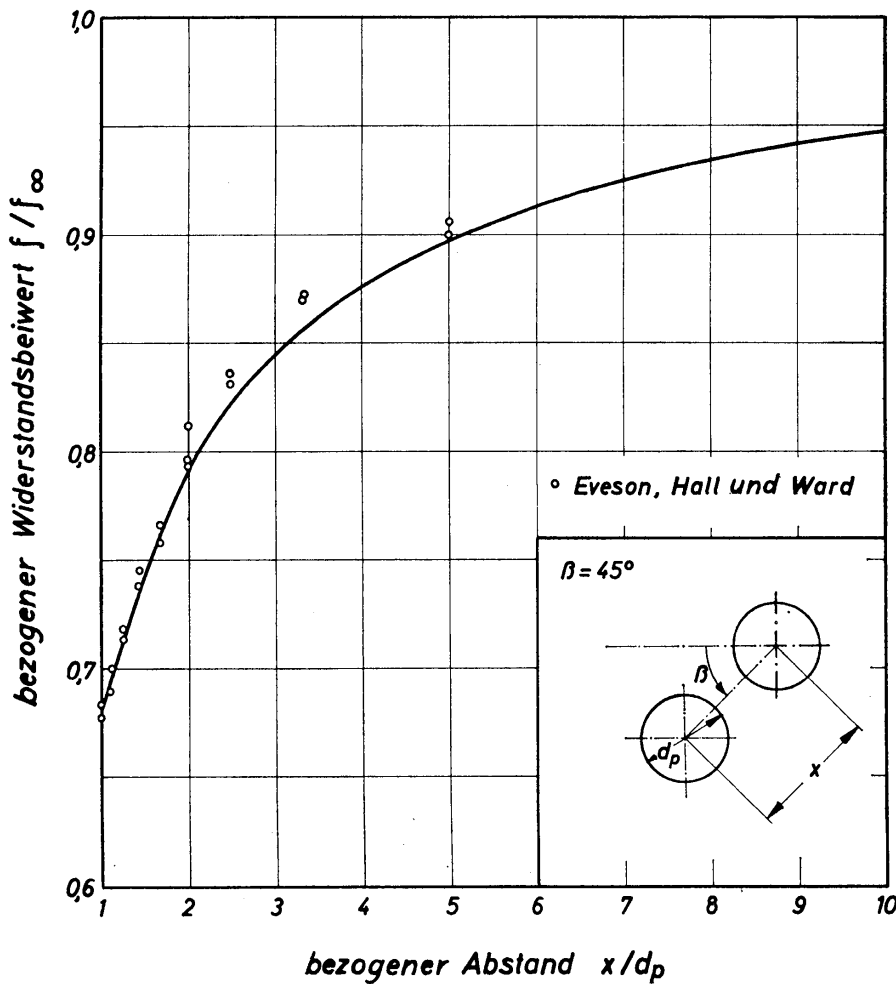


Bild 7.8

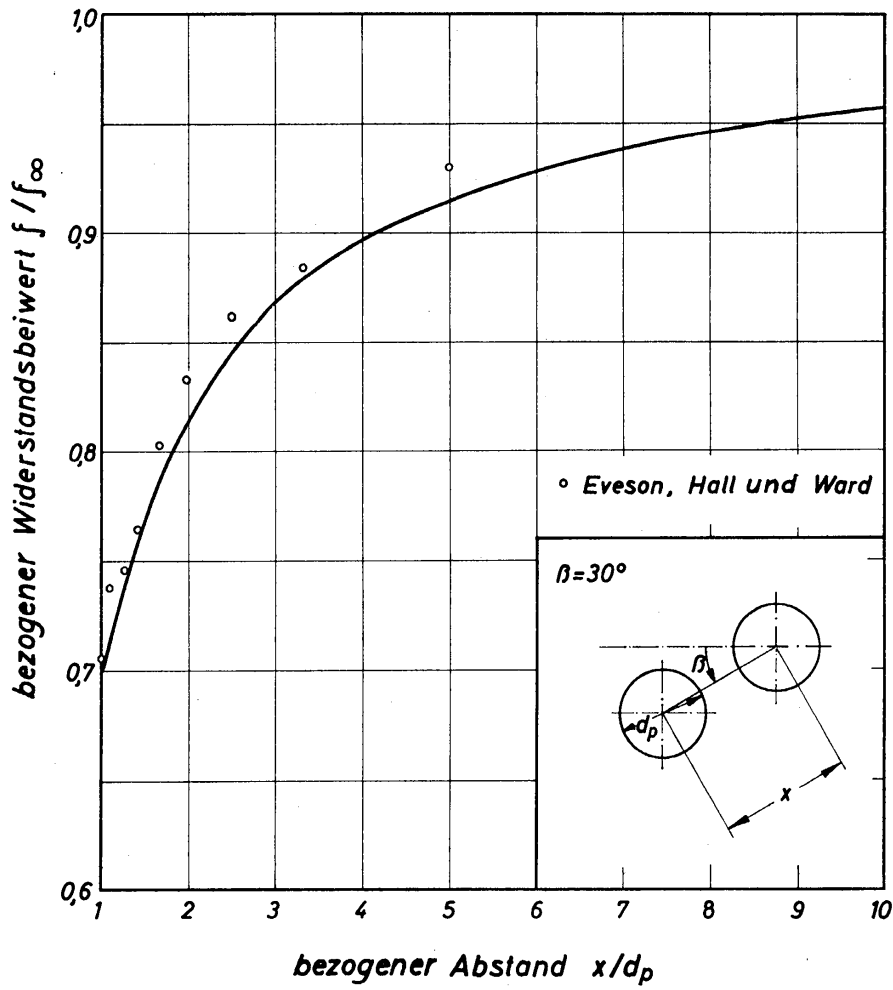


Bild 7.9

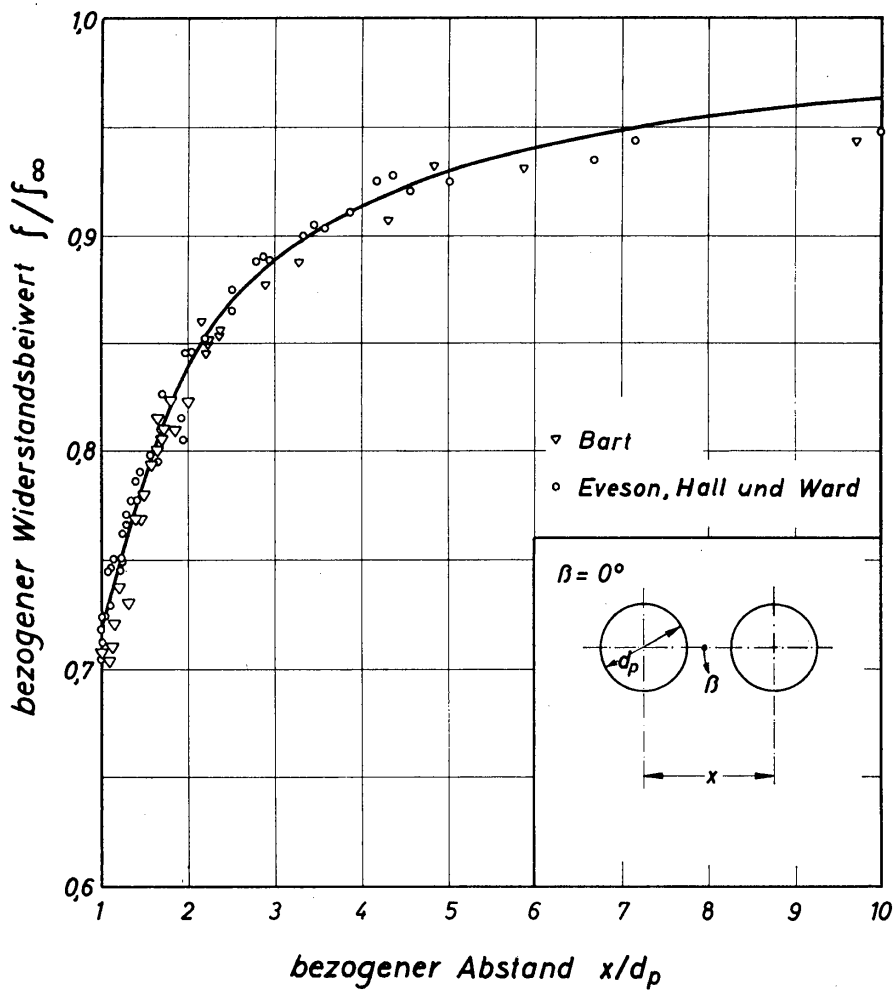


Bild 7.10

Diese wurde von HAPPEL und BRENNER [7.4] mittels der Reflexionsmethode bestimmt. In einer neueren Arbeit haben GOLDMAN, COX und BRENNER [7.11] für den Sonderfall der Kugelbewegung senkrecht zur Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte auch eine exakte Lösung durch Verwendung von Bipolarkoordinaten mitgeteilt. Numerisch ausgewertet wurden die Gleichungen bislang jedoch nur für den Fall, daß die beiden Kugeln den gleichen Durchmesser haben, also $d_{p_1}/d_{p_2} = 1$ ist. Diese Ergebnisse sind in *Bild 7.6* dargestellt. Der größte Widerstand ergibt sich für $\beta = 0^\circ$ und der kleinste für $\beta = 90^\circ$. In den *Bildern 7.7* bis *7.10* sind die theoretischen Ergebnisse mit Versuchswerten von EVESON, HALL und WARD [7.3] verglichen, wobei sich eine sehr gute Übereinstimmung ergibt. Das Verhältnis der Widerstandsbeiwerte für die bisher gewählten Winkel kann auf den Winkelbereich von $\beta = 0^\circ$ bis $\beta = 360^\circ$ ausgedehnt werden, da die Umströmung der Kugeln symmetrisch zur Bewegungsrichtung erfolgt. In *Bild 7.11* ist ζ/ζ_∞ , abhängig vom Winkel β , für einige Werte des bezogenen Abstandes x/d_p aufgetragen. Die Kurven zeigen einen sinusförmigen Verlauf, wobei die Amplitude mit dem Abstandsverhältnis veränderlich ist. Dies geht sehr deutlich aus *Bild 7.12* hervor, in dem die Differenz $(\zeta/\zeta_\infty)_{\max} - (\zeta/\zeta_\infty)_{\min}$ über dem bezogenen Abstand x/d_p aufgetragen ist. Sie ist für $x/d_p = 1$ gleich 0,07, steigt mit zunehmendem Abstand zunächst an, durchläuft bei $x/d_p = 2,1$ ein Maximum mit 0,097 und nimmt dann wieder ab.

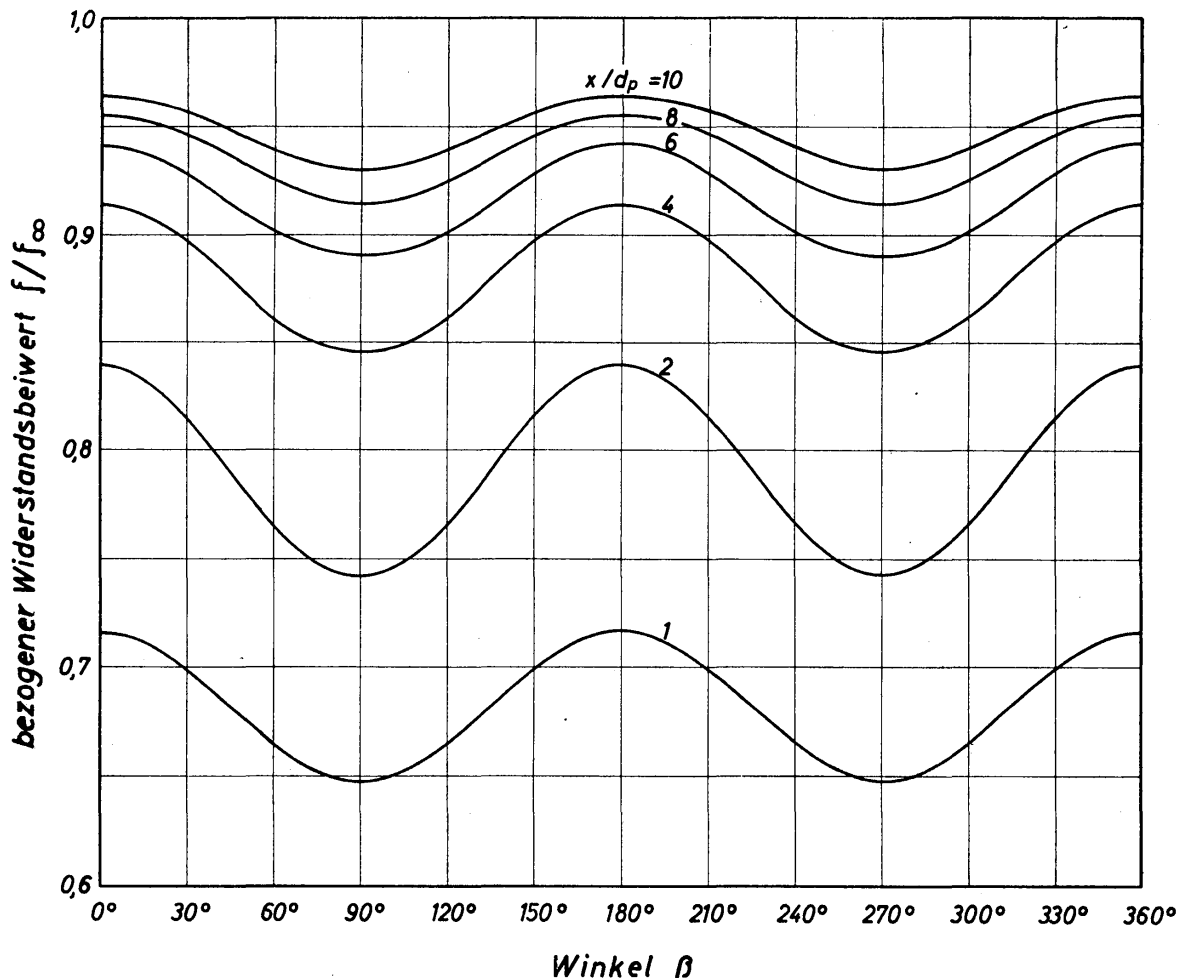


Bild 7.11. Bezogene Widerstandsbeiwerte für zwei gleich große Kugeln, abhängig vom Winkel β für verschiedene Werte von x/d_p

Diese Hinweise haben bereits deutlich werden lassen, daß die Anordnung der Kugeln im Schwarm für deren Widerstand von maßgeblicher Bedeutung ist. Da bislang nur die einfachste Form eines Schwarmes, nämlich ein Kugelpaar, behandelt wurde, kann man sich leicht vorstellen, wie verwickelt die Zusammenhänge bei Schwarmbewegungen unter den technisch üblichen Bedingungen werden. Dabei ist noch zu bedenken, daß die numerische Auswertung von Gleichungen für Kugelpaare bereits sehr große Digitalrechner erfordert und die hierbei noch auftretenden Rechenzeiten wirtschaftlich kaum vertretbar sind. Immerhin haben die bislang durchgeführten Rechnungen einen wertvollen Einblick in die Grundgesetze der Schwarmbewegung geliefert. Sie sind, was nochmals betont sei, an die schleichende Bewegung gebunden.

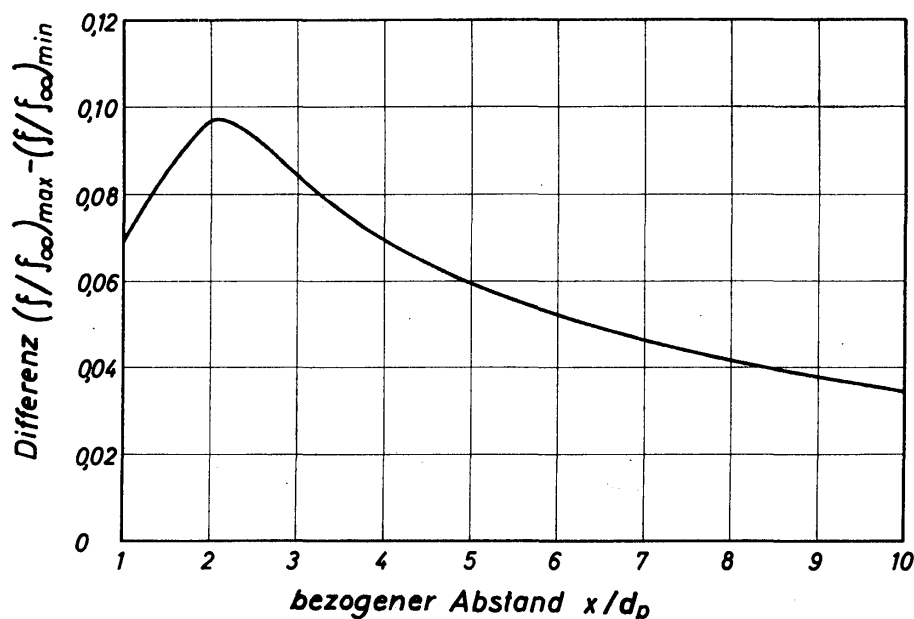


Bild 7.12. Differenz der Maxima und Minima der bezogenen Widerstandsbeiwerte, abhängig vom bezogenen Abstand

Einen Einblick in das Verhalten von Kugelpaaren mit $d_{p1}/d_{p2} = 1$ bei höheren Reynoldszahlen vermitteln einige von ROWE und HENWOOD [7.12] mitgeteilte Ergebnisse aus Versuchen bei $Re_s = 96$, die in *Bild 7.13* dargestellt sind. Auffallend ist, daß bei $\beta = 90^\circ$ ein wesentlich geringerer Widerstand auftritt als bei $\beta = 270^\circ$. Dieser Sachverhalt weist darauf hin, daß die Widerstände der beiden Kugeln trotz gleichen Durchmessers nicht mehr gleich sind. Bei $Re_s = 96$ bildet sich hinter der Kugel bereits eine Wirbelschlepe aus, die für den hohen Widerstand verantwortlich ist. Die in *Bild 7.13* dargestellten Kurven geben den Widerstand von Kugel 1 an. Bei $\beta = 90^\circ$ liegt Kugel 1 hinter Kugel 2 und besitzt daher einen sehr geringen Widerstand; bei $\beta = 270^\circ$ liegt Kugel 1 jedoch vor Kugel 2 und besitzt für $x/d_p = 1,08$ einen etwa doppelt so großen Widerstand. Ferner sei darauf aufmerksam gemacht, daß ζ/ζ_∞ bei $\beta = 0^\circ$ und $\beta = 180^\circ$ größer ist als 1, wohingegen bei schleichender Bewegung gemäß *Bild 7.12* das Verhältnis der Widerstandsbeiwerte stets kleiner als 1 ist.

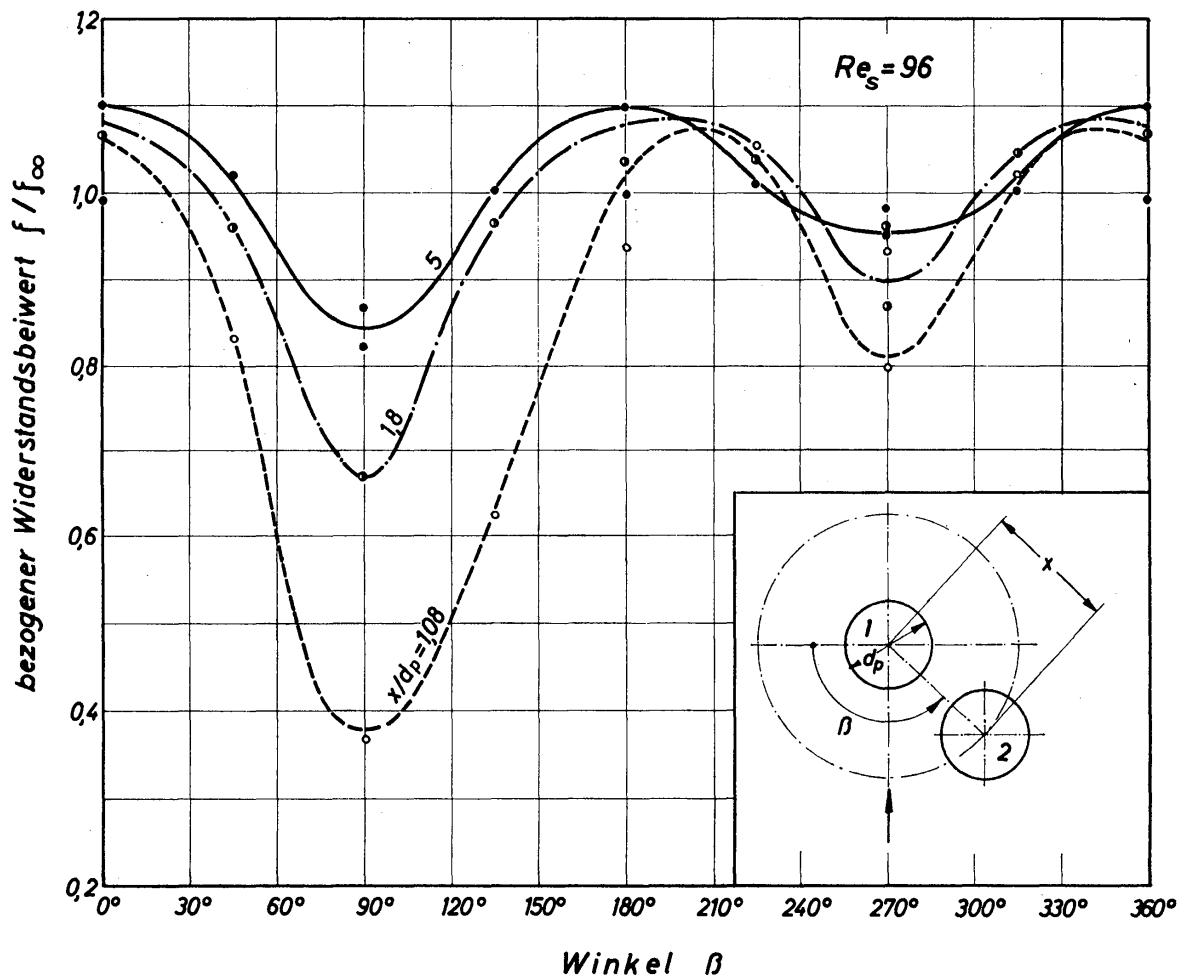


Bild 7.13. Experimentell bestimmte Widerstandsbeiwerte für gleich große Kugeln, abhängig vom Winkel β bei einer Reynoldszahl von $Re_s = 96$

7.13 Partikelbewegung in stark verdünnten Suspensionen

Stellt man sich vor, daß innerhalb eines Fluids Partikeln von gleichem Durchmesser gleichmäßig verteilt enthalten sind, dann läßt sich das Gasvolumen in z würfelförmige Elemente mit dem Volumen V unterteilen, in denen sich jeweils eine Partikel mit dem Volumen V_p befindet. Ist die Kantenlänge des Würfels x und der Partikeldurchmesser d_p , dann ist die Volumkonzentration

$$c = \frac{\pi/6}{(x/d_p)^3} \quad (7.14)$$

Hierin ist x/d_p der bezogene Abstand der Partikelmittelpunkte, der im vorangegangenen Abschnitt als maßgebende Einflußgröße für den Widerstand bzw. für die Geschwindigkeit einer im Schwarm befindlichen Partikel auftrat. *Tabelle 7.1* zeigt die Abnahme der Konzentration c mit zunehmendem Abstandsverhältnis x/d_p . Bei einem Abstandsverhältnis von $x/d_p = 4$ ist die Konzentration bereits kleiner als 1% und für $x/d_p = 10$ erheblich kleiner als 0,1%. Damit werden aber bereits Konzentrationswerte erreicht, die bei der Sedimentation zur Korngrößenanalyse auftreten. Üblicherweise nimmt man dabei an, daß die Geschwindigkeit der Partikel dem Stokesschen Gesetz gehorcht, und berechnet dann den

zugehörigen Durchmesser. Die Rechnungen im vorangegangenen Abschnitt, siehe *Bilder 7.2* und *7.3*, haben aber gezeigt, daß die im Schwarm befindlichen Körner eine größere Geschwindigkeit besitzen. Man muß daher erwarten, daß die mittels der Sedimentationsanalyse ermittelten Partikeldurchmesser möglicherweise falsch sind. Genaueren Aufschluß können nur Versuche liefern, bei denen die Sinkgeschwindigkeit von Partikeln, die sich in einer Suspension befinden, gemessen werden.

Tabelle 7.1: Abhängigkeit der Konzentration c und des Geschwindigkeitsverhältnisses w_{ss}/w_s vom Abstandsverhältnis x/d_p

x/d_p	c	w_{ss}/w_s ¹
1	$5,24 \cdot 10^{-1}$	1,55
2	$6,45 \cdot 10^{-2}$	1,35
4	$8,18 \cdot 10^{-3}$	1,19
6	$2,42 \cdot 10^{-3}$	1,12
8	$1,02 \cdot 10^{-3}$	1,10
10	$5,23 \cdot 10^{-4}$	1,08

¹ $w_{ss}/w_s = \zeta_{\infty}/\zeta$ nach Bild 7.2, Kurve für $d_{p1}/d_{p2} = 1$.

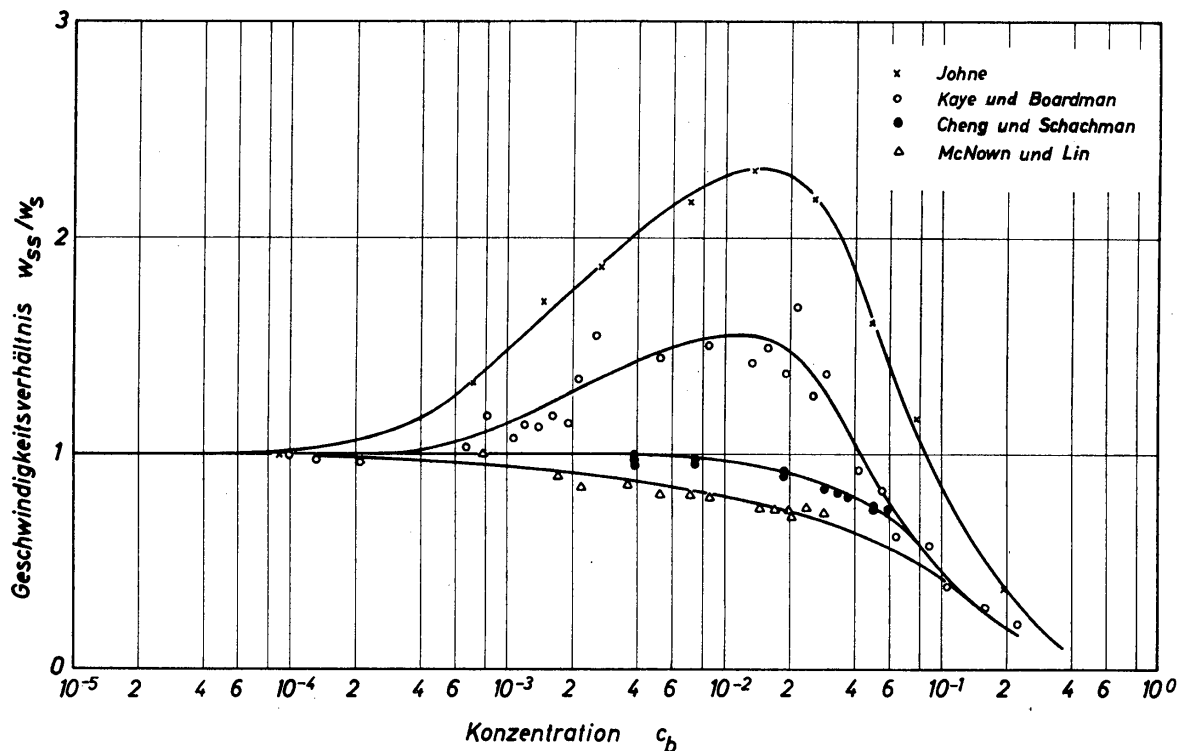
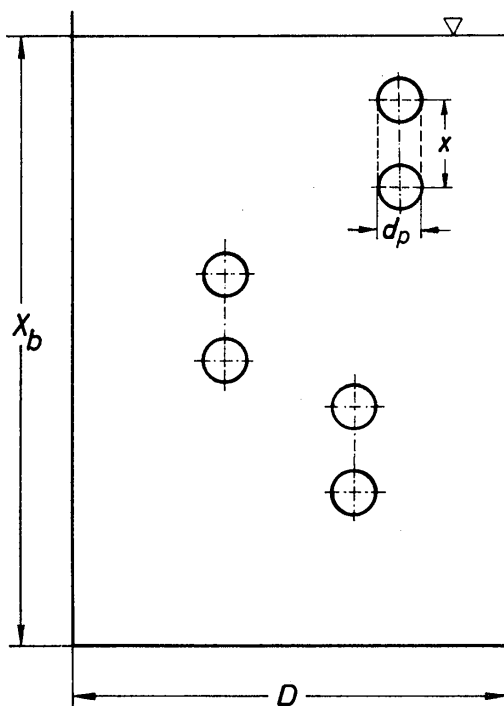


Bild 7.14. Experimentelle Ergebnisse des Geschwindigkeitsverhältnisses w_{ss}/w_s , abhängig von der Konzentration c der Suspension

In *Bild 7.14* sind experimentell ermittelte Werte des Geschwindigkeitsverhältnisses w_{ss}/w_s , abhängig von der Konzentration c_b , der in einem Behälter befindlichen Suspension dargestellt. Die Partikeln in den für eine Versuchsreihe verwendeten Suspensionen hatten den gleichen Durchmesser; derartige Suspensionen

werden Gleichkornsuspensionen genannt. Die Versuchsergebnisse haben **JOHNE** [7.13], **KAYE** und **BOARDMAN** [7.14], **CHENG** und **SCHACHMAN** [7.15] sowie **McNOWN** und **LIN** [7.16] mitgeteilt. Die beiden letztgenannten Verfassergruppen haben mit zunehmender Konzentration eine stetige Abnahme des Geschwindigkeitsverhältnisses festgestellt. In Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen für Kugelpaare haben aber **JOHNE** sowie **KAYE** und **BOARDMAN** beobachtet, daß das Geschwindigkeitsverhältnis w_{ss}/w_s mit zunehmender Konzentration ansteigt. Zu dem gleichen Ergebnis führten auch Versuche von **KNEULE** und **WEINSPACH** [7.17]. Wegen fehlender Angaben ließen sich die Meßwerte aber nicht in *Bild 7.14* eintragen. Im Gegensatz zur Theorie durchläuft das Geschwindigkeitsverhältnis jedoch bei einer bestimmten Konzentration ein Maximum und wird dann wieder kleiner. Das Maximum liegt für beide Versuchsreihen bei einer Konzentration von etwa $1 \cdot 10^{-2}$ bis $2 \cdot 10^{-2}$. Der Kurvenverlauf jenseits des Maximums wird im folgenden Abschnitt näher behandelt. An dieser Stelle soll allein der Kurvenabschnitt vor Erreichen des Maximums erörtert werden.

Zur Begründung des Kurvenverlaufs mit steigendem Geschwindigkeitsverhältnis wird ein Suspensionsmodell gewählt, welches gemäß *Bild 7.15* aus Kugelpaaren



aufgebaut ist. Zur Vereinfachung wurden nur drei Kugelpaare eingezeichnet; ferner wurde die einfachste Kugelanordnung gewählt. In einer wirklichen Suspension können natürlich beliebige Anordnungen der Kugeln auftreten. Es wird sich aber zeigen, daß mit der hier ausgewählten Anordnung bereits die wichtigsten Aussagen über die Vorgänge in einer Suspension gemacht werden können.

Bild 7.15. Aufbau des Modells einer Gleichkornsuspension mit Kugelpaaren

Die Suspension befindet sich in einem Behälter mit quadratischer Querschnittsfläche, dessen Kantenlänge D ist. Die Füllhöhe ist x_b . Ein Kugelpaarelement hat die Höhe x und die Querschnittsfläche d_p^2 . Innerhalb eines Elementes befindet sich eine einzige Partikel. Die Konzentration c_e des Elementes ist dann durch die Beziehung

$$c_e = \frac{d_p^3 \pi / 6}{d_p^2 x} = \frac{\pi}{6} \frac{d_p}{x} \quad (7.15)$$

gegeben. Die maximale Konzentration eines Elementes ergibt sich bei $x/d_p = 1$ zu $c_{e_{\max}} = 0,524$.

In dem Behälter befinden sich so viele Kugelpaarelemente n_e , daß die Behälterkonzentration

$$c_b = n_e \frac{d_p^3 \pi / 6}{D^2 x_b} \quad (7.16)$$

erreicht wird. Der Zusammenhang zwischen den Konzentrationen c_e und c_b soll durch den Ansatz

$$c_e = K_v c_b \quad (7.17)$$

erfaßt werden, wobei K_v eine Volumkennzahl ist. Hierfür folgt mittels der letzten drei Gleichungen

$$K_v = \frac{1}{n_e} \frac{x_b}{x} \left(\frac{D}{d_p} \right)^2. \quad (7.18)$$

Die Volumkennzahl enthält die charakteristischen Abmessungen des Elementes und des Behälters sowie die Zahl n_e der Elemente. Gemäß Gl. (7.17) ist es möglich, daß sich bei konstanter Behälterkonzentration c_b ganz verschiedene Konzentrationen c_e des Kugelpaarelementes ergeben, je nach dem, wie groß die Volumkennzahl ist. Maßgebend für das Geschwindigkeitsverhältnis w_{ss}/w_s ist die Konzentration c_e , die nach Gl. (7.15) von dem bezogenen Abstand x/d_p abhängt. Ermittelt man also aus den letzten Gleichungen x/d_p , dann läßt sich $w_{ss}/w_s = \zeta/\zeta_\infty$ aus *Bild 7.2* entnehmen.

Das Geschwindigkeitsverhältnis w_{ss}/w_s ist eine Funktion der Behälterkonzentration c_b und zusätzlich eine Funktion der Volumkennzahl K_v . Diese Zusammenhänge gehen aus *Bild 7.16* hervor. Das Geschwindigkeitsverhältnis steigt mit der Behälterkonzentration c_b an und ist um so größer, je größer die Volumkennzahl K_v ist. Für $x/d_p = 1$ erreicht das Geschwindigkeitsverhältnis sein Maximum, welches für Kugelpaare mit der gewählten Anordnung gleich 1,55 ist.

Durch Vergleich von *Bild 7.16* mit *Bild 7.14* erkennt man sofort, daß die experimentell ermittelten Werte in jedem Falle noch durch einen bestimmten Wert der Volumkennzahl K_v gekennzeichnet werden müßten. Darüber hinaus ist aber wenigstens noch eine weitere Kennzahl von Bedeutung, die darüber Aufschluß gibt, in welcher Form die Kugeln innerhalb eines Elementes der Suspension angeordnet sind. Bei Kugelpaaren müßte also noch zusätzlich der Winkel β berücksichtigt werden. Erheblich verwickelter werden die Verhältnisse noch, wenn ein Schwarm nicht nur aus zwei, sondern aus mehr als zwei Kugeln gebildet wird. SMOLUCHOWSKI [7.7] hat bereits gefunden, daß die Geschwindigkeit einer Partikel bei schleichender Strömung um so größer ist, je mehr benachbarte Partikeln die Bewegung beeinflussen. Die experimentellen Ergebnisse von JOHNE [7.13] deuten z. B. darauf hin, daß bei seinen Versuchen Schwärme auftreten, die in jedem Falle aus mehr als zwei Partikeln bestanden.

Die große Zahl der maßgebenden Einflußgrößen hat JOHNE [7.13] veranlaßt, für das Geschwindigkeitsverhältnis eine Gleichung mittels der Gesetze der Statistik

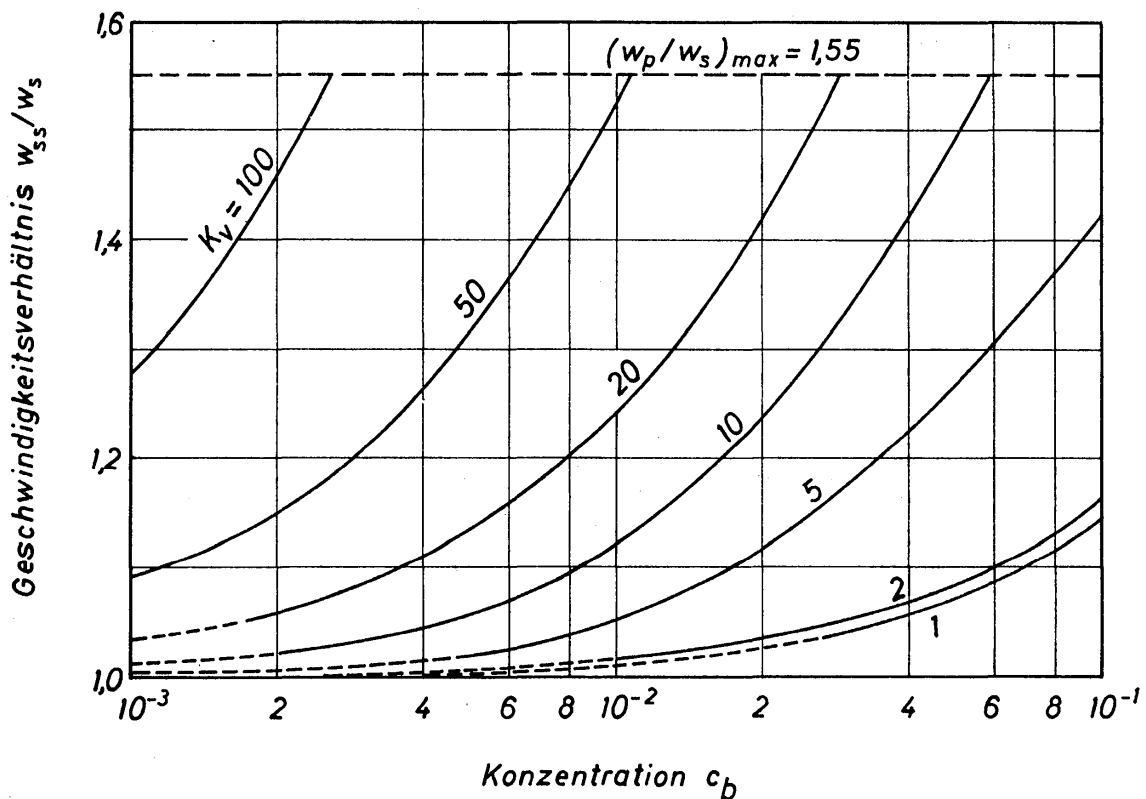


Bild 7.16. Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverhältnisses w_{ss}/w_s von der Behälterkonzentration c_b für verschiedene Werte der Volumenzahl K_v

aufzustellen. Der damit eingeschlagene Weg hat, was die bisher vorliegenden Ergebnisse erkennen lassen, noch zu keinem praktisch bedeutsamen Erfolg geführt. Die angewendete Methode scheint aber entwicklungsfähig zu sein.

Die in *Bild 7.14* dargestellten Versuchsergebnisse ließen erkennen, daß das Geschwindigkeitsverhältnis im Bereich großer Behälterkonzentrationen wieder abnimmt. Für diesen Bereich werden die Bewegungsvorgänge im nächsten Abschnitt näher untersucht. Dabei wird unter anderem auch die von den absinkenden Partikeln hervorgerufene Gegenströmung eine bedeutsame Rolle spielen. Berücksichtigt man die Gegenströmung auch bei dem eben behandelten Suspensionsmodell, dann ergibt sich in qualitativer Form auch die experimentell gefundene Änderung des Geschwindigkeitsverhältnisses für den gesamten Konzentrationsbereich.

Abschließend sei nochmals darauf hingewiesen, daß bislang nur die Bewegungsvorgänge in einer Gleichkornsuspension behandelt wurden. In der technischen Praxis treten jedoch vornehmlich Mehrkornsuspensionen auf, in denen Körner mit verschiedenen großen Durchmessern enthalten sind. Es ist bislang noch nicht zu erkennen, welche Form die Gesetze für das Geschwindigkeitsverhältnis der einzelnen Körner im Bereich sehr niedriger Konzentrationen annehmen werden. Im Gegensatz dazu sind die Gesetze im Bereich hoher Konzentrationen offensichtlich leichter zu erarbeiten.

7.2 Partikelbewegung bei hohen Konzentrationen

In diesem Abschnitt sollen Gesetze für die Schwarmbewegung von Partikeln bei hoher Konzentration aufgestellt werden. Dabei wird zur Vereinfachung angenommen, daß die Partikeln in einem mit Flüssigkeit gefüllten Gefäß absinken und am Gefäßboden eine Sedimentschicht bilden. Dieser Vorgang ist für die Sedimentation von erheblicher praktischer Bedeutung. Er bildet weiterhin die Grundlage für die Schwarmbewegung in strömenden Medien, worauf in einem gesonderten Abschnitt eingegangen wird.

7.21 Modell einer Zweikornsuspension

In einer Zweikornsuspension befinden sich Körner von zwei verschiedenen Größen. Für eine solche Suspension haben BRAUER und KRIEDEL [7.18] ein Modell entwickelt, mit dessen Hilfe die Sinkgeschwindigkeiten der im Schwarm befindlichen Kornfraktionen berechnet werden können. Als Sonderfall ergibt sich hierbei auch die Sinkgeschwindigkeit für die in einer Gleichkornsuspension befindlichen Körner, die alle den gleichen Durchmesser haben.

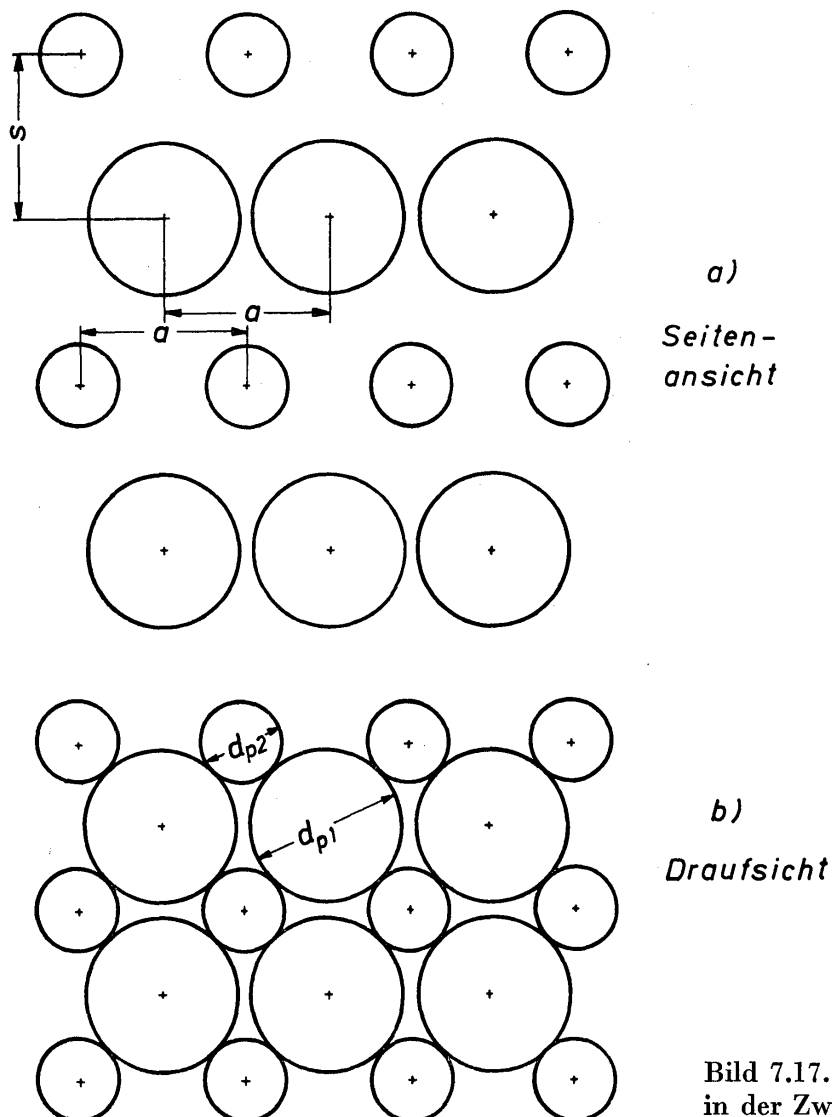
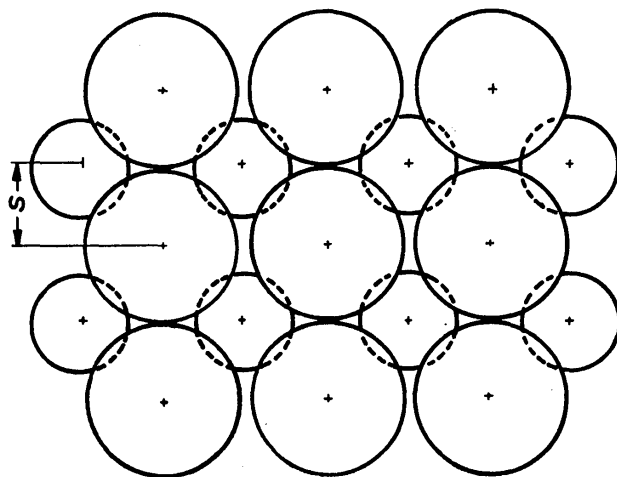


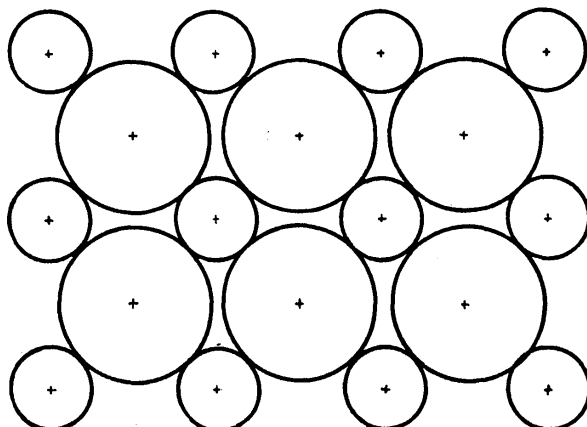
Bild 7.17. Anordnung der Körner in der Zweikornsuspension

Wegen der stochastischen Natur der Bewegung von Partikelschwärmen sind Zweifel an der Brauchbarkeit eines einfachen geometrischen Modells, durch das die Anordnung der Partikel im Schwarm und damit auch die Fluidbewegung festgelegt wird, sicherlich gerechtfertigt. Man ist eher geneigt, die für stochastische Vorgänge maßgebenden Wahrscheinlichkeitsgesetze den Untersuchungen zugrunde zu legen. Indes wird ein einfaches geometrisches Modell von der Anordnung der Partikel im Schwarm stets dann Rechtfertigung erlangen, wenn innerhalb eines Schwarms eine bestimmte Nahordnung der Partikel von überragender Bedeutung wird. Damit ist aber zu rechnen, wenn die Konzentration der Partikel in der Suspension einen bestimmten Mindestwert überschreitet. Denn dadurch wird die Regellosigkeit der Partikelordnung im Schwarm in zunehmendem Maße eingeschränkt. Unter dieser Bedingung bietet ein geometrisches Modell der Suspension die einfachste Möglichkeit zur mathematischen Beschreibung der Schwarmbewegung.

Wie aus *Bild 7.17* ersichtlich, sind die beiden Korngrößen im Anfangszustand der Sedimentation gleichmäßig in der Suspension verteilt. Der Einfachheit halber wurden die Körner als Kugeln gezeichnet. Die Anordnung der Körner ist so gewählt, daß Schichten von kleinen und großen Körnern mit gleichbleibendem Abstand s in regelmäßiger Folge abwechseln. Von Schicht zu Schicht sind die Körner versetzt, so daß sich jeweils gleich große Körner senkrecht übereinander befinden. Der Abstand a der Körner in jeder Schicht ist gerade so groß, daß die



a)
Seiten-
ansicht



b)
Draufsicht

Bild 7.18
Anordnung der Körner im Sediment

Körner der anderen Schicht in die Zwischenräume passen. Diese Anordnung der Körner wird durch die in *Bild 7.17* gezeigte Draufsicht veranschaulicht. In dieser Weise sind auch die Körner im Sediment angeordnet, was aus *Bild 7.18* hervorgeht, in dem vom Sediment eine Seitenansicht und eine Draufsicht dargestellt ist. Dabei sollen sich die Körner nur in senkrechter Richtung bewegen. Die Erhöhung der Konzentration tritt nur dadurch ein, daß sich der Schichtenabstand s verringert. Eine ungleichmäßige Verteilung, z. B. die Bildung von Kornballen, wird dabei ausgeschlossen.

Die Konzentration der Suspension zu Beginn der Sedimentation wird durch den Abstand der Schichten der Körner bestimmt. Die größte Konzentration des Sediments ist dann erreicht, wenn sich die Schichten so weit genähert haben, daß sich die großen Körner in der Ebene der kleinen berühren. Bezeichnet man die Durchmesser der großen und kleinen Körner mit d_{p1} und d_{p2} , den Abstand der Schichten mit s sowie den Abstand zweier Körner innerhalb einer Schicht mit a ,

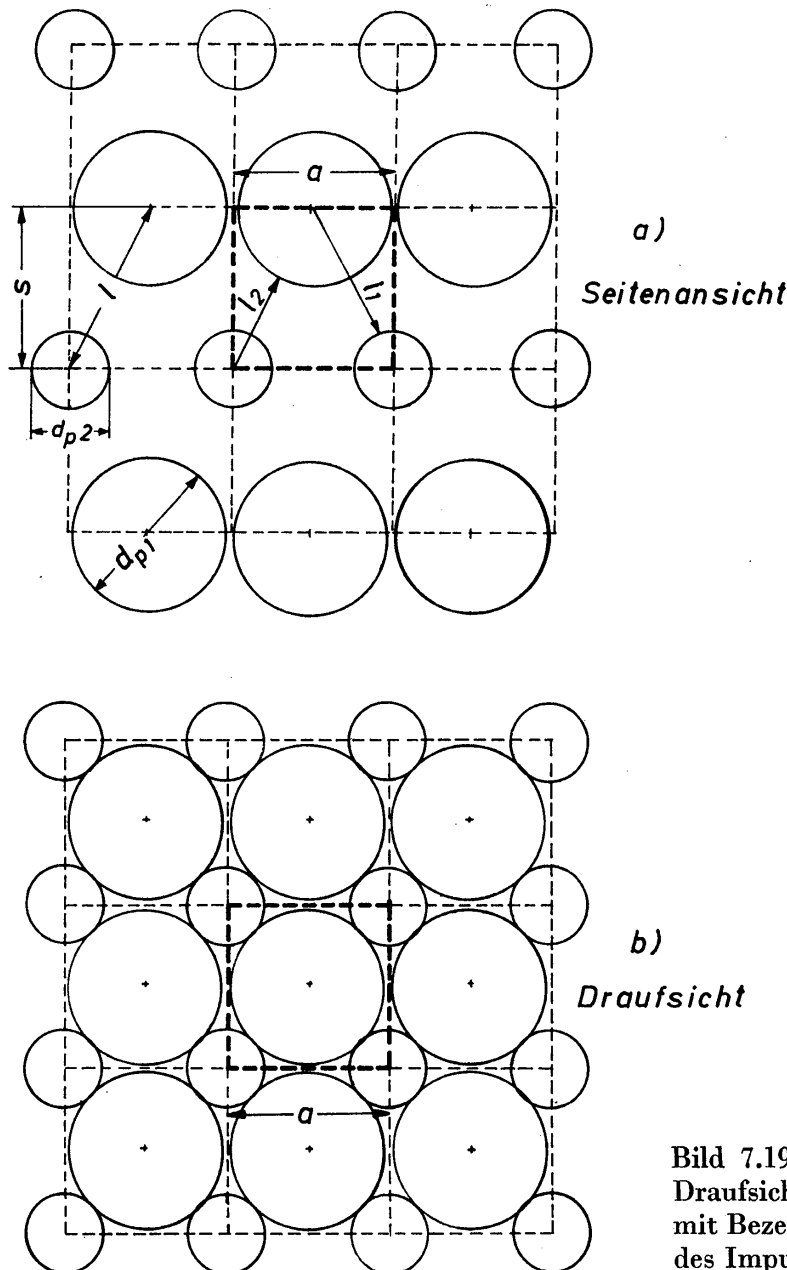


Bild 7.19. Seitenansicht und Draufsicht der Suspensionselemente mit Bezeichnungen zur Berechnung des Impulsaustausches

dann lassen sich damit das dimensionslose Durchmesser Verhältnis $d_{p_1}/d_{p_2} \equiv d^*$ und die Abstandsverhältnisse $s/d_{p_1} \equiv s^*$ und $a/d_{p_1} \equiv a^*$ bilden.

Für die folgenden Rechnungen ist es erforderlich, ein repräsentatives Element der Suspension zu betrachten. Dabei muß die Forderung erfüllt werden, daß sich das Element nach allen Seiten hin in die Suspension fortsetzen läßt. Ferner muß es stets die gleiche Konzentration c besitzen wie die Suspension. In *Bild 7.19* wurde eines der Elemente stark, die übrigen wurden schwach gestrichelt eingezeichnet. Die Länge der Grundkante des Elementes ist gleich dem Kornabstand a und die Seitenkante gleich dem Schichtenabstand s . Weiter bedeuten l den Abstand der Mittelpunkte von zwei verschieden großen Kugeln sowie l_1 und l_2 die Abstände vom Mittelpunkt bis zur Oberfläche der anderen Kugel. Jedes Element enthält ein halbes großes und ein halbes kleines Korn. Aus einem solchen Element läßt sich die gesamte Zweikornsuspension aufbauen, so daß deren Eigenschaften auch in jeder Hinsicht gleich denen des Elementes sind. Für $d^* \equiv d_{p_1}/d_{p_2} = 1$ geht die Zweikornsuspension in die Gleichkornsuspension über.

Auf einige besondere Eigenschaften des Suspensionselementes sei im Zusammenhang mit *Bild 7.20* eingegangen, in dem für einige Fälle die Draufsicht vom Element dargestellt ist. *Bild 7.20a* zeigt zunächst den Sonderfall, daß $a^* \equiv a/d_{p_1} = 1$ und ferner $d^* \equiv d_{p_1}/d_{p_2} = 2,415$ ist, wie sich mittels der geometrischen Verhältnisse leicht nachprüfen läßt. Ist gemäß *Bild 7.20b* weiterhin $a^* = 1$, d_{p_2} aber so klein im Vergleich zu d_{p_1} , daß sich die Kugeln in der Draufsicht nicht mehr berühren, so muß folglich $d^* > 2,415$ sein. Im dritten Falle, der in *Bild 7.20c* dargestellt ist, berühren sich zwar die Kugeln, doch ist d^* kleiner als 2,415 und nur das Abstandsverhältnis $a^* = a/d_{p_1}$ größer als 1. Ist also, wie in den *Bildern 7.20a* und *7.20b*, $a^* = 1$ und $d^* \geq 2,415$, so bilden die großen Kugeln ein Gitternetz mit kleinstem Abstandsverhältnis, durch welches die kleineren Kugeln hindurchfallen. In senkrechter Richtung ist der Abstand zwischen zwei Schichten gemäß *Bild 7.17* gleich s . Der kleinste Wert des Abstandsverhältnisses $s^* \equiv s/d_{p_1}$ ist gleich 0,5.

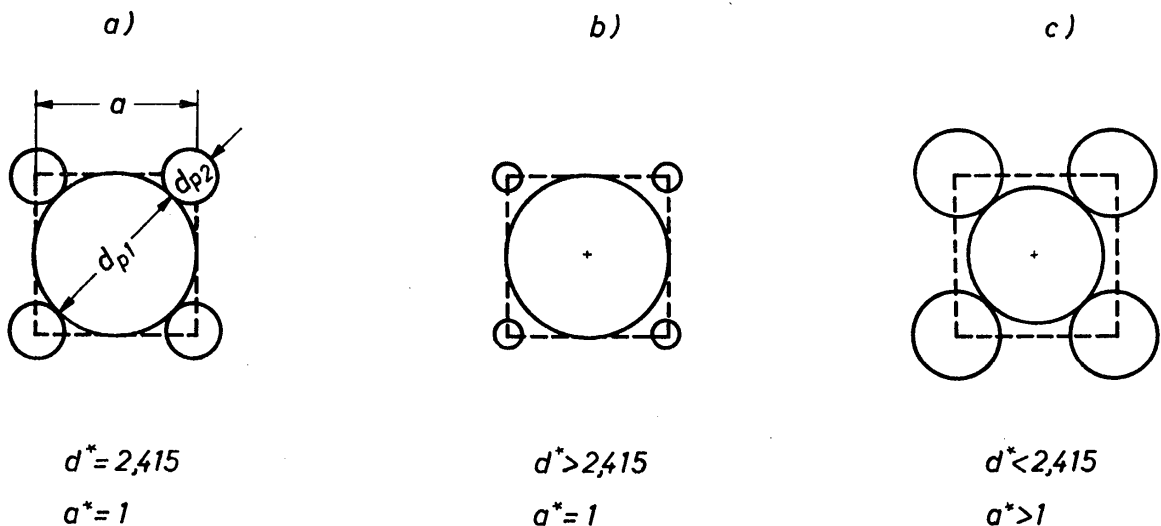


Bild 7.20. Draufsicht auf ein Suspensionselement für verschiedene Verhältnisse der Korngrößen (Erläuterung im Text)

Zur Kennzeichnung des Feststoffgehaltes in der Suspension dient die Konzentration c , die in einem einfachen Zusammenhang mit dem Lückengrad ε steht:

$$c = \frac{V_p}{V} = 1 - \varepsilon. \quad (7.19)$$

Es bedeuten V_p das Feststoffvolumen innerhalb der Suspension bzw. des Suspensionselementes und V das Volumen der Suspension bzw. des Elementes. Da sich innerhalb eines Elementes stets eine halbe große und eine halbe kleine Kugel befindet, ist V_p gegeben durch

$$V_p = \frac{1}{2} \left(d_{p_1}^3 \cdot \frac{\pi}{6} + d_{p_2}^3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12} (d_{p_1}^3 + d_{p_2}^3). \quad (7.20)$$

Für das Volumen des Elementes gilt

$$V = a^2 s. \quad (7.21)$$

Damit folgt als allgemeine Beziehung für die Konzentration:

$$c = \frac{\pi}{12} \frac{d^{*3} + 1}{d^{*3} a^{*2} s^*}. \quad (7.22)$$

Ist gemäß den *Bildern 7.20a* und *7.20b* das Abstandsverhältnis $a^* = 1$, wobei zwangsläufig $d^* \geq 2,415$ wird, so ergibt sich die Konzentration zu

$$c = \frac{\pi}{12} \frac{d^{*3} + 1}{d^{*3} s^*}. \quad (7.23)$$

Ist indes, wie in *Bild 7.20c*, $a^* > 1$ und somit $d^* < 2,415$, so läßt sich mit der geometrischen Beziehung

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{d_{p_1}}{2} + \frac{d_{p_2}}{2}\right)^2 \quad (7.24)$$

der Ausdruck

$$a^* = \frac{(d^* + 1)^2}{2 d^{*2}} \quad (7.25)$$

entwickeln, so daß man die Konzentration c auch folgendermaßen ausdrücken kann:

$$c = \frac{\pi}{6} \frac{d^{*3} + 1}{d^* (d^* + 1)^2 s^*}. \quad (7.26)$$

Aus den beiden Gleichungen (7.23) und (7.26) läßt sich unmittelbar ablesen, daß das Durchmesser Verhältnis nur einen vernachlässigbar kleinen Einfluß auf die Konzentration ausübt. Die Konzentration erreicht ihren größten Wert mit $c_{\max} = 0,524$ bei dem kleinsten Wert des Abstandsverhältnisses $s_{\min}^* = 0,5$. Bei nicht zu hohen Ansprüchen an die Genauigkeit läßt sich die Konzentration für $d^* \geq 1$ ganz allgemein nach der vereinfachten Beziehung

$$c = \frac{\pi/12}{s^*} \quad (7.27)$$

berechnen. Das bedeutet also, daß für die Berechnung der Konzentration bei Gleich- und Zweikornsuspensionen die gleiche Beziehung verwendet werden kann. Die Konzentration ist dann nur noch eine Funktion des bezogenen Schichtenabstandes $s^* = s/d_{p_1}$.

Die Konzentration c der Suspension setzt sich aus den anteiligen Konzentrationen c_1 für die großen und c_2 für die kleinen Kugeln zusammen:

$$c = c_1 + c_2. \quad (7.28)$$

An Hand des Suspensionselementes folgen für c_1 und c_2 die Beziehungen

$$c_1 = c \frac{d^{*3}}{d^{*3} + 1}, \quad (7.29)$$

$$c_2 = c \frac{1}{d^{*3} + 1}. \quad (7.30)$$

Hierin müssen für d^* natürlich immer die tatsächlich vorliegenden Werte eingesetzt werden. Die hier aufgestellten Gleichungen werden zur Berechnung der Sinkbewegung verwendet, worauf in den weiteren Abschnitten eingegangen wird.

7.22 Gesetze der Kornbewegung

7.221 Allgemeine Erläuterung der Sinkbewegung

Zwischen der Bewegung eines absinkenden Einzelkornes und eines in einer Suspension befindlichen Kornes besteht ein wesentlicher Unterschied. Bei einem Einzelkorn darf man mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daß es sich in einer ruhenden Flüssigkeit bewegt. Bei einer sedimentierenden Suspension verdrängen indessen die absinkenden Körner die Flüssigkeit in so starkem Maße, daß jedes Korn in einer aufwärts strömenden Flüssigkeit absinkt. Daher ist die Sinkgeschwindigkeit w'_{ss} eines Kornes, das sich in einer Suspension befindet, kleiner als die stationäre Sinkgeschwindigkeit w_s eines Einzelkornes, welches sich in einer ruhenden Flüssigkeit bewegt. Das mit w'_{ss} und w_s gebildete Verhältnis soll mit φ_g bezeichnet werden, wobei der Index g andeutet, daß mit diesem Verhältnis die Gegenströmung erfaßt wird:

$$\varphi_g \equiv \frac{w'_{ss}}{w_s}. \quad (7.31)$$

Die Sinkbewegung der in einer Suspension befindlichen Körner wird aber noch durch einen zweiten Einfluß, den erhöhten Impulstransport, behindert. Das heißt also, daß die tatsächliche Sinkgeschwindigkeit w_{ss} der Körner kleiner ist als die oben erwähnte Geschwindigkeit w'_{ss} . Das Verhältnis dieser beiden Geschwindigkeiten wird mit φ_i bezeichnet, wobei der Index i auf den Impulsaustausch hinweist:

$$\varphi_i \equiv \frac{w_{ss}}{w'_p}. \quad (7.32)$$

Der Einfluß des Impulstransportes läßt sich am einfachsten erklären, wenn man die Bewegung einer Kugel in einer unendlich und in einer endlich ausgedehnten Flüssigkeit betrachtet. In *Bild 7.21 a* sind die Sinkbewegung einer Kugel in einer

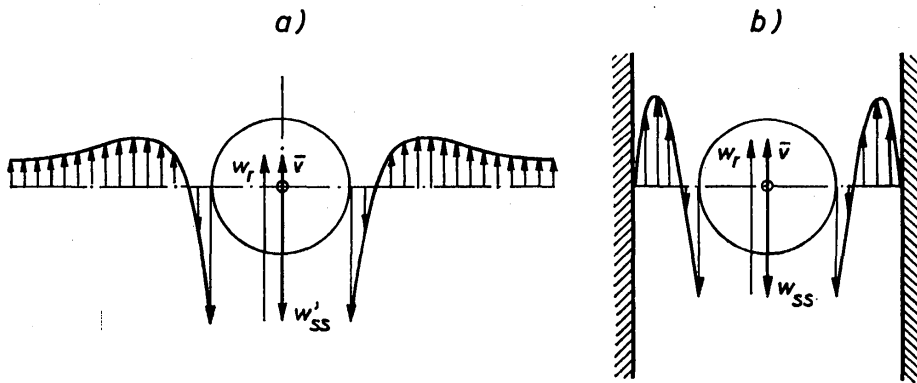


Bild 7.21. Geschwindigkeitsverteilungen um eine sich bewegende Kugel:
 a) in einer unendlich ausgedehnten, aufwärts strömenden Flüssigkeit,
 b) in einem engen Strömungskanal

unendlich ausgedehnten Flüssigkeit und die dabei auftretenden Geschwindigkeiten dargestellt. Der Flüssigkeit ist eine Aufwärtsgeschwindigkeit von der Größe \bar{v} aufgeprägt, wie sie auch bei der Sedimentation infolge der Gegenströmung vorhanden ist. Dann ist die Sinkgeschwindigkeit der Kugel w'_p und die Relativgeschwindigkeit

$$w_r = w'_p + \bar{v} = w_s. \quad (7.33)$$

Die Geschwindigkeiten w'_p und \bar{v} werden in den angedeuteten Richtungen positiv gerechnet. Betrachtet man nun die Kugelbewegung in einem verhältnismäßig engen Strömungskanal, dann erhält man die in *Bild 7.21 b* schematisierte Geschwindigkeitsverteilung. Die über den Kanalquerschnitt stark veränderlichen Geschwindigkeitsgefälle führen zu einem verstärkten Impulsaustausch. Man kann daher die Bewegung der Kugel in dem Kanal auch so betrachten, als erfolge sie in einer Flüssigkeit mit erhöhter innerer Reibung, also erhöhter Viskosität, so daß die Sinkgeschwindigkeit w_p im Vergleich zu w'_p erniedrigt wird. Diese Vorstellung läßt sich auf die Bewegung der Kugeln innerhalb einer Suspension übertragen. Dabei treten jedoch wesentlich verwickeltere Geschwindigkeitsverteilungen auf, die noch dazu zeitlich veränderlich sind, da die feste, stetige Kontur der Wand durch die nur während begrenzter Zeitabschnitte vorhandenen Kugeloberflächen ersetzt werden muß.

Einen guten Eindruck von der Flüssigkeitsbewegung innerhalb eines Partikelschwarms vermitteln die in *Bild 7.22* wiedergegebenen photographischen Aufnahmen. Ähnliche Aufnahmen wurden erstmalig von HIBY [7.19] angefertigt. Die Bewegung der Flüssigkeit wird durch zwei Farbfäden sichtbar gemacht, die vor Eintritt in den Partikelschwarm gerade Linien bildeten und senkrecht zur

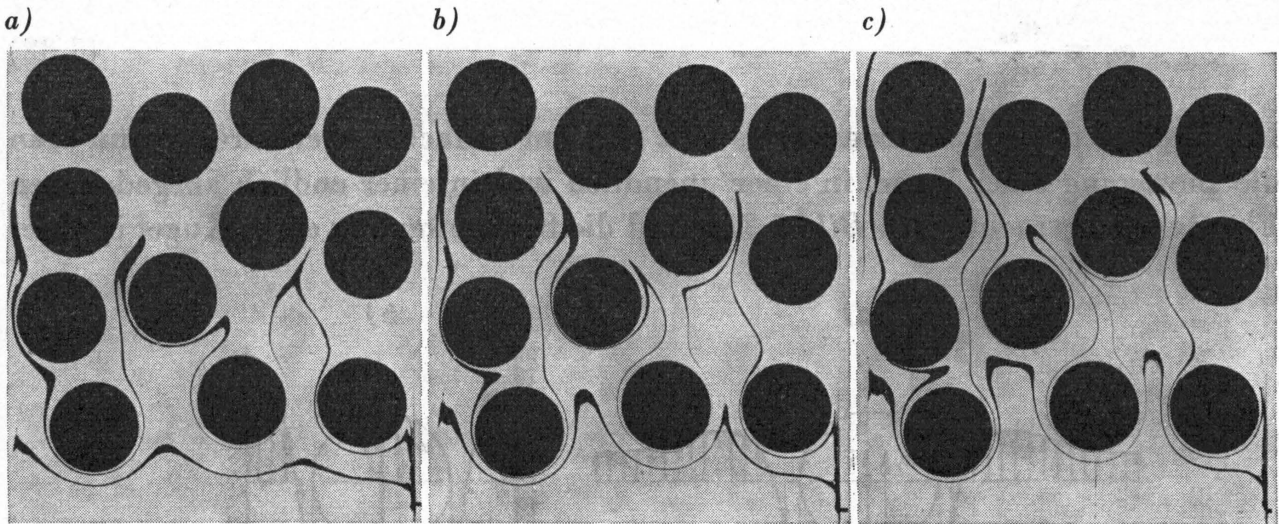


Bild 7.22. Photographische Aufnahmen von der Flüssigkeitsbewegung durch einen Partikelschwarm zu verschiedenen Zeiten

Anströmgeschwindigkeit angeordnet waren. Die drei Aufnahmen geben den Bewegungszustand zu verschiedenen Zeit wieder und lassen seinen Ablauf erkennen. Die Aufnahmen zeigen, daß nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern auch ihre Gradienten örtlich sehr verschieden sind. Da örtlich unterschiedliche Gradienten zu einer Lageänderung der Partikeln im Schwarm führen, sind die Gradienten und Geschwindigkeiten nicht nur örtlich, sondern auch zeitlich veränderlich. Die bei der Schwarmbewegung durch Gegenströmung und erhöhten Impulstransport hervorgerufenen Einflüsse werden wie folgt zusammengefaßt:

$$\frac{w_{s_i}}{w_s} = \varphi_g \varphi_i = \varphi. \quad (7.34)$$

Bei der Zweikornsuspension müssen für den Einfluß der Gegenströmung auf die Kugelgrößen 1 und 2 die Verhältniswerte φ_{g_1} und φ_{g_2} und für den Impulsaustausch die Verhältniswerte φ_{i_1} und φ_{i_2} getrennt berechnet werden. Hierzu bedarf es noch eines Zusammenhanges zwischen den Sinkgeschwindigkeiten w_{s_1} und w_{s_2} , der sich mittels Gl. (7.33) ermitteln läßt. Für die beiden Korngrößen gelten die Beziehungen:

$$w_{s_1} = w'_{ss_1} + \bar{v}, \quad (7.35)$$

$$w_{s_2} = w'_{ss_2} + \bar{v}. \quad (7.36)$$

Hiermit ergibt sich das Geschwindigkeitsverhältnis zu

$$\frac{w_{s_1}}{w_{s_2}} = \frac{(w'_{ss_1}/\bar{v}) + 1}{(w'_{ss_2}/\bar{v}) + 1}. \quad (7.37)$$

Für die Sinkgeschwindigkeit erhält man, wenn das Stokessche Widerstandsgesetz angewendet werden darf, die allgemeine Gleichung

$$w_s = \frac{1}{18} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \frac{d_p^2 g}{\nu}. \quad (7.38)$$

Hierin bedeuten ρ_p und ρ die Dichten von Feststoff und Flüssigkeit, g die Erdbeschleunigung, ν die kinematische Viskosität und d_p den Korndurchmesser. Dann folgt das Verhältnis der Sinkgeschwindigkeiten zu

$$\frac{w_{s_1}}{w_{s_2}} = \left(\frac{d_{p_1}}{d_{p_2}} \right)^2 = d^{*2}. \quad (7.39)$$

Setzt man Gl. (7.39) in Gl. (7.37) ein, so lassen sich die beiden Beziehungen

$$\frac{w'_{ss_2}}{\bar{v}} = \frac{1}{d^{*2}} \left(\frac{w'_{ss_1}}{\bar{v}} + 1 \right) - 1 \quad (7.40)$$

und

$$\frac{w'_{ss_1}}{\bar{v}} = d^{*2} \left(\frac{w'_{ss_2}}{\bar{v}} + 1 \right) - 1 \quad (7.41)$$

angeben, die für die Berechnung der wirklichen Sinkgeschwindigkeit benötigt werden.

7.222 Sinkbewegung unter Berücksichtigung der Gegenströmung

Der Volumstrom der absinkenden Körner ruft aus Kontinuitätsgründen einen gleich großen, aber entgegen gerichteten Flüssigkeitsstrom hervor. Da sich das Gesamtvolumen der Suspension nicht ändert, wird die Flüssigkeit vom absinkenden Feststoff verdrängt. Die Körner bewegen sich also zum Gefäßboden und bilden dort das konzentrierte Sediment, während die Flüssigkeit durch die Suspension zur Oberfläche strömt und dort die feststofffreie Klärzone entstehen läßt.

Zur Berechnung der Gegenströmung wird davon ausgegangen, daß die Volumströme \dot{V}_{p_1} und \dot{V}_{p_2} der großen und der kleinen Körner gleich dem aufwärts gerichteten Volumstrom \dot{V} der Flüssigkeit sind:

$$\dot{V} = \dot{V}_{p_1} + \dot{V}_{p_2}. \quad (7.42)$$

Die weitere Verwendung dieser Gleichung ist nur dann möglich, wenn man die dispersen Volumströme \dot{V}_{p_1} und \dot{V}_{p_2} gedanklich durch kontinuierliche Ströme ersetzt. Unter dieser Bedingung läßt sich die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$(1 - c) F \bar{v} = c_1 F w'_{p_1} + c_2 F w'_{p_2} \quad (7.43)$$

schreiben, wobei $c_1 F$ und $c_2 F$ die von der Höhe unabhängigen Querschnittsflächen der kontinuierlich gedachten Feststoffströme sind. Nach Kürzen durch die Fläche F ergibt sich

$$(1 - c) \bar{v} = c_1 w'_{ss_1} + c_2 w'_{ss_2}. \quad (7.44)$$

Setzt man gemäß Gl. (7.28) $c_2 = c - c_1$ ein und ersetzt c_1 durch Gl. (7.29), so ergibt sich nach kurzer Umformung:

$$\frac{d^{*3}}{1 + d^{*3}} \left(\frac{w'_{ss_1}}{\bar{v}} - \frac{w'_{ss_2}}{\bar{v}} \right) + \frac{w'_{ss_2}}{\bar{v}} = \frac{1 - c}{c}. \quad (7.45)$$

In dieser Beziehung wird zunächst w'_{ss_2}/\bar{v} durch Gl.(7.40) und in einer weiteren Rechnung w'_{ss_1}/\bar{v} durch Gl.(7.41) ersetzt. Nach kurzer Zwischenrechnung ergeben sich dann für die Geschwindigkeitsverhältnisse die folgenden Gleichungen:

$$\frac{w'_{ss_1}}{\bar{v}} = \frac{\frac{1-c}{c} d^{*2} (d^{*3} + 1) + d^{*2} - 1}{d^{*5} + 1}, \quad (7.46)$$

$$\frac{w'_{ss_2}}{\bar{v}} = \frac{\frac{1-c}{c} (d^{*3} + 1) + d^{*3} - d^{*5}}{d^{*5} + 1}. \quad (7.47)$$

Die Gültigkeit dieser Gleichungen ist, wie schon gesagt, an die Voraussetzung gebunden, daß die disperse durch eine kontinuierliche Feststoffphase ersetzt wird. Die Folge ist jedoch, daß so die Flüssigkeitsgeschwindigkeit wesentlich zu klein berechnet wird. Man darf annehmen, daß die größte Flüssigkeitsgeschwindigkeit

v' , die zwischen benachbarten Feststoffkörnern auftritt, auch die für die Kornbewegung maßgebende ist. Für die Geschwindigkeit, die örtlich und zeitlich stark veränderlich ist, soll folgender Ansatz gemacht werden:

$$v' = \frac{\bar{v}}{1-c}. \quad (7.48)$$

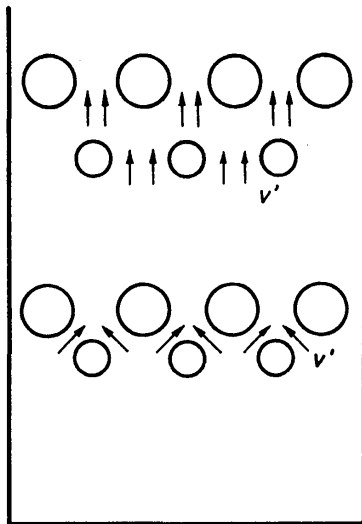


Bild 7.23. Zur Erläuterung der Umströmung der Kugeln in der Suspension

In Bild 7.23 ist v' für zwei verschiedene Kugelanordnungen eingezeichnet worden. Nach Einsetzen von Gl.(7.48) in die Gleichungen (7.46) und (7.47) erhält man die Geschwindigkeitsverhältnisse zu

$$\frac{w'_{ss_1}}{v'} = (1-c) \frac{\frac{1-c}{c} d^{*2} (d^{*3} + 1) + d^{*2} - 1}{d^{*5} + 1}, \quad (7.49)$$

$$\frac{w'_{ss_2}}{v'} = (1-c) \frac{\frac{1-c}{c} (d^{*3} + 1) + d^{*3} - d^{*5}}{d^{*5} + 1}. \quad (7.50)$$

Wird hierin $v' = w_{s_1} - w'_{ss_1}$ bzw. $v' = w_{s_2} - w'_{ss_2}$ eingesetzt, dann ergibt sich für das Geschwindigkeitsverhältnis der großen Körner

$$\varphi_{g_1} \equiv \frac{w'_{ss_1}}{w_{s_1}} = \frac{1}{1 + \frac{v'}{w'_{ss_1}}} = \frac{1}{1 + \frac{d^{*5} + 1}{(1-c) \left\{ \frac{1-c}{c} d^{*2} (d^{*3} + 1) + d^{*2} - 1 \right\}}} \quad (7.51)$$

und für das Geschwindigkeitsverhältnis der kleinen Körner

$$\varphi_{g_2} \equiv \frac{w'_{ss_2}}{w_{s_2}} = \frac{1}{1 + \frac{v'}{w'_{ss_2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(1-c) \left\{ \frac{1-c}{c} (d^{*3} + 1) + d^{*3} - d^{*5} \right\}}}. \quad (7.52)$$

Die Geschwindigkeitsverhältnisse, die sich auf Grund der Gegenströmung der Flüssigkeit ergeben, sind allein Funktionen des Durchmesserverhältnisses d^* und der Konzentration c . Für den Sonderfall, daß alle Körner den gleichen Durchmesser haben, also $d^* = 1$ ist, erhält man man die einfache Beziehung

$$\varphi_g \equiv \frac{w'_{ss}}{w_s} = \frac{1}{1 + \frac{c}{(1-c)^2}}. \quad (7.53)$$

Eine eingehende Diskussion der Gleichungen und der praktischen Bedeutung der Ergebnisse wird erst sinnvoll sein, wenn auch der Einfluß des Impulsaustausches auf die Sinkbewegung berechnet ist.

7.223 Sinkbewegung unter Berücksichtigung des Impulsaustausches

Die Sinkbewegung eines sich in einer Suspension befindlichen Kornes wird durch die benachbarten Körner zusätzlich noch deshalb verzögert, weil die Flüssigkeit an jeder Oberfläche haftet und folglich ein verstärkter Impulsaustausch hervorgerufen wird. Seine Größe hängt von der Kugelgröße und dem Abstand zu den benachbarten Kugeln ab. LADENBURG [7.20] hat den Randeinfluß für eine Kugel berechnet, die sich in der Achse eines Rohres bewegt; diese Gleichung lautet mit den hier verwendeten Bezeichnungen:

$$\frac{w_{ss}}{w'_{ss}} = \frac{1}{1 + 2,4 \frac{d_p}{D}}. \quad (7.54)$$

Hierin sind d_p der Kugeldurchmesser und D der Rohrdurchmesser. Mit abnehmendem Durchmesserverhältnis d_p/D nähert sich das Geschwindigkeitsverhältnis dem Wert $w_{ss}/w'_{ss} = 1$.

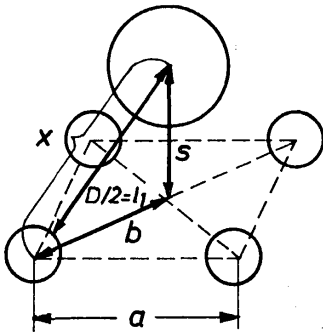
Die von LADENBURG angegebene Beziehung soll sinngemäß auf die Kornbewegung in der Suspension übertragen werden. Das führt zu folgenden Gleichungen für die großen Kugeln

$$\frac{w_{ss_1}}{w'_{ss_1}} = \frac{1}{1 + 1,2 d_{p_1}/l_1} = \frac{1}{1 + 1,2/l_1^*} \quad (7.55)$$

und für die kleinen Kugeln

$$\frac{w_{ss_2}}{w'_{ss_2}} = \frac{1}{1 + 1,2 d_{p_2}/l_2} = \frac{1}{1 + 1,2/l_2^*}. \quad (7.56)$$

Hierin entsprechen $2 l_1$ und $2 l_2$ dem von LADENBURG in Gl.(7.54) verwendeten Durchmesser D . Um die Schreibweise abzukürzen, wurde $l_1/d_{p_1} = l_1^*$ und $l_2/d_{p_2} = l_2^*$



gesetzt. Diese beiden Längenverhältnisse sind an Hand des verwendeten Suspensionsmodells zu bestimmen.

Bild 7.24. Schrägansicht vom Suspensionselement mit Bezeichnungen zur Berechnung des Impulstransportes

Bild 7.24 zeigt nochmals eine Ansicht von dem bereits früher erläuterten Element der Suspension mit den Bezeichnungen, die für die Berechnung von l_1/d_{p_1} verwendet werden. Ist gemäß Bild 7.24 $a^* > 1$ und folglich $d^* < 2,415$, dann ist der in eine horizontale Ebene projizierte Abstand der Kugelmittelpunkte

$$b = \frac{1}{2} (d_{p_1} + d_{p_2}). \quad (7.57)$$

Der wirkliche Abstand zwischen den Mittelpunkten ist

$$x = \sqrt{b^2 + s^2} \quad (7.58)$$

und unter Berücksichtigung von Gl. (7.57):

$$x = \sqrt{\frac{1}{4} (d_{p_1} + d_{p_2})^2 + s^2}. \quad (7.59)$$

Da der Abstand l_1 vom Mittelpunkt der großen Kugel bis zur Oberfläche der kleinen durch

$$l_1 = x - \frac{1}{2} d_{p_2} \quad (7.60)$$

gegeben ist, folgt nach Einsetzen von Gl. (7.59) und nach Umformung das für $d^* \leq 2,415$ geltende Längenverhältnis zu

$$l_1^* \equiv \frac{l_1}{d_{p_1}} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1+d^*}{d^*}\right)^2 + s^{*2}} - \frac{1}{2d^*}. \quad (7.61)$$

Dabei sind $s^* \equiv s/d_{p_1}$ und $d^* \equiv d_{p_1}/d_{p_2}$. Für $d^* \geq 2,415$ ergibt sich gemäß Bild 7.20 b

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} d_{p_1} \quad (7.62)$$

und dann auf gleichem Wege wie vorher

$$l_1^* = \sqrt{\frac{1}{2} + s^{*2}} - \frac{1}{2d^*}. \quad (7.63)$$

In ganz entsprechender Weise lassen sich dann die Gleichungen für l_2^* herleiten. Für $d^* \leq 2,415$ erhält man

$$l_2^* \equiv \frac{l_2}{d_{p_1}} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1+d^*}{d^*}\right)^2 + s^{*2}} - \frac{1}{2} \quad (7.64)$$

und für $d^* \geq 2,415$

$$l_2^* = \sqrt{\frac{1}{2} + s^{*2}} - \frac{1}{2}. \tag{7.65}$$

Betrachtet man den Sonderfall der Gleichkornsuspension mit $d^* = 1$, so folgt aus den Gleichungen (7.61) oder (7.64) die Beziehung

$$l^* = \sqrt{1 + s^{*2}} - \frac{1}{2}. \tag{7.66}$$

Nach Einsetzen in Gl.(7.55) ergibt sich dann das Geschwindigkeitsverhältnis zu

$$\frac{w_{ss}}{w'_{ss}} = \frac{1}{1 + \frac{1,2}{\sqrt{1 + s^{*2}} - \frac{1}{2}}}. \tag{7.67}$$

Führt man hierin noch für s^* den aus Gl.(7.27) folgenden Ausdruck $\pi/12c$ ein, so ergibt sich

$$\frac{w_{ss}}{w'_{ss}} = \frac{1}{1 + \frac{1,2}{\sqrt{1 + (\pi/12c)^2} - \frac{1}{2}}}. \tag{7.68}$$

Dabei ist noch zu beachten, daß LADENBURG allein den von einer ruhenden Wand ausgehenden Einfluß auf die Sinkbewegung von Körnern berechnete. Bei der Sedimentation hat man indes den von sich bewegenden Körnern ausgehenden Einfluß zu berücksichtigen. Der Einfluß von in Bewegung befindlichen Körnern wird um so größer sein, je größer die Konzentration c der Suspension ist. Es erscheint daher sinnvoll zu sein, die rechte Seite von Gl.(7.68) mit dem Ausdruck $(1-c)$ zu multiplizieren:

$$\varphi_i \equiv \frac{w_{ss}}{w'_{ss}} = \frac{1-c}{1 + \frac{1,2}{\sqrt{1 + (\pi/12c)^2} - \frac{1}{2}}}. \tag{7.69}$$

Unter Berücksichtigung dieser Korrektur sowie Gl.(7.27) erhält man für Zweikornsuspensionen folgende Gleichungen. Bei $d^* \leq 2,415$ folgt nach Einsetzen von Gl.(7.61) in Gl.(7.55)

$$\varphi_{i_1} \equiv \frac{w_{ss_1}}{w'_{ss_1}} = \frac{1-c}{1 + \frac{1,2}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1+d^*}{d^*}\right)^2 + (\pi/12c)^2} - \frac{1}{2d^*}}}. \tag{7.70}$$

und bei $d^* \geq 2,415$ nach Einsetzen von Gl.(7.63) in Gl.(7.55)

$$\varphi_{i_1} \equiv \frac{w_{ss_1}}{w'_{ss_1}} = \frac{1-c}{1 + \frac{1,2}{\sqrt{\frac{1}{2} + (\pi/12c)^2} - \frac{1}{2d^*}}}. \tag{7.71}$$

Für die kleinen Körner ergibt sich bei $d^* \leq 2,415$ nach Einsetzen von Gl.(7.64) in Gl.(7.56)

$$\varphi_{i_2} \equiv \frac{w_{ss_2}}{w'_{ss_2}} = \frac{1-c}{1 + \frac{1,2}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1+d^*}{d^*}\right)^2 + (\pi/12 c)^2} - \frac{1}{2}}} \quad (7.72)$$

und bei $d^* \geq 2,415$ nach Einsetzen von Gl.(7.65) in Gl.(7.56)

$$\varphi_{i_2} \equiv \frac{w_{ss_2}}{w'_{ss_2}} = \frac{1-c}{1 + \frac{1,2}{\sqrt{\frac{1}{2} + (\pi/12 c)^2} - \frac{1}{2}}} \quad (7.73)$$

Die ermittelten Gleichungen zur Berechnung der Gegenströmung und des Impulsaustausches werden im folgenden Abschnitt zusammengefaßt.

7.224 Zusammenfassende Gleichungen für die effektiven Sinkgeschwindigkeiten

Die Sinkbewegung der Körner in einer Suspension hängt von der Größe der Gegenströmung und des Impulstransportes ab. Die beiden Einflüsse zusammenfassenden Gleichungen sollen in diesem Abschnitt dargestellt werden. Für die großen Körner einer Zweikornsuspension erhält man bei $d^* \leq 2,415$ unter Verwendung von Gl.(7.51) und (7.70):

$$\begin{aligned} \frac{w_{ss_1}}{w_{s_1}} &\equiv \varphi_{g_1} \varphi_{i_1} \quad (7.74) \\ &= \frac{1-c}{\left[1 + \frac{d^{*5} + 1}{(1-c) \left\{ \frac{1-c}{c} d^{*2} (d^{*3} + 1) + d^{*2} - 1 \right\}}\right] \left[1 + \frac{1,2}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1+d^*}{d^*}\right)^2 + \left(\frac{\pi/12}{c}\right)^2} - \frac{1}{2d^*}}\right]} \end{aligned}$$

und bei $d^* \geq 2,415$ unter Verwendung von Gl.(7.51) und (7.71)

$$\begin{aligned} \frac{w_{ss_1}}{w_{s_1}} &\equiv \varphi_{g_1} \varphi_{i_1} \quad (7.75) \\ &= \frac{1-c}{\left[1 + \frac{d^{*5} + 1}{(1-c) \left\{ \frac{1-c}{c} d^{*2} (d^{*3} + 1) + d^{*2} - 1 \right\}}\right] \left[1 + \frac{1,2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{\pi/12}{c}\right)^2} - \frac{1}{2d^*}}\right]} \end{aligned}$$

Für die kleinen Körner einer Zweikornsuspension erhält man bei $d^* \leq 2,415$ unter Verwendung von Gl.(7.52) und (7.72)

$$\begin{aligned} \frac{w_{ss_2}}{w_{s_2}} &\equiv \varphi_{g_2} \varphi_{i_2} \quad (7.76) \\ &= \frac{1-c}{\left[1 + \frac{d^{*5} + 1}{(1-c) \left\{ \frac{1-c}{c} (d^{*3} + 1) + d^{*3} - d^{*5} \right\}}\right] \left[1 + \frac{1,2}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1+d^*}{d^*}\right)^2 + \left(\frac{\pi/12}{c}\right)^2} - \frac{1}{2}}\right]} \end{aligned}$$

und bei $d^* \geq 2,415$ unter Verwendung von Gl.(7.52) und (7.73)

$$\frac{w_{ss_1}}{w_{s_2}} \equiv \varphi_{g_2} \varphi_{i_2} \tag{7.77}$$

$$= \frac{1 - c}{\left[1 + \frac{d^{*5} + 1}{(1 - c) \left\{ \frac{1 - c}{c} (d^{*3} + 1) + d^{*3} - d^{*5} \right\}} \right] \left[1 + \frac{1,2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{\pi/12}{c} \right)^2 - \frac{1}{2}}} \right]}$$

Diese Gleichungen erlauben die Berechnung der in einer Zweikornsuspension tatsächlich auftretenden Sinkgeschwindigkeiten w_{ss_1} und w_{ss_2} der großen und der kleinen Körner, wenn deren stationäre Sinkgeschwindigkeiten w_{s_1} und w_{s_2} in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit sowie die Konzentration c und das Durchmesser Verhältnis $d^* \equiv d_{p_1}/d_{p_2}$ bekannt sind. Für die Konzentration c wurde, daran sei nochmals erinnert, die für Gleichkornsuspensionen gültige Gl.(7.27) in die für φ_i hergeleiteten Gleichungen (7.70) bis (7.73) eingeführt. Das schien zulässig zu sein, da die Konzentration nahezu unabhängig vom Durchmesser-

Verhältnis d^* ist. Die Verwendung von Gl.(7.27) führt zu einer etwas einfacheren Form der Gleichungen für φ_{i_1} und φ_{i_2} .

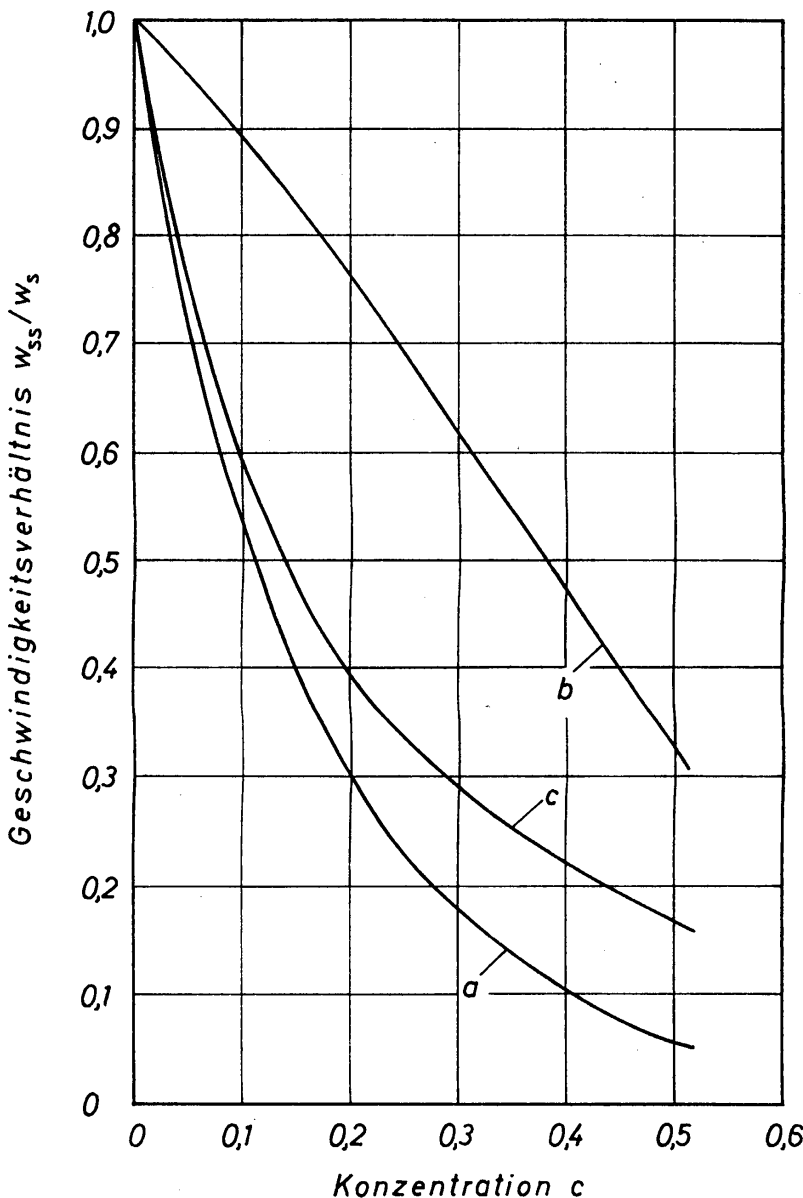


Bild 7.25
Geschwindigkeitsverhältnis für Einkornsuspensionen, abhängig von der Konzentration. Kurve a nach Gl.(7.78), Kurve b nach Gl.(7.53) und Kurve c nach Gl.(7.69)

Für die Gleichkornsuspension folgt aus den obigen Gleichungen mit $d^* = 1$ bzw. unmittelbar mit den Gleichungen (7.52) und (7.69)

$$\frac{w_{ss}}{w_s} \equiv \varphi_g \varphi_i = \frac{1-c}{\left[1 + \frac{c}{(1-c)^2}\right] \left[1 + \frac{1,2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi/12}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}}}\right]}. \quad (7.78)$$

Das nach dieser Gleichung berechnete Geschwindigkeitsverhältnis ist in *Bild 7.25* als Kurve *a* dargestellt. Zum Vergleich wurden Kurve *b* gemäß Gl.(7.53) und Kurve *c* gemäß Gl.(7.69) eingetragen. Kurve *c* gibt allein den Einfluß des Impulsaustausches wieder. Man entnimmt diesem Bild, daß der Impulsaustausch die bestimmende Größe für das Geschwindigkeitsverhältnis ist. Bei einer Konzentration von $c = 0,1$ beträgt w_{ss}/w_s nur noch etwa 0,53. Das zeigt also, in welchem starken Maße die Sinkgeschwindigkeit von Körnern einheitlicher Größe herabgesetzt wird, wenn die Bewegung innerhalb einer Suspension erfolgt.

Die für Zweikornsuspensionen nach den Gleichungen (7.74) bis (7.77) berechneten Kurven für das Geschwindigkeitsverhältnis sind in *Bild 7.26* dargestellt. Für die großen Körner wurden die Kurven ausgezogen und für die kleinen Körner gestrichelt. Bei den großen Körnern übt das Durchmesser Verhältnis d^* nur einen fast vernachlässigbar geringen Einfluß auf das Geschwindigkeitsverhältnis aus. Aus diesem Grunde darf das Geschwindigkeitsverhältnis für die großen Körner bei ausreichender Genauigkeit auch mittels Gl.(7.78) berechnet werden, die streng aber nur für die Gleichkornsuspension gültig ist.

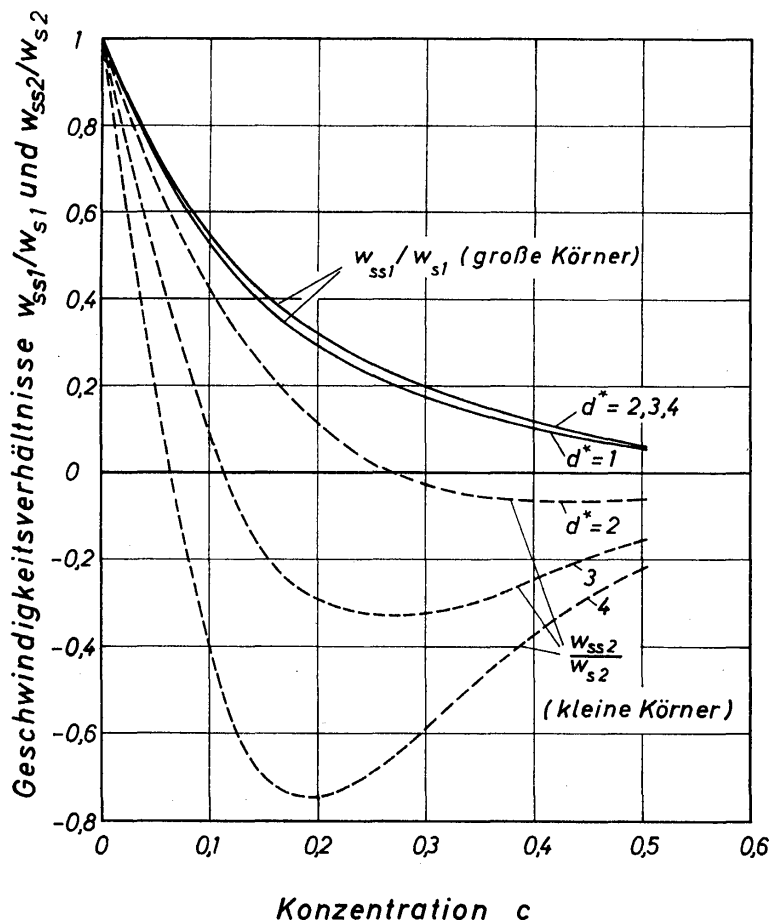


Bild 7.26
Geschwindigkeitsverhältnisse für Zweikornsuspensionen, abhängig von der Konzentration c und dem Durchmesser Verhältnis $d^* \equiv d_{p1}/d_{p2}$. Kurven für die großen Körner nach den Gleichungen (7.74) und (7.75) und für die kleinen Körner nach den Gleichungen (7.76) und (7.77)

Für die kleinen Körner hängt das Geschwindigkeitsverhältnis in sehr starkem Maße vom Durchmesser Verhältnis ab. Wie im Zusammenhang mit dem Einfluß der Gegenströmung bereits erwähnt wurde, weisen die Kurven auf zwei für die Praxis besonders wichtige Vorgänge hin. Bei genügend hohen Konzentrationen kehrt sich die Bewegungsrichtung der kleinen Körner um, d. h. sie sedimentieren nicht, sondern steigen auf. Die dabei auftretenden maximalen Aufstiegsgeschwindigkeiten nehmen mit wachsendem Durchmesser Verhältnis zu. Für $d^* = 4$ beträgt die maximale Aufstiegsgeschwindigkeit bereits etwa das 0,75fache der Sinkgeschwindigkeit des Einzelkornes. Das Maximum der Aufstiegsgeschwindigkeit verschiebt sich mit zunehmendem Durchmesser Verhältnis in Richtung abnehmender Konzentration. Für praktische Rechnungen wird insbesondere die kritische Konzentration c_{kr} interessieren, bei welcher das Geschwindigkeitsverhältnis $w_{ss_2}/w_{s_2} = 0$ wird. Aus Bild 7.26 entnimmt man bereits, daß diese Konzentration mit zunehmendem Durchmesser Verhältnis abnimmt. Für $d^* = 4$ beträgt die kritische Konzentration c_{kr} nur noch etwa 0,06 bzw. 6%. Einen vollständigeren Überblick gewinnt man, wenn c_{kr} mittels der aus Gl.(7.76) oder (7.77) folgende Beziehung

$$\frac{1 - c_{kr}}{c_{kr}} = \frac{d^{*5} - d^{*3}}{d^{*3} + 1} \tag{7.79}$$

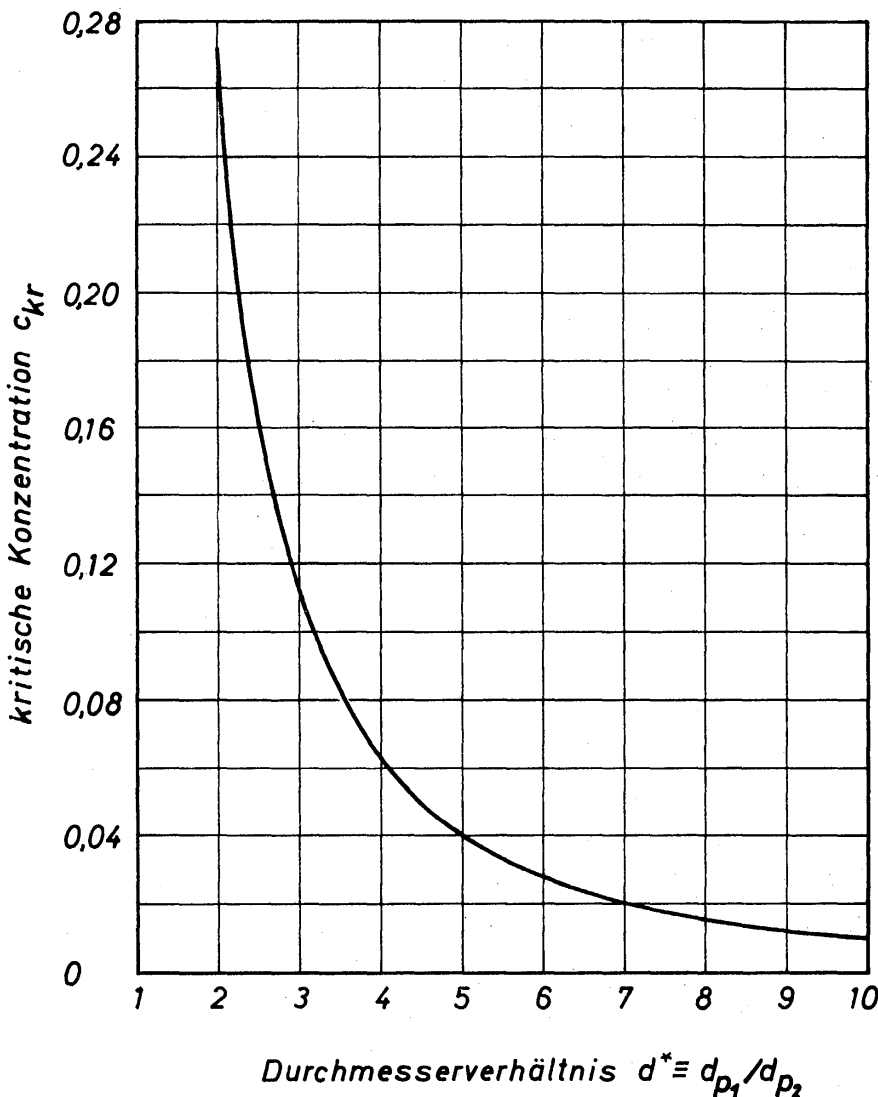


Bild 7.27. Abhängigkeit der kritischen Konzentration c_{kr} , bei welcher $w_{ss_2}/w_{s_2} = 0$ wird, vom Durchmesser Verhältnis d^* nach Gl.(7.79)

bestimmt wird. In *Bild 7.27* ist c_{kr} abhängig von d^* dargestellt. Mit zunehmendem Durchmesser Verhältnis nimmt c_{kr} in sehr starkem Maße ab und erreicht für $d^* = 10$ den Wert $c_{kr} = 0,01$. Mit Hilfe von *Bild 7.27* kann man leicht diejenigen Korngrößen ermitteln, die bei einem kontinuierlichen Sedimentationsverfahren und sehr kleinen Austragsgeschwindigkeiten nicht mehr abgeschieden werden. Bei einer absatzweisen Sedimentation hingegen bewegen sich die kleinen Körner so lange nach oben, bis die großen Körner sedimentiert sind. Es kommt dann also zu einer weitgehenden Kornklassierung im Sediment. Die Aufwärtsbewegung der kleinen Körner mit der aufsteigenden Flüssigkeit bedeutet aber, daß die potentielle Energie der kleinen Körner erhöht wird. Die hierfür erforderliche Arbeit wird Hubarbeit genannt. Sie muß von den absinkenden großen Körnern verrichtet werden, deren Sinkgeschwindigkeit dadurch nochmals etwas verringert wird. Das durch die Hubarbeit bedingte Geschwindigkeitsverhältnis für die großen Körner wurde ebenfalls berechnet. Das Ergebnis der Rechnungen zeigt indes, daß der Einfluß der Hubarbeit auf den Sinkvorgang der großen Körner bei den üblichen Durchmesser Verhältnissen vernachlässigt werden kann. Es soll daher nicht weiter darauf eingegangen werden.

7.23 Vergleich mit anderen Ergebnissen

Die Gleichungen für das Geschwindigkeitsverhältnis sollen mit experimentellen und anderen theoretischen Ergebnissen verglichen werden. Da die Mehrzahl der experimentellen Ergebnisse aus Untersuchungen mit Gleichkornsuspensionen stammen, sollen diese Ergebnisse als erste zum Vergleich herangezogen werden.

7.231 Geschwindigkeitsverhältnis bei Gleichkornsuspensionen

In *Bild 7.28* sind die bekannt gewordenen Versuchsergebnisse zusammengestellt. Nähere Angaben zu den Versuchen findet man in *Tabelle 7.2*. Der Korndurchmesser d_p , die Korndichte ρ_p , die Konzentration c der Suspension und die Viskosität η sowie die Dichte ρ der Flüssigkeit wurden in weiten Grenzen geändert. Die in *Bild 7.28* eingezeichnete Kurve wurde nach Gl. (7.78) berechnet. Es ergibt sich also eine recht gute Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Versuchswerten.

Die Reynoldszahl $Re_s \equiv w_s d_p / \nu$ war bei den Versuchen, deren Ergebnisse in *Bild 7.28* dargestellt sind, kleiner als etwa 0,21, so daß die Gültigkeit des Stokeschen Widerstandsgesetzes gewahrt blieb. Bei größeren Werten von Re_s ist nach Angaben von RICHARDSON und ZAKI [7.25] sowie RICHARDSON und MEIKLE [7.26] zu erwarten, daß die Sinkgeschwindigkeit weniger stark erniedrigt wird. Das wird darauf zurückzuführen sein, daß im Bereich höherer Reynoldszahlen bereits bei der Bewegung von Einzelkörnern durch die verwirbelte Flüssigkeitsbewegung in der Nachlaufströmung ein erhöhter Impulsaustausch auftritt. Die durch die Schwarmbewegung zusätzlich hervorgerufene Erhöhung des Impulstransportes

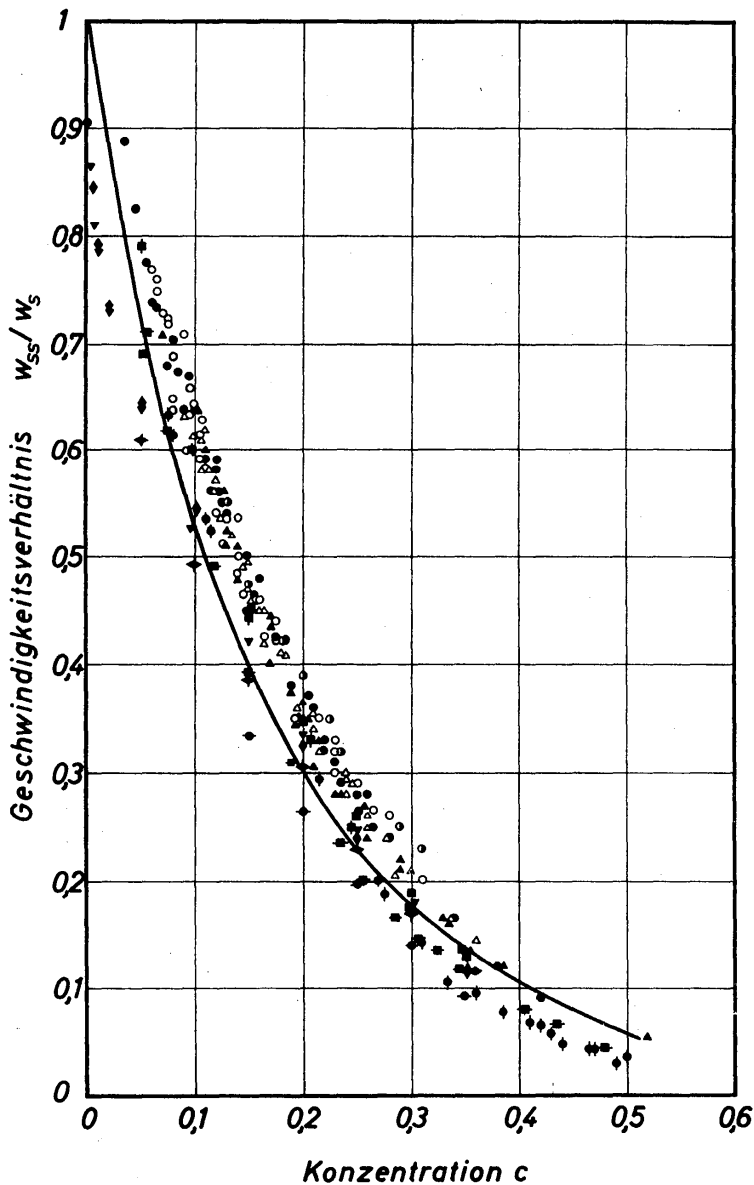


Bild 7.28

Vergleich zwischen Meßwerten für das Geschwindigkeitsverhältnis w_{ss}/w_s bei Gleichkornsuspensionen und der nach Gl.(7.78) berechneten Kurve. Angaben zu den Meßwerten sind in Tabelle 7.2 zusammengestellt. Volle Symbole bezeichnen Versuchsergebnisse bei der Sedimentation, offene bei Wirbelschichten, halbvolle Symbole gelten sowohl für die Sedimentation als auch für die Wirbelschicht

kann daher nur noch einen mäßigen Einfluß auf die Sinkgeschwindigkeit ausüben.

Andere Gleichungen für das Geschwindigkeitsverhältnis bei Gleichkornsuspensionen sind in *Bild 7.29* als Kurve *b*, *c* und *d* dargestellt. Kurve *a* gibt die theoretische Gl.(7.78) wieder. Die Kurve *b* wurde nach der von RICHARDSON und ZAKI [7.25] aufgestellten empirischen Gleichung

$$\frac{w_{ss}}{w_s} = (1 - c)^{4,65} \quad (7.80)$$

berechnet. Sie stimmt weitgehend mit Gl.(7.78) überein und läßt sich durch Ändern des Exponenten sehr leicht den Versuchswerten anpassen. Die in *Bild 7.29* mit *c* bezeichnete Kurve gibt die von HAPPEL [7.27] mitgeteilte theoretische Gleichung

$$\frac{w_{ss}}{w_s} = \frac{3 - 4,5 c^{1/3} + 4,5 c^{5/3} - 3 c^2}{3 + 2 c^{5/3}} \quad (7.81)$$

wieder. Sie liefert im ganzen Bereich der Konzentration wesentlich zu kleine Werte für das Geschwindigkeitsverhältnis. Zu einem ähnlichen Ergebnis führt

Tabelle 7.2: Angaben zu den in Bild 7.28 dargestellten Versuchsergebnissen

Symbole*	Kornmaterial	Korndurchmesser d_p (m)	Korndichte ρ_p (kg/m ³)	Flüssigkeit	Dichte der Flüssigkeit $\rho_{20^\circ\text{C}}$ (kg/m ³)	Viskosität der Flüssigkeit $\eta_{20^\circ\text{C}}$ (kg/ms)	Reynoldszahl $Re_s = \frac{ w_s \cdot d_p \cdot \rho}{\eta}$	Verfasser
● ○	Glaskugeln	$0,7115 \cdot 10^{-3}$	2880				0,001 ÷ 0,06	HANRATTY und
▲ △	Stahlkugeln	$0,5588 \cdot 10^{-3}$	7430	Wasser– Glycerin	1017 ÷ 1250	$1,02 \cdot 10^{-3}$ ÷ $398 \cdot 10^{-3}$	0,001 ÷ 0,08	BANDUKWALA [7.21]
●	Stahlkugeln	$0,5588 \cdot 10^{-3}$	7430				0,13 ÷ 0,21	
▼	Kallodoc**	$0,161 \cdot 10^{-3}$	1191	Wasser– 20% Glycerin	1065	$2,04 \cdot 10^{-3}$	0,074	
◆	Kallodoc	$0,161 \cdot 10^{-3}$	1191	Wasser– 25% Glycerin	1078	$2,65 \cdot 10^{-3}$	0,044	OLIVER [7.22]
□	Kallodoc	$0,053 \cdot 10^{-3}$ ÷ $0,076 \cdot 10^{-3}$	1191	Wasser	1017	$1,02 \cdot 10^{-3}$	≈ 0,028	
◆	Glaskugeln	$0,062 \cdot 10^{-3}$ ÷ $0,1 \cdot 10^{-3}$	–	Wasser– Glycerin	–	–	–	
●	Glaskugeln	$0,0135 \cdot 10^{-3}$	2320	Wasser	1017	$1,02 \cdot 10^{-3}$	0,0025	STEINOUR
●	Tapioca***	$0,174 \cdot 10^{-2}$	1380	Öl	890 (25 °C)	$0,726$ (25 °C)	0,0026	[7.23]
■	Glaskugeln	$0,3445 \cdot 10^{-3}$	2671	Glykol	1110 (25 °C)	$17,61 \cdot 10^{-3}$ (25 °C)	0,147	LOEFFLER und [7.24]
■	Kallodoc**	$0,147 \cdot 10^{-3}$ ÷ $0,152 \cdot 10^{-3}$	–	–	–	–	–	GUREL, zitiert in [7.22]

Bemerkungen:

* Volle Symbole bezeichnen Versuchsergebnisse bei der Sedimentation, offene bei Wirbelschichten. Halbvolle Symbole gelten sowohl für die Sedimentation als auch für die Wirbelschicht.

** Kallodoc = Methylmetacrylat – Polymerisat.

*** Tapioca = Sago-ähnliche Körner.

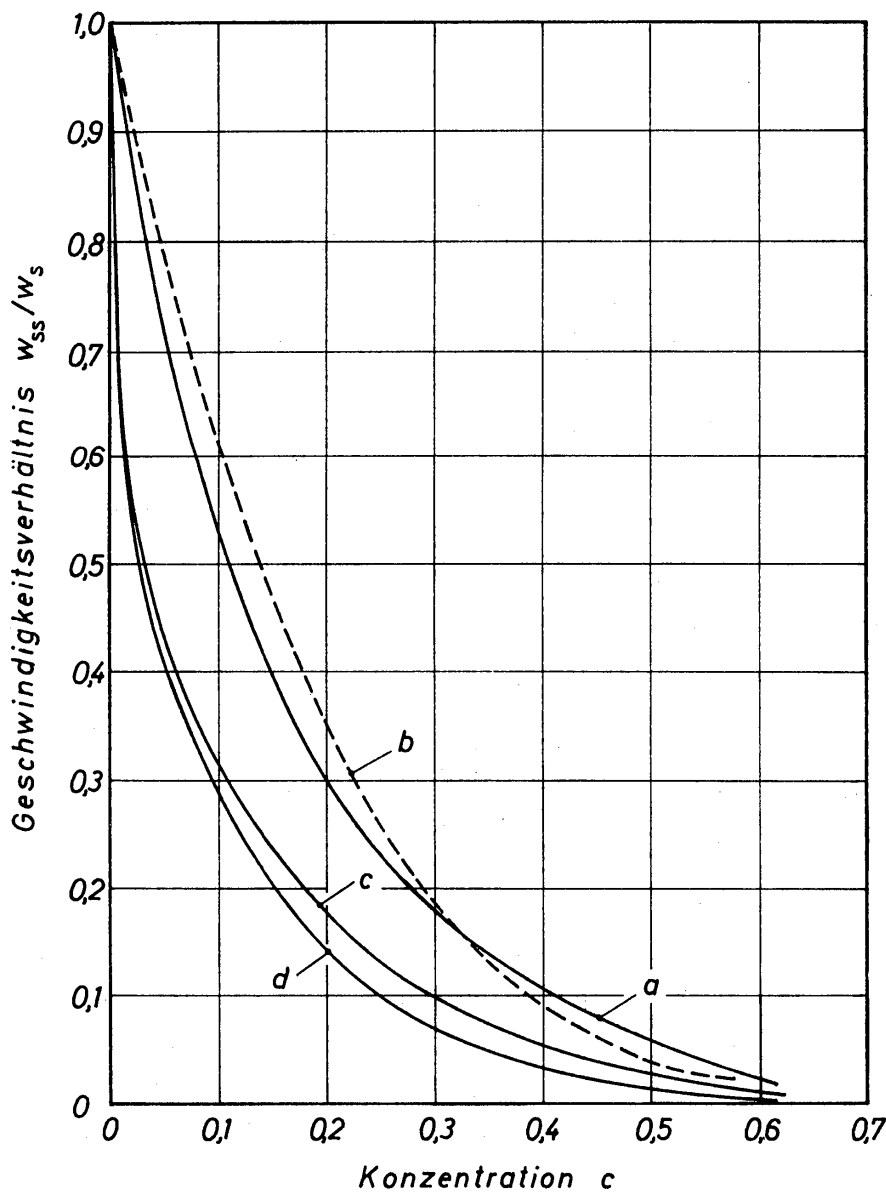


Bild 7.29. Vergleich zwischen Gl.(7.78) (Kurve a), Gl.(7.80) (Kurve b), Gl.(7.81) (Kurve c) und Kurve d nach einer Gleichung von SMITH [7.28]

auch eine theoretische Beziehung, die von SMITH [7.28] aufgestellt wurde und durch Kurve d wiedergegeben wird. Der Vergleich weist also darauf hin, daß die vorliegenden Versuchsergebnisse durch die theoretische Gl.(7.78) besser erfaßt werden.

7.232 Geschwindigkeitsverhältnis bei Zweikornsuspensionen

Für Zweikornsuspensionen sind bislang nur Meßwerte von SMITH [7.28] bekanntgeworden, von denen einige in *Bild 7.30* dargestellt sind. Für die übrigen Meßwerte erhält man ähnlich Bilder. Aufgetragen wurde unmittelbar die gemessene Korngeschwindigkeit w_{ss} , abhängig von der Konzentration c .

SMITH [7.28] führte die Sedimentationsversuche in einem zylindrischen Gefäß von 4,45 cm Durchmesser und 62,5 cm Höhe durch. Als Flüssigkeit wurde ein Glycerin/Wasser-Gemisch verwendet mit der Dichte $\rho = 1176 \text{ kg/m}^3$ und der

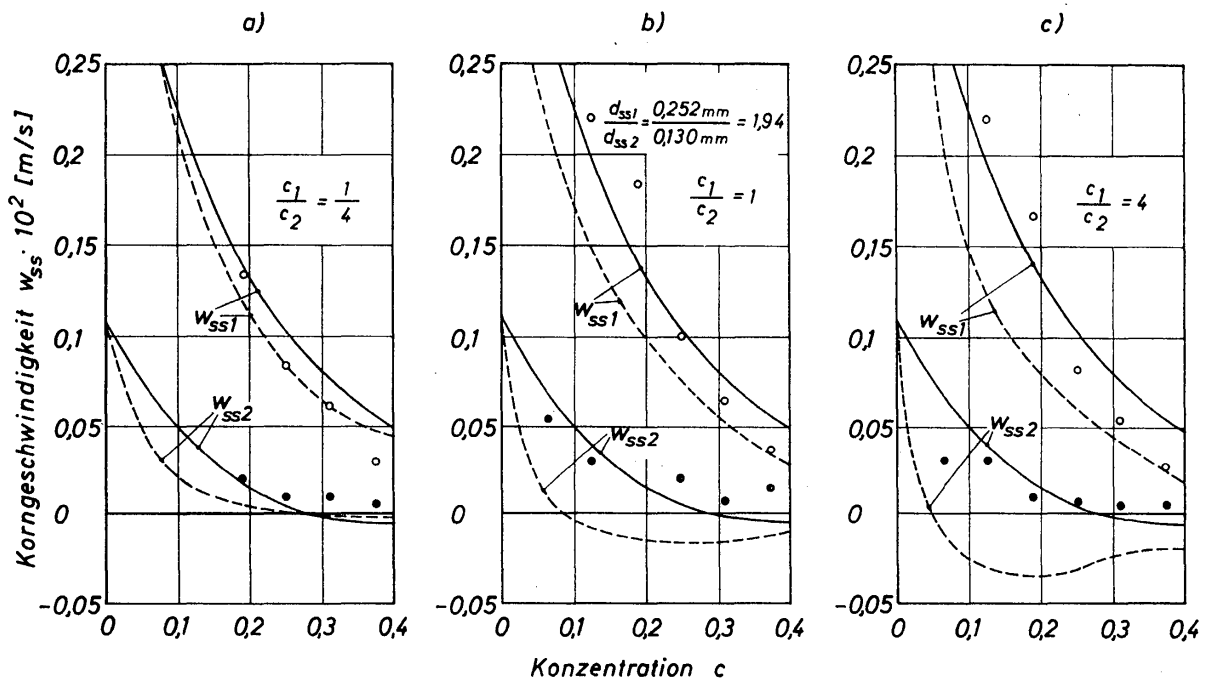
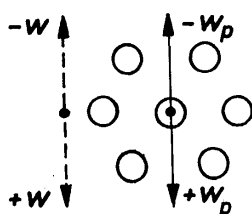


Bild 7.30. Vergleich zwischen Meßwerten für die Geschwindigkeitsverhältnisse bei Zweikornsuspensionen und theoretischen Gleichungen. Ausgezogene Kurven geben die Gleichungen (7.74) bis (7.77) und gestrichelte Kurven Gleichungen von SMITH [7.28] wieder. Das Durchmesser Verhältnis ist $d^* \equiv d_{p_1}/d_{p_2} = 1.94$

Viskosität $\nu = 12,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Die Feststoffkörner waren Glaskugeln mit der Dichte $\rho_p = 2950 \text{ kg/m}^3$. Der Durchmesser der verwendeten Korngrößen betrug 0,252 mm, 0,187 mm, 0,130 mm und 0,060 mm. Hiermit wurden Suspensionen mit drei verschiedenen Durchmesser Verhältnissen d_{p_1}/d_{p_2} hergestellt. Bild 7.30 enthält die Ergebnisse für $d_{p_1}/d_{p_2} = 1,94$. SMITH veränderte bei seinen Versuchen weiterhin das Konzentrationsverhältnis c_1/c_2 , welches gemäß seinen theoretischen Gleichungen, die durch gestrichelte Kurven wiedergegeben sind, einen starken Einfluß ausüben sollte. Dieser Einfluß wird durch die verfügbaren Meßwerte nicht bestätigt, sie werden vielmehr durch die von BRAUER und KRIEGEL [7.18] hergeleiteten Gleichungen, die durch ausgezogene Kurven wiedergegeben werden, verhältnismäßig gut ausgeglichen. Somit wird man also den Gleichungen (7.74) bis (7.77) berechtigtes Vertrauen schenken dürfen.

7.3 Schwarmbewegung im senkrecht aufwärts oder abwärts strömenden Fluid

Gemäß Bild 7.31 werden mit w und w_p die absoluten Geschwindigkeiten des Fluids und der im Schwarm befindlichen Partikel bezeichnet. Beide Geschwindigkeiten können sowohl senkrecht aufwärts (negativ) als auch senkrecht abwärts (positiv) gerichtet sein. In Bild 7.31 ist ein Schwarm gleich großer Kugeln dargestellt.



Haben die Kugeln die Durchmesser d_{p_1} und d_{p_2} , so sind deren absolute Geschwindigkeiten w_{p_1} und w_{p_2} .

Bild 7.31

Die Absolutgeschwindigkeiten w und w_p von Fluid und Partikel

Zwischen den Absolutgeschwindigkeiten von Fluid und Partikel besteht die Relativgeschwindigkeit

$$w_r = w - w_p = -w_{ss}, \quad (7.82)$$

die stets gleich dem negativen Wert der Sinkgeschwindigkeit w_{ss} der im Schwarm befindlichen Partikeln ist. Hierfür gilt die Beziehung

$$w_{ss} = \varphi w_s. \quad (7.83)$$

Im voraufgegangenen Abschnitt sind für das Geschwindigkeitsverhältnis φ die Gleichungen (7.74) bis (7.77) hergeleitet worden. Sie gelten für Zweikornsuspensionen im Bereich hoher Konzentration der Partikeln in dem kontinuierlichen Medium. Als Sonderfall der Gleichkornsuspensionen ergab sich für φ die Gl. (7.78). Die Herleitung dieser Gleichungen erfolgte in so allgemeiner Weise, daß sie nicht nur die Geschwindigkeit beim Absinken, sondern auch beim Aufsteigen von Partikeln richtig wiedergeben. Das heißt also, daß beispielsweise auch das Aufsteigen von Gasblasen in Flüssigkeiten mit diesen Gleichungen untersucht werden kann. Das Geschwindigkeitsverhältnis φ kann sowohl positiv als auch negativ sein. Der negative Wert ergibt sich für die kleinen in einer Zweikornsuspension enthaltenen Kugeln, wenn die Partikelkonzentration den kritischen Wert c_{kr} gemäß Gl. (7.79) überschreitet. Ferner gelten die für φ mitgeteilten Gleichungen nur im Stokesschen Widerstandsbereich der Einzelpartikeln.

Zur Berechnung von w_{ss} muß neben φ auch noch die Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit w_s der Partikeln bekannt sein. Diese Geschwindigkeit stellt sich dann ein, wenn sich die Partikeln vollkommen ungestört in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit bewegen und nicht durch die Anwesenheit anderer Partikeln oder Gefäßwände beeinflußt werden. Im Gültigkeitsbereich des Stokesschen Widerstandsgesetzes erhält man für w_s die Beziehung:

$$w_s = \frac{1}{18} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \frac{d_p^2 g}{\nu}. \quad (7.84)$$

Diese Geschwindigkeit ist positiv für $\rho_p/\rho > 1$ und negativ für $\rho_p/\rho < 1$.

Aus Gl. (7.83) folgt, daß die für die Schwarmbewegung maßgebende Geschwindigkeit w_{ss} sowohl durch φ als auch durch w_s bestimmt wird. Auf die Größe φ , die größer, gleich und kleiner als Null sein kann, soll noch etwas näher eingegangen werden:

- $\varphi > 0$ trifft für Partikeln in Gleichkornsuspensionen und für die großen Partikeln in Zweikornsuspensionen zu.
- $\varphi = 0$ ergibt sich für die kleinen Partikeln in einer Zweikornsuspension, wenn die Konzentration gerade den kritischen Wert c_{kr} erreicht hat.
- $\varphi < 0$ stellt sich für die kleinen Partikeln in einer Zweikornsuspension ein, wenn die Konzentration größer ist als ihr kritischer Wert.

Jede Übersicht über die möglichen Bewegungsvorgänge für Partikelschwärme muß diese Werte für das Geschwindigkeitsverhältnis φ berücksichtigen.

In *Tabelle 7.3* sind die für Partikelschwärme charakteristischen Bewegungen zusammengestellt. Die Partikelschwärme treten in einem senkrecht aufwärts und in einem senkrecht abwärts gerichteten Fluidstrom auf. Ist das Dichteverhältnis $\rho_p/\rho > 1$, dann ist die Sinkgeschwindigkeit der Einzelpartikel w_s positiv und somit abwärts gerichtet. Im anderen Falle für $\rho_p/\rho < 1$ ist die Steiggeschwindigkeit der Einzelpartikel w_s negativ, also aufwärts gerichtet. Zur weiteren Kennzeichnung der Partikelbewegung ist das Geschwindigkeitsverhältnis φ erforderlich, welches die oben erläuterten drei Werte annehmen kann. Damit liegt dann die Geschwindigkeit der Partikeln im Schwarm w_{ss} fest; sie ist in *Tabelle 7.3* durch einen Pfeil gekennzeichnet. Da die Fluidgeschwindigkeit w vorgegeben ist, folgt dann unmittelbar die absolute Geschwindigkeit der Partikeln w_p . Zur Vervollständigung ist ferner noch die Relativgeschwindigkeit w_r angegeben, die den negativen Wert der Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit w_{ss} besitzt.

Im aufwärts gerichteten Fluidstrom ergeben sich für $\rho_p/\rho > 1$ folgende Bewegungen: Für $\varphi > 0$ bewegen sich alle Partikeln langsamer als das Fluid. Für $\varphi = 0$ bewegen sich die Partikeln mit der Fluidgeschwindigkeit, da $w_{ss} = 0$ ist. Dieser Fall tritt für die kleineren Körner einer Zweikornsuspension bei der kritischen Konzentration c_{kr} auf. Ist schließlich $\varphi < 0$, dann bewegen sich die Partikeln schneller als das Fluid. Das ist aber nur für die kleinen Körner einer Zweikornsuspension möglich.

Ist das Dichteverhältnis $\rho_p/\rho < 1$, dann läßt sich mittels der angegebenen Gleichungen beispielsweise die Schwarmbewegung von Gasblasen in Flüssigkeiten verfolgen. Für $\varphi > 0$ bewegen sich alle Blasen schneller als das Fluid. Für $\varphi = 0$ bewegen sich die Blasen gerade mit der Fluidgeschwindigkeit. Besonders interessant ist die Bewegung der Blasen für $\varphi < 0$. Denn dann bewegen sich die Blasen langsamer als das Fluid. Selbstverständlich ist das nur für die kleinen Blasen im Schwarm möglich. Diese kleinen Blasen kommen sogar zum Stillstand, wenn die Fluidgeschwindigkeit gerade gleich dem negativen Wert der Steiggeschwindigkeit w_{ss} der kleinen Blasen wird, also

$$w = -w_{ss} = -\varphi w_s.$$

Da hierbei φ negativ wird, w_s gemäß Gl.(7.84) ebenfalls negativ ist, bleibt die Fluidgeschwindigkeit negativ und ist somit nach oben gerichtet. Weiterhin kann der Fall eintreten, daß sich die kleinen Blasen eines Schwarms in einer aufwärts strömenden Flüssigkeit nach unten bewegen. Gegenstrom zwischen der Flüssigkeit und den kleinen Blasen eines Schwarms tritt dann auf, wenn $w < |\varphi w_s|$ ist. Ganz entsprechende Bewegungszustände ergeben sich auch bei abwärts gerichtetem Fluidstrom, worauf aber nicht mehr eingegangen werden soll.

Die für Blasenschwärme beschriebenen Bewegungen sind jedoch, was ausdrücklich vermerkt sei, nur dann möglich, wenn die Blasen im Verlauf ihrer Bewegungen nicht an eine freie Oberfläche gelangen und dort die Flüssigkeit verlassen können. Freie Oberflächen sind beispielsweise in Blasensäulen, die zur Durchführung chemischer Reaktionen häufig verwendet werden, fast immer vorhanden.

Tabelle 7.3:
Zur Erläuterung der stationären Schwarmbewegung

Strömungsart	Q_p/Q	$\varphi \equiv \frac{w_{ss}}{w_s}$	w_s	w_{ss}	w	w_p	$w_r = w - w_p$
Aufwärts gerichteter Fluidstrom	1a	> 0	> 0				
		0		0			0
		< 0					
	1b	> 0	< 0				
		0		0			0
		< 0					
Abwärts gerichteter Fluidstrom	2a	> 0	> 0				
		0		0			0
		< 0					
	2b	> 0	< 0				
		0		0			0
		< 0					

Hierbei treten dann noch wesentlich verwickeltere Bewegungen der Blasen und der Flüssigkeit auf, die in Zusammenhang mit einer näheren Behandlung der Blasensäule beschrieben werden.

Die bisherigen Erläuterungen haben erkennen lassen, daß sich die für Partikelschwärme charakteristischen Bewegungsvorgänge ohne Schwierigkeit analysieren lassen. Die bisher verfügbaren Berechnungsunterlagen sind jedoch, das sei nochmals betont, auf Schwärme beschränkt, in denen entweder nur Partikeln mit einheitlichem Durchmesser oder mit zwei verschiedenen Durchmessern auftreten.

Schrifttum

- [7.1] M. STIMSON und G. B. JEFFEREY, The motion of two spheres in a viscous fluid, *Proc. Roy. Soc. (London) A* 111 (1926) 110–6
- [7.2] H. BAYER, Widerstandsgesetze für Kugelpaare, Studienarbeit am Lehrstuhl für Thermodynamik und Verfahrenstechnik, Technische Universität Berlin 1965
- [7.3] G. F. EVERSON, E. W. HALL und S. G. WARD, Interaction between two equal-sized equal-settling spheres moving through a viscous liquid, *Brit. J. Appl. Physics* 10 (1959) 43–7 und 11 (1960) 87
- [7.4] ● J. HAPPEL und H. BRENNER, Low Reynolds Number Hydrodynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N. Y.) 1965
- [7.5] J. HAPPEL und R. PFEFFER, The motion of two spheres following each other in a viscous fluid, *AICHE J.* 6 (1960) 1, 129–33
- [7.6] S. M. ISAAKYAN und A. M. GASPARYAN, The mechanism of interactions between solid bodies and viscous fluids in two-phase flows, *Int. Chem. Eng.* 6 (1966) 1, 74–81, und 3, 445–8
- [7.7] M. S. SMOLUCHOWSKI, On the practical applicability of Stokes' law of resistance, and the modifications of it required in certain cases, *Proceedings of the 5th International Congress on Mathematics* 2 (1913) 192–201, Cambridge University Press
- [7.8] H. FAXÉN, Gegenseitige Einwirkung zweier Kugeln, die in einer zähen Flüssigkeit fallen, *Ark. Mat. Astron. Fys.* 19 A (1925) 13, 1–8
- [7.9] G. Y. KYNCH, The slow motion of two or more spheres through a viscous fluid, *J. Fluid Mech.* 5 (1959) 193–208
- [7.10] R. M. SONSHINE und H. BRENNER, The Stokes translation of two or more particles along the axis of an infinitely long circular cylinder, *Appl. Sci. Res.* 16 (1966) 6, 425–54
- [7.11] A. J. GOLDMAN, R. G. COX und H. BRENNER, The slow motion of two identical arbitrarily oriented spheres through a viscous fluid, *Chem. Eng. Sci.* 21 (1966) 12, 1151–70
- [7.12] P. N. ROWE und G. A. HENWOOD, Drag forces in a hydraulic model of a fluidized bed, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 39 (1961) 43–54
- [7.13] R. JOHNE, Einfluß der Konzentration einer monodispersen Suspension auf die Sinkgeschwindigkeit ihrer Teilchen, *Chem.-Ing.-Techn.* 38 (1966) 4, 428–30
- [7.14] B. H. KAYE und R. P. BOARDMAN, Cluster formation on dilute suspensions, *Proceedings of the Symposium on the Interaction between Fluids and Particles*, Institution Chemical Engineers, 1962
- [7.15] P. Y. CHENG und H. K. SCHACHMAN, Studies on the validity of the Einstein viscosity law and Stokes law of sedimentation, *J. Polymer Sci.* 16 (1955) 19–30
- [7.16] J. S. MCNOWN und P. N. LIN, Sediment concentration and fall velocity, *Proceedings of the Second Midwestern Conference on Fluid Mechanics*, 1952, 401–12

- [7.17] F. KNEULE und P. M. WEINSPACH, Suspendierung fester Körper in Flüssigkeiten, *Chem.-Ing.-Techn.* 35 (1963) 10, 720–5
- [7.18] H. BRAUER und E. KRIEGEL, Kornbewegung bei der Sedimentation, *Chem.-Ing.-Techn.* 38 (1966) 3, 321–30
- [7.19] J. W. HIBY, *Longitudinal and transverse mixing during single-phase flow through granular beds*, Vortrag auf dem «Third Congress of the European Federation of Chemical Engineering», London 1962
- [7.20] R. LADENBURG, Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit, *Ann. Physik* 23 (1907) 447–58
- [7.21] TH. J. HANRATTY und A. BANDUKWALA, Fluidization and sedimentation of spherical particles, *AIChE J.* 3 (1957) 2, 293–6
- [7.22] D. R. OLIVER, The sedimentation of suspensions of closely-sized spherical particles, *Chem. Eng. Sci.* 15 (1961) 3/4, 230–42
- [7.23] H. H. STEINOUR, Rate of sedimentation, Non flocculated suspensions of uniform spheres, *Ind. Eng. Chem.* 36 (1944) 7, 618–24
- [7.24] A. L. LOEFFLER und B. F. RUTH, Particulate fluidization and sedimentation of spheres, *AIChE J.* 5 (1959) 3, 310–4
- [7.25] J. F. RICHARDSON und W. N. ZAKI, Sedimentation and fluidization, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 32 (1954) 35–53
- [7.26] J. F. RICHARDSON und R. A. MEIKLE, The sedimentation of uniform fine particles and of two-component mixtures of solids, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 39 (1961) 348–56
- [7.27] J. HAPPEL, Viscous flow in multiparticle systems, *AIChE J.* 4 (1958) 2, 197–201
- [7.28] T. N. SMITH, The differential sedimentation of particles of two different species, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 43 (1965) 3, 69–73

Teil III

Strömungsgesetze bei ruhenden und bewegten Partikelmassen

8	Einphasenströmung durch ruhende Füllkörperschichten	398
9	Wirbelschicht	459
10	Pneumatischer und hydraulischer Transport körniger Feststoffe	507
11	Fließbewegung von Kornmassen	587

Nachdem im vorausgegangenen Teil II mit den Kapiteln 5 bis 7 die grundlegenden Gesetze für die Umströmung und Bewegung einzelner Partikeln sowie für die Schwarmbewegung behandelt wurden, werden in den folgenden Kapiteln 8 bis 11 einige technisch sehr bedeutsame Vorgänge untersucht, bei denen ruhende oder bewegte Partikelmassen auftreten. Ausgangspunkt dieser Betrachtungen bildet die ruhende Partikel- oder Füllkörperschicht. Erhöht man die Durchströmungsgeschwindigkeit weit genug, so wird die Füllkörperschicht aufgelockert und nimmt dabei flüssigkeitsähnliche Eigenschaften an. Infolge ungleichförmiger Durchströmungsgeschwindigkeiten beobachtet man eine mehr oder weniger regellose Bewegung der Partikeln. Die in diesem Zustand befindliche Partikelschicht wird Wirbelschicht genannt. Aber auch der Name Fließbett ist gebräuchlich. In neuester Zeit bemüht man sich um die Einführung von Namen wie Fluidatbett oder Fluidat. Im Rahmen dieses Buches soll jedoch die alte Bezeichnung «Wirbelschicht» beibehalten werden. Bei noch weiter steigender Durchströmungsgeschwindigkeit wird schließlich die Partikelmasse vom Fluidstrom mitgerissen. Ist das Fluid eine Flüssigkeit, so spricht man vom hydraulischen Transport, bei einem Gas vom pneumatischen Transport. Schließlich werden in diesem dritten Teil des Buches noch einige andere Bewegungsformen von körnigen Feststoffmassen behandelt, von denen als Beispiel das Ausfließen aus Bunkern erwähnt sei.

Bei der Betrachtung der genannten Vorgänge steht deren technische Anwendung im Vordergrund. Das heißt, es wird vor allem auf die Größen eingegangen, die für den Entwurfs- und Betriebsingenieur von besonderem Interesse sind.

8 Einphasenströmung durch ruhende Füllkörperschichten

Füllkörperschichten befinden sich im allgemeinen in zylindrischen Gefäßen, die man Füllkörpersäulen oder auch Füllkörperkolonnen nennt. Diese Einrichtungen werden in der Technik für die verschiedensten Probleme des Wärme- und Stoffaustausches verwendet. Der vorliegende Abschnitt befaßt sich mit den Kolonnen, die jeweils nur von einer flüssigen oder nur von einer gasförmigen Phase durchströmt werden. Es wird also die Einphasenströmung durch Füllkörpersäulen behandelt. Im Gegensatz dazu bewegen sich bei der Zweiphasenströmung gleichzeitig ein Gas und eine Flüssigkeit durch die Kolonne. Hierauf wird in einem gesonderten Abschnitt eingegangen.

Einphasig durchströmte Füllkörpersäulen werden in der Technik für die verschiedensten Probleme des Wärme- und Stoffaustausches verwendet. Erwähnt seien insbesondere Regeneratoren zum Zweck des Wärmeaustausches, chemische Reaktoren, in denen die Füllkörper als Katalysator dienen, und Kernreaktoren, bei welchen das spaltbare Material in den die Schicht bildenden Kugeln enthalten ist. Eine der technisch bedeutsamsten Füllkörperkolonnen und zugleich die größte ist der Hochofen.

Die in einer Füllkörperkolonne übertragenen Wärmen und Stoffmengen sind proportional der Austauschfläche. Die Füllkörper dienen in erster Linie zur Erzeugung einer möglichst großen Oberfläche je Volumeinheit. Sie sind daher fast immer klein im Vergleich zum Säulendurchmesser. Der Durchmesser der Säulen liegt bei Laboratoriumsanlagen in der Größenordnung von einigen Zentimetern und kann bei großen technischen Anlagen bis zu einigen Metern betragen. Der Füllkörperdurchmesser liegt im allgemeinen zwischen einigen Millimetern und einigen Zentimetern.

In einfachen Fällen, insbesondere bei Verwendung künstlicher Füllkörper, besteht die Schicht nur aus Füllkörpern gleicher Abmessungen. Solche Füllkörperschichten nennt man Gleichkornschichten. Daneben gibt es Mehrkornschichten, in denen die Füllkörper zwar näherungsweise die gleiche Form, aber sehr unterschiedliche Abmessungen haben. Im Hochofen befindet sich z. B. eine aus verschieden großen, granulatartigen Körnern gebildete Mehrkornschicht. Aber auch die in Silos gespeicherten körnigen Güter der Landwirtschaft sind fast immer Mehrkornschichten.

Die Ausführungen in diesem Abschnitt betreffen somit die Einphasenströmung durch Gleich- und Mehrkornschichten. Zur Einführung in die Strömungsprobleme werden zunächst die Größen behandelt, mit deren Hilfe sich die Struktur der Füllkörperschicht beschreiben läßt.

8.1 Kennzeichnende Größen der Füllkörperschicht

Als kennzeichnende Größen der Füllkörperschicht sind zunächst die Form und die Abmessungen der Füllkörper selbst zu nennen. Die regellose Anordnung der Füllkörper innerhalb der Schicht wird durch einen Lückengrad beschrieben. Im Hinblick auf die Strömung in der Schicht dient schließlich der hydraulische Durchmesser zur Kennzeichnung der Größe der verfügbaren Strömungskanäle.

8.11 Füllkörper

Mittels der Füllkörper soll innerhalb eines gegebenen Säulenvolumens eine möglichst große Oberfläche erzeugt werden. Betrachtet man beispielsweise ein 1 m langes Rohr von 0,03 m lichtigem Durchmesser, so beträgt die innere Rohroberfläche 0,0942 m². Füllt man dieses Rohr mit Kugeln von 2 mm Durchmesser, so ergibt sich allein für die Kugeln eine Oberfläche von etwa 1,26 m², die mehr als 13 mal so groß wie die des Rohres ist. Aus dieser Angabe läßt sich bereits die Bedeutung der Füllkörpersäule für die Wärme- und Stoffübertragung erkennen. Denn die übertragene Wärme und der übertragene Stoff sind proportional der Übertragungsfläche, für die man in einfachen Fällen unmittelbar die Oberfläche der Füllkörper nehmen darf.

Die Füllkörper lassen sich bei etwas schematischer Betrachtung in zwei Gruppen einteilen, nämlich in die von regelloser und in die von regulärer, zumeist einfacher geometrischer Form. Zu den regellos geformten Füllkörpern zählen beispielsweise gemahlene Gestein, Kies, gebrochener Koks, gemahlene und gesintertes Erz und andere Granulate. Die Form dieser Füllkörper ist also im wesentlichen durch einen Brech- oder Mahlvorgang bestimmt. Je feiner das Mahlgut ist, desto mehr nähern sich die Partikeln der Kugel- oder auch der Plättchenform an. Die Oberfläche dieser Partikeln ist aber stets größer als die der volumgleichen Kugeln.

Zur zweiten Gruppe der Füllkörper zählen diejenigen mit regulärer Form. Mit der Bezeichnung reguläre Form wird ausgedrückt, daß alle Füllkörper der betrachteten Menge die gleiche Form haben. Sie erfordern im allgemeinen einen aufwendigen Herstellungsprozeß und lassen sich, dem Verwendungszweck angepaßt, aus nahezu beliebigen Materialien, wie beispielsweise Steinzeug, Porzellan, Glas, Metall und Kunststoff, anfertigen. Die Form dieser Füllkörper wird unter Berücksichtigung folgender Gesichtspunkte festgelegt:

- a) Große Oberfläche bei geringem Materialaufwand.
- b) Günstige Bedingungen für die Umströmung und Durchströmung, damit sich ein möglichst geringer Druckverlust und eine möglichst gleichmäßige Verteilung des strömenden Fluids ergibt.
- c) Ausreichende Festigkeit zur Vermeidung von Bruch, da Bruchstücke die Struktur der Schicht sehr ungünstig beeinflussen können.
- d) Herstellbarkeit aus verschiedenen Materialien, um insbesondere die Korrosionsbeständigkeit bei den verschiedenen Betriebsbedingungen gewährleisten zu können.

- e) Möglichkeit, mit den Füllkörpern regellose oder geordnete Schichten herstellen zu können. Zu einer geordneten Aufstellung geht man gerne bei sehr großen Füllkörpern über.
- f) Gute Gleiteigenschaft innerhalb einer Schicht. Hierauf muß insbesondere dann geachtet werden, wenn sich die Füllkörperschicht während des Betriebes möglichst gleichmäßig durch die Säule hindurchbewegen soll. Gute Gleiteigenschaften sind aber auch für die Herstellung einer gleichmäßigen und dichten Packung bedeutsam.
- g) Geringe Herstellungskosten.

Die Grundformen der heute üblichsten Füllkörper sind Kugel, Vollzylinder, Hohlzylinder (Raschigring, Pallring) und Sattelförmige Körper (Bersattel, Intaloxsattel). In *Bild 8.1* sind der Raschig- und Pallring sowie der Berl- und Intaloxsattel dargestellt.

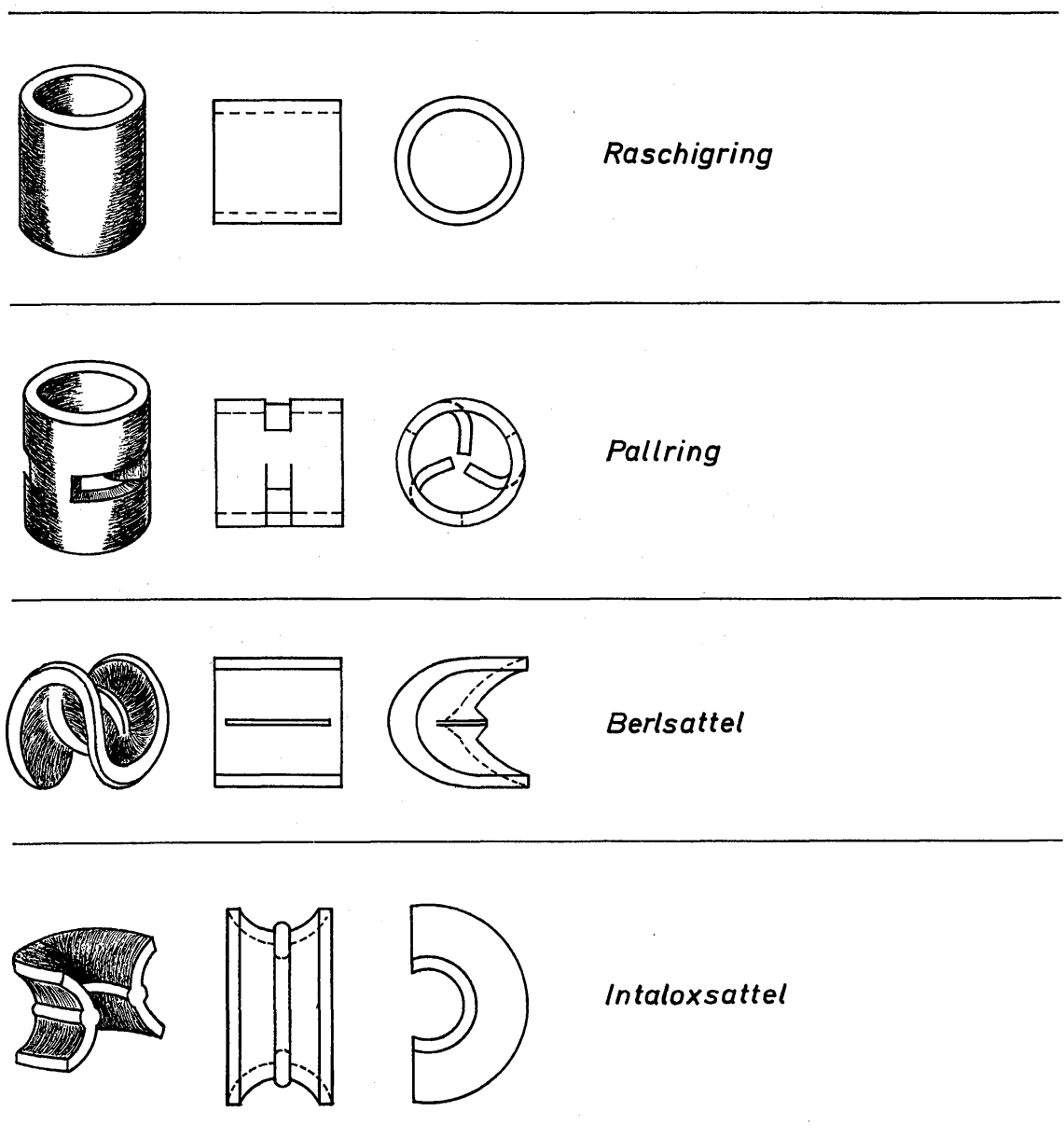


Bild 8.1. Einige Füllkörperformen

Der einfachste Füllkörper ist die Kugel. Mit ihrer Oberfläche $A_k = d_k^2 \pi$ und ihrem Volumen $V_k = d_k^3 \pi/6$ ist das auch spezifische Oberfläche genannte Verhältnis von Oberfläche zu Volumen

$$\frac{A_k}{V_k} = \frac{6}{d_k}, \quad (8.1)$$

wobei d_k der Kugeldurchmesser ist. Die Kugel ist der Körper mit der kleinsten Oberfläche bei gegebenem Volumen. Die Kugel ist jedoch der Körper mit der größten Festigkeit. Ferner zeichnet sich die Kugel dadurch aus, daß sie innerhalb einer sich bewegenden Schicht die günstigsten Gleiteigenschaften besitzt. Sie kann in nahezu beliebiger Größe aus allen Materialien hergestellt werden. Die Herstellungskosten sind jedoch nicht immer gering.

Ein weiterer sehr einfacher Füllkörper hat die Form eines Vollzylinders, dessen Länge gleich dem Durchmesser d_z ist. Hierfür erhält man die spezifische Oberfläche zu

$$\frac{A_z}{V_z} = \frac{6}{d_z}. \quad (8.2)$$

Sie stimmt mit der der Kugel überein, wenn $d_z = d_k$ ist. Unter der gleichen Voraussetzung ist aber die absolute Oberfläche des Zylinders 3/2 mal so groß wie die der Kugel. Im Vergleich zur Kugel ist der Vollzylinder einfacher herzustellen, verfügt andererseits jedoch über eine geringere Festigkeit und über wesentlich ungünstigere Gleiteigenschaften innerhalb der Füllkörperschicht. Ferner neigen zylindrische Füllkörper zu achsenparalleler Anordnung, so daß sich innerhalb einer Schicht leicht Bereiche mit einheitlicher Orientierung ergeben. Die Schicht weist also eine ungleichförmige Struktur auf und wird daher ungleichmäßig durchströmt. Die Neigung zur Ausbildung bevorzugter Strukturen innerhalb einer Schicht ist um so größer, je mehr ebene Flächen die Füllkörper aufweisen und je größer diese Flächen sind.

Verringert man die Länge des Vollzylinders beispielsweise auf die Hälfte oder auf ein Drittel des Zylinderdurchmessers, dann erhält man tablettenförmige Körper, für die das Verhältnis A_z/V_z die günstigeren Werte $8/d_z$ oder $10/d_z$ annimmt. Tabletten sind jedoch wesentlich bruchempfindlicher und zeichnen sich durch schlechte Beweglichkeit innerhalb einer Füllkörperschicht aus. Der große Anteil ebener Flächen an der Gesamtoberfläche trägt zur Ausbildung bevorzugter Strukturen innerhalb der Schicht bei.

Ein in der Praxis sehr viel angewandeter Füllkörper ist der nach seinem Erfinder benannte Raschigring. Der Raschigring ist ein Hohlzylinder, dessen Länge und äußerer Durchmesser übereinstimmen. Zur Berechnung der spezifischen Oberfläche des Einzelkörpers sei zunächst das relative Hohlvolumen ε_r des Raschigringes definiert:

$$\varepsilon_r \equiv \frac{V_z - V_r}{V_z} = \left(\frac{d_i}{d_a} \right)^2. \quad (8.3)$$

Es bedeuten V_z das Materialvolumen des Vollzylinders und V_r das Materialvolumen des Raschigringes sowie d_i den inneren und d_a den äußeren Durchmesser. Für die spezifische Oberfläche ergibt sich dann die folgende Beziehung:

$$\frac{A_r}{V_r} = \frac{6}{d_a} \frac{1 + \frac{3}{2} \sqrt{\varepsilon_r} - \frac{1}{3} \varepsilon_r}{1 - \varepsilon_r}. \quad (8.4)$$

Hierin ist $6/d_a$ die spezifische Oberfläche des vergleichbaren Vollzylinders. Da ε_r stets kleiner als 1 ist, muß A_r/V_r also immer größer als $6/d_a$ sein. Die Oberflächenvergrößerung im Vergleich zum Vollzylinder ist jedoch nicht sehr bedeutsam. Geht man davon aus, daß Vollzylinder und Raschigring innerhalb der Füllkörperschicht das gleiche Volumen einnehmen, wenn nur die äußeren Durchmesser übereinstimmen, dann ist es sinnvoll, unmittelbar die Oberflächen A_r und A_z zu vergleichen. Für das Verhältnis ergibt sich

$$\frac{A_r}{A_z} = \frac{2}{3} \left[1 + \sqrt{\varepsilon_r} + \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_r) \right]. \quad (8.5)$$

Da ε_r im äußersten Falle gleich 1 werden kann, ist der größtmögliche Wert des Oberflächenverhältnisses $4/3$. Dieser Wert ist zu klein, als daß man den Vorteil des Raschigringes in der im Vergleich zum Vollzylinder größeren Oberfläche sehen darf. Ein Vorteil des Raschigringes ist sein geringes Materialvolumen. Wird es auf das Materialvolumen des Vollzylinders bezogen, dann erhält man

$$\frac{V_r}{V_z} = 1 - \varepsilon_r. \quad (8.6)$$

Da ε_r etwa zwischen 0,4 und 0,95 liegt, ist die Materialersparnis erheblich, was bei Verwendung wertvoller Materialien sehr bedeutsam sein kann. Der zweite Vorteil des Raschigringes liegt in den wesentlich besseren strömungstechnischen Eigenschaften. Während der Vollzylinder lediglich umströmt werden kann, wird der Raschigring gleichzeitig auch durchströmt. Damit verursacht eine Schicht aus Raschigringen einen erheblich geringeren Druckverlust als eine Schicht aus Vollzylindern. Den Vorteilen des Raschigringes stehen aber auch Nachteile gegenüber. Im Vergleich zum Vollzylinder ist die Herstellung des Raschigringes umständlicher, und seine Gleiteigenschaften sind ungünstiger. Besonders zu beachten ist die hohe Bruchempfindlichkeit für einige Materialien. Bruchempfindlichkeit und Herstellungsprozeß bedingen eine bestimmte Wandstärke. Darum ändert sich das Durchmesser Verhältnis d_i/d_a der Ringe mit ihrer Größe, so daß verschieden große Raschigringe nicht mehr geometrisch ähnlich sind.

Untersuchungen über die strömungstechnischen Eigenschaften von Raschigringen innerhalb einer Schicht haben erkennen lassen, daß der Innenraum der Ringe für die Durchströmung nicht voll genutzt wird. Benachbarte Raschigringe versperren die Strömungswege teilweise. Um die Durchströmmöglichkeit zu verbessern, entwickelte man aus dem Raschigring den Pallring. Bei ihm ist die Mantelfläche teilweise geöffnet. *Bild 8.1* zeigt als Beispiel einen aus Steinzeug hergestellten Pallring. Aus der Mantelfläche sind drei über den Umfang gleich-

mäßig verteilte Zungen ausgestanzt und nach innen gebogen. Die so entstandenen Öffnungen erlauben zusätzlich zur axialen eine radiale Durchströmung des Füllkörpers. Eine Schicht aus Pallringen verursacht daher einen geringeren Druckverlust als eine Raschigringschicht. Aus der in *Bild 8.1* skizzierten Grundform haben sich viele Sonderformen ergeben. Im Vergleich zum Raschigring ist die Herstellung des Pallringes natürlich umständlicher, und außerdem ist er bruchempfindlicher. Ferner lagert sich im Pallring wegen der vermehrten scharfen Kanten Schmutz leichter ab als im Raschigring. Die Verschmutzungsgefahr ist insbesondere bei zweiphasiger Strömung zu beachten.

Vollzylinder, Raschigringe und Pallringe haben im Vergleich zu Kugeln ungünstigere Gleiteigenschaften. Folglich sind diese Körper in einer Schicht stets weniger gleichmäßig verteilt als Kugeln, und die Schicht wird ungleichmäßiger durchströmt. Das ist für Wärme- und Stoffaustauschvorgänge von großem Nachteil, da bestimmte Anteile der Schicht für diese Vorgänge nicht voll genutzt werden.

Eine sehr gleichmäßige Verteilung der Füllkörper innerhalb einer Schicht wird mit Sattelkörpern, insbesondere mit Berlsätteln, erzielt. Die Herstellung dieser Füllkörper ist natürlich kostspieliger als die der bisher genannten. Die geschickte Formgebung gewährleistet eine geringe Bruchempfindlichkeit.

8.12 Lückengrad der Füllkörperschicht

Der Lückengrad gibt Aufschluß über die Struktur einer Füllkörperschicht, die von der Form und Größe der Füllkörper und deren Orientierung zueinander abhängt. Stimmen Form und Größe für alle Füllkörper überein, so spricht man von Gleichkornschichten. Haben hingegen die Füllkörper nur alle die gleiche Form, während ihre Größe unterschiedlich ist, dann spricht man von Mehrkornschichten. Nähere Ausführungen werden im folgenden über den Lückengrad von Gleich- und Zweikornschichten gemacht.

8.121 Allgemeine Angaben zur Struktur und zum Lückengrad

Eine Füllkörperschicht wird in der technischen Praxis fast ausnahmslos durch einen Schüttvorgang erzeugt, der seiner Natur nach ein stochastischer Prozeß ist. Die Struktur der Füllkörperschicht hängt also vom Zufall ab und läßt sich daher nur durch Wahrscheinlichkeitsgesetze beschreiben. Hiermit sind lediglich Aussagen über die am häufigsten auftretende Struktur und über den Bereich einer die Struktur kennzeichnenden Größe möglich. Eine solche Größe ist der Lückengrad. Aussagen über die Abhängigkeit des Lückengrades vom Orte sind für die Behandlung der Strömung und der Wärme- und Stofftransportvorgänge innerhalb einer Füllkörperschicht von großer Bedeutung. Ein genauere Aufschluß über die örtliche Größe dieser Transportvorgänge ist insbesondere für den Entwurf von chemischen Reaktoren und Kernreaktoren wichtig. Zur Einführung in die Strukturprobleme wird die Schicht als unendlich ausgedehnt betrachtet.

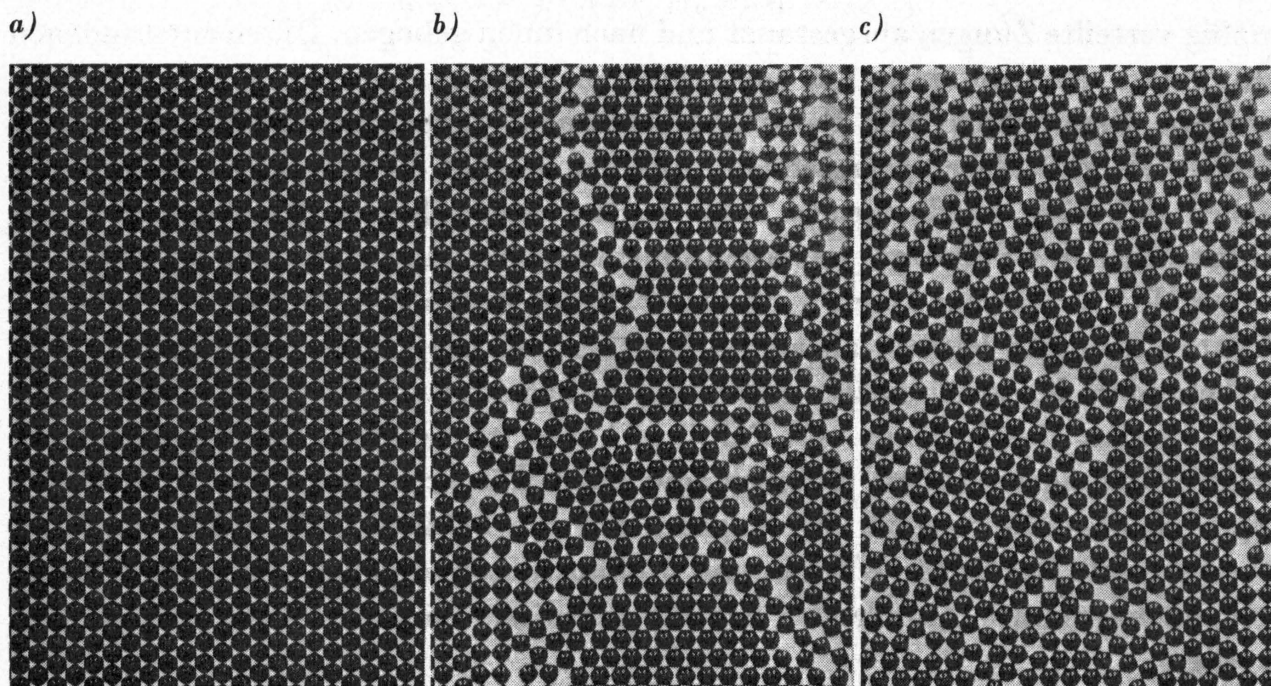


Bild 8.2. Photographische Aufnahmen von einer ebenen Kugelschicht; a) regelmäßige, dichteste Kugelanordnung; b) teilweise regellose, aber noch dichte Kugelanordnung; c) fast vollständig regellose, lockerste Kugelanordnung

Die in *Bild 8.2* wiedergegebenen photographischen Aufnahmen sollen dazu beitragen, von der Struktur einer Füllkörperschicht eine anschauliche Vorstellung zu vermitteln. Da eine räumliche Schicht für photographische Aufnahmen ungeeignet ist, wurde eine ebene Kugelschicht photographiert, die sich zwischen zwei parallelen Glasplatten befand. Daß diese Aufnahmen eine zutreffende Vorstellung auch vom Aufbau einer räumlichen Schicht vermitteln, geht aus einigen von DEBBAS und RUMPF [8.1], von RUMPF, DEBBAS und SCHÖNERT [8.2], von BERNAL und MASON [8.3] sowie von THADANY und PEEBLES [8.4] veröffentlichten Schnittbildern räumlicher Schichten hervor. Diese Verfasser haben die Struktur von Schichten aus Kugeln und Granulaten theoretisch und experimentell untersucht.

Bild 8.2a zeigt die dichteste der regulären Anordnungsmöglichkeiten von gleich großen Kugeln in einer Schicht, deren Dicke gleich dem Kugeldurchmesser ist. Bei dieser Anordnung wird jede Kugel von 6 anderen Kugeln berührt, so daß die Koordinationszahl 6 ist. Ferner ist jeder Kugel ein gleich großes Lückenvolumen zugeordnet. Ist V_p das Gesamtvolumen aller in der Schicht vorhandenen Kugeln und V_s das Säulen- oder Schichtvolumen, dann ist das gesamte Lückenvolumen $V_s - V_p$. Bezieht man dieses auf das Schichtvolumen, so ergibt sich der mit ε bezeichnete Lückengrad zu

$$\varepsilon \equiv \frac{V_s - V_p}{V_s}. \quad (8.7)$$

Für die in *Bild 8.2a* dargestellte reguläre Kugelanordnung mit der Koordinationszahl 6 nimmt der Lückengrad ε den absolut kleinsten Wert an. Wegen der gleichmäßigen Verteilung von Kugeln und Lückenvolumen wird die Schicht, so sie

gleichmäßig angeströmt wird, auch gleichmäßig durchströmt. Damit ist die Voraussetzung geschaffen, daß alle Kugeln gleichermaßen an einem Wärme- und Stoffaustausch oder einer chemischen Reaktion teilhaben. Bei ungleichmäßiger Durchströmung wird eine Füllkörperschicht bezüglich des Wärme- und Stoffaustausches oder einer chemischen bzw. nuklearen Reaktion nur unvollkommen ausgenutzt. Unter diesem Gesichtspunkt sollte man also stets eine reguläre Anordnung der Füllkörper anstreben.

Die Forderung einer regulären Füllkörperanordnung läßt sich jedoch schon allein aus wirtschaftlichen Gründen kaum erfüllen. In technischen Kolonnen befinden sich Hunderttausende oder Millionen von Füllkörpern. Wollte man diese regulär anordnen, so müßte das von Hand geschehen, da noch keine Füllmaschinen für diesen Zweck verfügbar sind. Die hierfür aufzuwendenden Kosten wären nicht vertretbar. Aus diesem Grunde werden die Füllkörper in die Kolonne geschüttet, und man gibt sich mit der dabei zufällig entstehenden Anordnung zufrieden. Welcher Art die Anordnungen sein können, lassen die *Bilder 8.2b* und *c* erkennen. *Bild 8.2b* zeigt, daß innerhalb einer durch Schüttung entstandenen Kugelschicht sowohl Bereiche regulärer Anordnung mit einer Koordinationszahl 6 auftreten als auch Bereiche mit vollkommen regelloser Anordnung, in denen die Koordinationszahl zwischen 2 und 6 liegen kann. Als Koordinationszahl bezeichnet man die Zahl der Berührungspunkte eines Füllkörpers mit benachbarten Füllkörpern. Ist die Koordinationszahl örtlich veränderlich, so spricht man von regelloser Anordnung der Füllkörper. Eine örtlich konstante Koordinationszahl muß jedoch noch keine reguläre Anordnung bedeuten. Die Schüttung ist erst dann regulär, wenn sich um jeden Füllkörper die benachbarten Füllkörper in genau der gleichen Weise anordnen. Das *Bild 8.2b* erweckt den gleichen Eindruck wie ein metallographisches Schlibbild. Bereiche regulären Aufbaues sind Kristalliten vergleichbar, die sich gegenseitig im Wachstum behindert haben. Die den regellosen Aufbau einschließenden Bereiche lassen sich mit den Korngrenzsubstanzen vergleichen. Sie weisen in jedem Falle die geringste mechanische Festigkeit auf, die mit abnehmender Koordinationszahl kleiner wird. Das heißt, daß die Verschiebbarkeit der Kugeln gegeneinander mit abnehmender Koordinationszahl zunimmt. Von außen angreifende Kräfte, hervorgerufen durch Schwingungen, die in technischen Anlagen unvermeidbar sind, können zu Anordnungsänderungen führen. Das Ergebnis dieser Neuorientierung läßt sich kaum voraussagen. Mit Sicherheit darf man jedoch erwarten, daß sich ein regulärer Aufbau gemäß *Bild 8.2a* dabei nicht ergibt. Wahrscheinlicher ist vielmehr, daß unter äußeren Einwirkungen Bereiche regelloser Anordnung der Kugeln teilweise in eine reguläre Anordnung übergehen, während gleichzeitig Bereiche mit ursprünglich regulärem Aufbau teilweise wieder in den regellosen Zustand versetzt werden. Gleichfalls ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich als Ergebnis des stochastischen Schüttprozesses die gesamte Schicht so ordnet, daß nur die höchste oder nur die niedrigste Koordinationszahl auftritt, zu gering, als daß sie für die technische Praxis von Bedeutung wäre. Strukturen mit der niedrigsten Koordinationszahl werden bereits durch kleinste äußere Krafteinwirkungen zerstört. Bei zeitlich veränderli-

chen äußeren Einwirkungen muß auch mit zeitlich veränderlicher innerer Struktur der Füllkörperschicht gerechnet werden. Diese Strukturänderungen sind um so wahrscheinlicher, je besser die Gleiteigenschaften der Füllkörper sind. Bei Kugelschichten werden die Änderungen also eher auftreten als bei Granulatschichten. Aus diesem Grunde muß man erwarten, daß bei Granulatschichten die Summe der Volumanteile einer Schicht mit regelloser Struktur viel größer ist als bei Kugelschichten. Je regelloser die Form der Einzelkörper, desto ausgeprägter ist auch die Regellosigkeit der Schichtstruktur.

Je geringer die Koordinationszahl ist, desto größer ist der örtliche Lückengrad. Da man nach Untersuchungen von SPECK [8.5] annehmen darf, daß der statische Druck über dem Querschnitt einer Füllkörperschicht konstant ist, strömt durch Bereiche größeren Lückengrades der größere Anteil des Fluidvolumens. Ungleichmäßigkeiten im Lückengrad haben somit eine ungleichmäßige Durchströmung zur Folge. Die damit verbundenen Nachteile für den Wärme- und Stoffaustausch wurden bereits erwähnt.

Ein extremes Beispiel für die regellose Anordnung der Kugeln zeigt *Bild 8.2c*. Hierin sind nur einige kleine Bereiche mit regulärem Aufbau erkennbar, in denen die Koordinationszahl 6 ist. Da die Beweglichkeit der Partikeln mit abnehmender Koordinationszahl zunimmt, wird man, was Versuche auch bestätigen, erwarten müssen, daß die in *Bild 8.2c* dargestellte Schicht bereits unter Einwirkung sehr geringer äußerer Kräfte in einem Zustand größerer Ordnung übergeht. In jeder durch Schüttung erzeugten Schicht stellt sich wahrscheinlich für jede Füllkörperart ein bestimmter Anteil von Bereichen mit regulärer und regelloser Ordnung ein, zwischen denen ein Gleichgewicht besteht. Auf diese Gesetzmäßigkeit stützen sich die bereits genannten theoretischen Untersuchungen über den Lückengrad von Füllkörperschichten [8.1 und 8.2] sowie die Arbeit von BLUM [8.6]. In der letztgenannten Arbeit ist das gesamte für diesen Problembereich bedeutsame Schrifttum zusammengestellt.

In Zusammenhang mit den *Bildern 8.2a bis c* war darauf hingewiesen worden, daß die Beweglichkeit einer Schicht um so größer ist, je geringer die Koordinationszahl für jede Partikel ist. In manchen Fällen, wie z. B. beim Ausfließen von körnigen Feststoffen aus Bunkern, wird eine gute Beweglichkeit der Partikeln gefordert. Um diese Forderung erfüllen zu können, muß man also für eine niedrige Koordinationszahl sorgen. Das wird in der Praxis dadurch erreicht, daß man die Kornschicht mit einem hindurchströmenden Gas in den gewünschten aufgelockerten Zustand versetzt.

Bei einer ebenen Kugelschicht ist die dichteste reguläre Anordnung durch die Koordinationszahl 6 und die lockerste reguläre Anordnung durch die Koordinationszahl 2 gekennzeichnet. Bei räumlichen Kugelschichten, die technisch allein von Interesse sind, ändert sich die Koordinationszahl zwischen 3 und 12 [8.7]. Räumliche Kugelanordnungen mit der Koordinationszahl 3 ergeben die lockerste Schicht, wobei der Lückengrad $\varepsilon = 0,9440$ ist. In *Bild 8.3* sind zwei reguläre, räumliche Kugelanordnungen nach Angaben von GRATON und FRASER [8.8] dargestellt. Die kubische Anordnung mit der Koordinationszahl 6 liefert eine noch

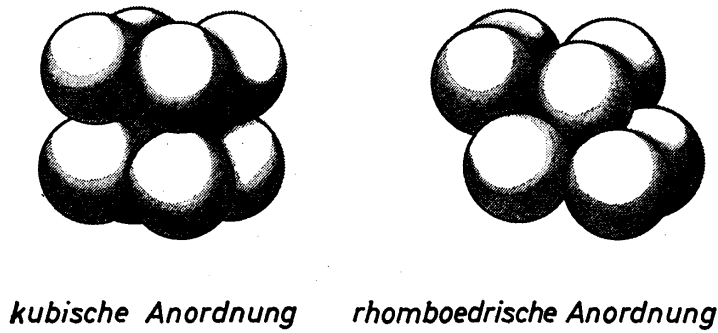


Bild 8.3
Kubische und rhoemboedrische
Kugelanordnung

sehr lockere reguläre Kugelschicht, wofür der Lückengrad $\epsilon = 0,4765$ ist. Die rhoemboedrische Anordnung mit der Koordinationszahl 12 liefert die dichteste reguläre Kugelpackung mit $\epsilon = 0,2592$. In einem großen Volumen mit regelloser Schichtung wird sich weder die lockerste noch die dichteste Packung einstellen. Es ergibt sich vielmehr ein mittlerer Wert, der in der Größenordnung von 0,37 liegt und somit etwa gleich dem arithmetischen Mittel der Lückengrade für die kubische und rhoemboedrische Anordnung ist.

Einen quantitativen Einblick in die Struktur regelloser Schichten vermittelt Bild 8.4, in dem die prozentuale Häufigkeit des in einer regellosen Schicht festgestellten örtlichen Lückengrades aufgetragen ist. Die eingezeichneten Meßwerte teilte DEBBAS [8.9] mit, die ausgezogene Kurve gibt eine Gleichung von HAUGHEY und BEVERIDGE [8.10] wieder. Sowohl die Meßwerte als auch die Kurve lassen

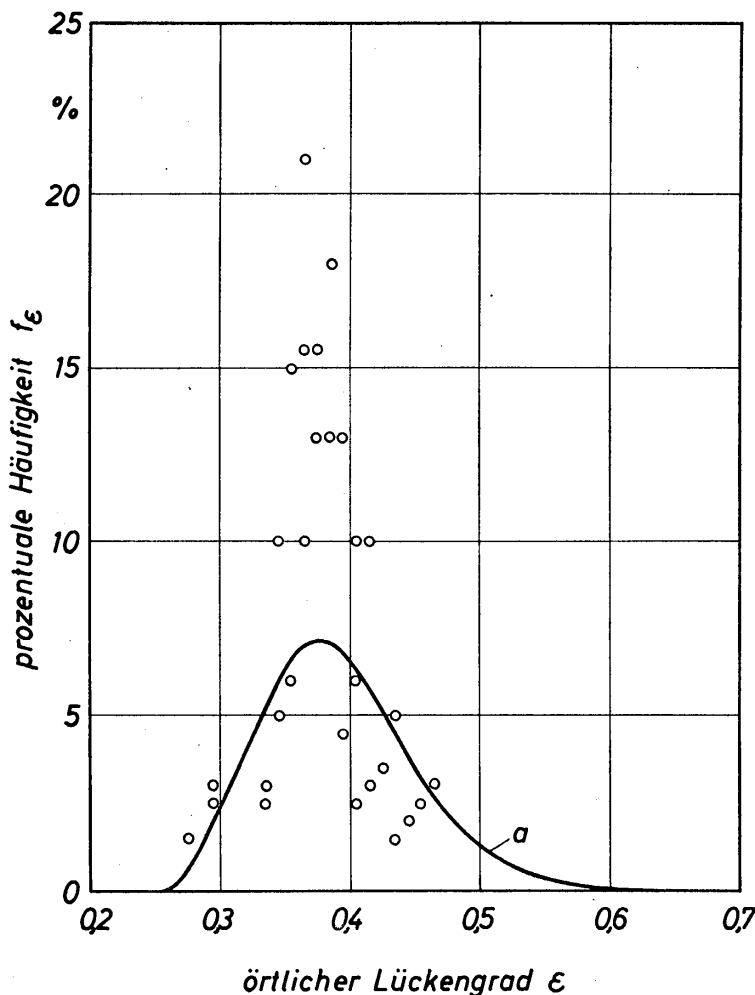


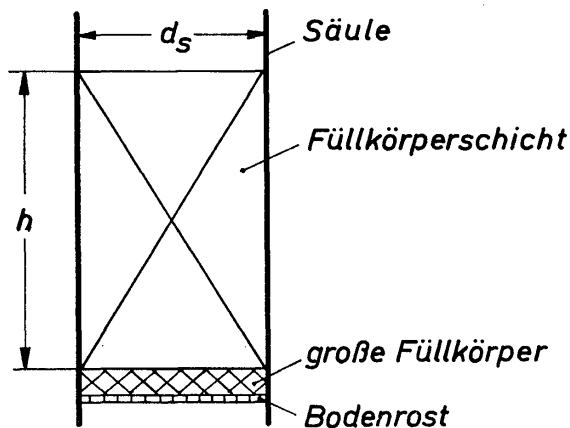
Bild 8.4
Prozentuale Häufigkeit des
örtlichen Lückengrades in
räumlich unbegrenzt
ausgedehnten Schichten mit
regelloser Kugelanordnung

erkennen, daß sich der örtliche Lückengrad in einer Schicht mit regelloser Kugelanzordnung innerhalb eines weiten Bereiches ändert. Das Häufigkeitsmaximum tritt gemäß der Theorie und dem Experiment bei einem örtlichen Lückengrad von etwa 0,37 auf. Dieser Wert stimmt mit dem häufig gemessenen Mittelwert für die gesamte Schicht überein. Die Meßwerte weisen ein erheblich höheres Häufigkeitsmaximum auf als die berechnete Kurve. Das Häufigkeitsmaximum liegt, was ebenfalls durch zahlreiche Messungen bestätigt wird, in einem Bereich der Koordinationszahlen von 7 bis 8.

Alle bisherigen Angaben über die Struktur der Schicht und über ihre Beschreibung mittels eines örtlichen Lückengrades bestätigen die Erkenntnis, daß es nicht möglich ist, eindeutige Voraussagen über die Größe des Lückengrades in technischen Apparaten zu machen. Der Lückengrad muß, wenn seine genaue Größe gefordert wird, stets experimentell ermittelt werden. Andererseits vermitteln die bisherigen Angaben eine gute Vorstellung von der Struktur der Füllkörperschichten, die zur Beurteilung ihrer Durchströmung sowie der in ihr ablaufenden Wärme- und Stoffübergangsvorgänge unbedingt erforderlich ist.

8.122 Lückengrad von Gleichkornschichten

Die Füllkörperschicht befindet sich in den meisten Fällen gemäß *Bild 8.5* in einer zylindrischen Säule mit dem Durchmesser d_s . Die Füllkörperschicht hat die Höhe h . Sie ruht auf einem Bodenrost, dessen Lückengrad größer sein sollte als der der Füllkörperschicht. Um schon vor Eintritt in die Schicht eine gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung zu erzeugen, legt man häufig zwischen den Bodenrost und die Füllkörperschüttung eine dünne Schicht größerer Füllkörper.



Die folgenden Ausführungen sollen Aufschluß über die Abhängigkeit des Lückengrades von den geometrischen Einflußgrößen der Schüttung geben.

Bild 8.5. Anordnung der Füllkörperschicht in einer Säule

Sieht man von den im voraufgegangenen Abschnitt behandelten statistischen Schwankungen des Lückengrades ab, dann muß er noch vom Durchmesser d_p der Füllkörper und möglicherweise von einer oder sogar mehreren weiteren charakteristischen Längen x , vom Durchmesser d_s der Säule, von der Schichthöhe h und schließlich noch vom Wandabstand y abhängen. Faßt man diese Größen zu geeigneten dimensionslosen Kennzahlen zusammen, dann läßt sich für den örtlichen Lückengrad ε' die allgemeine Beziehung

$$\varepsilon' = f\left(\frac{y}{d_p}; \frac{d_p}{d_s}; \frac{x}{d_p}; \frac{h}{d_p}\right) \quad (8.8)$$

angeben. Man wird in den meisten Fällen damit rechnen können, daß die Schichthöhe h groß im Vergleich zum Füllkörperdurchmesser ist. Der Einfluß der Randzonen am Ein- und Austritt der Schüttung und somit der Einfluß der Kennzahl h/d_p kann dann vernachlässigt werden. Die Größe x/d_p tritt immer dann auf, wenn die Form eines Füllkörpers durch den Durchmesser d_p allein nicht beschrieben und die geometrische Ähnlichkeit der Körper bei Vergrößerung nicht eingehalten werden kann. Beispielsweise muß bei Raschigringen neben dem äußeren auch noch der innere Durchmesser angegeben werden. Das Verhältnis x/d_p mag weiterhin zur Berücksichtigung des Einflusses von Rauigkeiten der Füllkörperflächen auf den Lückengrad dienen. Hiermit haben sich insbesondere LEVA und GRUMMER [8.11] beschäftigt. Das Durchmesser Verhältnis d_p/d_s ist immer dann von Bedeutung, wenn es wie häufig in technischen Säulen größer als etwa 0,1 ist. Die Änderung des Lückengrades mit dem Wandabstand bzw. mit y/d_p muß stets beachtet werden. In den weiteren Ausführungen ist vorausgesetzt, daß das Höhenverhältnis $h/d_p \gg 1$ ist.

Die ersten umfassenden Untersuchungen über die Änderung des örtlichen Lückengrades mit dem bezogenen Wandabstand y/d_p hat SPECK [8.5] durchgeführt. Er füllte den Lückenraum der Schicht mit einem Gießharz aus und drehte nach der Erstarrung schrittweise den entstandenen Zylinder ab. Aus den anfallenden Spänen ließen sich das Lückenvolumen und das Füllkörpervolumen in einfacher Weise bestimmen. Das gleiche Verfahren haben in der Folge auch SONNTAG [8.12], DEBBAS [8.9] und weitere Forscher angewendet [8.13 und 8.14]. Nach anderen Verfahren, z. B. mittels γ -Strahlen, haben THADANY und PEEBLES [8.4] sowie SCOTT [8.14] den Lückengrad gemessen.

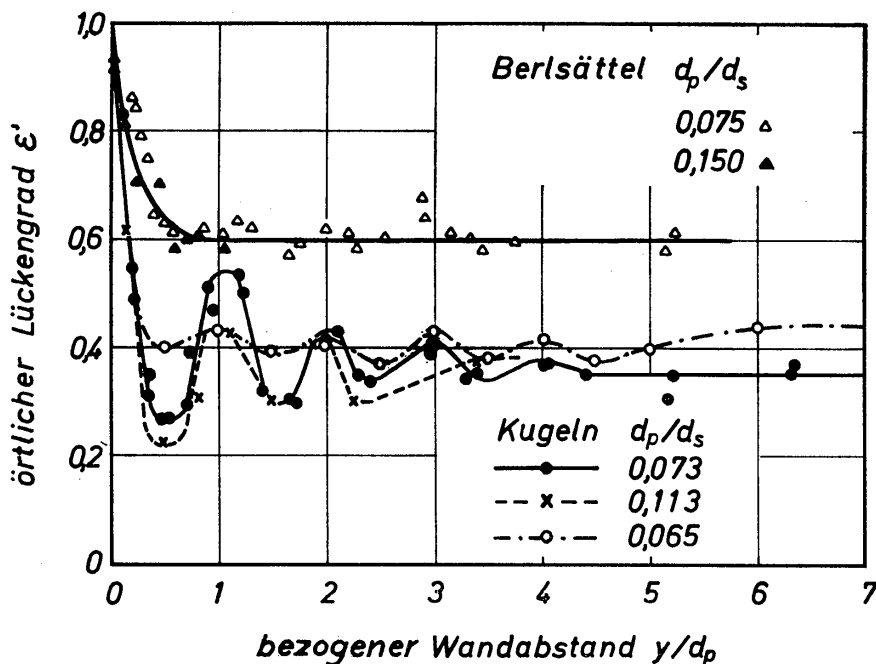


Bild 8.6. Abhängigkeit des örtlichen Lückengrades ϵ' vom bezogenen Wandabstand y/d_p für Schichten aus Kugeln und Berlsätteln

Die Mehrzahl der Untersuchungen wurde an Kugelschichten durchgeführt. In Bild 8.6 sind einige von ROBLEE, BAIRD und TIERNEY [8.13] sowie von THADANY und PEEBLES [8.4] mitgeteilte Ergebnisse wiedergegeben. Das Verhältnis aus

Partikel- und Säulendurchmesser änderte sich bei diesen Versuchen zwischen $d_p/d_s = 0,065$ und $0,113$. Alle drei Meßreihen weisen auf die gleiche Änderung des örtlichen Lückengrades mit dem Wandabstand hin. Für $y/d_p = 0$ muß der Lückengrad gleich 1 sein, da die Kugeln die Behälterwand jeweils nur in einem Punkt berühren. Mit zunehmendem Wandabstand ändert sich der Lückengrad periodisch, wobei die Amplituden abnehmen. Besonders zu beachten ist, daß das erste und zugleich ausgeprägteste Minimum bei $y/d_p = 0,5$ liegt. Die Werte von ε' im Minimum sind für die drei Meßreihen jedoch sehr unterschiedlich. Ein Einfluß des Durchmesserhältnisses d_p/d_s läßt sich nicht mit Sicherheit erkennen. Die beobachteten Unterschiede sind wahrscheinlich eine Folge des stochastischen Füllvorganges. Für einige reguläre Kugelanordnungen in Wandnähe hat SPECK [8.5] die Änderung des örtlichen Lückengrades theoretisch ermittelt.

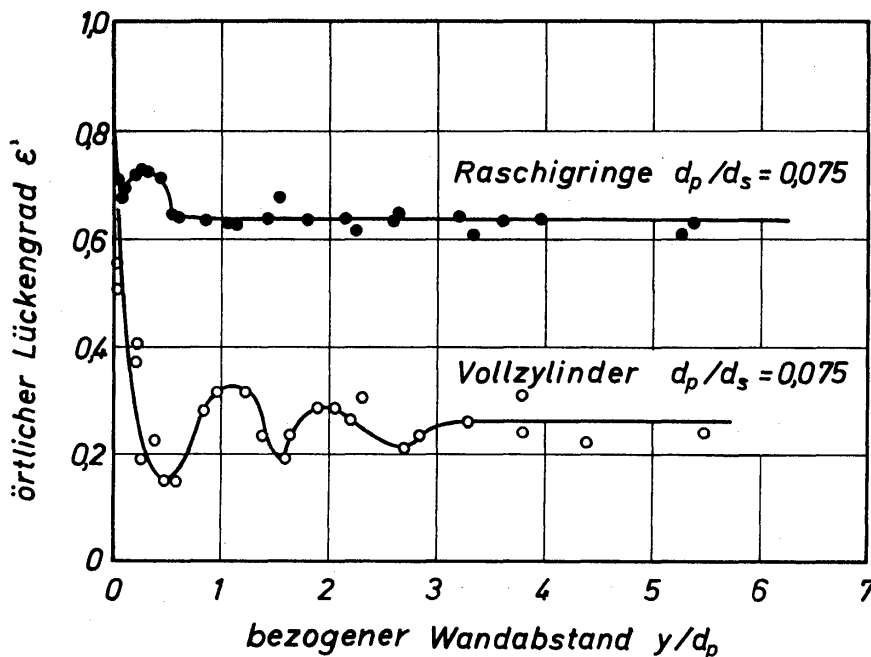


Bild 8.7. Abhängigkeit des örtlichen Lückengrades ε' vom bezogenen Wandabstand y/d_p für Schichten aus Vollzylindern und Raschigringen

Ähnliche Ergebnisse wie die für Kugelschüttungen haben auch die Untersuchungen an Schüttungen aus Vollzylindern ergeben, für die in *Bild 8.7* die Meßwerte dargestellt sind. Das erste Minimum liegt wieder bei einem Wandabstand von $y/d = 0,5$. Einen wesentlich glatteren Verlauf des örtlichen Lückengrades mit dem bezogenen Wandabstand zeigen die Meßwerte für Raschigringe. Die Glättung des örtlichen Lückengrades ist auf das Hohlvolumen der Raschigringe zurückzuführen. Noch glatter verläuft die Kurve für Schüttungen aus Berlsätteln, deren Form zu einer nahezu gleichmäßigen Verteilung der Füllkörper in der Säule führt (*Bild 8.6*).

Eine ungleichförmige Verteilung des Lückengrades über dem Säulenquerschnitt führt zu einer ungleichmäßigen Durchströmung der Füllkörperschicht. Da der Lückengrad nur an der Behälterwand den Wert 1 annimmt, durchströmt in Wandnähe ein hoher Anteil des gesamten Fluidstromes die Schicht. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Randgängigkeit einer Füllkörpersäule, die um so ausgeprägter ist, je größer der örtliche Lückengrad in Wandnähe wird.

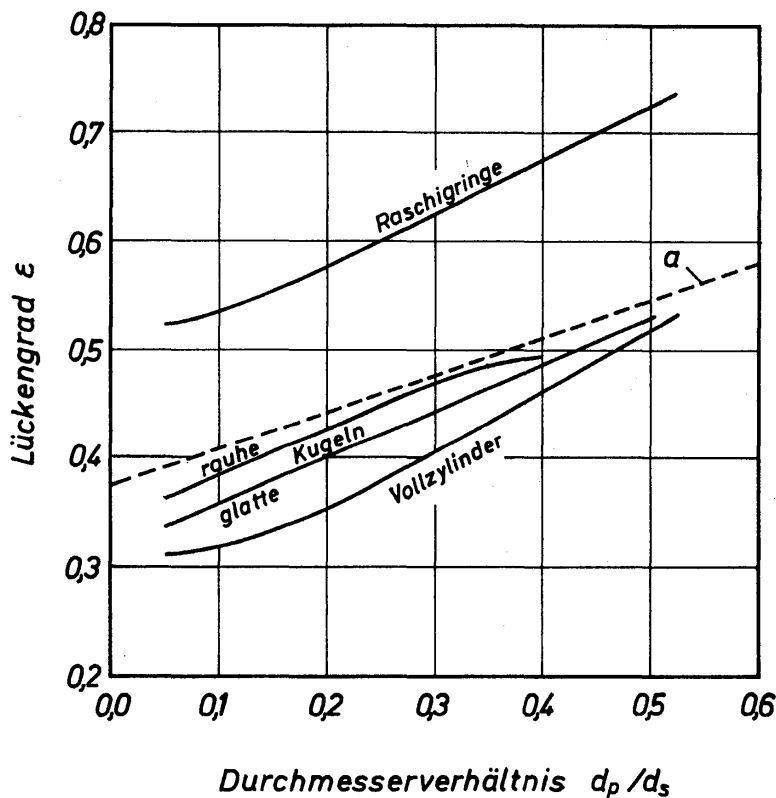


Bild 8.8
Abhängigkeit des Lückengrades ε
vom Durchmesser Verhältnis d_p/d_s
für dichteste Packungen aus
verschiedenen Füllkörpern

Bildet man einen über die gesamte Füllkörperschicht gemittelten Wert des Lückengrades, der mit ε bezeichnet werden soll, dann wird dieser eine Funktion des Durchmesser Verhältnisses d_p/d_s sein. Der größte Wert von ε ergibt sich dann, wenn $d_p/d_s = 1$ ist und der kleinste Wert, wenn $d_p/d_s = 0$ ist; der niedrigste Wert von ε ist unabhängig vom Durchmesser Verhältnis. Die umfangreichsten Untersuchungen über den Einfluß des Durchmesser Verhältnisses auf den Lückengrad haben LEVA und GRUMMER [8.16] durchgeführt. Sie verwendeten Füllkörperschichten aus glatten und rauhen Kugeln, Vollzylindern und Raschigringen. Die Füllkörper wurden so in die Säulen mit verschiedenen großen Durchmessern eingefüllt, daß entweder die lockerste oder die dichteste Packung entstand. Zwischen beiden betrug der Unterschied im Lückengrad 2 bis 5%. SONNTAG [8.12] berichtet dagegen über Unterschiede von etwa 10%. Die dichteste Packung wurde durch Einrütteln erzielt. Diese dichteste Packung tritt wahrscheinlich in technischen Anlagen auf Grund von unvermeidbaren Schwingungen fast immer auf. Für sie ist in *Bild 8.8* die Abhängigkeit des Lückengrades ε vom Durchmesser Verhältnis d_p/d_s dargestellt. Die Abweichung der von LEVA und GRUMMER mitgeteilten Meßwerte von den Kurven beträgt im Mittel etwa $\pm 1\%$. Bei $d_p/d_s < 1$ vernachlässigt man im allgemeinen die Abhängigkeit des Lückengrades vom Durchmesser Verhältnis. Für Kugelschichten hat JESCHAR [8.17] aus einer größeren Anzahl von Meßwerten die Beziehung

$$\varepsilon = 0,375 + 0,34 \frac{d_p}{d_s} \quad (8.9)$$

aufgestellt. Mit 0,375 wurde der Lückengrad für $d_p/d_s = 0$ angenommen. Die Gl. (8.9) wird in *Bild 8.8* durch die gestrichelte Kurve wiedergegeben. Sie liegt noch oberhalb der für rauhe Kugeln angegebenen Kurve von LEVA und GRUM-

MER. Die damit sichtbar werdende Abweichung mag als Maß für die Unsicherheit aller Angaben über den Lückengrad dienen.

Auch dann, wenn das Durchmesser Verhältnis d_p/d_s kleiner als 0,1 ist, ergeben sich nach vorliegenden Meßwerten erhebliche Unterschiede für den Lückengrad:

Kugelschicht	$\varepsilon = 0,33$ bis $0,42$,
Raschigringschicht	$\varepsilon = 0,52$ bis $0,80$,
Berlsattelschicht	$\varepsilon = 0,55$ bis $0,75$,
Intaloxsattelschicht	$\varepsilon = 0,65$ bis $0,80$.

Diese Angaben gelten unter der Voraussetzung, daß die Füllkörper aus Steinzeug oder Porzellan sind. Bei Raschigringen und Sattelkörpern aus Blech liegt der Lückengrad im Durchschnitt oberhalb von 0,9.

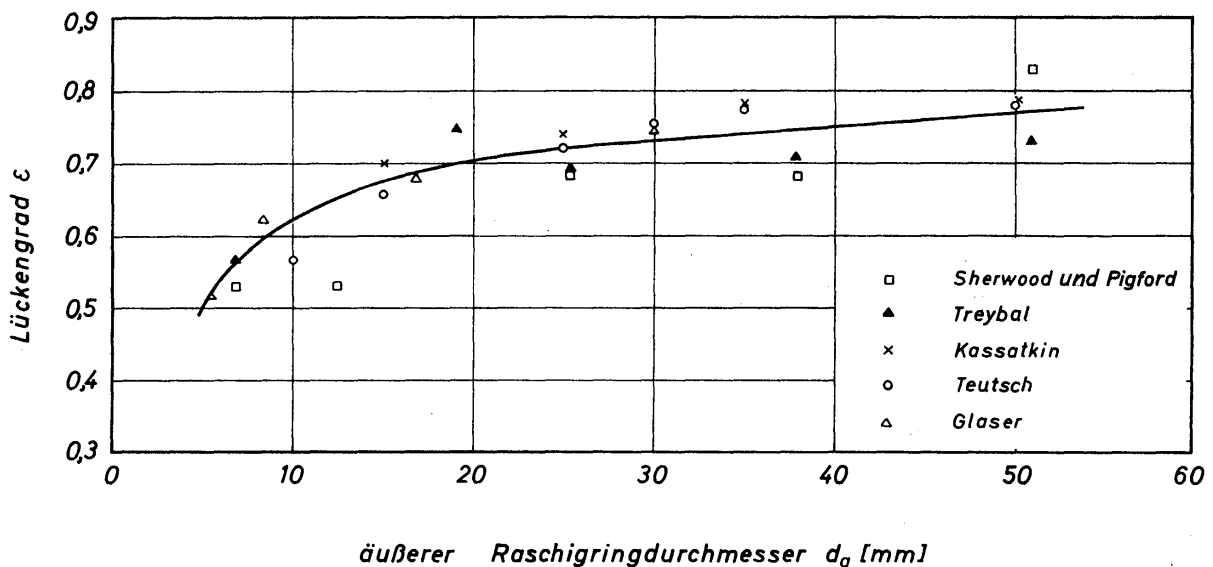


Bild 8.9. Abhängigkeit des Lückengrades ε für Schichten aus Steinzeug-Raschigringen vom äußeren Ringdurchmesser

Die wichtigste Ursache für die Unsicherheit der Angaben über den Lückengrad ist die fehlende geometrische Ähnlichkeit zwischen Füllkörpern verschiedener Größe. Am Beispiel der Raschigringe wurde bereits erläutert, daß sich bei der Herstellung verschieden großer Füllkörper die geometrische Ähnlichkeit meist nicht einhalten läßt. Dann aber ändert sich der Lückengrad einer Schicht mit der Größe der Füllkörper. Das wird durch *Bild 8.9* bestätigt, in dem die Angaben verschiedener Verfasser [8.18 bis 8.22] über den Lückengrad von Schichten aus Steinzeug-Raschigringen, abhängig vom äußeren Durchmesser d_a , aufgetragen und durch eine Kurve ausgeglichen sind. Bei Vergrößerung der Raschigringe nimmt das Verhältnis d_i/d_a zu, so daß der Lückengrad der Schicht zwangsläufig größer werden muß.

Im allgemeinen darf man annehmen, daß der mittlere Lückengrad einer Schicht mit abnehmender Füllkörpergröße kleiner wird. Diese Annahme trifft jedoch nicht mehr zu, wenn Oberflächenkräfte, beispielsweise durch elektrische Aufladungen hervorgerufen, für die Anordnung der Partikeln in einer Schicht bedeut-

sam werden. Mit der Wirksamkeit von Oberflächenkräften ist zu rechnen, wenn die charakteristischen Abmessungen etwa $1/10$ mm unterschreiten, und somit staubförmige Produkte entstehen. In *Bild 8.10* sind einige Angaben von ENGELHARDT [8.23] und SCHMIDT [8.24] über den Lückengrad feinkörniger Partikelschichten zusammengestellt. Unterhalb eines Partikeldurchmessers von etwa $160 \mu\text{m}$ steigt der Lückengrad mit abnehmendem Durchmesser sehr stark an.

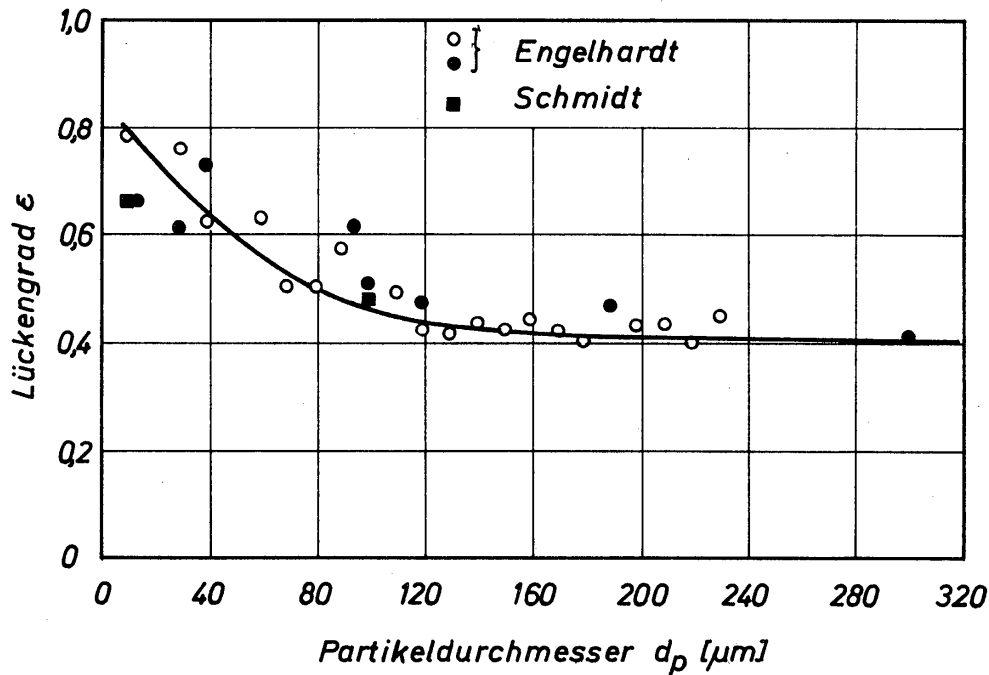


Bild 8.10. Abhängigkeit des Lückengrades vom Partikeldurchmesser

8.123 Lückengrad von Mehrkornschichten

Die einfachste Mehrkornschicht ist eine Zweikornschicht, die aus Kugeln besteht. Mit d_{p_1} und d_{p_2} werden die Durchmesser der großen und der kleinen Kugeln bezeichnet. Am Gesamtvolumen V_p aller in der Zweikornschicht enthaltenen Kugeln sind die großen mit dem Volumen V_{p_1} und die kleinen mit dem Volumen V_{p_2} beteiligt. Für den mittleren Lückengrad ε_m eines aus zwei Kugelgrößen bestehenden Gemisches liefert die Ähnlichkeitstheorie folgende allgemeine Funktion:

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon} = f\left(\varepsilon; \frac{d_{p_1}}{d_{p_2}}; \frac{V_{p_2}}{V_p}\right). \quad (8.10)$$

Hierin bedeutet ε den Lückengrad der Gleichkornschicht, die entweder nur aus den großen oder nur aus den kleinen Kugeln besteht. Dabei wird angenommen, daß der Lückengrad der Gleichkornschicht unabhängig von der Kugelgröße ist. Der Lückengrad ε_m der Mehrkornschicht ist stets kleiner als der Lückengrad ε der Gleichkornschicht. Diese Behauptung läßt sich an Hand von *Bild 8.11* leicht beweisen. *Bild 8.11a* zeigt einen aus sehr vielen kleinen Kugeln bestehenden Bereich und zusätzlich drei große Kugeln. Innerhalb des Bereiches der kleinen Kugeln ist der Lückengrad gleich dem der Gleichkornschicht. Für das von den großen Kugeln eingenommene Schichtvolumen ist der Lückengrad gleich Null.

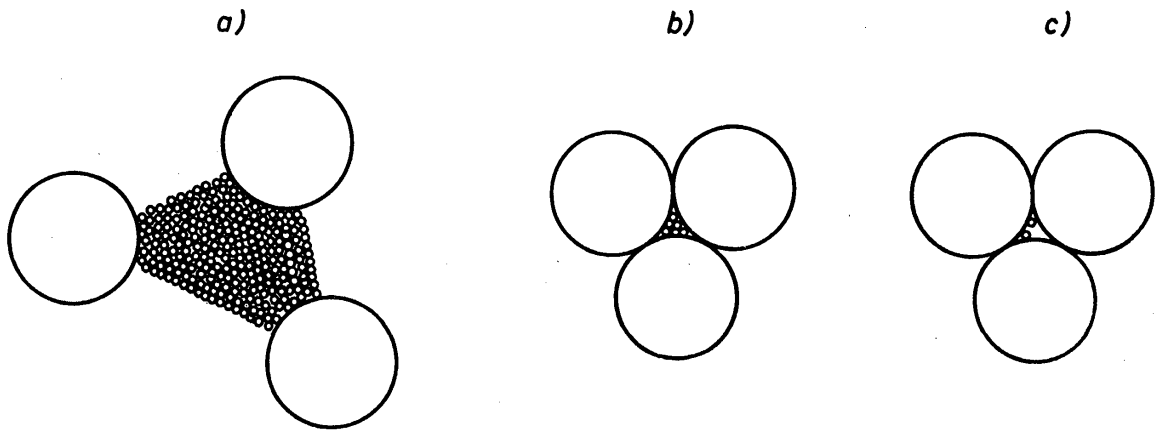
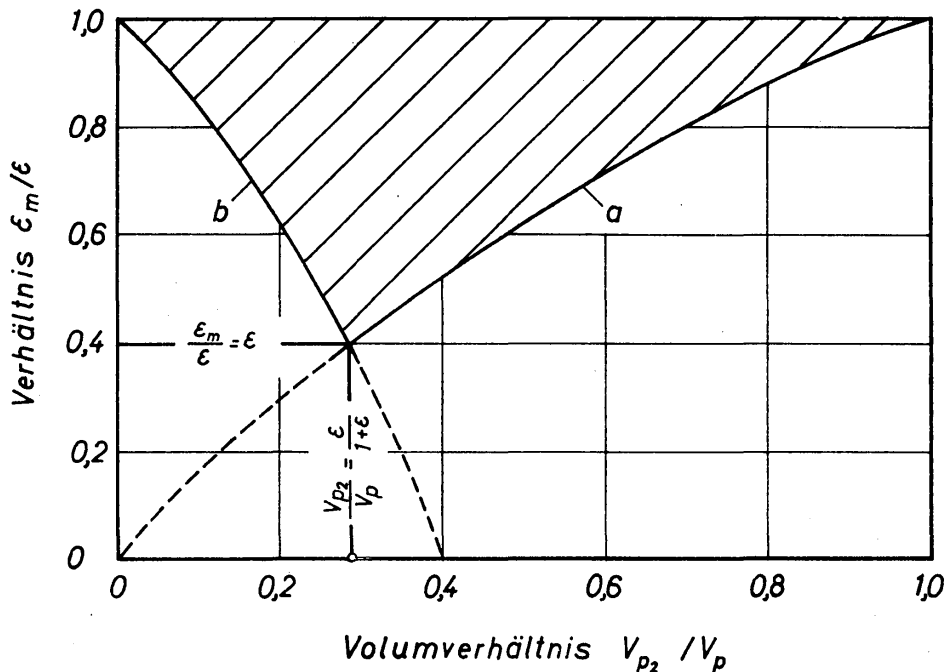


Bild 8.11. Zur Erläuterung des Lückengrades von Mehrkornschichten

Würde das von den großen Kugeln eingenommene Schichtvolumen von den kleinen Kugeln ausgefüllt, dann müßte auch in diesem Anteil des Schichtvolumens der Lückengrad gleich ε sein. Bei Anwesenheit von großen und kleinen Kugeln muß dann aber $\varepsilon_m < \varepsilon$ sein. Zu dem gleichen Ergebnis kommt man auch dann, wenn man gemäß *Bild 8.11 b* die kleinen Kugeln nur in dem zwischen den großen Kugeln befindlichen Lückenvolumen anordnet, wobei die großen Kugeln bereits die dichteste Packung bilden. Nimmt man als theoretischen Grenzfall an, daß $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$ ist, dann muß gemäß *Bild 8.11 b* der mittlere Lückengrad für eine Schüttung zu $\varepsilon_m = \varepsilon^2$ werden. Dieses ist der niedrigste Wert für den Lückengrad einer Zweikugelschicht. Mit $\varepsilon = 0,4$ wird $\varepsilon_m = 0,16$.

Für den theoretischen Grenzfall $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$ ist die Änderung des bezogenen Lückengrades $\varepsilon_m/\varepsilon$ in Abhängigkeit vom Volumverhältnis V_{p_2}/V_p in *Bild 8.12* durch die ausgezogenen Kurven *a* und *b* dargestellt. Für $V_{p_2}/V_p = 0$ und $V_{p_2}/V_p = 1$ muß $\varepsilon_m/\varepsilon = 1$ sein, da entweder nur große oder nur kleine Kugeln

Bild 8.12. Grenzkurven *a* und *b* für das Lückengradverhältnis $\varepsilon_m/\varepsilon$ bei Zweikornschichten mit $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$, abhängig vom Volumverhältnis V_{p_2}/V_p

in der Schicht vorhanden sind. Vergrößert man den Anteil der kleinen Kugeln, dann bewegt man sich entlang der Kurve b und erhält dabei Kugelverteilungen gemäß *Bild 8.11 c*. Das Volumen V_{p_1} der großen Kugeln bleibt entlang der Kurve b unverändert. Wenn der Lückenraum zwischen den in dichtester Packung befindlichen großen Kugeln vollständig von den kleinen Kugeln ausgefüllt wird, erhält man den bereits erwähnten niedrigsten Wert des Lückengrades mit $\varepsilon_m/\varepsilon = \varepsilon$. Bei weiterer Erhöhung von V_{p_2}/V_p , was nur durch gleichzeitiges Vermindern von V_{p_1} möglich ist, erhöht sich der Lückengrad wieder, und es werden Packungszustände gemäß *Bild 8.11 a* durchlaufen. Die Änderung des Lückengrades erfolgt entlang dem ausgezogenen Ast der Kurve a .

Die Grenzkurven a und b lassen sich nach JESCHAR [8.17] berechnen. Gemäß der Definitionsgleichung

$$\varepsilon_m = \frac{V_s - V_p}{V_s} = 1 - \frac{V_{p_1}}{V_s} - \frac{V_{p_2}}{V_s} \quad (8.11)$$

ist der mittlere Lückengrad einer Zweikornschicht abhängig von V_{p_1} , V_s und V_{p_2} . Berechnet werden soll ε_m nach Gl. (8.10), abhängig von ε und V_{p_2}/V_p . Zu dem Zweck müssen also V_{p_1} und V_s durch Funktionen der anderen Einflußgrößen ersetzt werden. Für V_{p_1}/V_s erhält man aus dem Lückengrad zweiter Ordnung

$$\varepsilon_2 = \frac{V_s - V_{p_1} - V_{p_2}}{V_s - V_{p_1}} = 1 - \frac{V_{p_2}}{V_s - V_{p_1}} \quad (8.12)$$

die Beziehung

$$\frac{V_{p_1}}{V_s} = 1 - \frac{V_{p_2}/V_s}{1 - \varepsilon_2}. \quad (8.13)$$

Nach Einsetzen in Gl. (8.11) und unter Berücksichtigung von

$$V_s = \frac{V_p}{1 - \varepsilon_m} \quad (8.14)$$

erhält man durch Umformung zunächst

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_2} = \frac{V_{p_2}/V_p}{1 - \varepsilon_2(1 - V_{p_2}/V_p)}. \quad (8.15)$$

Für den Lückengrad zweiter Ordnung ergibt sich offensichtlich dann ein unterer Grenzwert, wenn $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$ wird. Dieser untere Grenzwert für ε_2 ist gleich dem Lückengrad ε der Gleichkornschicht. Damit erhält man für die untere Grenzkurve a die folgende Beziehung:

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon}\right)_a = \frac{V_{p_2}/V_p}{1 - \varepsilon(1 - V_{p_2}/V_p)}. \quad (8.16)$$

Physikalisch sinnvoll ist diese Gleichung nach den vorausgegangenen Ausführungen nur innerhalb des Bereiches $\varepsilon \leq \varepsilon_m/\varepsilon \leq 1$ bzw. $\varepsilon/(1 - \varepsilon) \leq V_{p_2}/V_p \leq 1$. Bei der Herleitung einer Gleichung für die zweite untere Grenzkurve, die in *Bild 8.12* mit b bezeichnet ist, geht man von der Vorstellung aus, daß die großen

Kugeln in diesem Bereich die dichteste Packung bilden. Für V_{p_1} ergibt sich somit der maximale Wert $V_{p_{1\max}}$. Dann gilt für den Lückengrad der großen Kugeln

$$\varepsilon = \frac{V_s - V_{p_{1\max}}}{V_s}, \quad (8.17)$$

der mit dem Lückengrad der Gleichkornschicht übereinstimmt. Verknüpft man Gl.(8.17) mit Gl.(8.11), so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung die folgende Beziehung für die untere Grenzkurve b :

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon}\right)_b = 1 - \frac{V_{p_2}/V_p}{1 - V_{p_2}/V_p} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}. \quad (8.18)$$

Physikalisch sinnvoll ist diese Gleichung nur innerhalb des Bereiches

$$\varepsilon \leq \varepsilon_m/\varepsilon \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq V_{p_2}/V_p \leq \varepsilon/(1 + \varepsilon).$$

Für die Koordinaten des Schnittpunktes der Kurven a und b erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon}\right)_{\min} = \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{V_{p_2}}{V_p} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}. \quad (8.19)$$

Durch die Kurven a und b , gemäß den Gleichungen (8.16) und (8.18), sowie durch die obere Grenze $\varepsilon_m/\varepsilon = 1$ wird das für Zweikornschichten mögliche Feld des Lückengrades eindeutig begrenzt. In *Bild 8.12* ist dieses Feld schraffiert. Seine Ausdehnung wird nach *Bild 8.13* mit abnehmendem Lückengrad ε der Gleichkornschicht größer. Der Wert $\varepsilon = 0,3$ kann sich bei Schichten aus Weizen oder Roggen ergeben, wobei $\varepsilon_{m\min} = 0,09$ wird. Ein Lückengrad von $\varepsilon = 0,4$ stellt

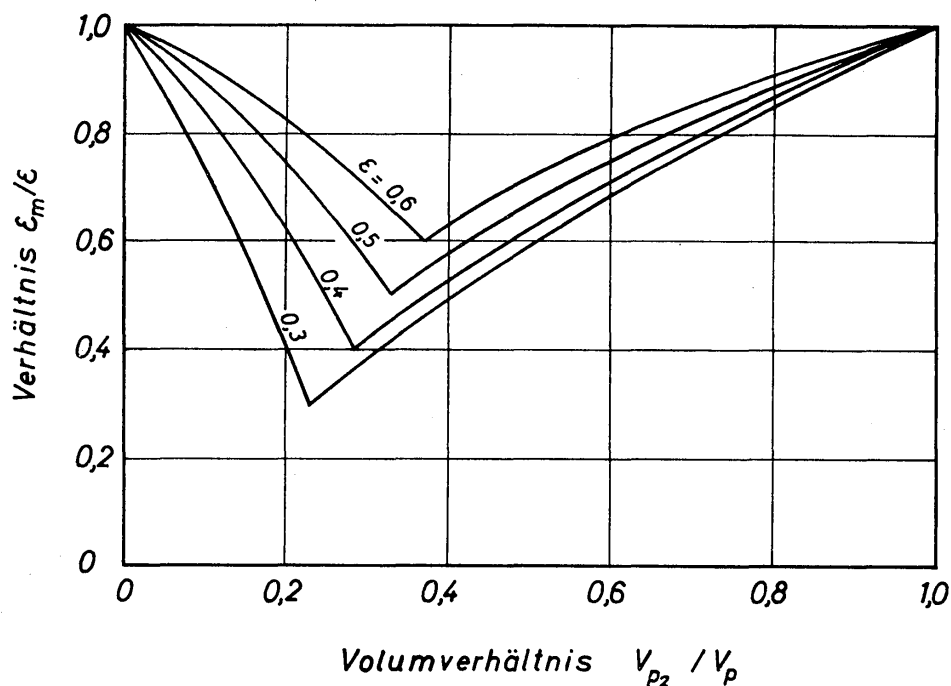


Bild 8.13. Grenzkurven des Lückengradverhältnisses $\varepsilon_m/\varepsilon$ bei Zweikornschichten mit $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$, abhängig vom Volumverhältnis V_{p_2}/V_p für verschiedene Werte des Lückengrades ε der Gleichkornschicht

sich ein, wenn die Partikeln kugelförmig sind. Der tiefste Wert des Lückengrades des Gemisches ist dann $\varepsilon_{m\min} = 0,16$. Lückengrade für Gleichkornschichten aus Granulaten liegen in der Größenordnung von 0,5 und 0,6. Hierbei ist $\varepsilon_{m\min} = 0,25$ und 0,36.

Die Grenzkurven *a* und *b* gelten für $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$ und geben somit bei jedem Wert des Volumverhältnisses V_{p_2}/V_p den theoretisch niedrigsten Wert des Lückengrades ε_m der Zweikornschicht an. Die in technischen Füllkörpersäulen auftretenden Werte für ε_m sind stets größer, da das Durchmesser Verhältnis immer größer als Null ist. Für Kugelschichten mit verschiedenen Werten von d_{p_2}/d_{p_1} ist in *Bild 8.14* das Verhältnis $\varepsilon_m/\varepsilon$ nach Messungen von JESCHAR [8.17] angegeben. Zu sehr ähnlichen Ergebnissen ist auch FURNAS [8.25] gekommen, der als erster den Lückengrad von Zweikornmischungen, bestehend aus Granulaten, ausführlich untersuchte. Nähere Angaben über reguläre Strukturen in Mehrkornschichten aus Kugeln findet man in einer Arbeit von HUDSON [8.26].

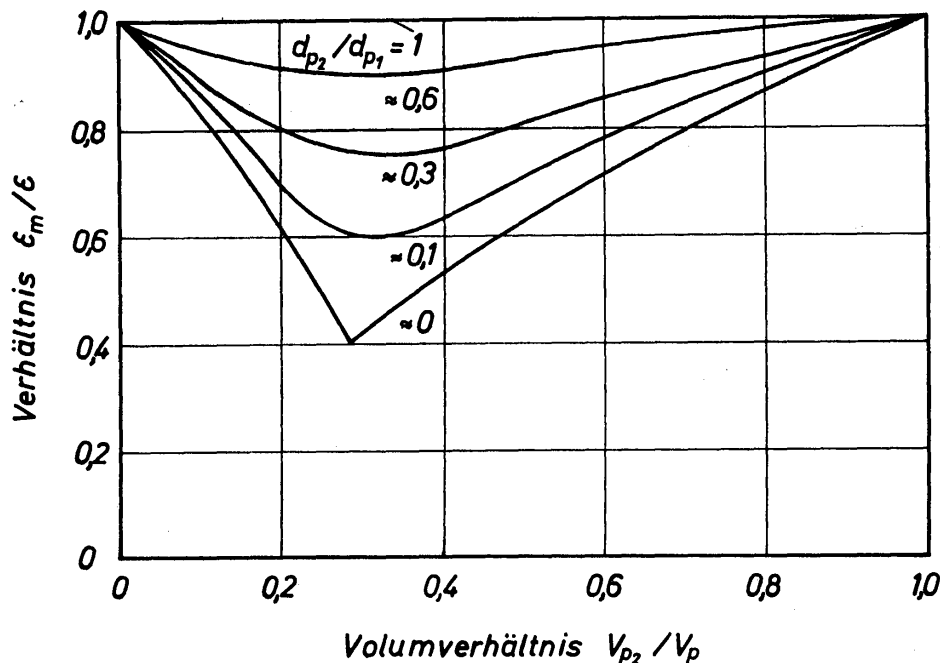


Bild 8.14. Meßwerte für das Lückengradverhältnis $\varepsilon_m/\varepsilon$ von Kugelschichten mit verschiedenen Werten des Durchmesser Verhältnisses d_{p_2}/d_{p_1} nach Angaben von JESCHAR [8.17] und FURNAS [8.25]

8.13 Hydraulischer Durchmesser der Füllkörperschichten

Die im vorangegangenen Abschnitt erörterten örtlichen und mittleren Lückengrade reichen noch nicht zur Behandlung der Strömung durch eine Füllkörperschicht aus. Es genügt nicht, zu wissen, wie groß das insgesamt verfügbare freie Volumen oder die insgesamt verfügbare freie Querschnittsfläche ist. Zusätzliche Angaben sind erforderlich. Stellt man sich das freie Volumen innerhalb einer Schicht aus vielen einzelnen Poren zusammengesetzt vor, dann werden die Poren um so größer sein, je größer die Füllkörper sind. Eine aus großen Füllkörpern gebildete Schicht wird also wenige große Poren und eine aus kleinen Füllkörpern

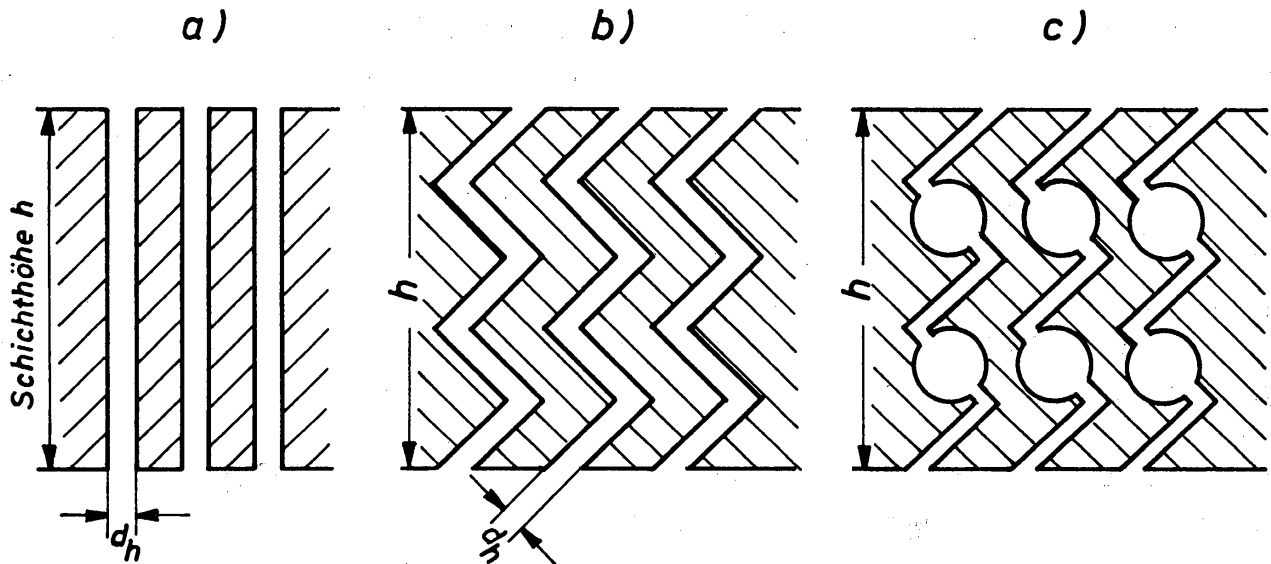


Bild 8.15. Schematisierte Modellstrukturen von Füllkörperschichten

gebildete Schicht wird viele kleine Poren besitzen, obgleich der mittlere Lückengrad für beide Schichten nahezu gleich ist. Die für die Strömung wichtige Angabe der mittleren Größe der Einzelporen erfolgt durch den hydraulischen Durchmesser, der mit d_h bezeichnet wird.

Bei der Einführung des hydraulischen Durchmessers geht man von der Vorstellung aus, daß sich das freie Volumen $V_s - V_p$ der Füllkörperschicht in eine begrenzte Zahl von Strömungskanälen unterteilen läßt. Das kann gemäß *Bild 8.15a* in der Weise erfolgen, daß man eine Reihe von geraden, parallelen Kanälen annimmt, die alle den gleichen Durchmesser d_h haben und deren Länge gleich der Schichthöhe h ist. Die Kanäle können aber auch stufenförmig wie in *Bild 8.15b* verlaufen. Die Länge dieser Stufenkanäle ist größer als die Schichthöhe h . Ihre Querschnittsfläche ist längs des Strömungsweges unveränderlich. Schließlich sind auch Kanalformen gemäß *Bild 8.15c* denkbar. Hierbei wechseln Abschnitte mit konstanter und veränderlicher Querschnittsfläche einander ab. Obgleich diese Kanalform den wirklichen Verhältnissen in der Füllkörperschicht am besten gerecht wird, hat es sich als völlig ausreichend erwiesen, zur Bestimmung des hydraulischen Durchmessers von der Vorstellung gemäß *Bild 8.15a* auszugehen. Der hydraulische Durchmesser ist nach BARTH [8.27] wie folgt definiert:

$$d_h \equiv 4 \frac{V_s - V_p}{A_p} \quad (8.20)$$

Hierin ist, neben dem bereits genannten freien Volumen $V_s - V_p$ der Schicht, A_p die gesamte Oberfläche aller Füllkörper der Schicht. Die Definitionsgleichung (8.20) gilt sowohl für Gleichkorn- als auch für Mehrkornschichten. Die folgenden Rechnungen beschränken sich jedoch auf Gleichkornschichten. Das Ergebnis läßt sich später so erweitern, daß es für Mehrkornschichten benutzt werden kann.

Mit $V_s = V_p / (1 - \varepsilon)$ aus Gl. (8.7) erhält man

$$d_h = 4 \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{V_p}{A_p} \quad (8.21)$$

Das Verhältnis V_p/A_p wird zur Definition eines für alle Füllkörperarten anwendbaren Partikeldurchmessers d_p herangezogen:

$$d_p \equiv 6 \frac{V_p}{A_p}. \quad (8.22)$$

Diese Größe ist so definiert, daß sie für eine Kugel gleich deren Durchmesser wird. Damit erhält man für den hydraulischen Durchmesser der Füllkörperschicht die folgende Beziehung:

$$d_h = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} d_p. \quad (8.23)$$

Der hydraulische Durchmesser ist eine Funktion des Lückengrades ε und des Partikeldurchmessers d_p . Der Lückengrad ε berücksichtigt das gesamte in der Schicht vorhandene Lückenvolumen. Der Partikeldurchmesser d_p ist ein Maß für die über die Schicht gemittelte Größe der einzelnen Poren, denn die Poren zwischen benachbarten Partikeln sind um so größer, je größer der Partikeldurchmesser ist.

Da der Lückengrad, wie im vorangegangenen Abschnitt ausgeführt wurde, in radialer Richtung veränderlich ist, muß streng genommen auch der hydraulische Durchmesser d_h vom Ortsradius abhängen. Zur Zeit läßt man diese Abhängigkeit aber noch unberücksichtigt. Eine genauere Behandlung der Strömung durch die Schüttung, die insbesondere in Zusammenhang mit chemischen Reaktoren und Kernreaktoren erforderlich ist, wird hierauf aber Rücksicht nehmen müssen.

Gemäß Gl. (8.23) wird $d_h = 0$ für $\varepsilon = 0$. Dieses Ergebnis ist sinnvoll, da die Schicht für $\varepsilon = 0$ kein Lückenvolumen mehr hat. Für $\varepsilon = 1$ folgt hingegen das unsinnige Ergebnis $d_h = \infty$. Wenn keine Füllkörper in der Säule vorhanden sind, müßte der hydraulische Durchmesser der Füllkörperschicht gleich dem Säulendurchmesser d_s werden. Zu diesem Ergebnis gelangt man auch, wenn in Gl. (8.20) zur Füllkörperoberfläche A_p die Säulenoberfläche $A_s = d \pi h$ addiert wird. Dann erhält man für den hydraulischen Durchmesser die Gleichung

$$d_h = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} d_p \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{d_p}{d_s} \frac{1}{1-\varepsilon}} = \frac{2}{\frac{2}{d_s} + \frac{3}{d_p} (1-\varepsilon)}. \quad (8.24)$$

Man erkennt hieraus, daß für $d_p/d_s < 0,05$ die einfachere Gl. (8.23) hinreichend genaue Ergebnisse liefert.

Der hydraulische Durchmesser charakterisiert die Größe der für das Fluid verfügbaren Strömungskanäle innerhalb der Füllkörperschicht. Man stellt sich also vor, daß die Füllkörperschicht durchströmt wird. Im Gegensatz zu dieser Vorstellung von der «Durchströmung der Schicht» steht eine andere, nämlich die von der «Umströmung der einzelnen Partikeln». Die zweite Modellvorstellung würde als charakteristische Länge den Partikeldurchmesser d_p fordern. Da das Strömungsfeld um eine Partikel nicht unendlich ausgedehnt ist, sondern das Fluid jeder einzelne Partikel nur innerhalb einer begrenzten Umgebung umströmt, muß

man in der Modellvorstellung neben dem Partikeldurchmesser die Grenzen dieser Umgebung berücksichtigen. Hierzu eignet sich die Größe $(V_s - V_p)/V_p$, die das Verhältnis aus freiem Volumen $V_s - V_p$ und Füllkörpervolumen V_p darstellt. Durch Einführen dieser Größe ordnet man jeder Partikel einen gleich großen Anteil am freien Volumen zu. Für das Volumverhältnis gilt die folgende Gleichung:

$$\frac{V_s - V_p}{V_p} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad (8.25)$$

Sie stimmt mit dem im hydraulischen Durchmesser gemäß Gl.(8.23) stehenden Ausdruck überein. Man kann daher feststellen, daß der durch Gl.(8.23) festgelegte hydraulische Durchmesser sowohl der Vorstellung von der «durchströmten Schicht» als auch der Vorstellung von den «umströmten einzelnen Partikeln» gerecht wird.

Diese Überlegungen dürfen nicht, worauf ausdrücklich hingewiesen sei, zu der Schlußfolgerung führen, daß die Struktur des freien Volumens beliebiger Füllkörperschichten im Hinblick auf Strömungs- sowie Wärme- und Stoffübergangsprobleme durch den hydraulischen Durchmesser bereits eindeutig beschrieben wird. Bereits bei der Behandlung der Strömung durch Kanäle mit nicht kreisförmigen Querschnittsflächen in Abschnitt 2 hatte sich ergeben, daß trotz Verwendung des hydraulischen Durchmessers in den maßgebenden dimensionslosen Kenngrößen noch eine weitere, rein geometrische Kennzahl zur Charakterisierung der Kanalform erforderlich ist, um allgemein gültige Gleichungen aufstellen zu können. Man muß daher erwarten, daß auch die Festlegung der Schichtstruktur eine weitere Größe erfordert, die zumindest für jede Füllkörperart einen anderen Wert besitzt. KRISCHER [8.28] konnte diese Überlegungen mit experimentellen Ergebnissen unterstützen. Hierauf soll jedoch erst im Zusammenhang mit den Widerstandsgesetzen näher eingegangen werden.

Die für Gleichkornschüttungen entwickelte Gl.(8.23) des hydraulischen Durchmessers läßt sich auch für Mehrkornschüttungen verwenden, wenn man den Lückengrad ε und den Partikeldurchmesser d_p durch die für Mehrkornschüttungen geltenden Größen ε_m und d_{p_m} ersetzt. Der mittlere Lückengrad ε_m von Mehrkornschichten muß stets durch Versuche bestimmt werden. Unterteilt man das Korngemisch in $i = 1$ bis $i = n$ Fraktionen einheitlichen Korndurchmessers, dann läßt sich der hydraulische Durchmesser der Mehrkornschicht mittels der Definitionsgleichung

$$d_{p_m} \equiv 6 \frac{V_p}{A_p} = \frac{6}{\frac{A_{p_1}}{V_p} + \frac{A_{p_2}}{V_p} + \dots + \frac{A_{p_n}}{V_p}} \quad (8.26)$$

berechnen. Berücksichtigt man, daß für die i -te Kornfraktion $A_{p_i} = 6 V_{p_i}/d_{p_i}$ gelten muß, dann erhält man für den hydraulischen Durchmesser die Berechnungsgleichung

$$d_{p_m} = \frac{1}{\frac{V_{p_1}}{V_p} \frac{1}{d_{p_1}} + \frac{V_{p_2}}{V_p} \frac{1}{d_{p_2}} + \dots + \frac{V_{p_n}}{V_p} \frac{1}{d_{p_n}}} \quad (8.27)$$

Hierin bedeuten V_{p_i}/V_p den Volumanteil der i -ten Kornfraktion am gesamten Kornvolumen V_p und d_{p_i} den Durchmesser dieser Fraktion. Die Gl. (8.27) wurde von JESCHAR im Zusammenhang mit Untersuchungen über den Strömungswiderstand [8.17] und den Wärmeübergang [8.29] in Mehrkornschichten erfolgreich angewendet.

8.2 Geschwindigkeitsverteilung innerhalb von Füllkörperschichten

Mit den zur Zeit verfügbaren experimentellen Hilfsmitteln ist es nicht möglich, die Geschwindigkeitsverteilung eines Fluids innerhalb einer Füllkörperschicht zu messen. Lange Zeit brachte man diesem Problem auch kein Interesse entgegen. Man war überzeugt, daß sich ein die Schicht durchströmendes Fluid gleichmäßig über die verfügbare freie Querschnittsfläche verteilen würde. Man erwartete also eine kolbenförmige Geschwindigkeitsverteilung, die gemäß *Bild 8.16a* auch in der Austrittsebene zu beobachten sein müßte. Erst im Verlauf näherer Untersuchungen, die insbesondere im Zusammenhang mit katalytischen chemischen Reaktoren erforderlich wurden, stellte man eine Geschwindigkeitsverteilung fest, wie sie *Bild 8.16b* qualitativ zeigt. An der Behälterwand ist die örtliche Geschwindigkeit auf Grund der Haftbedingung gleich Null. Mit zunehmendem Wandabstand steigt die Geschwindigkeit zunächst sehr steil an, durchläuft ein örtliches Maximum und sinkt dann auf einen annähernd konstanten, vom Ortsradius also unabhängigen Wert ab. Für die Geschwindigkeitsverteilung ergeben sich dem-

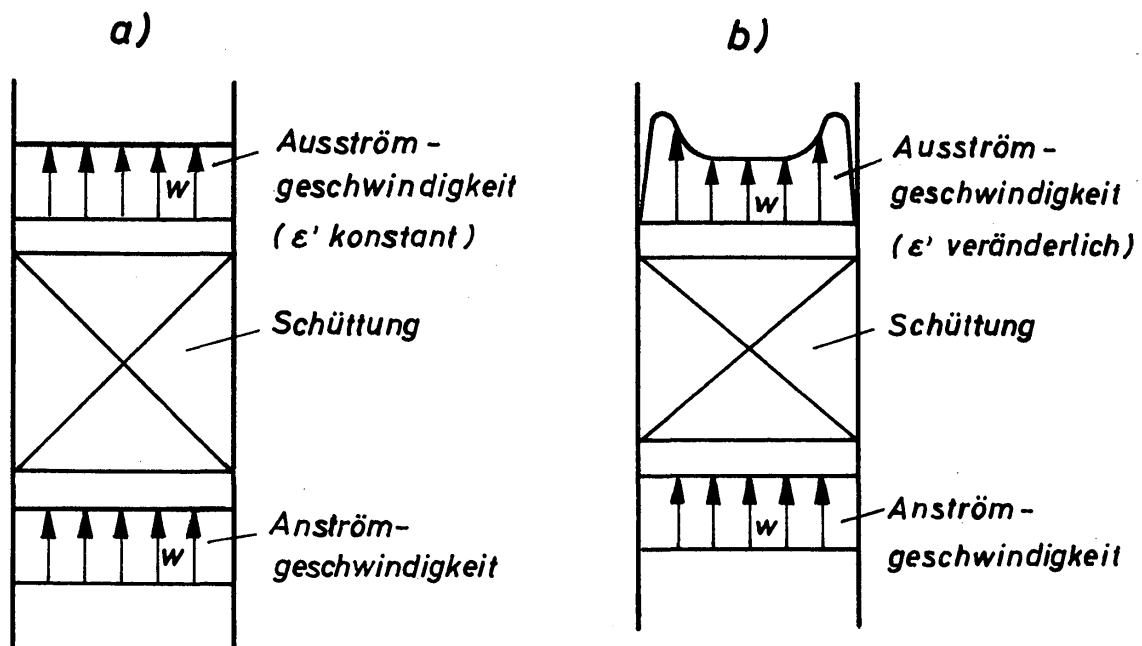
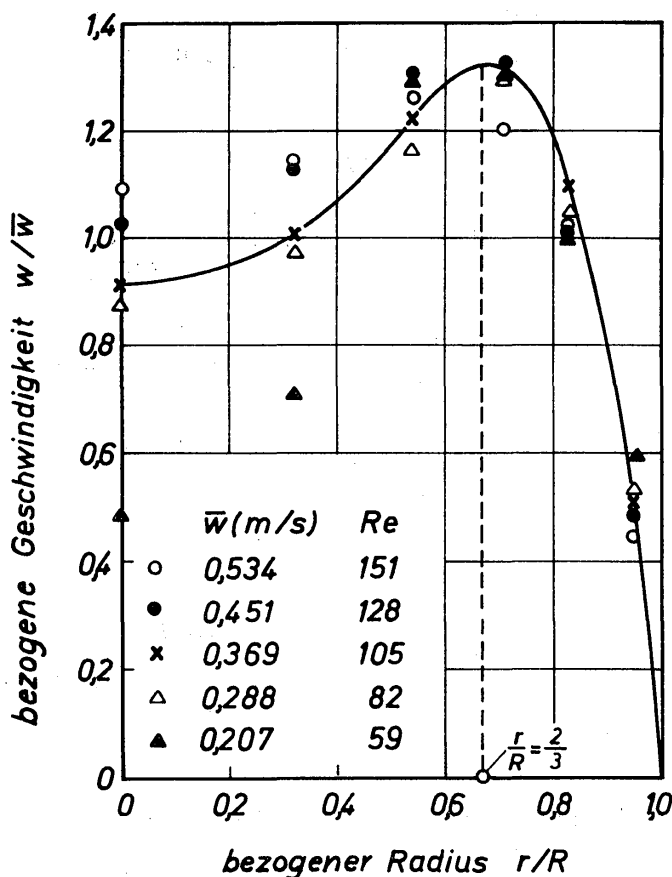


Bild 8.16. Zur Erläuterung der Geschwindigkeitsverteilung in Füllkörperschichten; a) bei konstantem Lückengrad und b) bei örtlich veränderlichem Lückengrad

nach eine ausgeprägte Randzone und eine Kernzone. Diese Einteilung steht in Zusammenhang mit dem ortsabhängigen Lückengrad.

Genauen Aufschluß über die Geschwindigkeitsverteilung liefern allein Messungen, die aber nur oberhalb der Schicht durchgeführt werden können. Die hierbei zu überwindenden Schwierigkeiten sind dadurch bedingt, daß das Fluid die Füllkörperschicht in vielen einzelnen Teilströmen durchströmt, deren Größe und Richtung vom örtlichen Lückengrad und von der Lage der Füllkörper abhängen und somit sehr unterschiedlich sind. Örtliche Messungen mit einem Staurohr oder einem Hitzdrahtanemometer mußten also zu völlig unbefriedigenden Ergebnissen führen. MORALES, SPINN und SMITH [8.30] haben solche Messungen durchgeführt. Zwischen örtlichen Geschwindigkeiten ergaben sich selbst bei sehr kleinen radialen Ortsänderungen Unterschiede bis zu 200%. Ferner ließen die über einem Säulendurchmesser gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen keine Symmetrie erkennen. Die genannten Experimentatoren führen die ungleichmäßige Verteilung der Geschwindigkeitsspitzen auf örtlich unterschiedliche Packungsstrukturen zurück. *Bild 8.2* vermag hiervon eine gute Vorstellung zu vermitteln. Innerhalb einer Füllkörperschicht sind bevorzugte Strömungskanäle zu erwarten, worauf auch FURNAS [8.25] bereits hingewiesen hat. Man muß sogar mit örtlichen Rückströmungen rechnen.

Die großen örtlichen Geschwindigkeitsschwankungen ließen es nicht zu, verbindliche Aussagen über die Änderung der Geschwindigkeit mit der radialen Koordinate zu machen. MORALES, SPINN und SMITH [8.30] verwendeten daher ein Ringanemometer, mit dessen Hilfe sie bei einem festen Radius eine über den Umfang gemittelte Geschwindigkeit messen konnten. Mittels mehrerer Ringanemometer



unterschiedlicher Radien waren sie dann in der Lage, die Geschwindigkeit abhängig vom Ortsradius zu bestimmen. Einige der mitgeteilten Ergebnisse wurden umgerechnet und in *Bild 8.17* dargestellt. Aufgetragen ist die auf die mittlere Anströmgeschwindigkeit \bar{w} bezogene örtliche Geschwindigkeit w über dem bezogenen Ortsradius r/R , wobei der Säulenradius $R = 25,4$ mm beträgt.

Bild 8.17

Bezogene örtliche Geschwindigkeit w/\bar{w} in Füllkörperschichten, abhängig vom bezogenen Radius r/R für verschiedene Werte der Reynoldszahl Re

Die Schicht hatte eine Höhe von etwa 152 mm und bestand aus Vollzylindern, deren Durchmesser ungefähr 3,2 mm betrug. Das Durchmesser Verhältnis d_p/d_s hatte also den Wert 0,063 und das Höhenverhältnis h/d_p den Wert 47,5. Verändert wurde bei den Versuchen die mittlere Anströmgeschwindigkeit \bar{w} .

Alle Meßreihen ergaben ein Maximum der Geschwindigkeit, das ungefähr bei $r/R = 2/3$ bzw. bei $y/d_p = 2,5$ liegt. Die Ursache für die Ausbildung dieses Maximums ist der starke Anstieg des Lückengrades zur Wand hin. Man betrachte hierzu *Bild 8.7*. Allerdings fällt das Maximum der Geschwindigkeit nicht mit dem Maximum des Lückengrades an der Wand zusammen; denn an der Behälterwand unterliegt die Strömung der Haftbedingung, und die Geschwindigkeit muß gleich Null sein. Wegen der Änderung des Lückengrades sowohl in radialer als auch in axialer Richtung kreuzen und durchmischen sich die einzelnen Teilströme immer wieder. Es kommt zu einem wahrscheinlich starken Impulsaustausch in Querrichtung. Dieser führt zusammen mit der Haftbedingung an der Wand zur Ausbildung der in *Bild 8.17* dargestellten Geschwindigkeitsverteilung. Über die Lage des Maximums der Geschwindigkeit kann noch nichts Endgültiges ausgesagt werden. SCHWARTZ und SMITH [8.31] geben hierfür den Wert $y/d_p = 1$ an. Weitere Untersuchungen sind über diesen Punkt erforderlich.

In Wandnähe ist das Geschwindigkeitsprofil gemäß *Bild 8.17* unabhängig von der mittleren Anströmgeschwindigkeit \bar{w} bzw. von der Reynoldszahl Re , deren Definition durch Gl. (8.34) gegeben ist. Dieser experimentell gesicherte Befund ist wie folgt zu erklären. Der Strömungszustand blieb innerhalb des untersuchten Bereiches der Reynoldszahl, die zwischen 59 und 151 liegt, wahrscheinlich unverändert. Die Strömung war entweder noch laminar oder bereits turbulent. Genaue Aussagen lassen sich darüber noch nicht machen. Nach Angaben von JOLLST und HANRATTY [8.32] findet der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung im Bereich von $Re = 170$ bis 250 statt. Die genannten Verfasser haben den Stoffübergang mittels einer elektrochemischen Methode an einem kleinen Abschnitt der Oberfläche einer Kugel, die in einem Abstand von $y = 2$ bis $3 d_p$ von der Wand innerhalb einer Schicht angeordnet war, zeitlich verfolgt. Aus den registrierten Schwankungen schlossen sie auf den Übergang vom laminaren zum turbulenten Strömungszustand des Fluids.

Im Bereich der Kernzone ergibt sich für jeden Wert der Reynoldszahl eine andere Geschwindigkeitsverteilung. Ausgezogen wurde jedoch nur die Kurve für $Re = 105$ bzw. $\bar{w} = 0,369$ m/s. Die Meßwerte lassen keine systematische Änderung der Profile mit der Reynoldszahl erkennen. Wesentlich ist jedoch, daß alle Meßreihen ein Minimum der Geschwindigkeit in Schichtmitte aufweisen. Die Differenz zwischen der maximalen und der in Schichtmitte auftretenden minimalen Geschwindigkeit w_{\min} ist sehr verschieden. Für die ausgezogene Kurve ist $w_{\max} = 1,45 w_{\min}$. Ähnliche Unterschiede wurden auch von SCHWARTZ und SMITH [8.31] mitgeteilt. Die Unsicherheit in der Beurteilung der Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Kernzone kann möglicherweise auf unterschiedliche Werte des örtlichen Lückengrades zurückgeführt werden. Gesonderte Untersuchungen von MORALES, SPINN und SMITH [8.30] liefern hierfür einen Anhalt. Das heißt aber, daß die Geschwin-

digkeitsverteilung im Bereich der Kernzone mit wesentlich geringerer Genauigkeit als im Bereich der Randzone vorausgesagt werden kann. Weitere Untersuchungen sind zur Klärung der offenen Fragen erwünscht.

8.3 Theoretisches Widerstandsgesetz

Die Struktur einer Füllkörperschicht läßt sich auf Grund der zur Zeit vorliegenden Erkenntnisse in der günstigsten Weise mit den Gesetzen der Statistik beschreiben. Diese Gesetze müßten daher auch die Grundlage für die Beschreibung der Strömung durch die Füllkörperschicht darstellen. Sie sind bislang aber noch nicht hierfür angewendet worden. Man hat sich vielmehr darum bemüht, Modellvorstellungen von der Schicht zu entwickeln und diese für die Aufstellung eines für praktisch tätige Ingenieure befriedigenden Widerstandsgesetzes zu verwenden. Die erste Modellvorstellung geht auf DARCY zurück, die in der Folge von KOZENY und CARMAN [8.33] weiterentwickelt wurde. Hierbei wird das Lückenvolumen einer Schicht auf eine große Zahl von Kanälen verteilt, die alle einen einheitlichen Durchmesser, nämlich den hydraulischen Durchmesser d_h , haben. Im Abschnitt 8.13 ist hierauf bereits eingegangen worden. Auf dieser Grundlage werden heute noch alle empirischen Widerstandsgesetze aufgestellt.

Mit einer anderen Modellvorstellung ist es HAPPEL [8.34] erstmalig gelungen, den Widerstand einer Füllkörperschicht theoretisch zu ermitteln. Hierauf wird in diesem Abschnitt ausführlich eingegangen. Denn dieses theoretische Gesetz gibt einige wertvolle Hinweise für die Verfeinerung der bereits bekannten empirischen Gesetze. In dem theoretischen Gesetz und in den empirischen Gesetzen treten die gleichen dimensionlosen Kenngrößen auf, die zum leichteren Verständnis der folgenden Ausführungen zunächst angegeben werden sollen.

8.31 Kennzahlen

Das Widerstandsgesetz liefert den Zusammenhang zwischen der Widerstandszahl ψ und der Reynoldszahl Re . Die Definition beider Kennzahlen lehnt sich an die für die Rohrströmung übliche an und wurde erstmalig von BLAKE [8.35] verwendet. Die Widerstandszahl ist wie folgt definiert:

$$\psi' \equiv \frac{1}{4} \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}_e^2 / 2} \frac{d_h}{h}. \quad (8.28)$$

Hierin bedeuten ΔP den Druckverlust des strömenden Mediums, ρ dessen Dichte, h die Höhe der Füllkörperschicht, d_h deren hydraulischen Durchmesser und \bar{w}_e die mittlere effektive Geschwindigkeit des Fluids innerhalb der Schicht. Sie ist gemäß der Beziehung

$$\bar{w}_e = \frac{\bar{w}}{\varepsilon} \quad (8.29)$$

mit der mittleren Anströmgeschwindigkeit \bar{w} und dem mittleren Lückengrad ε der Schicht verbunden. Nach Einführen der Gleichungen (8.29) und (8.23) für d_h in Gl. (8.28) erhält man:

$$\psi' \equiv \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2} \frac{d_p}{h}. \quad (8.30)$$

Da der Zahlenwert $1/3$ für die Kennzahl bedeutungslos ist, wird er fortgelassen. Die zur Aufstellung von Widerstandsgesetzen zu verwendende Definitionsgleichung für die Widerstandszahl hat dann folgende Form:

$$\psi \equiv \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2} \frac{d_p}{h}. \quad (8.31)$$

Der hierin enthaltene Partikeldurchmesser d_p ist bereits durch Gl. (8.22) definiert. Für die Reynoldszahl wird von der Definitionsgleichung

$$Re' \equiv \frac{\bar{w}_e d_h}{\nu} \quad (8.32)$$

ausgegangen. Neben den schon bekannten Größen ist ν die kinematische Viskosität des Fluids. Setzt man in Gl. (8.32) für \bar{w}_e Gl. (8.29) und für d_h Gl. (8.23) ein, so ergibt sich als Zwischenergebnis:

$$Re' \equiv \frac{3}{2} \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\bar{w} d_p}{\nu}. \quad (8.33)$$

Läßt man auch hierbei wieder den Zahlenfaktor $3/2$ fort, dann lautet die Definitionsgleichung:

$$Re \equiv \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\bar{w} d_p}{\nu}. \quad (8.34)$$

Häufig wird noch die «Reynoldszahl der Partikel»

$$Re_p \equiv \frac{\bar{w} d_p}{\nu} \quad (8.35)$$

anstelle von Re verwendet. Der Zusammenhang zwischen Re und Re_p ist durch

$$Re = \frac{Re_p}{1-\varepsilon} \quad (8.36)$$

gegeben.

8.32 Widerstandsgesetz von Happel

HAPPEL [8.34] geht von der Annahme aus, daß der Lückengrad $\varepsilon = 1 - V_p/V_s$ innerhalb der Füllkörperschicht konstant ist und somit jedem einzelnen Füllkörper ein gleich großer Anteil am Lückenvolumen zugeteilt werden kann. Bei kugelförmigen Füllkörpern umhüllt das zugeteilte Lückenvolumen die Kugel als

Schale, deren Dicke δ ist. Für das aus Kugel und Schale bestehende Element der Kugelschicht ergibt sich mit r_p als Kugelradius der Lückengrad zu

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{r_p}{r_p + \delta} \right)^3. \quad (8.37)$$

Mit der Einführung des Kugelelementes ist die Durchströmung der Füllkörperschicht auf die Umströmung vieler einzelner Kugeln zurückgeführt und einer theoretischen Behandlung zugänglich, ohne daß empirische Korrekturkoeffizienten erforderlich sind.

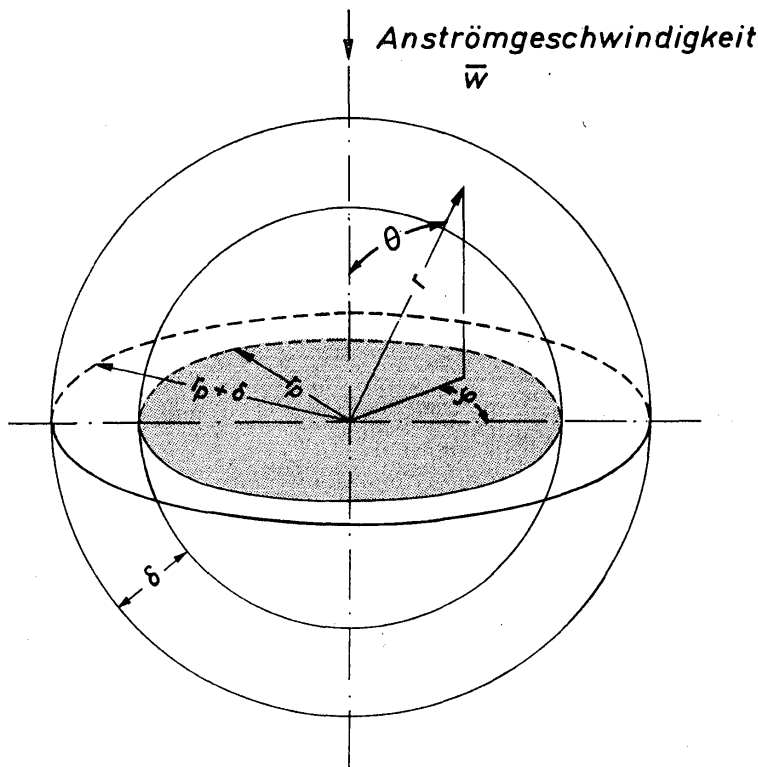


Bild 8.18
Das Kugelmodell von HAPPEL

In *Bild 8.18* ist ein Kugelelement dargestellt. Die Koordinaten sind r , θ und φ , und die zugeordneten Geschwindigkeiten sind w_r , w_θ und w_φ . Aus Symmetriegründen ist $w_\varphi = 0$. Setzt man schleichende Bewegung voraus, bei der die Trägheitskräfte vernachlässigt und nur die Reibungs- und Druckkräfte berücksichtigt werden, dann erhält man aus den Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten w_r und w_θ die folgenden Bestimmungsgleichungen [8.36]:

$$w_r = \left[Ar^2 + \frac{B}{r} + C + \frac{D}{r^3} \right] \cos \theta, \quad (8.38)$$

$$w_\theta = \left[-2Ar^2 - \frac{1}{2} \frac{B}{r} - C + \frac{1}{2} \frac{D}{r^2} \right] \sin \theta. \quad (8.39)$$

Hierin sind A , B , C und D Konstanten, die mittels der folgenden vier Randbedingungen bestimmt werden müssen:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \tau_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} = 0 \quad \text{für } r = r_p + \delta \\ 2) w_r = 0 \quad \text{für } r = r_p \\ 3) w_r = -\bar{w} \cos \theta \quad \text{für } r = r_p + \delta \\ 4) w_\theta = \bar{w} \sin \theta \quad \text{für } r = r_p + \delta \end{array} \right\} \quad (8.40)$$

Die ersten beiden Bedingungen besagen, daß am äußeren Rand der Hüllschicht keine Schubspannung übertragen wird und an der Kugeloberfläche die radiale Geschwindigkeitskomponente verschwindet. Durch die letzten beiden Bedingungen werden die Geschwindigkeitskomponenten mit der Anströmgeschwindigkeit \bar{w} verknüpft.

Da allein Interesse am Widerstandsgesetz besteht, genügt die Berechnung der Konstanten D . Hierfür erhält HAPPEL den Ausdruck:

$$D = \frac{\bar{w} r_p [3 + 2(1-\varepsilon)^{5/3}]}{2 - 3(1-\varepsilon)^{1/3} + 3(1-\varepsilon)^{5/3} - 2(1-\varepsilon)^2}. \quad (8.41)$$

Für die Widerstandskraft in der mit x bezeichneten Strömungsrichtung gilt:

$$W_x = -4\pi\eta D. \quad (8.42)$$

Der Quotient aus der Widerstandskraft W_x und dem Volumen der Kugelzelle ist gleich dem Druckverlust des Fluids längs der Schichthöhe h :

$$\frac{W_x}{\frac{4}{3}\pi(d_p + 2\delta)^3} = -\frac{\Delta P}{h}. \quad (8.43)$$

Mit den Gleichungen (8.41) bis (8.43) erhält man die von HAPPEL mitgeteilte Beziehung

$$\bar{w} = \left\{ \frac{1 - \frac{3}{2}(1-\varepsilon)^{1/3} + \frac{3}{2}(1-\varepsilon)^{5/3} - (1-\varepsilon)^2}{1 + \frac{2}{3}(1-\varepsilon)^{5/3}} \frac{d_p^2}{18\eta(1-\varepsilon)} \right\} \frac{\Delta P}{h}, \quad (8.44)$$

die den Zusammenhang zwischen der mittleren Anströmgeschwindigkeit \bar{w} und dem bezogenen Druckverlust $\Delta P/h$ angibt. Der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck heißt Permeabilitätskoeffizient. Dieser wurde erstmalig von DARCY [8.33] eingeführt. Er hängt nicht nur vom Lückengrad ε und dem Partikeldurchmesser d_p , sondern auch noch von der Viskosität η des Fluids ab.

Die Gl.(8.44) läßt sich in die Form

$$\frac{\Delta P}{h} = 18\varphi_\varepsilon \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\eta\bar{w}}{d_p^2} \quad (8.45)$$

bringen, worin φ_ε eine Funktion des Lückengrades ist:

$$\varphi_\varepsilon = \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} \frac{1 + \frac{2}{3}(1-\varepsilon)^{5/3}}{1 - \frac{3}{2}(1-\varepsilon)^{1/3} + \frac{3}{2}(1-\varepsilon)^{5/3} - (1-\varepsilon)^2}. \quad (8.46)$$

Die Größe $\varphi_\varepsilon/2 = k$ wird Kozeny-Konstante genannt [8.33 und 8.37]. Von ihr nahm man an, daß sie für Schichten aus gleichartigen Füllkörpern stets den gleichen Wert hat. WILLIC und GREGORY [8.38] haben bereits gezeigt, daß die von ihnen mittels elektrischer Widerstandsmessungen bestimmten Werte der Kozeny-Konstante k vom Lückengrad und von der Form der Füllkörper abhängen. Die Abhängigkeit vom Lückengrad ist durch die Gl. (8.46) von HAPPEL theoretisch begründet worden. Über den Einfluß der Füllkörperform lassen sich indes noch keine verbindlichen Aussagen machen, obgleich ein solcher mit Sicherheit zu erwarten ist.

Formt man Gl. (8.45) durch Einführen der Widerstands- und der Reynoldszahl um, so erhält man das theoretische Widerstandsgesetz für Kugelschichten:

$$\psi = \frac{18 \varphi_\varepsilon}{Re}. \quad (8.47)$$

Seine Gültigkeit ist wegen der Voraussetzung schleichender Bewegung auf kleine Werte der Reynoldszahl, also etwa $Re < 10$, begrenzt. Nimmt man den Lückengrad von Kugelschichten zu $\varepsilon = 0,4$ an, dann ist $\varphi_\varepsilon = 9,1$, und man erhält das Widerstandsgesetz in der Form $\psi = 163,8/Re$. Aus Meßwerten hat BRAUER [8.39]

das empirische Gesetz $\psi = 160/Re$ ermittelt. Somit zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem theoretischen und dem empirischen Gesetz. Der Vorteil des theoretischen Gesetzes ist, daß es den Einfluß des Lückengrades auf den im empirischen Gesetz enthaltenen Zahlenwert angibt.

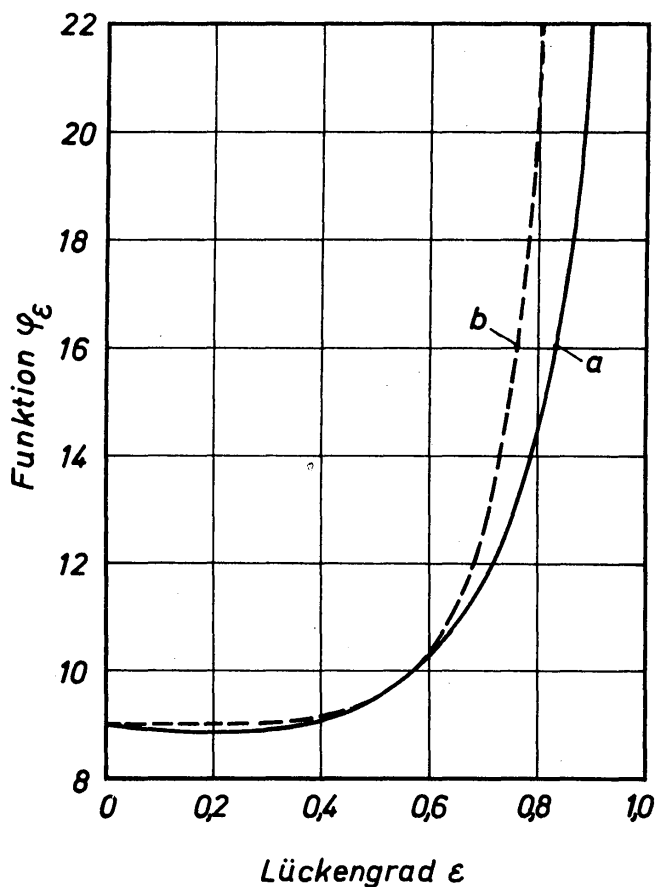


Bild 8.19
Abhängigkeit der Lückengradfunktion φ_ε vom Lückengrad ε ; Kurve a nach der theoretischen Gl. (8.46) und Kurve b nach der empirischen Gl. (8.48)

Die Lückengradfunktion φ_ε ist in *Bild 8.19* als Kurve a , abhängig von ε , dargestellt. Für $\varepsilon = 0$ ist $\varphi_\varepsilon = 9$ und für $\varepsilon = 1$ ist $\varphi_\varepsilon = \infty$. Bemerkenswert ist, daß φ_ε im Bereich von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = 0,4$ mit hinreichender Genauigkeit konstant zu $\varphi_\varepsilon = 9$ gesetzt werden kann. Der Einfluß des Lückengrades wirkt sich erst oberhalb von

$\varepsilon = 0,4$ aus. Die sehr schlecht auszuwertende Gl. (8.46) läßt sich im Bereich von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = 0,65$ durch die empirische Gleichung

$$\varphi_\varepsilon = 9,0 + \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \quad (8.48)$$

recht gut annähern. In *Bild 8.19* wird Gl. (8.48) durch die Kurve *b* wiedergegeben.

8.4 Empirische Widerstandsgesetze

8.4.1 Widerstandsgesetze für Gleichkornschichten

8.4.1.1 Widerstandsgesetz für Kugelschichten

Die einfache Form der Kugeln erleichtert es, an Kugelschichten grundsätzliche Fragen bezüglich des Widerstandes von Füllkörperschichten zu untersuchen. Von besonderer Bedeutung ist der Einfluß des Lückengrades auf den Widerstand. Um den Lückengrad in weiten Grenzen ändern zu können, hat man eine Vielzahl regulärer Kugelanordnungen hergestellt und untersucht. In der technischen Praxis sind jedoch allein die regellosen Schüttungen von Bedeutung. Daher wird im folgenden zunächst der Widerstand regelloser und erst danach der Widerstand geordneter Kugelschichten behandelt.

Die Ergebnisse fremder und eigener Untersuchungen über den Widerstand regelloser Kugelschichten hat BRAUER [8.39] in Form eines Widerstandsgesetzes zusammengefaßt, das folgendermaßen lautet:

$$\psi = \frac{160}{Re} + \frac{3,1}{Re^{0,1}} \quad (8.49)$$

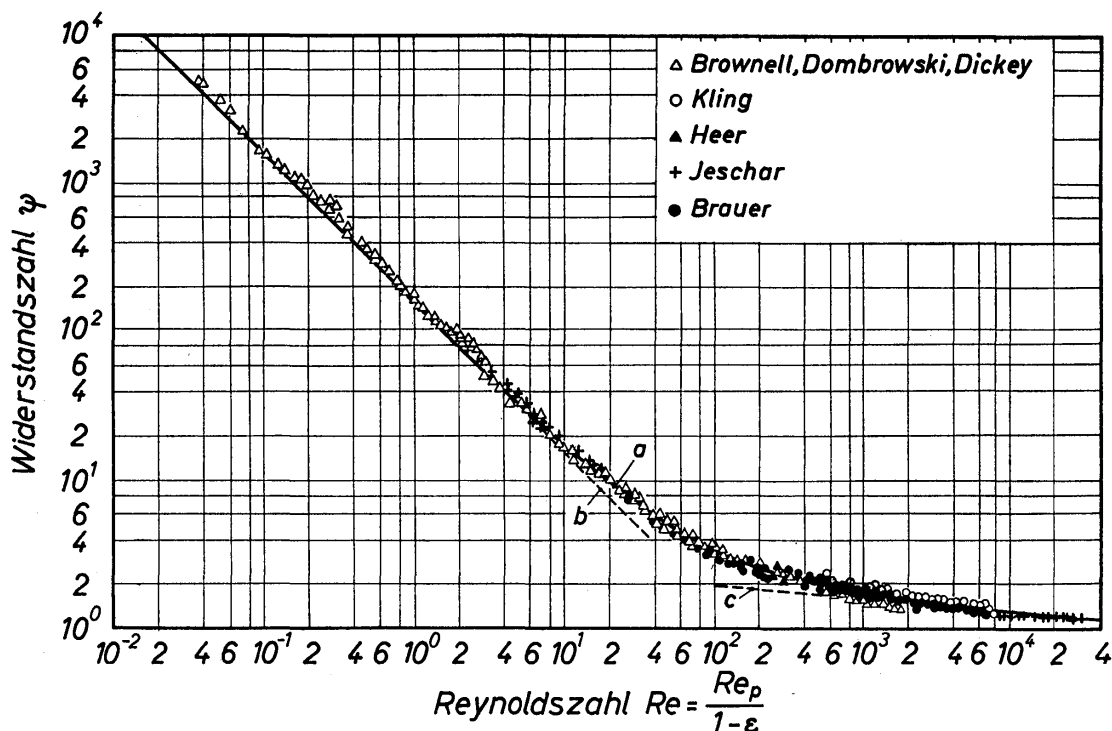


Bild 8.20. Widerstandsgesetz für Kugelschichten. Kurve *a* nach Gl. (8.49), Kurve *b* nach Gl. (8.50) und Kurve *c* nach Gl. (8.51); Erläuterung der Meßwerte in Tabelle 8.1

Die Widerstandszahl ψ und die Reynoldszahl Re sind durch die Gleichungen (8.31) und (8.34) definiert. In *Bild 8.20* wird dieses Gesetz durch Kurve *a* wiedergegeben. Die eingetragenen Meßwerte haben BRONWELL, DOMBROWSKI und DICKEY [8.40], KLING [8.41], HEER [8.42], JESCHAR [8.17] und BRAUER [8.39] mitgeteilt. Die Meßwerte erstrecken sich über einen Reynoldszahlbereich von $Re = 4 \cdot 10^{-2}$ bis $Re = 3 \cdot 10^4$. Nähere Angaben über die Kugelabmessungen und Versuchsbedingungen sind in *Tabelle 8.1* zusammengestellt.

Die Kurve *a* nähert sich im Bereich kleiner Werte der Reynoldszahl der Kurve *b* und im Bereich großer Werte der Reynoldszahl der Kurve *c* an. Für kleine Reynoldszahlen kann man in Gl. (8.49) den zweiten Summanden vernachlässigen, so daß für die Kurve *b* die Beziehung

$$\psi_l = \frac{160}{Re} \quad (8.50)$$

gilt. Umgekehrt wird bei großen Werten von Re der erste Summand von Gl. (8.49) vernachlässigbar klein, und für die Kurve *c* gilt

$$\psi_t = \frac{3,1}{Re^{0,1}} \quad (8.51)$$

Die Indizes *l* und *t* stehen für laminar und turbulent. JOLLST und HANRATTY [8.32] haben festgestellt, daß die Strömung durch Kugelschichten im Bereich von $Re = 170$ bis $Re = 250$ vom laminaren in den turbulenten Zustand übergeht. Daher darf man Gl. (8.50) als Grenzgesetz für die laminare und Gl. (8.51) als Grenzgesetz für die turbulente Strömung ansehen.

Die Gültigkeit der Grenzgesetze ist natürlich beschränkt; für Gl. (8.50) auf $Re = 0$ bis 10 und für Gl. (8.51) auf $Re = 2 \cdot 10^3$ bis $3 \cdot 10^4$. Die obere Grenze des Gültigkeitsbereiches ist durch die vorliegenden Versuchswerte festgelegt. Über $Re = 3 \cdot 10^4$ hinaus dürfen Gl. (8.51) oder Gl. (8.49) nur mit großer Vorsicht angewendet werden. Man muß im Gegensatz zu diesen beiden Gleichungen erwarten, daß sich der Widerstandsbeiwert von Kugelschüttungen bei sehr großen Reynoldszahlen einem konstanten Wert nähert.

Für die laminare Strömung konnte gezeigt werden, daß im theoretisch hergeleiteten Widerstandsgesetz gemäß Gl. (8.47) statt des empirischen Zahlenfaktors 160 die Funktion des Lückengrades $18 \varphi_\varepsilon$ steht. Es wird nun angenommen, daß analog dazu die Funktion φ_ε auch in das Grenzgesetz für die turbulente Strömung nach Gl. (8.51) eingeführt werden darf. Da die Messungen zu *Bild 8.20* in dem Bereich des Lückengrades durchgeführt wurden, in dem φ_ε gemäß *Bild 8.19* etwa den Wert 9 hat, ist der Zahlenwert 3,1 in Gl. (8.51) durch $3,1 \varphi_\varepsilon / 9 \approx 0,35 \varphi_\varepsilon$ zu ersetzen. Damit läßt sich auch für das empirische Widerstandsgesetz nach Gl. (8.49) eine allgemeingültigere Form angeben:

$$\psi = \frac{18 \varphi_\varepsilon}{Re} + \frac{0,35 \varphi_\varepsilon}{Re^{0,1}} \quad (8.52)$$

Es sei aber betont, daß die Gl. (8.49) nur zwischen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 0,4$ wegen des praktisch unveränderlichen Wertes von $\varphi_\varepsilon \approx 9$ den Einfluß des Lückengrades

Tabelle 8.1: Angaben über Kugelabmessungen und Versuchsbedingungen

Experimentatoren	d_p (mm)	Material	d_s (mm)	d_p/d_s	h (mm)	h/d_p	ε	Versuchsbedingungen
BROWNELL, DOMBROWSKI und DICKEY [8.40] Δ	5,29	Glas	–	–	–	–	0,412	Wasser, Öl, Zucker- lösungen $Re = 4 \cdot 10^{-2}$ bis $2 \cdot 10^3$
KLING [8.41] \circ	3,18	Stahl	50	0,0636	300	94,4	0,4	Luft, $t = 16$ bis 80°C $p = 1$ bis 5 bar $Re = 6 \cdot 10^2$ bis $8 \cdot 10^3$
	3,95	Stahl	50	0,0790	300	75,9	0,4	
	4,06	Glas	50	0,0812	300	73,9	0,4	
HEER [8.42] \blacktriangle	12,44	Steinzeug	350	0,0355	396	31,8	0,345	Luft, $t = 14^\circ\text{C}$ $p = 1$ bar
	52,07	Steinzeug	350	0,1488	552	7,6	0,407	
JESCHAR [8.17] +	9,9	Steinzeug	508	0,0195	903	91,2	0,378	Luft $Re = 2 \cdot 10^0$ bis $3 \cdot 10^4$
	19,9	Steinzeug	508	0,0392	993	49,9	0,375	
	33,6	Steinzeug	508	0,0662	893	26,6	0,388	
	80,4	Steinzeug	508	0,1585	993	12,3	0,421	
BRAUER [8.39] \bullet	2,18	Glas	350	0,0062	264	121,1	0,384	Luft, $t = 14^\circ\text{C}$ $p = 1$ bar $Re = 2 \cdot 10^1$ bis $7 \cdot 10^3$
	10,12	Steinzeug	350	0,0289	637	62,9	0,401	
	12,44	Steinzeug	350	0,0355	612	49,2	0,403	
	52,09	Steinzeug	350	0,1488	552	10,4	0,407	

Es bedeuten d_p den Kugeldurchmesser, d_s den Säulendurchmesser, h die Schichthöhe und ε den Lückengrad.

ausreichend berücksichtigt. Für $\varepsilon > 0,4$ liegen keine Meßwerte vor, um die Gl. (8.52) zu prüfen.

Der Einfluß des Lückengrades auf den Widerstand von Kugelschichten wurde in zahlreichen Arbeiten untersucht; besonders erwähnenswert sind die Veröffentlichungen von BROWNELL, GAMI, MILLER und NEKARVIS [8.43], HAPPEL und EPSTEIN [8.44] sowie GUNN und MALIK [8.45]. Hierin wurde der Lückengrad der Kugelschichten von 0,364 bis 0,123 dadurch verändert, daß man die in der Schicht befindlichen Kugeln mit einem aushärtenden Kunstharz übergießt. Je größer die Dicke der Harzschicht war, desto geringer wurde das Lückenvolumen. Zu einer Vergrößerung des Lückengrades von 0,39 bis 0,96 gelangte man, indem man die Kugeln auf sehr dünnen Drähten befestigte und verschiedene geometrische Anordnungen herstellte. Allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten ließen sich nicht angeben. Die Untersuchungen zeigten aber, daß der Widerstand von Kugelschichten im Bereich künstlich vergrößerten Lückengrades nicht nur vom Lückengrad, sondern zusätzlich von der Art der regulären Anordnung abhängt. Zu dem gleichen Ergebnis führten auch umfangreiche Untersuchungen von MARTIN, McCABE und MONRAD [8.46].

Mit dem Widerstand von Schichten aus regulär angeordneten Kugeln haben sich auch WENTZ und THODOS [8.47] sehr eingehend beschäftigt. Die Kugelschichten bestanden aus jeweils fünf Kugелеbenen und waren so aufgebaut, daß sich der Lückengrad zwischen $\varepsilon = 0,354$ und $\varepsilon = 0,882$ änderte. Die Versuche wurden allein im turbulenten Strömungsbereich durchgeführt, wobei die Reynoldszahl Re zwischen 3000 und 65000 lag. Aus den Versuchswerten leiteten WENTZ und THODOS die empirische Gleichung

$$\psi_t = \frac{0,396}{Re^{0,05} - 1,20} \quad (8.53)$$

ab. Sie gilt den Versuchsbedingungen zufolge für nahezu beliebige Werte des Lückengrades und beliebige reguläre Anordnungsformen der Kugeln. Abweichungen von Gl. (8.51), die für regellose Kugelschichten im turbulenten Strömungsbereich gilt, sind *Tabelle 8.2* zu entnehmen.

Tabelle 8.2: Vergleich zwischen den Widerstandszahlen für Kugelschichten mit regelloser und regulärer Kugelanordnung nach den Gleichungen (8.51) und (8.53)

Re	ψ_t nach Gl.(8.51)	ψ_t nach Gl.(8.53)
1000	1,553	1,876
4000	1,352	1,261
10000	1,234	1,031
40000	1,075	0,794
100000	0,980	0,686

Nach Gl.(8.53) erhält man bei $Re = 1000$ einen größeren und bei $Re = 100000$ einen wesentlich niedrigeren Wert für die Widerstandszahl als nach Gl.(8.51). Reguläre Kugelanordnungen wurden in Untersuchungen von WENTZ und THODOS [8.48] sowie von TALLMADGE [8.49] verwendet, um im turbulenten Strömungsbereich den Widerstand in Reibungs- und Druckwiderstand aufzuteilen. Es stellte sich heraus, daß der Anteil des Reibungswiderstandes am Gesamtwiderstand von 18% auf 5% abnimmt, wenn sich die Reynoldszahl von 3000 auf 65000 ändert. Die Aufteilung des Widerstandes in die genannten Anteile ist besonders für Probleme des Wärmeüberganges in Kugelschichten von Bedeutung.

8.412 Widerstandsgesetz für Granulatschichten

Für Schichten aus Granulaten von Koks, Erz, gebrochenen Steinen usw. hat ERGUN [8.50] das folgende Widerstandsgesetz aufgestellt:

$$\psi = \frac{150}{Re} + 1,75. \quad (8.54)$$

Die Widerstandszahl ψ und die Reynoldszahl Re sind durch die Gleichungen (8.31) und (8.34) definiert. Mit diesem Gesetz war es ERGUN erstmalig gelungen, für Kornschichten ein über den gesamten interessierenden Bereich der Reynoldszahl und des Lückengrades gültiges Widerstandsgesetz anzugeben. Es bildete in der Folge die Grundlage für alle anderen Widerstandsgesetze. Weitere bedeutsame Beiträge zur Aufklärung des Widerstandsverhaltens von Granulatschichten haben unter anderem BARTH und ESSER [8.51], BARTH [8.27], ERGUN und ORNING [8.52], BURKE und PLUMMER [8.53] sowie LEVA [8.54] geliefert. Bei Auswertung ihrer Messungen haben WAGSTAFF und NIRMEIER [8.55] festgestellt, daß das Widerstandsgesetz von ERGUN genauer ist als alle anderen bekannt gewordenen Widerstandsgesetze.

Für große Reynoldszahlen strebt die Widerstandszahl gemäß Gl.(8.54) dem konstanten Wert 1,75 zu. Dies bedeutet, daß der Reibungswiderstand gegenüber dem Druckwiderstand vernachlässigbar klein wird. Der Druckwiderstand wird durch die Umströmung der scharfkantigen Granulatkörner hervorgerufen. Man darf erwarten, daß das Gesetz von ERGUN auch für Schüttungen aus anderen scharfkantigen Füllkörpern wie Vollzylinder und Tabletten anwendbar ist.

8.413 Widerstandsgesetz für Raschigringschichten

Die bisher angeführten Widerstandsgesetze gelten für Schichten aus Vollkörpern wie Kugeln und Granulate, die keine größeren Poren oder Hohlräume aufweisen. Für Raschigringe muß ein anderes Widerstandsgesetz gelten, in welchem der Hohlraum der Ringe besonders berücksichtigt wird. Versuchsergebnisse lassen erkennen, daß die Kurven für die Widerstandszahl von Einkornschichten aus verschiedenen großen Raschigringen den gleichen Verlauf aufweisen wie die Widerstandskurve von Granulatschichten und daß sie insbesondere für große Werte

der Reynoldszahl auch einem konstanten Wert zustreben. Das ist verständlich, da Raschigringe, ähnlich wie Granulate, scharfe Kanten besitzen, bei deren Umströmung zusätzlich Wirbel entstehen. Es liegt daher nahe, für Raschigringschichten das Widerstandsgesetz von ERGUN zugrunde zu legen, es jedoch so zu erweitern, daß die Hohlräume der Ringe berücksichtigt werden.

Der Anteil des Hohlvolumens am Gesamtvolumen eines Ringes wird durch das relative Hohlvolumen ε_r gemäß Gl.(8.3) erfaßt. Bei regelloser Lagerung der Raschigringe in der Schicht ist ein Teil des Hohlvolumens nicht für die Strömung verfügbar, da benachbarte Ringe die Öffnung der Hohlräume teilweise versperren. Das in der Schicht hydrodynamisch wirksame Hohlvolumen der Ringe muß somit kleiner sein als das geometrische Hohlvolumen. Der Einfluß des Hohlvolumens auf den Druckverlust läßt sich mittels eines erweiterten hydraulischen Durchmessers der Schicht berücksichtigen.

Für den hydraulischen Durchmesser d_h gilt Gl.(8.23), wonach d_h eine Funktion des Lückengrades ε und des Partikeldurchmessers d_p ist. Für ε wird der in der Schicht rein geometrisch bedingte Lückengrad verwendet. Der Partikeldurchmesser des Raschigringes d_{pr} ist gemäß [8.56] nach folgender Gleichung zu berechnen:

$$d_{pr} = d_a E^n. \quad (8.55)$$

Hierin bedeuten d_a den äußeren Durchmesser des Raschigringes und E eine Funktion des relativen Hohlvolumens:

$$E = \frac{1 - \varepsilon_r}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_r} - \frac{1}{3} \varepsilon_r}. \quad (8.56)$$

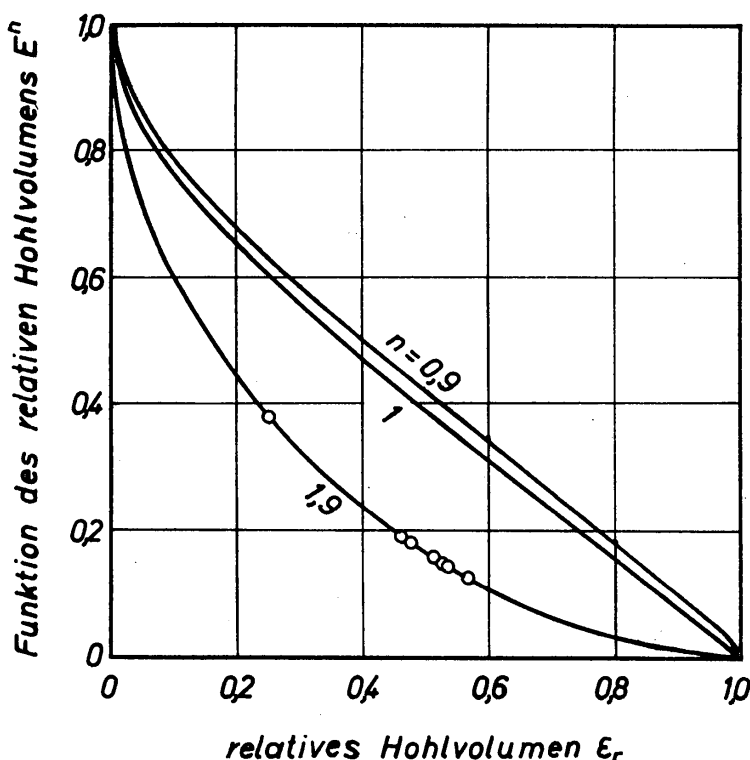


Bild 8.21
Abhängigkeit der Funktion E^n
für $n = 0,9$, $n = 1$ und $n = 1,9$
vom relativen Hohlvolumen ε_r
der verwendeten Raschigringe

Steht der Strömung das gesamte Hohlvolumen der Ringe zur Verfügung, dann muß $n = 1$ sein. Ist ein Teil des Hohlvolumens der Strömung versperrt, dann muß $n > 1$ sein. Der Wert von n wurde aus Druckverlustmessungen so bestimmt, daß das Widerstandsgesetz von ERGUN, Gl. (8.54), für Raschigringschichten angewendet werden kann. Für n ergab sich auf diese Weise der Wert 1,9.

In *Bild 8.21* ist E^n für $n = 1$, $n = 1,9$ und $n = 0,9$, abhängig vom relativen Hohlvolumen ε_r , dargestellt. Auf der Kurve für $n = 1,9$ kennzeichnen Kreise die Werte von $E^{1,9}$, die zur Festlegung des Exponenten $n = 1,9$ dienten. Die Widerstandsmessungen wurden an Schichten aus verschieden großen Raschigringen aus Steinzeug durchgeführt. Nähere Angaben über die Ringe enthält *Tabelle 8.3*. Die Widerstandszahlen sind in *Bild 8.22* über der Reynoldszahl aufgetragen. Im mittleren Bereich der Reynoldszahl streuen die Meßwerte um etwa ± 15 bis $\pm 20\%$ um die nach Gl. (8.54) berechnete Kurve. Die gleiche Streubreite ergibt sich auch für die Widerstandszahl von Granulatschichten. Die Messungen führten KOCH [8.57], GLASER [8.22], SCHRADER [8.58] und BRAUER [8.56] durch. Weitere im Schrifttum mitgeteilte Versuchsergebnisse ließen sich wegen fehlender Angaben über die Ringabmessungen nicht umrechnen. Hingewiesen sei insbesondere auf die Messungen von MACH [8.59].

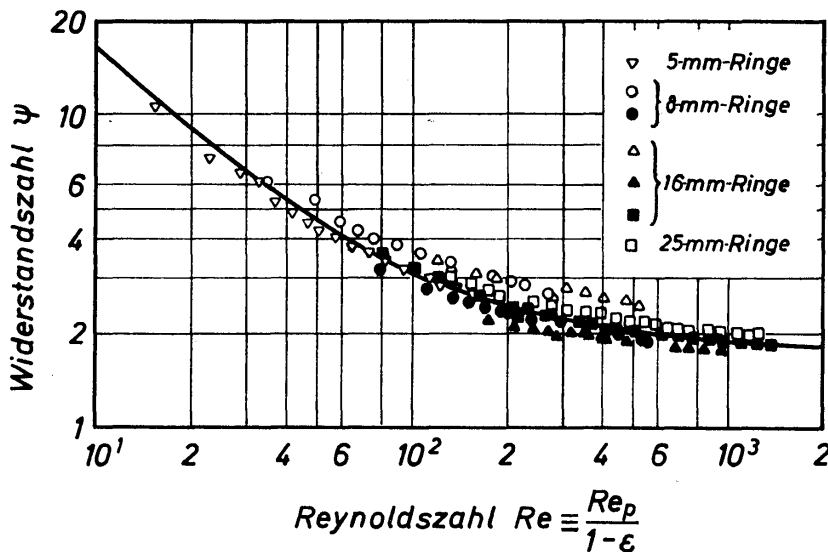


Bild 8.22
Widerstandsgesetz für
Raschigringschichten.
Angaben zu den
Meßwerten in *Tabelle 8.3*

Der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung erfolgt in Raschigringschichten vermutlich wie in Kugelschichten im Bereich der Reynoldszahl von 170 bis 250. Eine Vorstellung von der Entwicklung der Turbulenz in Füllkörpersäulen vermittelt *Bild 8.23*. Hierin ist die nach photographischen Aufnahmen angefertigte Skizze vom Verlauf eines Farbfadens am Rand einer Raschigringschicht wiedergegeben [8.56]. Mit t wird auf turbulente Gebiete des Stromfadens hingewiesen. Im Verlauf seines Weges durch die Schicht durchläuft der Stromfaden abwechselnd laminare und turbulente Abschnitte. Mit zunehmender Reynoldszahl dehnen sich die turbulenten Abschnitte immer weiter aus, bis die Strömung schließlich vollständig in den turbulenten Zustand übergegangen ist.

Um einen Eindruck vom Ausmaß des für die Strömung versperrten Hohlvolumens zu erhalten, sei nochmals auf *Bild 8.21* verwiesen. Die für $n = 1$ gezeichnete

Tabelle 8.3: Angaben über die untersuchten Raschigringschichten

Nenndurchmesser und Zeichen in Bild 8.22		d_a (mm)	d_i (mm)	h_p (mm)	ε_r	$E^{1,9}$	d_{pr} (mm)	ε	d_a/d_s
5	△	5,60	2,80	5,76	0,250	0,385	2,18	0,545	0,0160
8	○	8,33	5,64	8,38	0,458	0,192	1,60	0,621	0,0238
8	●	8,30	5,68	8,26	0,468	0,185	1,35	0,635	0,0237
16	△	17,14	12,19	15,63	0,505	0,162	2,78	0,657	0,0490
16	▲	16,71	12,05	15,44	0,517	0,152	2,34	0,685	0,0477
16	■	16,82	12,53	16,59	0,555	0,132	2,22	0,677	0,0481
25	□	28,17	20,34	25,69	0,522	0,150	3,73	0,717	0,0802

Es bedeuten d_a den äußeren und d_i den inneren Ringdurchmesser, h_p die Höhe der Raschigringe, ε_r das relative Hohlvolumen nach Gl.(8.3), $E^{1,9}$ die Hohlvolumenfunktion nach Gl.(8.56), d_{pr} den rechnerischen Raschigringdurchmesser nach Gl. (8.55), ε den mittleren Lückengrad der Raschigringschichten und d_a/d_s das Verhältnis von äußerem Ringdurchmesser zu Säulendurchmesser.

Es handelte sich in allen Fällen um Raschigringe aus Steinzeug.

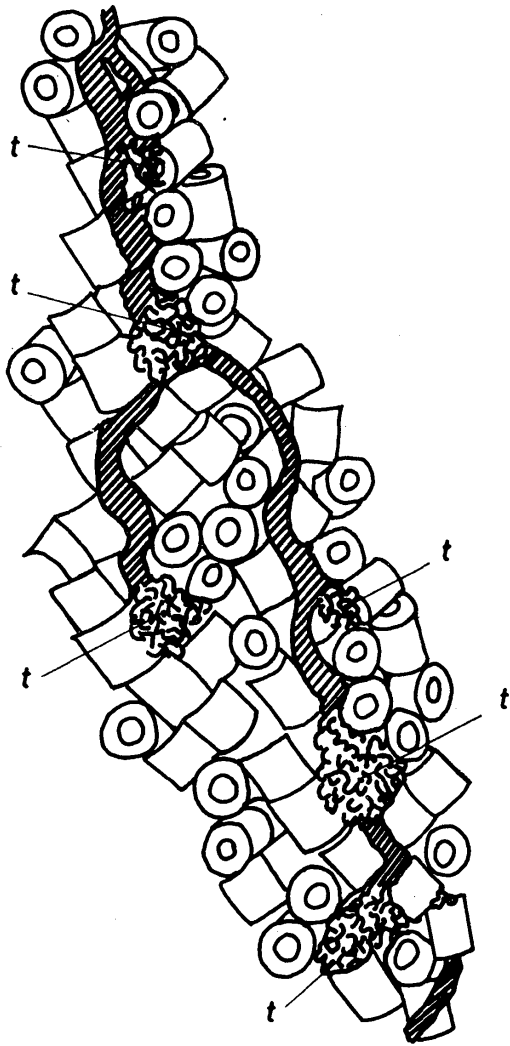


Bild 8.23

Skizze vom Verlauf eines angefärbten Stromfadens in einer Raschigringschicht, angefertigt nach photographischen Aufnahmen
 t Hinweis auf turbulente Gebiete

Kurve gilt für den Fall, daß das gesamte Hohlvolumen der Raschigringe für die Strömung des Fluids durch die Füllkörperschicht verfügbar ist. Im Gegensatz dazu berücksichtigt die für $n = 1,9$ angegebene Kurve einen für die Durchströmung versperrten Anteil des Hohlvolumens. Somit darf also die für $E^{1,9}/E^1 = E^{0,9}$ ermittelte Kurve als Maß für das der Strömung versperrte Hohlvolumen der Ringe angesehen werden. Bemerkenswert ist, daß der Strömung ein um so kleinerer Anteil des Hohlvolumens zur Verfügung steht, je größer die Raschigringe sind. In strömungstechnischer Hinsicht lassen sich also die großen Raschigringe in wesentlich stärkerem

Maße und auch leichter verbessern als die kleinen. Der aus dem Raschigring entwickelte Pallring stellt eine solche Verbesserung dar.

8.414 Widerstandsgesetz für Schichten aus anderen Füllkörpern

Für Schichten aus Berlsätteln, Intaloxsätteln und Pallringen hat KAST [8.60] mit Hilfe eigener und fremder [8.21 und 8.59] Versuchsergebnisse ein Widerstandsgesetz aufgestellt, das in der hier verwendeten Schreibweise folgendermaßen lautet:

$$\psi = \frac{160 \mu}{Re} + \frac{4,5 \mu}{Re^{0,1}} \quad (8.57)$$

Die Widerstandszahl ψ und die Reynoldszahl Re sind durch die Gleichungen (8.31) und (8.34) definiert. Ferner ist der in diesen Kennzahlen verwendete Partikeldurchmesser d_p nach Gl. (8.22) zu berechnen.

Mit μ wird eine für jeden Füllkörper spezifische Konstante bezeichnet, die aus Druckverlustmessungen zu ermitteln ist. Zusammen mit anderen Angaben über Schichten aus verschiedenen Füllkörpern sind die Werte für μ in *Tabelle 8.4* zusammengestellt. Hierin sind auch Werte für Raschigringe enthalten. Man kann also, was ausdrücklich betont wird, den Widerstand von Raschigringen ebenfalls mittels Gl. (8.57) berechnen. Zu beachten ist dabei jedoch, daß der rechnerische

Partikeldurchmesser nach Gl.(8.22) und nicht, wie in Abschnitt 8.413 ausgeführt wurde, nach Gl.(8.55) bestimmt werden muß. Mit Gl.(8.57) steht ein Widerstandsgesetz mit großer praktischer Anwendbarkeit zur Verfügung.

Tabelle 8.4:

Werte der Füllkörperkonstanten μ für verschiedene Füllkörper aus Steinzeug

Füllkörper	Nennmaße (mm)	ε	d_p/d_s	μ	Experimentatoren
Bersättel	50 × 50	0,725	0,100	0,878	KAST [8.60]
	35 × 35	0,705	0,070	0,811	KAST
	35 × 35	0,750	0,121	0,878	TEUTSCH [8.21]
	25 × 25	0,750	0,083	0,811	MACH [8.59]
	15 × 15	0,758	0,050	0,878	MACH
Intaloxsättel	50 × 50	0,780	0,100	0,923	KAST [8.60]
	35 × 35	0,740	0,070	0,878	KAST
	35 × 35	0,760	0,121	0,855	TEUTSCH [8.21]
	35 × 35 ⁺	0,978	0,121	0,923	TEUTSCH
	25 × 25	0,732	0,086	0,811	TEUTSCH
Pallringe	50 × 55 × 5	0,770	0,100	0,990	KAST [8.60]
	35 × 35 × 4	0,755	0,070	1,125	KAST
	35	0,773	0,121	0,946	TEUTSCH [8.21]
	35 ⁺	0,950	0,121	0,855	TEUTSCH
	25	0,742	0,086	0,788	TEUTSCH
Raschigringe	50 × 55 × 5	0,770	0,100	1,507	KAST [8.60]
	35 × 35 × 4	0,755	0,070	1,620	KAST
	35	0,773	0,121	1,440	TEUTSCH [8.21]
	30	0,755	0,103	1,395	TEUTSCH
	25	0,705	0,083	1,395	MACH [8.59]
	15	0,690	0,050	1,620	MACH
	15	0,657	0,049	1,395	BRAUER [8.56]
8	0,728	0,027	2,295	MACH [8.59]	

Es bedeuten ε Lückengrad, d_p Partikeldurchmesser nach Gl.(8.22), d_s Säulendurchmesser und μ Füllkörperkonstante. Die mit einem + gekennzeichneten Abmessungen gelten für metallische Füllkörper.

Aus *Tabelle 8.4* geht hervor, daß sich die Füllkörperkonstante μ bei gegebener Füllkörperform nur wenig mit der Füllkörpergröße ändert. KAST schlug daher für jede Füllkörperform einen festen Mittelwert vor:

$\mu = 0,855$	für Bersättel,
$\mu = 0,855$	für Intaloxsättel,
$\mu = 1,080$	für Pallringe,
$\mu = 1,575$	für Raschigringe.

Man muß natürlich im Auge behalten, daß μ immer dann eine Funktion der Füllkörpergröße ist, wenn Füllkörper verschiedener Größe nicht geometrisch ähnlich sind. Dies liegt nach den Erörterungen im vorangegangenen Abschnitt nahe und kommt in *Tabelle 8.4* für Raschigringe besonders deutlich zum Ausdruck.

Im Bereich der laminaren Strömung, für den nur das erste Glied auf der rechten Seite von Gl. (8.57) zu benutzen ist, besteht völlige Übereinstimmung mit dem Widerstandsgesetz für Kugeln nach Gl. (8.50), so man $\mu = 1$ setzt. Daraus ergibt sich, daß die Füllkörperkonstante μ das von Kugeln abweichende Verhalten der Füllkörper innerhalb einer durchströmten Schicht zum Ausdruck bringt.

8.415 Einfluß einer fehlerhaften Angabe des Lückengrades auf die Berechnung des Druckverlustes

Bei der Vorausberechnung des Druckverlustes in Füllkörperschichten mit einem der mitgeteilten Widerstandsgesetze wird man immer eine gewisse Unsicherheit in Kauf nehmen müssen, die vornehmlich darauf zurückzuführen ist, daß man den Lückengrad ε nur mit begrenzter Genauigkeit voraussagen kann. Am Beispiel des Druckverlustes in Raschigringschichten soll der Einfluß einer fehlerhaften Angabe des Lückengrades untersucht werden [8.56]. Aus Gl. (8.54) erhält man für den Druckverlust die Beziehung:

$$\frac{\Delta P}{h} = 150 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\eta \bar{w}}{d_p^2} + 1,75 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\rho \bar{w}^2}{d_p}. \quad (8.58)$$

Es wird angenommen, daß sich die Stoffwerte und die Geschwindigkeit des Fluids sowie der Partikeldurchmesser d_p fehlerfrei angeben lassen. Fehlerbehaftet soll allein der Lückengrad sein.

In den nachfolgenden Ausführungen bedeuten $p(\varepsilon)$ und $p(\Delta P/h)$ die prozentualen Fehler des Lückengrades und des Druckverlustes sowie $m(\Delta P/h)$ den mittleren Fehler des Druckverlustes. Für diesen erhält man mit den bekannten Methoden der Fehlerrechnung die Beziehung:

$$m(\Delta P/h) = p(\varepsilon) \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^6} \sqrt{\left[\frac{1,5}{Re} \frac{3\varepsilon^3 - \varepsilon^4}{(1-\varepsilon)^2} \right]^2 + \left[1,75 \cdot 10^{-2} \frac{3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4}{(1-\varepsilon)^2} \right]^2} \frac{\rho \bar{w}^2}{d_p}. \quad (8.59)$$

Hiermit folgt der gesuchte prozentuale Fehler zu

$$p(\Delta P/h) = 100 \frac{m(\Delta P/h)}{\Delta P/h}. \quad (8.60)$$

Zur Auswertung dieser Gleichung wird angenommen, daß der prozentuale Fehler des Lückengrades $p(\varepsilon) = \pm 3\%$ beträgt.

In *Bild 8.24* ist der nach Gl. (8.60) berechnete prozentuale Fehler für den Druckverlust in zwei Schichten aus Raschigringen dargestellt. Der äußere Durchmesser der Ringe ist 5 mm oder 25 mm, und der Lückengrad der Schichten beträgt 0,545 oder 0,719. Da sich der prozentuale Fehler des Druckverlustes $p(\Delta P/h)$ linear

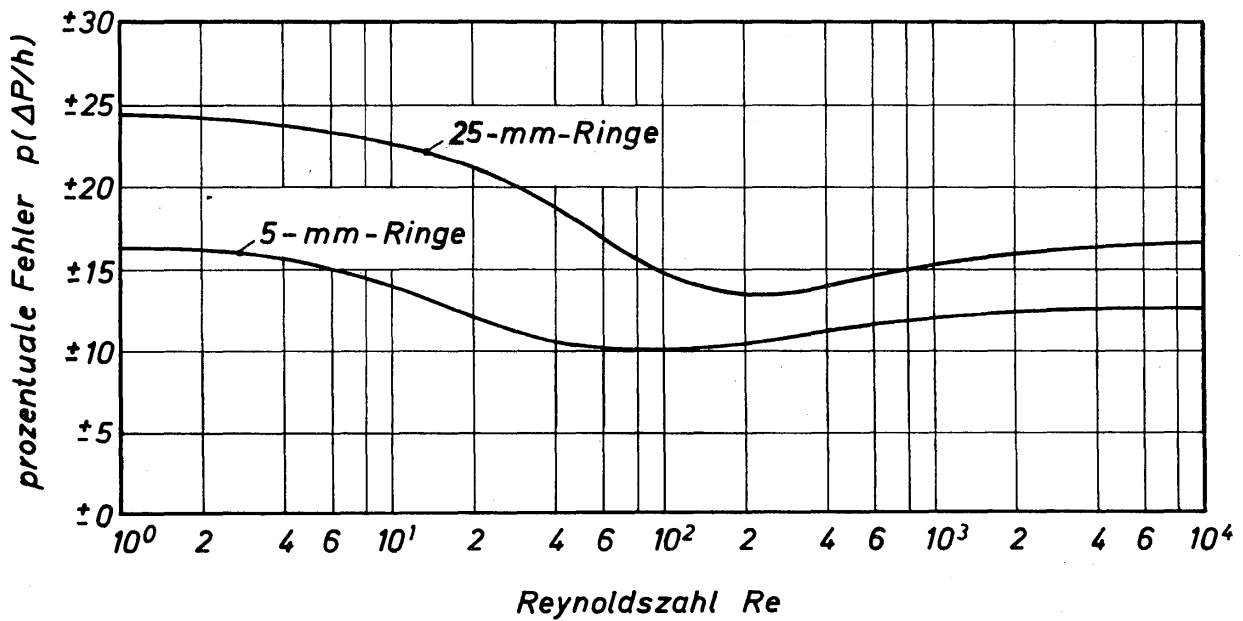


Bild 8.24. Prozentuale Fehler für den Druckverlust in Raschigringschichten bei $p(\varepsilon) = \pm 3\%$. Ringdurchmesser 5 mm und 25 mm; Lückengrade der Schichten 0,545 und 0,719

mit $p(\varepsilon)$ ändert, kann er leicht für beliebige andere Fehlerwerte von ε umgerechnet werden.

Bei sehr kleinen und sehr großen Werten der Reynoldszahl, bei denen die Strömung rein laminar oder voll turbulent ist, wird der Druckverlustfehler unabhängig von Re . Dabei ist jedoch der Fehler im laminaren Bereich größer als im turbulenten. Innerhalb des Übergangsbereichs bei $Re = 100$ bis 200 tritt ein schwach ausgeprägtes Minimum auf. Der Fehler wird mit zunehmendem Lückengrad, d. h. auch mit zunehmenden Abmessungen der Raschigringe größer. Für die 5-mm-Ringe beträgt er im Mittel etwa $\pm 13\%$ und für die 25-mm-Ringe etwa $\pm 20\%$.

Da die Fehlerkurven nicht sehr stark von der Reynoldszahl abhängen, läßt sich der Fehler bereits recht gut über-

blicken, wenn man nur die konstanten Grenzwerte im laminaren und turbulenten Bereich kennt. Hierfür erhält man aus Gl. (8.60) mit Gl. (8.58) folgende einfache Formeln:

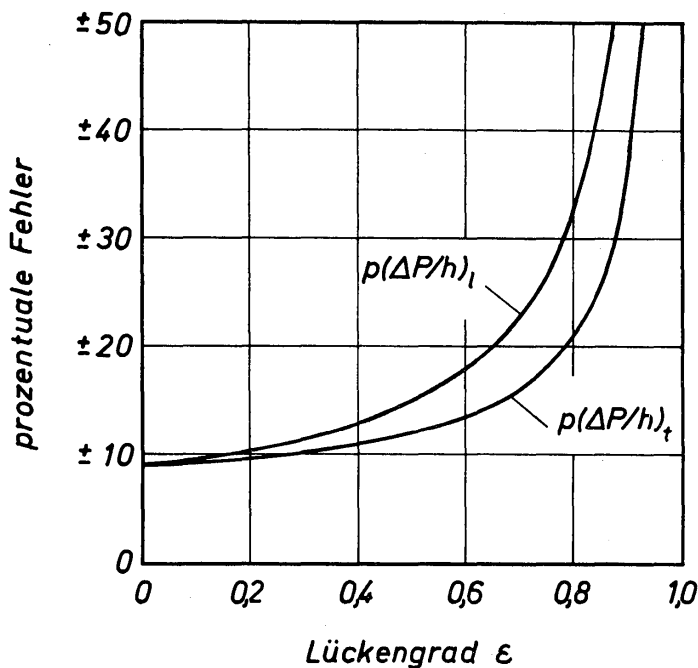


Bild 8.25. Prozentuale Fehler für den Druckverlust in Grenzbereichen der laminaren und turbulenten Strömung nach den Gleichungen (8.61) und (8.62); $p(\varepsilon)$ wurde zu $\pm 3\%$ angenommen

$$p(\Delta P/h)_i = p(\varepsilon) \frac{3-\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \text{für } Re \rightarrow 0, \tag{8.61}$$

$$p(\Delta P/h)_i = p(\varepsilon) \frac{3-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \text{für } Re \rightarrow \infty. \tag{8.62}$$

Der Verlauf dieser Funktionen ist in *Bild 8.25* über dem Lückengrad ε dargestellt. Es zeigt sich, daß der Fehler mit zunehmendem Lückengrad sehr stark ansteigt. Hierauf ist zu achten, wenn der Druckverlust in sehr porösen Schichten berechnet werden soll.

8.42 Widerstandsgesetze für Mehrkornschichten

8.421 Widerstandsgesetze für Kugel- und Granulatschichten

Merkornschichten bestehen aus Körnern gleicher Form, aber unterschiedlicher Korngröße. Für Kugelschichten, in denen bis zu vier verschiedene Kugelgrößen enthalten waren, hat JESCHAR [8.17] auf der Grundlage umfangreicher Messungen das folgende Widerstandsgesetz aufgestellt:

$$\psi_m = \left(\frac{160}{Re_m} + \frac{3,1}{Re_m^{0,1}} \right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75}. \tag{8.63}$$

Hierin bedeuten ψ_m und Re_m die für Mehrkornschichten geltende Widerstandszahl und Reynoldszahl, für die man die Definitionsgleichungen (8.31) und (8.34) verwenden kann, so ε durch ε_m und d_p durch d_{pm} gemäß Gl.(8.27) ersetzt werden. Mit ε und ε_m sind die Lückengrade der Gleichkorn- und der Mehrkornschicht bezeichnet.

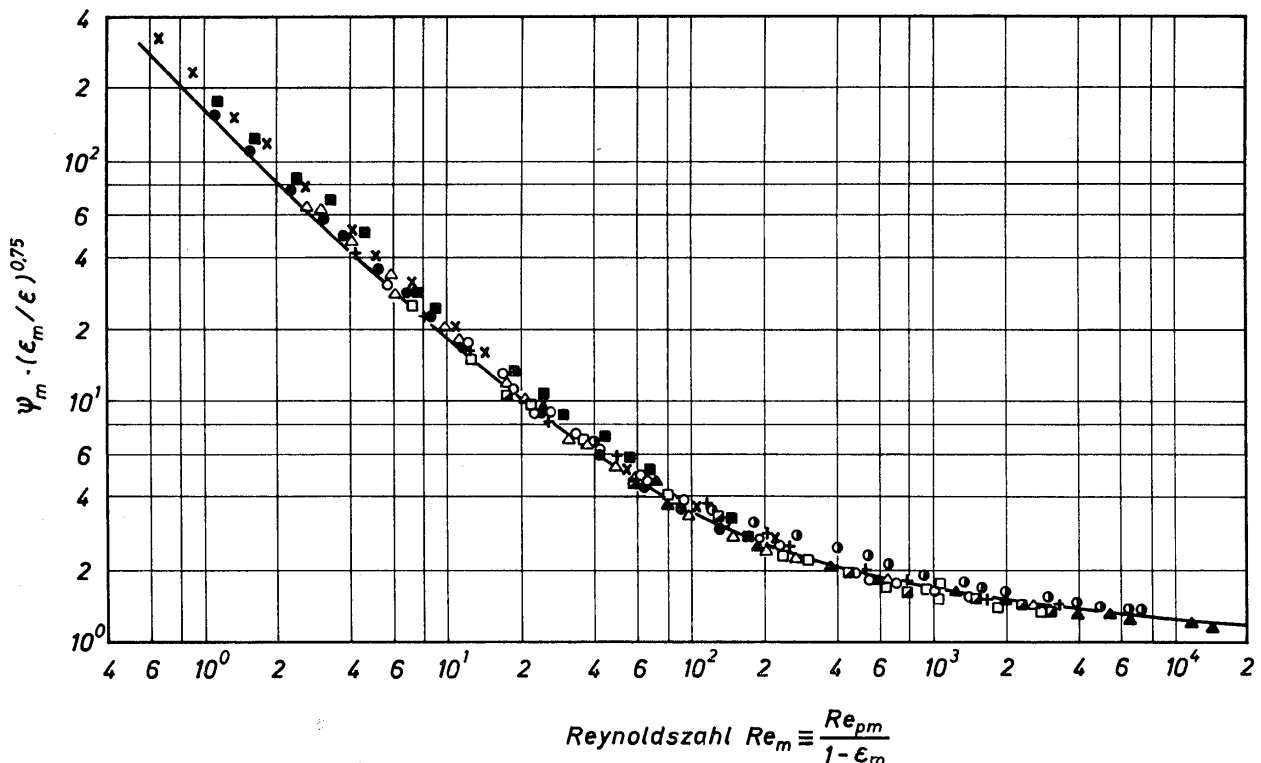


Bild 8.26. Widerstandsgesetz für Mehrkornschichten aus Kugeln; ausgezogene Kurve nach Gl.(8.63), Meßwerte für die in Tabelle 8.5 angegebenen Versuchsbedingungen

Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite von Gl.(8.63) stimmt formal mit dem Widerstandsgesetz für Gleichkornschichten aus Kugeln nach Gl.(8.49) überein. Als zusätzlicher Ausdruck tritt das Lückengradverhältnis $\varepsilon/\varepsilon_m$ auf. Da $\varepsilon/\varepsilon_m$ stets größer als 1 ist, ist auch die Widerstandszahl für Mehrkornschichten stets größer als die für Gleichkornschichten.

In *Bild 8.26* ist Gl.(8.63), dargestellt durch die ausgezogene Kurve, mit Meßwerten verglichen. Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Die verwendeten Zeichen dienen zur Unterscheidung der Ergebnisse von 10 Versuchsreihen, 9 mit Zweikornschichten und 1 mit einer Vierkornschicht. Dazu sind in *Tabelle 8.5* nähere Angaben gemacht. Das Durchmesserverhältnis und das Volumverhältnis wurden in weiten Bereichen variiert. Der Lückengrad änderte sich von 0,195 bis 0,372.

Tabelle 8.5: Angaben zu den Versuchen von JESCHAR [8.17] mit Mehrkornschichten aus Kugeln

Zeichen in Bild 8.26	d_{p_i} (mm)	V_{p_i}/V_p	d_{p_m} (mm)	h_m (mm)	ε_m																																																																								
△	9,9	0,50	13,2	753	0,362																																																																								
	19,9	0,50				▲	33,6	0,51	46,9	1000	0,372	80,4	0,49	+	9,9	0,36	22,6	1000	0,263	80,4	0,64	□	9,9	0,26	28,2	993	0,236	80,4	0,74	○	9,9	0,65	14,3	1000	0,319	80,4	0,35	◐	19,9	0,31	41,5	1000	0,312	80,4	0,69	×	2,1	0,65	3,2	493	0,313	33,6	0,35	■	2,1	0,28	6,6	500	0,202	33,6	0,72	●	2,1	0,31	6,5	500	0,195	80,4	0,69	◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303	19,9	0,26
▲	33,6	0,51	46,9	1000	0,372																																																																								
	80,4	0,49				+	9,9	0,36	22,6	1000	0,263	80,4	0,64	□	9,9	0,26	28,2	993	0,236	80,4	0,74	○	9,9	0,65	14,3	1000	0,319	80,4	0,35	◐	19,9	0,31	41,5	1000	0,312	80,4	0,69	×	2,1	0,65	3,2	493	0,313	33,6	0,35	■	2,1	0,28	6,6	500	0,202	33,6	0,72	●	2,1	0,31	6,5	500	0,195	80,4	0,69	◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303	19,9	0,26		33,6	0,24				80,4	0,26
+	9,9	0,36	22,6	1000	0,263																																																																								
	80,4	0,64				□	9,9	0,26	28,2	993	0,236	80,4	0,74	○	9,9	0,65	14,3	1000	0,319	80,4	0,35	◐	19,9	0,31	41,5	1000	0,312	80,4	0,69	×	2,1	0,65	3,2	493	0,313	33,6	0,35	■	2,1	0,28	6,6	500	0,202	33,6	0,72	●	2,1	0,31	6,5	500	0,195	80,4	0,69	◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303	19,9	0,26		33,6	0,24				80,4	0,26								
□	9,9	0,26	28,2	993	0,236																																																																								
	80,4	0,74				○	9,9	0,65	14,3	1000	0,319	80,4	0,35	◐	19,9	0,31	41,5	1000	0,312	80,4	0,69	×	2,1	0,65	3,2	493	0,313	33,6	0,35	■	2,1	0,28	6,6	500	0,202	33,6	0,72	●	2,1	0,31	6,5	500	0,195	80,4	0,69	◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303	19,9	0,26		33,6	0,24				80,4	0,26																
○	9,9	0,65	14,3	1000	0,319																																																																								
	80,4	0,35				◐	19,9	0,31	41,5	1000	0,312	80,4	0,69	×	2,1	0,65	3,2	493	0,313	33,6	0,35	■	2,1	0,28	6,6	500	0,202	33,6	0,72	●	2,1	0,31	6,5	500	0,195	80,4	0,69	◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303	19,9	0,26		33,6	0,24				80,4	0,26																								
◐	19,9	0,31	41,5	1000	0,312																																																																								
	80,4	0,69				×	2,1	0,65	3,2	493	0,313	33,6	0,35	■	2,1	0,28	6,6	500	0,202	33,6	0,72	●	2,1	0,31	6,5	500	0,195	80,4	0,69	◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303	19,9	0,26		33,6	0,24				80,4	0,26																																
×	2,1	0,65	3,2	493	0,313																																																																								
	33,6	0,35				■	2,1	0,28	6,6	500	0,202	33,6	0,72	●	2,1	0,31	6,5	500	0,195	80,4	0,69	◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303	19,9	0,26		33,6	0,24				80,4	0,26																																								
■	2,1	0,28	6,6	500	0,202																																																																								
	33,6	0,72				●	2,1	0,31	6,5	500	0,195	80,4	0,69	◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303	19,9	0,26		33,6	0,24				80,4	0,26																																																
●	2,1	0,31	6,5	500	0,195																																																																								
	80,4	0,69				◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303	19,9	0,26		33,6	0,24				80,4	0,26																																																								
◼	9,9	0,24	20,9	1000	0,303																																																																								
	19,9	0,26																																																																											
	33,6	0,24																																																																											
	80,4	0,26																																																																											

Es bedeuten d_{p_i} den Kugeldurchmesser der i -ten Fraktion, V_{p_i}/V_p das Volumverhältnis, d_{p_m} den mittleren Kugeldurchmesser nach Gl. (8.27), h_m die Schichthöhe und ε_m den Lückengrad der Mehrkornschicht.

Weitere Versuche zur Bestimmung des Widerstandes von Mehrkornschichten aus Kugeln haben BURKE und PLUMMER [8.53] durchgeführt. Hierbei lag der Lückengrad zwischen 0,325 und 0,303 und wich somit noch nicht sehr stark vom Wert für Gleichkornschichten ab. Eine Umrechnung der Ergebnisse ist wegen fehlender Angaben nicht möglich.

Der einfache und sinnvolle Aufbau des Widerstandsgesetzes für Mehrkornschichten aus Kugeln legt es nahe, für Mehrkornschichten aus Granulaten ein ähnliches Gesetz zu formulieren. Dazu wird das Widerstandsgesetz für Einkornschüttungen aus Granulaten von ERGUN gemäß Gl.(8.54) der Gl.(8.63) entsprechend verändert. So ergibt sich für Mehrkornschichten aus Granulaten das folgende Widerstandsgesetz:

$$\psi_m = \left(\frac{150}{Re_m} + 1,75 \right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75}. \tag{8.64}$$

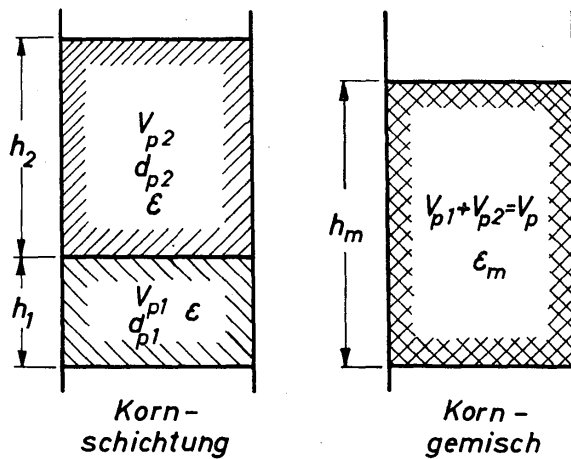
Versuche zur Bestimmung des Widerstandes von Mehrkornschichten aus Granulaten haben BARTH und ESSER [8.51] sowie GARDNER [8.61] durchgeführt. Die Versuchswerte lassen sich wegen fehlender Angaben nicht umrechnen und daher auch nicht mit Gl.(8.64) vergleichen. Aus den Meßwerten von BARTH und ESSER kann man jedoch erkennen, daß die Widerstandszahl im Bereich hoher Reynoldszahlen einen konstanten Wert annimmt und somit zumindest eine qualitative Übereinstimmung mit Gl.(8.64) vorliegt.

Mit den Gleichungen (8.63) und (8.64) sind die für die Praxis wichtigsten Widerstandsgesetze für Mehrkornschichten gegeben. Sie lassen sich auch für Schichten aus kugelähnlichen Körpern anwenden. Für den Widerstand von Mehrkornschichten aus landwirtschaftlichen Erntegütern sei auf die umfangreichen Untersuchungen von MATTHIES [8.62] verwiesen.

8.422 Vergleich zwischen den Druckverlusten in Gleich- und Mehrkornschichten

Da der Lückengrad einer Mehrkornschicht stets kleiner ist als der einer Gleichkornschicht, ist der Druckverlust beim Durchströmen einer Mehrkornschicht entsprechend größer als beim Durchströmen einer Gleichkornschicht. Um eine Vorstellung von der möglichen Größenordnung des Verhältnisses der Druckverluste zu erhalten, soll dies näher untersucht werden. Zur Durchführung der Rechnung erweist es sich als zweckmäßig, den Extremfall zu betrachten, für den das Durchmesserverhältnis $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$ ist. Hierfür ist der Lückengrad der Zweikornschicht durch die Gleichungen (8.16) und (8.18) gegeben. Für alle Werte des Volumverhältnisses V_{p_2}/V_p ergibt sich dann der größtmögliche Druckverlust.

An Hand von *Bild 8.27* soll zunächst der Aufbau der Füllkörperschichten erläutert werden. In einer Säule sind die zwei Füllkörpergrößen mit den Durchmessern d_{p_1} und d_{p_2} sowie den Volumina V_{p_1} und V_{p_2} in getrennten Schichten mit den Höhen h_1 und h_2 angeordnet. Jede Schicht ist eine Gleichkornschicht mit dem einheitlichen Lückengrad ε . Bei Gleichkornschichten verhalten sich die Schichthöhen wie die Volumina, da der Lückengrad ε nicht von der Korngröße abhängen



soll. Das gleiche Füllkörpervolumen $V_{p_1} + V_{p_2} = V_p$ ist in einer zweiten Säule als Kornmisch untergebracht. Diese Schicht hat die Höhe h_m und den Lückengrad ε_m .

Bild 8.27

Zur Erläuterung des Aufbaues von Gleichkorn- und Mehrkornschichten

Für die Höhe h einer Gleichkornschicht gilt mit F_s als Querschnittsfläche der Säule die Beziehung

$$h = \frac{V_p / F_s}{1 - \varepsilon} \quad (8.65)$$

Ersetzt man hierin ε durch den Lückengrad ε_m der Mehrkornschicht, dann läßt sich Gl.(8.65) auch auf Mehrkornschichten anwenden. Für das Verhältnis der Schichthöhen erhält man:

$$\frac{h_m}{h} = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon_m} \quad (8.66)$$

Mit den Gleichungen (8.16) und (8.18) für den Lückengrad ε_m bei $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$ wurde das Höhenverhältnis berechnet und in *Bild 8.28* für einige Werte von ε dargestellt. Das Höhenverhältnis wird um so kleiner, je größer der Lückengrad der Gleichkornschicht ist.

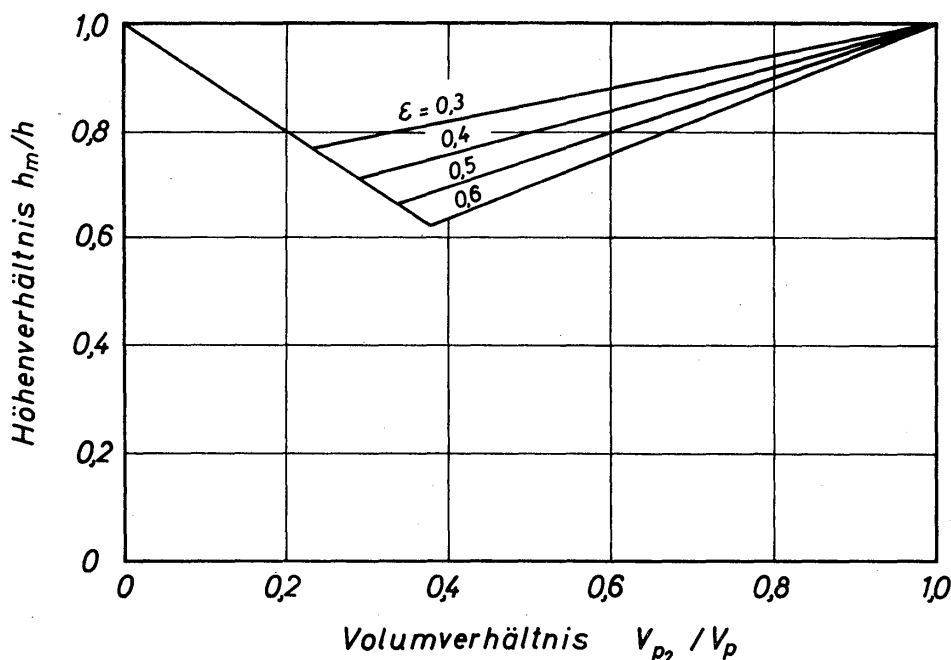


Bild 8.28. Abhängigkeit des Höhenverhältnisses h_m/h vom Volumverhältnis V_{p_2}/V_p für verschiedene Werte von ε

Für jede der beiden Füllkörpersäulen soll der Druckverlust ΔP berechnet werden, wobei das Gesamtvolumen V_p der Füllkörper unverändert bleibt; geändert wird nur das Verhältnis V_{p_2}/V_p . Zur Vereinfachung der Rechnung wird die Gültigkeit des Widerstandsgesetzes nach Gl. (8.64) angenommen. Ferner soll die Strömung vollturbulent sein, so daß die Widerstandszahl unabhängig von der Reynoldszahl ist.

Die Rechnungen werden zunächst für die beiden Gleichkornschichten durchgeführt. Mit $\psi = 1,75$ und Gl. (8.31) erhält man für den Druckverlust in der Gleichkornschicht 1 die Beziehung:

$$\frac{\Delta P_1}{\rho \bar{w}^2} = 1,75 \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{h_1}{d_{p_1}} \tag{8.67}$$

Führt man hierin für die Schichthöhe Gl. (8.65) ein, so ergibt sich für die Schicht 1:

$$\frac{\Delta P_1}{\rho \bar{w}^2} = 1,75 \frac{V_{p_1}/F_s}{\varepsilon^3 d_{p_1}} \tag{8.68}$$

Entsprechend gilt für die Schicht 2:

$$\frac{\Delta P_2}{\rho \bar{w}^2} = 1,75 \frac{V_{p_2}/F_s}{\varepsilon^3 d_{p_2}} \tag{8.69}$$

Den gesamten Druckverlust beider Gleichkornschichten erhält man durch Addition zu $\Delta P_{12} = \Delta P_1 + \Delta P_2$. Der größte Druckverlust, der mit ΔP_{2max} bezeichnet werden soll, ergibt sich dann, wenn $V_p = V_{p_2}$ ist. Bezieht man ΔP_{12} auf ΔP_{2max} , so erhält man die Beziehung:

$$\frac{\Delta P_{12}}{\Delta P_{2max}} = \frac{V_{p_2}}{V_p} + \left(1 - \frac{V_{p_2}}{V_p}\right) \frac{d_{p_2}}{d_{p_1}} \tag{8.70}$$

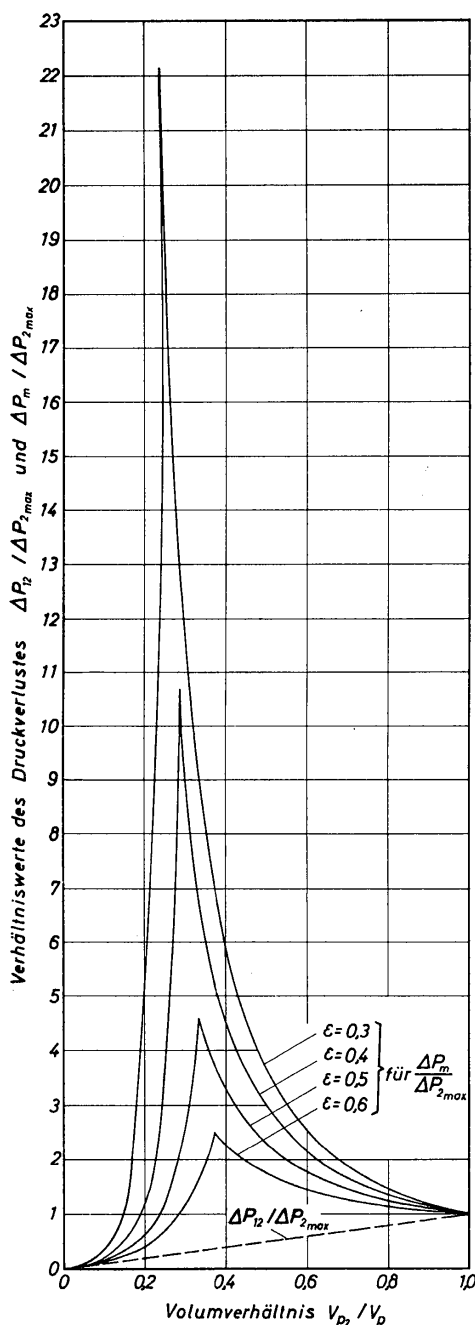


Bild 8.29
Druckverlustverhältnisse für Gleichkorn- und Zweikornschichten, abhängig vom Volumverhältnis V_{p_2}/V_p bei verschiedenen Werten des Lückengrades ε der Gleichkornschichten

Für $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$ ist Gl. (8.70) in Bild 8.29 durch die gestrichelte Gerade dargestellt.

Zur Berechnung des Druckverlustes im Korngemisch geht man vom Widerstandsgesetz für vollturbulente Strömung,

$$\psi_m = 1,75 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75} \quad (8.71)$$

aus und erhält unter Berücksichtigung von Gl.(8.31) für die Widerstandszahl und Gl.(8.27) für den mittleren Korndurchmesser d_{p_m} die folgende Beziehung:

$$\frac{\Delta P_m}{\rho \bar{w}^2} = 1,75 \frac{V_p/F_s}{\varepsilon_m^3} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75} \left[\frac{V_{p_2}}{V_p} \frac{1}{d_{p_2}} + \left(1 - \frac{V_{p_2}}{V_p} \right) \frac{1}{d_{p_1}} \right]. \quad (8.72)$$

Wird ΔP_m auf $\Delta P_{2_{\max}}$ bezogen, dann ergibt sich:

$$\frac{\Delta P_m}{\Delta P_{2_{\max}}} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{3,75} \left[\frac{V_{p_2}}{V_p} + \left(1 - \frac{V_{p_2}}{V_p} \right) \frac{d_{p_2}}{d_{p_1}} \right]. \quad (8.73)$$

Zur Auswertung dieser Gleichung wurden für ε Werte zwischen 0,3 und 0,6 verwendet und für ε_m die Gleichungen (8.16) und (8.18); die Gleichungen für ε_m gelten nur für den Grenzfall $d_{p_2}/d_{p_1} = 0$, der hier behandelt wird. Das damit berechnete Druckverlustverhältnis $\Delta P_m/\Delta P_{2_{\max}}$ ist also das größtmögliche. Die in der Praxis auftretenden Verhältniswerte sind immer kleiner.

Die nach Gl.(8.73) berechneten Druckverlustverhältnisse sind in *Bild 8.29*, abhängig vom Volumverhältnis V_{p_2}/V_p , für mehrere Werte von ε dargestellt. Mit zunehmendem Volumverhältnis steigt das Druckverlustverhältnis sehr steil an, erreicht bei $V_{p_2}/V_p = \varepsilon/(1+\varepsilon)$ gemäß Gl.(8.19) die Spitze und fällt dann wieder bis auf den Wert 1 ab. Obgleich die berechneten Kurven die größtmöglichen Werte für $\Delta P_m/\Delta P_{2_{\max}}$ angeben, kann man aus dem Vergleich der ausgezogenen Kurven mit der gestrichelten den für praktische Verhältnisse wichtigen Schluß ziehen, daß Korngemische wegen des großen Druckverlustes immer dann in Gleichkornschichten zerlegt werden sollten, wenn es möglich und zulässig ist.

8.43 Widerstandsgesetze für Drahtgewebesichten

Drahtgewebesichten können in regenerativen Wärmeaustauschern als Speichermassen verwendet werden. Wegen ihrer großen Oberfläche je Volumeinheit und sonstiger günstiger Eigenschaften in wärme-, strömungs- und verarbeitungstechnischer Hinsicht ermöglichen sie insbesondere den Bau sehr kompakter Wärmeaustauscher. Umfangreiche strömungstechnische Untersuchungen an Drahtgeweben hat BLASS [8.63] durchgeführt.

Die am häufigsten hergestellten Gewebearten sind Siebgewebe und Tressengewebe, deren Aufbau aus den *Bildern 8.30 a* und *b* hervorgeht. Bei Siebgeweben sind die Maschen nahezu quadratisch, so daß die Querteilungen s_k und s_s von Kett- und Schußdrähten fast übereinstimmen. Infolgedessen stimmen auch die Maschenzahlen je Längeneinheit $z_k = 1/s_k$ und $z_s = 1/s_s$ näherungsweise überein. Weiterhin sind auch die Durchmesser d_k und d_s von Kett- und Schußdrähten nahezu gleich. Geringfügige Abweichungen ergeben sich wegen der unterschied-

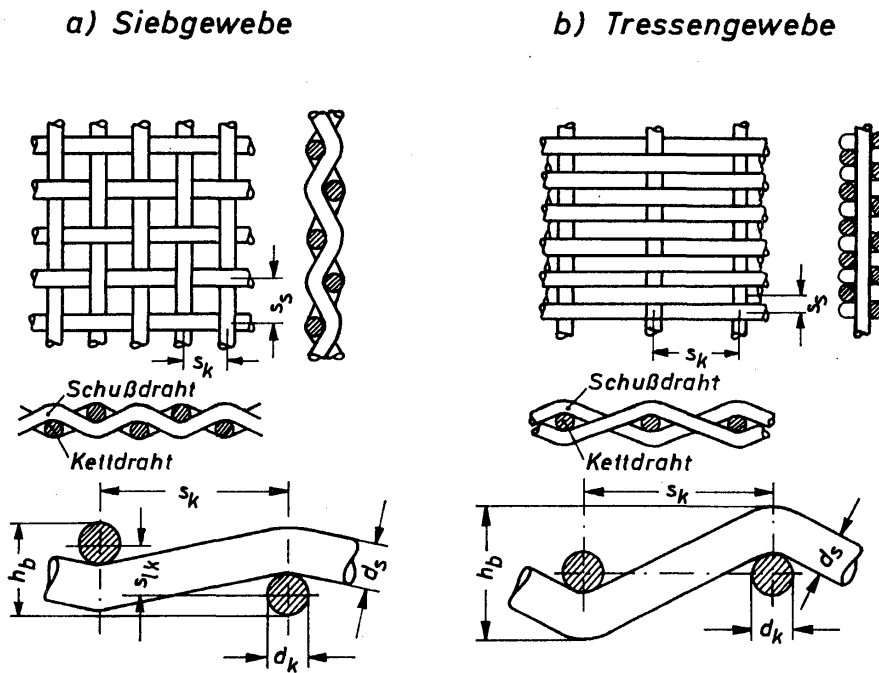


Bild 8.30. Aufbau von Sieb- und Tressengeweben und Bezeichnungen

lichen Dehnungen bei der Gewebeerstellung. Da die Kettdrähte stärker beansprucht werden, ist deren Durchmesser etwas geringer als der der Schußdrähte. Die Höhe $h_b = d_k + s_{lk}$ einer Gewebbahn ist im allgemeinen etwas größer als die Summe der Drahtdurchmesser, da der Mittelpunktabstand s_{lk} benachbarter Kettdrähte größer als d_k ist. Bei den handelsüblichen technischen Siebgeweben liegen die Drahtdurchmesser d_k und d_s zwischen 0,025 mm und 5 mm und die Querteilungen $s_k \approx s_s$ zwischen 0,1 mm und 20 mm. Der Lückengrad von Siebgeweben liegt zwischen 0,5 und 0,9. Für den Fall quadratischer Maschen und

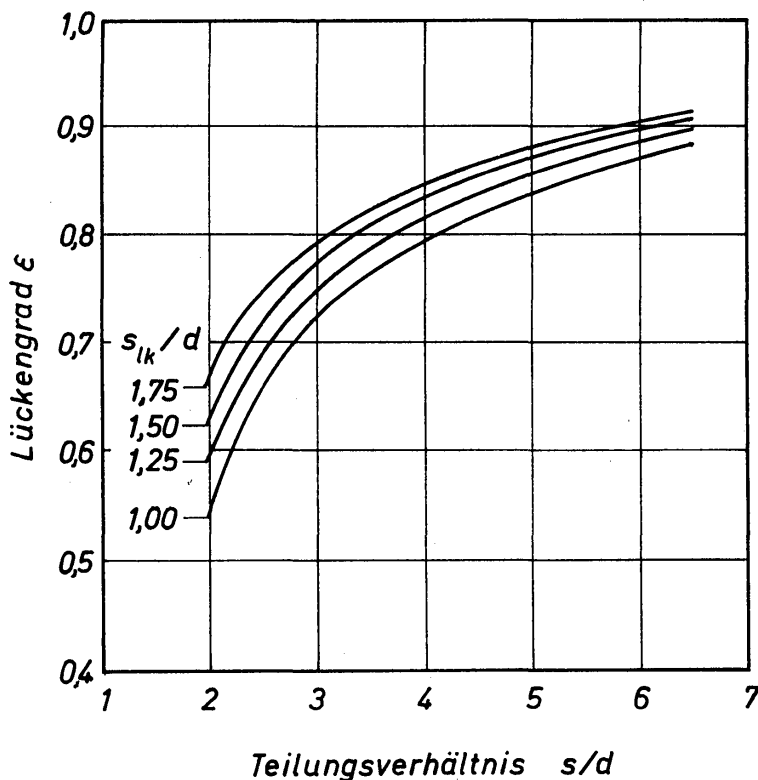


Bild 8.31. Lückengrad ϵ für idealisierte Siebgewebe, abhängig von den Teilungsverhältnissen $s/d = s_k/d_k = s_s/d_s$ und s_{lk}/d

gleich großer Durchmesser von Kett- und Schußdrähten läßt sich der Lückengrad einer Gewebbahn nach Angaben von BLASS aus *Bild 8.31* entnehmen. Für eine aus vielen Gewebbahnen bestehende Schicht muß ε experimentell bestimmt werden. Bezeichnet man mit V_b das von einer Gewebbahn eingenommene Volumen und mit A_d die Drahtoberfläche, so gilt für das Verhältnis A_d/V_b folgende Beziehung:

$$\frac{A_d}{V_b} = \frac{4}{d} (1 - \varepsilon). \quad (8.74)$$

Auch hierfür wurden quadratische Maschen und gleiche Drahtdurchmesser, $d_k = d_s = d$, vorausgesetzt. Wegen der sehr kleinen Drahtdurchmesser ergeben sich für A_d/V_b sehr große Werte.

Ein Tressengewebe in Leinenbindung ist in *Bild 8.30b* in schematischer Form dargestellt. Hierbei sind die Kettdrähte gerade und die Schußdrähte gewellt. Im allgemeinen haben die Kettdrähte einen größeren Durchmesser als die Schußdrähte. Die Querteilung s_s der Schußdrähte ist gleich dem Durchmesser d_s , während die Querteilung s_k der Kettdrähte stets ein Vielfaches des Durchmessers d_k ist. Die üblichen Drahtdurchmesser liegen zwischen 0,1 mm und 1,0 mm. Für den Lückengrad einer Gewebbahn leitete BLASS die Beziehung

$$\varepsilon = 1 - \frac{\frac{d_s}{s_s} G + \frac{2 (d_k/d_s)^2}{1 + d_k/d_s}}{\frac{4}{\pi} \frac{s_k}{d_k} \frac{h_b}{d_s}}. \quad (8.75)$$

und für die Oberfläche die Beziehung

$$\frac{A_d/V_b}{\frac{4}{d_k} (1 - \varepsilon)} = \frac{1 + \frac{d_s}{d_k} \frac{1 + d_k/d_s}{2 s_s/d_s} G}{1 + \left(\frac{d_s}{d_k}\right)^2 \frac{1 + d_k/d_s}{2 s_s/d_s} G} \quad (8.76)$$

her. Hierin ist zur Abkürzung

$$G = \sqrt{\left(\frac{s_k}{d_k}\right)^2 - 4} + 2 \arcsin \left(2 \frac{d_k}{s_k}\right) \quad (8.77)$$

gesetzt worden.

Aus umfangreichen experimentellen Untersuchungen hat BLASS empirische Widerstandsgesetze für Schichten aus Sieb- und Tressengeweben aufgestellt. Dabei sind die Widerstandszahl und Reynoldszahl wie folgt definiert:

$$\psi_g \equiv \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2} \frac{\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon s_k s_s}}{2 z_b h_b} \quad (8.78)$$

$$Re_g \equiv 4 \frac{V_b}{A_d} \frac{\bar{w}}{\nu}. \quad (8.79)$$

Neben den bereits bekannten Größen bedeutet z_b die Zahl übereinander liegender Gewebeschichten. Die Oberfläche je Volumeinheit A_d/V_b ist für Siebgewebe nach Gl.(8.74) und für Tressengewebe nach Gl.(8.76) zu berechnen. Mittels dieser Kennzahlen hat BLASS für Schichten aus Siebgewebe das Widerstandsgesetz

$$\psi_g = \frac{34}{Re_g} + \frac{0,9}{Re_g^{0,12}} \quad (8.80)$$

und für Schichten aus Tressengewebe das Widerstandsgesetz

$$\psi_g = \frac{33,5}{Re_g} + \frac{0,9}{Re_g^{0,10}} \quad (8.81)$$

aufgestellt. Die Zahl der zu einer Schicht zusammengefaßten Gewebeschichten lag bei den Versuchen zwischen $z_b = 5$ und $z_b = 50$. Die experimentelle Überprüfung erfolgte zwischen $Re_g = 1$ bis $Re_g = 1000$. Die Versuche ergaben ferner, daß die Packungsart der Gewebeschichten nur einen noch innerhalb der Versuchsgenauigkeit liegenden Einfluß auf die Größe der Widerstandszahl ausübt.

8.44 Widerstandsgesetze für geordnet aufgebaute Füllkörperschichten

Die bisher behandelten Füllkörperschichten sind dadurch gekennzeichnet, daß die Füllkörper eine ungeordnete Lage aufweisen, die beispielsweise durch einen Schüttvorgang zustande kommt. Im Gegensatz dazu sollen im folgenden Füllkörperschichten mit geordnetem Aufbau betrachtet werden. Die Anordnung der Füllkörper erfolgt dabei in einer Weise, daß sich strömungstechnisch wesentlich günstigere Kanalformen ergeben als in Schüttschichten mit ungeordneter Lage der Füllkörper. Der Druckverlust ist daher bei geordneter Lage erheblich niedriger als bei ungeordneter. Für Raschigringe beträgt der Druckverlust beispielsweise bei geordneter Lage nur etwa 1/11 desjenigen bei ungeordneter. Aus diesem Grunde kann der geordnete Aufbau von Füllkörperschichten von großer technischer Bedeutung sein.

8.441 Allgemeine Beschreibung

Einige Beispiele für Füllkörperschichten mit geordnetem Aufbau sind in *Bild 8.32* angegeben. Die Skizzen *a* und *b* stellen Schichten aus Stäben mit rechteckiger Querschnittsfläche dar. Die Stäbe sind so angeordnet, daß sich ein Kreuzgitter mit versetzter (*Bild 8.32a*) und fluchtender (*Bild 8.32b*) Lage der Stäbe ergibt. In den Skizzen *c* und *d* wird die Anordnung von Raschigringen ohne und mit Kreuzsteg gezeigt. Hierbei ist es grundsätzlich möglich, daß die Raschigringe als getrennte Einzelelemente erhalten bleiben oder daß mehrere Ringe ein Verbundelement darstellen. Die Herstellung der Verbundelemente ist zwar etwas schwieriger als die Herstellung der Einzelelemente, der Aufbau der geordneten Schicht vereinfacht sich jedoch bei Verwendung der Verbundelemente. Die konsequente Weiterentwicklung der Verbundelemente führt zu Wabenkörpern, von denen in *Bild 8.32e* ein Beispiel gezeigt ist.

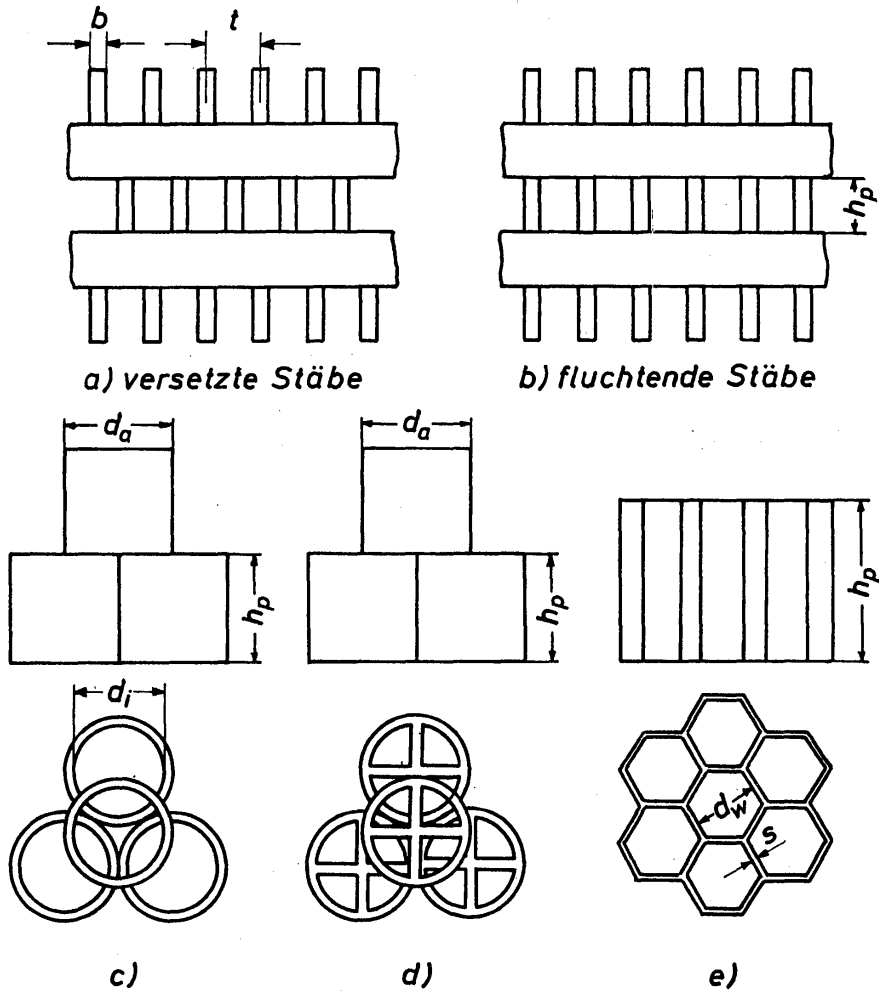


Bild 8.32. Form und Anordnung von Füllkörpern in geordneten Schichten; a) und b) versetzte und fluchtende Stabgitter, c) einfache Raschigringe, d) Raschigringe mit Steg und e) Wabenkörper

Die Höhe aller Füllkörper wird mit h_p bezeichnet. Die Breite der Stäbe ist b , und die Stabteilung ist t . Bei den Raschigringen ist d_a der äußere und d_i der innere Durchmesser. Die Ringhöhe h_p ist im allgemeinen gleich dem äußeren Durchmesser d_a . Mit d_w wird bei den Wabenfüllkörpern der Innendurchmesser des Sechsecks bezeichnet. Die Wanddicke der Waben ist s . Die Höhe h_p der Wabenfüllkörper kann grundsätzlich größer oder auch kleiner als der Innendurchmesser d_w sein; im allgemeinen ist h_p stets gleich oder größer als d_w .

8.442 Lückengrad und Oberfläche

Der Lückengrad ε ist gemäß Gl. (8.7) durch $1 - V_p/V_s$ definiert, wobei V_p das Volumen der Füllkörper und V_s das Volumen der Füllkörpersäule bedeuten. Für Füllkörperschichten aus Stabgittern mit fluchtender und versetzter Stabanordnung gemäß den Bildern 8.32 a und b gilt für den Lückengrad, so die Teilung t klein im Vergleich zu den Abmessungen des Säulenquerschnittes ist, die Beziehung

$$\varepsilon = 1 - \frac{b}{t} \quad (\text{Stabgitter}). \quad (8.82)$$

Berechnet man ferner das Verhältnis aus Staboberfläche A_p und Stabvolumen V_p , so erhält man

$$\frac{A_p}{V_p} = \frac{2}{b} \left(1 + \frac{b}{h_p} \right) \quad (\text{Stabgitter}). \quad (8.83)$$

Zur Beurteilung der im Schichtvolumen V_s enthaltenen Oberfläche bedient man sich des Verhältniswertes

$$\frac{A_p}{V_s} = (1 - \varepsilon) \frac{A_p}{V_p} = \frac{2}{t} \left(1 + \frac{b}{h_p} \right) \quad (\text{Stabgitter}). \quad (8.84)$$

Für Raschigringe ohne Steg gemäß *Bild 8.32c* gelten mit $d_a = h_p$ die folgenden Beziehungen:

$$\varepsilon = 1 - 0,906 (1 - \varepsilon_r) \quad (\text{Raschigringe}), \quad (8.85)$$

$$\frac{A_p}{V_p} = \frac{6}{d_a} \frac{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_r} - \frac{1}{3} \varepsilon_r}{1 - \varepsilon_r} \quad (\text{Raschigringe}), \quad (8.86)$$

$$\frac{A_p}{V_s} = \frac{5,436}{d_a} \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_r} - \frac{1}{3} \varepsilon_r \right) \quad (\text{Raschigringe}). \quad (8.87)$$

In den letzten Gleichungen bedeutet ε_r das relative Hohlvolumen eines Raschigringes, das gemäß Gl.(8.3) durch $(d_i/d_a)^2$ gegeben ist. Die entsprechenden Gleichungen für Wabenkörper gemäß *Bild 8.32e* lauten folgendermaßen:

$$\varepsilon = \frac{1}{(1 + s/d_w)^2} \quad (\text{Wabenkörper}), \quad (8.88)$$

$$\frac{A_p}{V_p} = \frac{4}{s} \frac{1}{(2 + s/d_w)} + \frac{2}{h_p} \quad (\text{Wabenkörper}), \quad (8.89)$$

$$\frac{A_p}{V_s} = \frac{4}{d_w} \frac{1}{(1 + s/d_w)^2} + \frac{2s}{h_p d_w} \frac{2 + s/d_w}{(1 + s/d_w)^2} \quad (\text{Wabenkörper}). \quad (8.90)$$

Für $s/d_w \ll 1$ darf in Gl.(8.90) der zweite Summand vernachlässigt werden.

Um eine Vorstellung von der Größenordnung des Lückengrades und der spezifischen Oberfläche zu erhalten, sind die mittels der obigen Gleichungen berechneten Werte für Raschigringe und Wabenkörper in *Tabelle 8.6* zusammengestellt worden. Dabei wurde angenommen, daß die Raschigringe die Abmessungen $d_a = 50$ mm, $d_i = 40$ mm und $h_p = 50$ mm und die Wabenkörper $d_w = 40$ mm und $s = 5$ mm haben. Die Abmessungen der beiden Füllkörperarten sind also vergleichbar. Bemerkenswert ist, daß für Wabenkörper der Lückengrad wesentlich größer ist als für Raschigringe. Der größere Lückengrad der Wabenkörperschichten führt zwangsläufig zu einem erheblich geringeren Druckverlust. Insofern sind die Wabenkörper den Raschigringen überlegen. Als Nachteil könnte jedoch die im Vergleich zu Raschigringschichten geringere bezogene Oberfläche A_p/V_s der Wabenkörper empfunden werden. Die theoretischen Werte für Raschigringe sind jedoch wesentlich größer als die praktisch wirksamen, da bei Raschig-

ringen mit der in *Bild 8.32c* gezeigten Anordnung ein großer Anteil der geometrischen Oberfläche, insbesondere der die Zwickel begrenzende, in Strömungstoträumen liegt und somit nicht voll wirksam ist. Demgegenüber wird bei Wabenkörpern die gesamte Oberfläche wirksam sein. Man darf also erwarten, daß sich die Wabenkörper bezüglich des Druckverlustes sowie der Wärme- und Stoffübertragung günstiger verhalten als die Raschigringe.

Tabelle 8.6: Theoretische Werte für den Lückengrad ε und die spezifischen Oberflächen A_p/V_p und A_p/V_s für geordnet aufgebaute Schichten aus Raschigringen und Wabenkörpern gemäß den *Bildern 8.32c* und *8.32e*

	ε (—)	A_p/V_p (m ² /m ³)	A_p/V_s (m ² /m ³)
Raschigringe	0,674	440	144
Wabenkörper	0,790	386	80

Die theoretisch berechneten Werte für den Lückengrad ergeben Minimalwerte. Die in der technischen Praxis gemessenen sind etwas größer. Nach Angaben von KOLEV [8.64] beträgt z. B. der Lückengrad von Schichten aus Raschigringen in der Anordnung gemäß *Bild 8.32c* 0,743. Dieser Wert ist um etwa 10% größer als der theoretisch berechnete. Bemerkenswert ist, daß der gemessene Wert $\varepsilon = 0,743$ nahezu mit demjenigen übereinstimmt, den man aus *Bild 8.9* für ungeordnete Raschigringschichten mit $d_a = 50$ mm entnimmt.

8.443 Widerstandsgesetz

Ein Widerstandsgesetz für Schichten aus den in *Bild 8.32* dargestellten Füllkörperarten und -anordnungen hat KOLEV [8.64] aufgestellt. Er verwendete dabei sowohl die Ergebnisse eigener Messungen als auch die von JOHNSTONE und SINGH [8.65]. Das Widerstandsgesetz lautet in nur wenig veränderter Schreibweise:

$$\psi = \left[\frac{167}{Re} + \frac{0,353}{Re^{0,1}} \right] \left(\frac{d_h}{h_p} \right)^{0,51} \varepsilon^{-3,42}. \quad (8.91)$$

Die Widerstandszahl ψ und die Reynoldszahl Re sind durch die Gleichungen (8.31) und (8.34) definiert. Die dabei verwendete Schreibweise für die Definitionsgleichung des Füllkörperdurchmessers d_p erweist sich jedoch für die in *Bild 8.32* dargestellten Füllkörperarten nicht als sehr zweckmäßig. Daher wird d_p durch $6 V_p/A_p$ ersetzt, und die Definitionsgleichungen erhalten die folgende Form:

$$\psi \equiv \frac{\varepsilon^3}{1 - \varepsilon} \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2} \frac{6 V_p/A_p}{h}, \quad (8.92)$$

$$Re \equiv \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{\bar{w} 6 V_p/A_p}{\nu}. \quad (8.93)$$

Es bedeuten ΔP Druckverlust, ρ Dichte und ν kinematische Viskosität des Fluids, h Höhe der Füllkörperschicht und \bar{w} Geschwindigkeit in der leer gedachten Säule. In Gl.(8.91) werden ferner mit h_p die Höhe der Füllkörper (siehe *Bild 8.32*) und mit $d_h = 4(V_p/A_p)\varepsilon/(1-\varepsilon) = 4\varepsilon V_s/A_p$ der hydraulische Durchmesser bezeichnet.

In *Bild 8.33* ist Gl.(8.91), dargestellt durch die ausgezogene Kurve, mit Meßwerten verglichen. Nähere Angaben über die Meßwerte enthält *Tabelle 8.7*.

Tabelle 8.7: Angaben zu den in *Bild 8.33* dargestellten Meßwerten

Nr.	Verfasser	Füllkörper in Bild 8.31	h_p (mm)	b (mm)	t (mm)	d_a, d_w (mm)	A_p/V_s (m ² /m ³)	ε	d_h (mm)	Symbol
1	[8.65]	a	25,4	6,35	23,15	—	108	0,725	26,9	⊖
2	[8.65]	b	25,4	6,35	23,15	—	108	0,725	26,9	⊕
3	[8.65]	a	50,8	6,35	23,15	—	101	0,725	28,8	●
4	[8.65]	b	50,8	6,35	23,15	—	101	0,725	28,8	⊙
5	[8.65]	a	101,6	6,35	23,15	—	91,7	0,725	31,6	⊕
6	[8.65]	b	101,6	6,35	23,15	—	91,7	0,725	31,6	●
7	[8.65]	a	203,2	6,35	23,15	—	89	0,725	32,6	⊙
8	[8.65]	b	203,2	6,35	23,15	—	89	0,725	32,6	⊗
9	[8.65]	b	101,6	6,35	38,05	—	59,7	0,834	56	⊖
10	[8.65]	b	203,2	6,35	38,05	—	54,4	0,834	61,1	●
11	[8.65]	a	101,6	6,35	50,75	—	42	0,975	83,3	●
12	[8.65]	b	101,6	6,35	50,75	—	42	0,875	83,3	⊖
13	[8.65]	b	305,0	6,35	38,05	—	53,7	0,834	62,2	●
14	[8.65]	b	406,4	6,35	38,05	—	53,5	0,834	62,3	●
15	[8.65]	b	203,2	6,35	50,75	—	40,7	0,875	86	⊕
16	[8.65]	a	203,2	6,35	50,75	—	40,7	0,875	86	⊕
17	[8.65]	a	305,0	6,35	50,75	—	40,4	0,785	86,5	⊕
18	[8.65]	b	305,0	6,35	50,75	—	40,4	0,875	86,5	⊕
19	[8.65]	b	406,4	6,35	50,75	—	40	0,875	87,5	●
20	[8.65]	b	101,6	6,35	63,45	—	33,4	0,9	108	⊕
21	[8.65]	a	406,4	6,35	50,75	—	40	0,875	87,5	⊕
22	[8.65]	b	203,2	6,35	63,45	—	32,5	0,9	111	⊕
23	[8.65]	b	305,0	6,35	63,45	—	32,1	0,9	112	○
24	[8.65]	b	406,4	6,35	63,45	—	32	0,9	113	●
25	[8.64]	c	52	—	—	50	117	0,743	25,4	◇
26	[8.64]	d	50	—	—	50	190	0,612	12,9	□
27	[8.64]	e	61	—	—	20	151	0,769	20,2	▽
28	[8.64]	e	7	—	—	20	159	0,769	20,0	△
29	[8.64]	e	99	—	—	30	105	0,775	28,8	◇

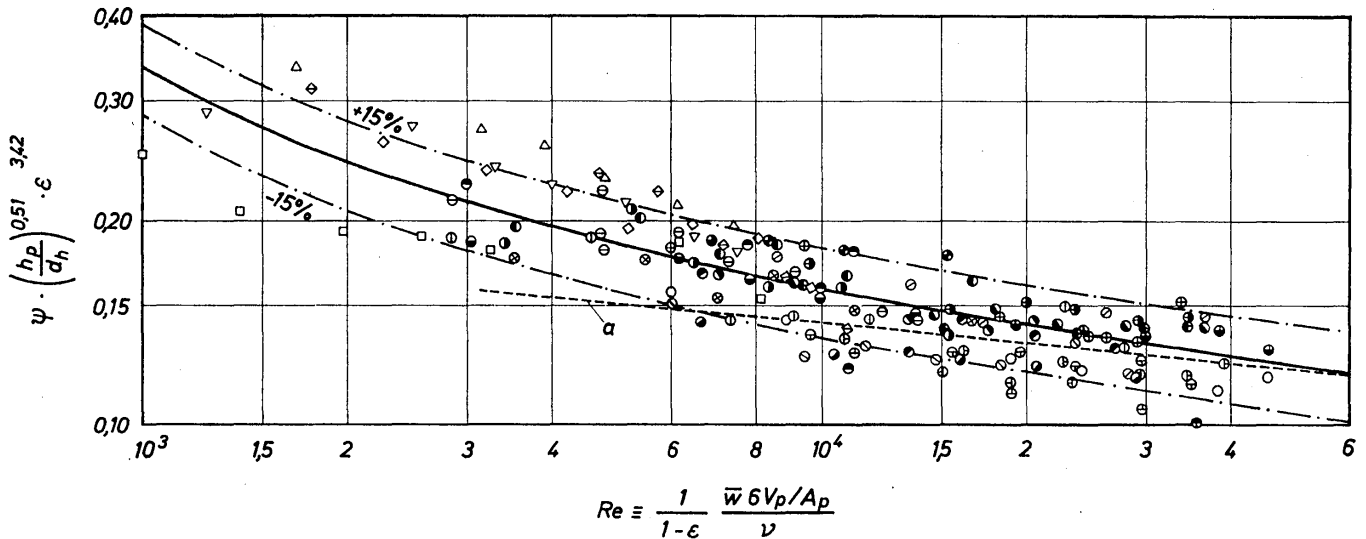


Bild 8.33. Widerstandsgesetz für geordnete Füllkörperschichten; ausgezogene Kurve nach Gl. (8.91), gestrichelte Kurve nach Gl. (8.94); nähere Angaben zu den Füllkörpern in Bild 8.32 und Tabelle 8.7

JOHNSTONE und SINGH führten die Versuche in einer Kolonne durch, die eine rechteckige Querschnittsfläche mit 238 mm und 400 mm Kantenlänge besaß; die Höhe der Füllkörperschichten betrug 1,24 m. Die Versuche von KOLEV [8.64] wurden in einer Kolonne mit Kreisquerschnitt durchgeführt, deren Durchmesser 500 mm betrug; die Füllkörperschichten hatten eine Höhe von 2,4 m.

Die mittlere Abweichung der Meßwerte von der nach Gl. (8.91) berechneten Kurve beträgt $\pm 11\%$. Etwa 80% aller Meßwerte liegt innerhalb eines Streustreifens von $\pm 15\%$. Die Grenzen dieses Streustreifens sind in *Bild 8.33* durch strichpunktierte Kurven angegeben. Die Streuung der Meßwerte ist teilweise auf unsichere Angaben über den Lückengrad ϵ zurückzuführen. Da JOHNSTONE und SINGH den Lückengrad der von ihnen untersuchten Schichten aus Stabgittern nicht mitteilten, wurde er nach Gl. (8.82) berechnet. Aus Gl. (8.91) ergibt sich, daß ein mit $\pm 3\%$ fehlerhafter Lückengrad zu einem Fehler von etwa $\pm 18\%$ für die Widerstandszahl führt.

Eine genauere Betrachtung von *Bild 8.33* zeigt, daß die Mehrzahl der Meßwerte für Stabgitterschichten gelten. Diese Meßwerte erstrecken sich über einen Bereich der Reynoldszahl von etwa $Re = 4 \cdot 10^3$ bis $5 \cdot 10^4$. Die Meßwerte für Schichten aus Raschigringen und Wabenkörpern liegen etwa im Bereich von $Re = 9 \cdot 10^2$ bis $9 \cdot 10^3$; sie weisen eine größere Streuung auf als die Meßwerte für Schichten aus Stabgittern. Weitere Messungen für Schichten aus Raschigringen und Wabenkörpern sind also sehr erwünscht. Das durch Gl. (8.91) ausgedrückte Widerstandsgesetz sollte nur innerhalb des experimentell untersuchten Bereiches angewendet werden. Eine Extrapolation, insbesondere in den Bereich niedrigerer Reynoldszahlen, ist zu vermeiden. Somit liegt der Anwendungsbereich von Gl. (8.91) im Gebiet hoher Reynoldszahlen.

In Richtung steigender Reynoldszahlen nähert sich das durch Gl. (8.91) ausgedrückte Widerstandsgesetz dem folgenden Grenzgesetz:

$$\psi = \frac{0,353}{Re^{0,1}} \left(\frac{d_h}{h_p} \right)^{0,51} \varepsilon^{-3,42}. \quad (8.94)$$

Es ist in *Bild 8.33* durch die gestrichelte Kurve *a* wiedergegeben. Dieses Grenzgesetz eignet sich besonders gut für einen Vergleich mit dem Widerstandsgesetz für ungeordnete Füllkörperschüttungen. Dafür gilt das aus Gl.(8.57) folgende Grenzgesetz:

$$\psi_u = \frac{4,5 \mu}{Re_u^{0,1}}. \quad (8.95)$$

Der Index *u* soll darauf hinweisen, daß Gl.(8.95) für ungeordnete Schüttungen gilt. Mit μ wird eine Füllkörperkonstante bezeichnet, die für Raschigringe den Wert 1,575 hat. Berechnet man aus den beiden letzten Gleichungen unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen für die Widerstands- und die Reynoldszahl die Druckverluste ΔP und ΔP_u und bildet deren Verhältnis, so erhält man die Beziehung

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_u} = \frac{0,716 \frac{(1-\varepsilon)^{0,59}}{\varepsilon^{5,91}} \frac{1}{h_p^{0,51}}}{0,709 \frac{(1-\varepsilon)^{1,1}}{\varepsilon^3} \left(\frac{A_p}{V_p} \right)^{0,51}}. \quad (8.96)$$

Wie im vorangegangenen Abschnitt 8.442 gezeigt wurde, stimmt der Lückengrad für geordnete und ungeordnete Schichten aus Raschigringen überein. Bei Schichten aus Ringen mit $d_a = 50$ mm ist $\varepsilon = 0,743$. Ferner ist für diese Raschigringe $h_p = 50$ mm und $A_p/V_p = 561$ m²/m³. Setzt man diese Werte in Gl. (8.96) ein, so erhält man für das Druckverlustverhältnis

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_u} = 0,0874 \approx \frac{1}{11}.$$

Der Druckverlust in geordneten Schichten ist also nur etwa 1/11 des Druckverlustes in ungeordneten Schichten. Mit abnehmenden Reynoldszahlen wird das Druckverlustverhältnis jedoch größer. Wegen des geringen Druckverlustes sind die geordneten Füllkörperschichten von großer technischer Bedeutung.

Schrifttum

- [8.1] S. DEBBAS und H. RUMPF, On the randomness of beds packed with spheres or irregular particles, *Chem. Eng. Sci.* 21 (1966) 583–607
- [8.2] H. RUMPF, S. DEBBAS und K. SCHÖNERT, Über die Struktur von Packungen körniger Stoffe, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 3, 116–25
- [8.3] J. D. BERNAL und J. MASON, Co-ordination of randomly packed spheres, *Nature* 188 (1960) 910–1
- [8.4] M. C. THADANY und F. N. PEEBLES, Variation of local void fraction in randomly packed beds of equal spheres, *Ind. Eng. Chem. Process Design & Development* 5 (1966) 3, 265–8
- [8.5] G. SPECK, *Über die Randgängigkeit in gasdurchströmten Füllkörperschüttungen*, Dissertation TH Dresden 1955
- [8.6] E. H. BLUM, *Statistical geometrical approach to the random packing of spheres*, Dissertation Princeton University, Department of Chemical Engineering, 1964
- [8.7] ● E. MANEGOLD, *Kapillarsysteme*, Band 1; Straßenbau, Chemie u. Technik Verlagsgesellschaft, Heidelberg 1955
- [8.8] L. C. GRATON und H. J. FRASER, Systematic packing of spheres—with particular relation to porosity and permeability, *J. Geol.* 43 (1935) 785–909
- [8.9] S. DEBBAS, *Über die Zufallstruktur von Packungen aus kugeligen oder unregelmäßig geformten Körnern*, Dissertation TH Karlsruhe 1965
- [8.10] D. P. HAUGHEY und G. S. G. BEVERIDGE, Local voidage variation in a randomly packed bed of equal-sized spheres, *Chem. Eng. Sci.* 21 (1966) 905–16
- [8.11] M. LEVA und M. GRUMMER, Pressure drop through packed tubes; Part II: Effect of surface roughness, *Chem. Eng. Progr.* 43 (1947) 11, 633–8
- [8.12] G. SONNTAG, Einfluß des Lückenvolumens auf den Druckverlust in gasdurchströmten Füllkörpersäulen, *Chem.-Ing.-Techn.* 32 (1960) 5, 317–29
- [8.13] L. H. S. ROBLEE, R. M. BAIRD und J. W. TIERNEY, Radial porosity variations in packed beds; *AICHE* 4 (1958) 4, 460–1
- [8.14] R. F. BENENATI und C. B. BROSILOW, Void fraction distribution in beds of spheres, *AICHE* 8 (1962) 3, 359–61
- [8.15] G. D. SCOTT, Radial distribution of the random close packing of equal spheres, *Nature* 194 (1962) 956–7
- [8.16] M. LEVA und M. GRUMMER, Pressure drop through packed tubes, Part III: Prediction of voids in packed tubes, *Chem. Eng. Progr.* 43 (1947) 12, 713–8
- [8.17] R. JESCHAR, Druckverlust in Mehrkornschüttungen aus Kugeln, *Arch. Eisenhüttenwes.* 35 (1964) 2, 91–108
- [8.18] ● Th. K. SHERWOOD und R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, New York/Toronto/London 1952
- [8.19] ● R. E. TREYBAL, *Mass Transfer Operations*, McGraw-Hill, New York/Toronto/London 1955
- [8.20] ● A. KASSATKIN, *Chemische Verfahrenstechnik*, Band 2, 4. Auflage, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1961
- [8.21] Th. TEUTSCH, *Druckverlust in Füllkörperschüttungen bei hohen Berieselungsdichten*, Dissertation TH München 1962
- [8.22] H. GLASER, Instationäre Messung der Wärmeübertragung von Raschigring-schüttungen, *Chem.-Ing.-Techn.* 27 (1965) 11, 637–43
- [8.23] ● W. V. ENGELHARDT, *Der Porenraum der Sedimente*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960
- [8.24] P. SCHMIDT, *Der hohe Füllstoffgehalt in Gießharzen*, Dissertation TH Stuttgart 1963
- [8.25] C. C. FURNAS, Flow of gases through beds of broken solids, *U. S. Dep. Commerce, Bur. Mines Bull.* 307 (1929)

- [8.26] D. R. HUDSON, Density and packing in an aggregate of mixed spheres, *J. Appl. Physics* 20 (1949) 2, 154–62
- [8.27] W. BARTH, Der Druckverlust bei der Durchströmung von Füllkörpersäulen und Schüttgut mit und ohne Berieselung, *Chem.-Ing.-Techn.* 23 (1951) 12, 289–93
- [8.28] O. KRISCHER, Vorgänge der Stoffbewegung durch Haufwerke und porige Güter bei Diffusion, Molekularbewegung sowie laminarer und turbulenzartiger Strömung, *Chem.-Ing.-Techn.* 34 (1962) 3, 154–62
- [8.29] R. JESCHAR, Wärmeübergang in Mehrkornschüttungen aus Kugeln, *Arch. Eisenhüttenwes.* 35 (1964) 6, 517–26
- [8.30] M. MORALES, C. W. SPINN und J. H. SMITH, Velocities and effective thermal conductivities in packed beds, *Ind. Eng. Chem.* 43 (1951) 1, 225–32
- [8.31] C. E. SCHWARTZ und J. M. SMITH, Flow distribution in packed beds, *Ind. Eng. Chem.* 45 (1953) 6, 1209–18
- [8.32] K. R. JOLLST und T. J. HANRATTY, Transition to turbulence for flow through a damped bed of spheres, *Chem. Eng. Sci.* 21 (1966) 1185–90
- [8.33] ● P. C. CARMAN, *Flow of gases through porous media*, Butterworths Scientific Publications, London 1956
- [8.34] J. HAPPEL, Viscous flow in multiparticle systems; Slow motion of fluids relative to beds of spherical particles, *AIChE J.* 4 (1958) 2, 197–201
- [8.35] F. C. BLAKE, The resistance of packing to fluid flow, *Trans. AIChE* 14 (1922) 415–21
- [8.36] D. MEWES, *Stoffaustausch mit chemischer Reaktion in Füllkörperschichten*, Dipl.-Arbeit am Lehrstuhl für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin 1966
- [8.37] ● R. E. COLLINS, *Flow of fluids through porous materials*, Reinhold, New York 1961
- [8.38] M. R. J. WILLIC und A. R. GREGORY, Fluid flow through unconsolidated porous aggregates, *Ind. Eng. Chem.* 47 (1955) 7, 1379–88
- [8.39] H. BRAUER, Eigenschaften der Zweiphasen-Strömung bei der Rektifikation in Füllkörpersäulen, *Dechema-Monographien* 37 (1960) 7–78
- [8.40] L. E. BROWNELL, H. S. DOMBROWSKI und C. A. DICKEY, Pressure drop through porous media, Part IV: New data and revised correlation, *Chem. Eng. Progr.* 46 (1950) 8, 415–22
- [8.41] G. KLING, Das Wärmeleitvermögen eines von Gas durchströmten Kugelhaufwerkes, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 9 (1938) 2, 82–90
- [8.42] F. HEER, Druckverlust und Wärmeübergang an Kugelschüttungen, *Mitteilungen der Forschungsgruppe für Wärme- und Kältetechnik im Max-Planck-Institut für Strömungsforschung*, Göttingen 1957
- [8.43] L. E. BROWNELL, D. C. GAMI, R. A. MILLER und W. F. NEKARVIS, Pressure drop through porous media, Part. V, *AIChE J.* 2 (1956) 1, 79–81
- [8.44] J. HAPPEL und N. EPSTEIN, Cubical assemblages of uniform spheres, *Ind. Eng. Chem.* 46 (1954) 6, 1187–94
- [8.45] D. J. GUNN und A. A. MALIK, Flow through expanded beds of solids, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 44 (1966) T 371–T 387
- [8.46] J. J. MARTIN, W. L. McCABE und C. C. MONRAD, Pressure through stacked spheres, *Chem. Eng. Progr.* 47 (1951) 2, 91–4
- [8.47] CH. A. WENTZ und G. THODOS, Pressure drops in the flow of gases through packed and distended beds of spherical particles, *AIChE J.* 9 (1963) 1, 81–4
- [8.48] CH. A. WENTZ und G. THODOS, Total and form drag friction factors for the turbulent flow of air through packed and distended beds of spheres, *AIChE J.* 9 (1963) 3, 358–61
- [8.49] J. A. TALLMADGE, Three turbulent drag coefficients in beds of spheres, *AIChE J.* 13 (1967) 3, 599–606
- [8.50] S. ERGUN, Fluid flow through packed columns, *Chem. Eng. Progr.* 48 (1952) 2, 89–94

- [8.51] W. BARTH und W. ESSER, Der Druckverlust in geschichteten Stoffen, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 4 (1933) 2, 82–6
- [8.52] S. ERGUN und A. A. ORNING, Fluid flow through randomly packed columns and fluidized beds, *Ind. Eng. Chem.* 41 (1949) 6, 1179–84
- [8.53] S. P. BURKE und W. B. PLUMMER, Gas flow through packed columns, *Ind. Eng. Chem.* 20 (1928) 1196–200
- [8.54] M. LEVA, Fluid flow through packed beds, *Chem. Eng.* 56 (1949) Mai-Heft, 114–7
- [8.55] J. B. WAGSTAFF und E. A. NIRMEIER, Air flow in beds of granular solids, *Ind. Eng. Chem.* 47 (1955) 6, 1129–35
- [8.56] H. BRAUER, Druckverlust in Füllkörpersäulen bei Einphasenströmung, *Chem.-Ing.-Techn.* 29 (1957) 12, 785–90
- [8.57] R. KOCH, Dipl.-Arbeit, TH Hannover 1954
- [8.58] H. SCHRADER, Druckverlust, Wärme- und Stoffaustausch in berieselten Raschig-ringschüttungen, *Kältetechn.* 10 (1958) 9, 290–5
- [8.59] E. MACH, Druckverlust und Belastungsgrenzen in Füllkörpersäulen, *VDI-Forschungsh.* 375, Berlin 1935
- [8.60] W. KAST, Gesetzmäßigkeiten des Druckverlustes in Füllkörpersäulen, *Chem.-Ing.-Techn.* 36 (1964) 5, 464–8
- [8.61] G. C. GARDNER, The effect of fine material on the structure and resultant pressure drop of a bed charged against an uprising gas stream, *Chem. Eng. Sci.* 7 (1957) 78–82
- [8.62] H. J. MATTHIES, Der Strömungswiderstand beim Belüften landwirtschaftlicher Erntegüter, *VDI-Forschungsh.* 454, VDI-Verlag, Düsseldorf 1956
- [8.63] E. BLASS, Geometrische und strömungstechnische Untersuchungen an Drahtgeweben, *Chem.-Ing.-Techn.* 36 (1964) 7, 747–58
- [8.64] N. KOLEV, Der Druckverlust von Absorptionssäulen mit regelmäßig angeordneten Füllkörpern, *Verfahrenstechn.* 3 (1969) 4, 163–9
- [8.65] H. F. JOHNSTONE und A. D. SINGH, Recovery of sulfur dioxide from waste gases. Design of scrubbers for large quantities of gases, *Ind. Eng. Chem.* 29 (1937) 3, 286–97

9 Wirbelschicht

Unter einer Wirbelschicht versteht man zumeist eine feinkörnige Feststoffschicht, die von einem hindurchströmenden Fluid so weit aufgelockert ist, daß einzelne Partikeln über kleinere oder größere Entfernungen einen Ortswechsel vornehmen können. Die Beweglichkeit der Partikeln gewährleistet die Wirksamkeit ihrer gesamten Oberfläche für Wärme- und Stoffübergangsprozesse, die in der Wirbelschicht ablaufen. Der Übergang von der ruhenden Partikelschicht zur Wirbelschicht ist daher durch einen Anstieg der übertragenen Wärme und des übertragenen Stoffes gekennzeichnet. Der Platzwechsel der Partikeln findet sowohl quer zur Strömungsrichtung als auch gleichzeitig in und entgegen der Strömungsrichtung statt. Der Queraustausch hat zur Folge, daß die Temperaturen und Konzentrationen über den Querschnitt weitgehend konstant sind. Diese Eigenschaft ist für viele Prozesse von sehr großem Vorteil, so daß durch sie die weitverbreitete Anwendung der Wirbelschichten bestimmt wird. Der Austausch in Längsrichtung, und zwar in als auch zwangsläufig entgegen der Strömungsrichtung, ist indes nachteilig. Hierdurch wird das treibende Temperatur- bzw. Konzentrationsgefälle zwischen Fluid und Partikeln herabgesetzt, so daß der praktisch erzielbare Austausch in der Wirbelschicht kleiner ist als der theoretisch mögliche.

Bei sehr geringer Auflockerung gewinnt man durch visuelle Beobachtung den Eindruck, als besäße die Wirbelschicht flüssigkeitsähnliche Eigenschaften. Daher wird die Wirbelschicht im anglo-amerikanischen Schrifttum «fluidized bed» genannt. Im neueren deutschen Schrifttum schlug man den Namen «Fluidatbett» vor [9.1 und 9.2]. Unter beiden Bezeichnungen werden häufig noch weitere Vorgänge, wie beispielsweise der pneumatische und der hydraulische Transport, behandelt. In diesem Buch soll dem Wort «Wirbelschicht» der Vorzug gegeben werden.

Wirbelschichtanlagen lassen sich sowohl in ein- als auch in mehrstufiger Form bauen. In der einstufigen Anlage bleibt die Kornmasse zumeist für längere Zeit in der Anlage. Bezüglich des Feststoffes wird die einstufige Anlage also absatzweise betrieben. Bei der mehrstufigen Wirbelschichtanlage sind viele einzelne Wirbelschichten übereinander angeordnet. Dabei wird gleichzeitig dafür gesorgt, daß der Feststoff durch die gesamte Anlage hindurchrieselt, dabei aber in jeder einzelnen Stufe eine gewisse Zeit verweilt. Mehrstufige Anlagen werden also vornehmlich auch bezüglich des Feststoffes kontinuierlich betrieben. Man erreicht hierbei also einen Gegenstrom von Feststoff und Fluid. Gegenüber der einstufigen Wirbelschicht hat die mehrstufige den weiteren Vorteil, daß die Längsdurchmischung auf die Höhe einer Stufe beschränkt wird.

Die Wirbelschicht wurde vor mehr als vier Jahrzehnten von WINKLER (1922) im Zusammenhang mit Vergasungsvorgängen entwickelt und erstmalig im großtech-

nischen Maßstab angewendet. Später, insbesondere nach 1945, zog man die Wirbelschicht mit großem Erfolg auch zur Durchführung anderer chemischer Stoffumwandlungen und vieler weiterer Prozesse heran. Die große technische Bedeutung der Wirbelschicht und aller damit zusammenhängenden Probleme kommt in dem hierzu vorliegenden umfangreichen Schrifttum deutlich zum Ausdruck. Hingewiesen sei an dieser Stelle auf die Bücher von LEVA [9.3], ZENZ und OTHMER [9.4], SCHYTL [9.5], ZABRODSKY [9.6] und BERANEK, SOKOL und WINTERSTEIN [9.7]. In diesen Büchern werden nicht nur die mit der Durchströmung der Wirbelschicht, sondern auch die mit den Wärme- und Stofftransportprozessen in der Schicht zusammenhängenden Probleme erörtert oder zumindest angeschnitten. Da viele Fragen bislang noch nicht ausreichend geklärt sind, liegt in diesen Büchern der Schwerpunkt bei technischen Problemen. Im Gegensatz dazu behandeln DAVIDSON und HARRISON [9.8] im wesentlichen wissenschaftliche Fragestellungen, die indes auf die Durchströmung der Wirbelschicht beschränkt bleiben.

Im allgemeinen darf man annehmen, daß die Wirbelschicht von der fluiden Phase gleichmäßig angeströmt wird. Immer ist das jedoch nicht der Fall. So macht man z. B. auch von der Möglichkeit Gebrauch, die fluide Phase als Strahl in die Schicht einzuleiten. Unter bestimmten Bedingungen reißt der Strahl Feststoffkörner mit, die sich an der Oberfläche der Schicht wieder ablagern. Es kommt also zu einer sehr lebhaften Durchmischung der Schicht in axialer Richtung. Eine solche Schicht heißt im anglo-amerikanischen Schrifttum «spouted bed»; in diesem Buch wird von Strahlschicht gesprochen.

Die folgenden Abschnitte gehen sowohl auf die ein- und die mehrstufige Wirbelschicht als auch auf die Strahlschicht ein. Eine allgemeine Beschreibung der wichtigsten Eigenschaften und Zustandsformen wird der Behandlung spezieller Probleme vorausgeschickt.

9.1 Allgemeine Beschreibung der Wirbelschicht

An Hand von *Bild 9.1* sollen die Entstehung und die Eigenschaften der Wirbelschicht in einer qualitativen Form beschrieben werden. Dargestellt sind in einem Diagramm mit logarithmisch geteilten Koordinaten die Abhängigkeit des Druckverlustes ΔP der fluiden Phase von der Anströmgeschwindigkeit \bar{w} und die für einige Geschwindigkeiten beobachteten Zustandsformen der Schicht.

Die Wirbelschicht entsteht aus einer ruhenden Partikelschicht durch Erhöhen der Anströmgeschwindigkeit über die mit \bar{w}_L bezeichnete Lockerungsgeschwindigkeit hinaus. Im Bereich der ruhenden Partikelschicht steigt der Druckverlust ΔP mit der Anströmgeschwindigkeit \bar{w} an. Die hierfür geltenden Widerstandsgesetze wurden im Kapitel 8 mitgeteilt.

Erreicht die Anströmgeschwindigkeit \bar{w} den Wert der Lockerungsgeschwindigkeit \bar{w}_L , dann stellt sich zwischen der an die Partikeln angreifenden Widerstandskraft $\Delta P_L \cdot F_s$ und der entgegengerichteten scheinbaren Massenkraft $V_p \cdot (\rho_p - \rho) \cdot g$ Gleichgewicht ein. Das bedeutet, daß die Partikeln im Fluidstrom schweben. In

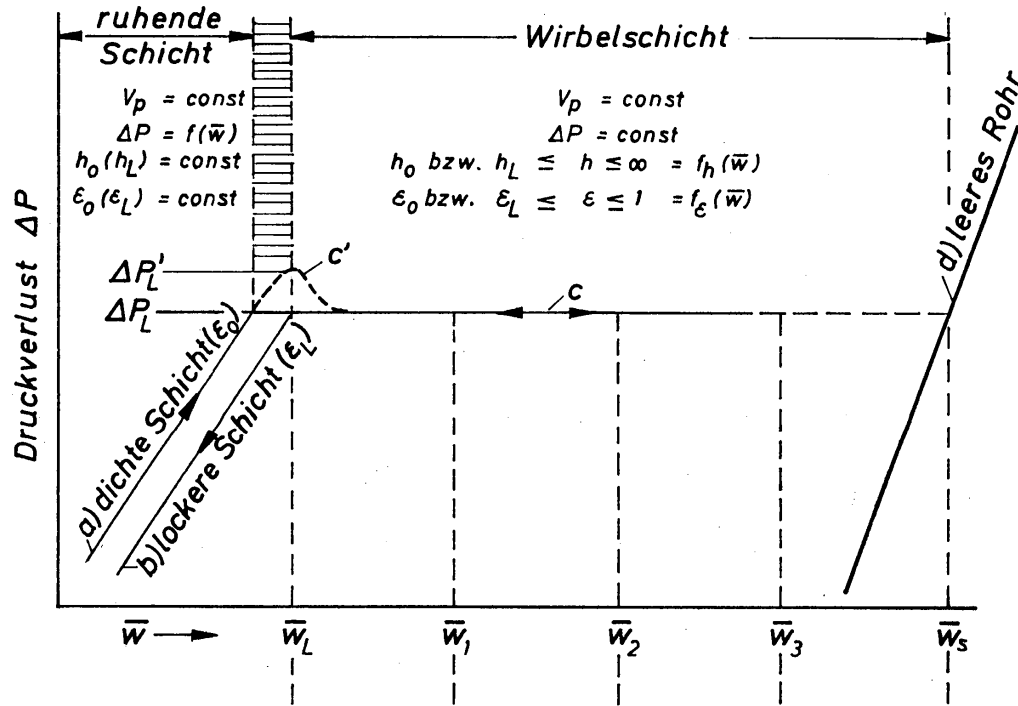


Bild 9.1. Zur Erläuterung der Entstehung und der Zustandsformen von Wirbelschichten

den angeführten Ausdrücken bedeuten F_s die Querschnittsfläche des zumeist kreiszylindrischen Gefäßes, V_p das vom Zustand der Schicht unabhängige Partikelvolumen, ρ_p und ρ die Dichten der Partikel und des Fluids und g die Erdbeschleunigung. Definiert man den Lückengrad am Lockerungspunkt durch

$$\varepsilon_L = 1 - \frac{V_p}{V_{sL}}, \quad (9.1)$$

wobei $V_{sL} = F_s \cdot h_L$ das Schichtvolumen bedeutet, dann läßt sich aus dem Kräftegleichgewicht folgende Beziehung für den Druckverlust ermitteln:

$$\Delta P_L = g h_L \cdot (1 - \varepsilon_L) (\rho_p - \rho). \quad (9.2)$$

Dieser Druckverlust ist unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit in der Wirbelschicht.

Im allgemeinen muß man erwarten, daß die ruhende Ausgangsschicht eine sehr dichte Struktur hat. Der Lückengrad der ruhenden Schicht ist ε_0 , ihre Höhe ist h_0 . Ausgehend von sehr kleinen Werten der Anströmgeschwindigkeit \bar{w} ändert sich der Druckverlust dann entlang den in *Bild 9.1* dargestellten Kurven a , c' und c . Während des Übergangs von der ruhenden zur bewegten Schicht steigt der Druckverlust über den Gleichgewichtswert ΔP_L hinaus bis auf $\Delta P'_L$ an. Der zusätzliche Druckverlust $\Delta P'_L - \Delta P_L$ ist erforderlich, um Bindekräfte zwischen den Partikeln zu überwinden. Besonders ausgeprägt sind solche Bindekräfte bei Granulaten, die zu Verzahnungen neigen. Aber auch dann, wenn die ruhende Schicht aus kugelförmigen Partikeln besteht, können bei ungünstigen Strukturen merkliche Reibungskräfte die Auflockerung erschweren. Ferner ist es insbesondere bei sehr kleinen Partikeln möglich, daß elektrostatische Kräfte zwischen den Körnern überwunden werden müssen.

Nur dann, wenn keinerlei Bindekräfte zwischen den Partikeln vorhanden sind, was in lockeren Schichten häufig der Fall ist, wird der Gleichgewichtswert ΔP_L nicht überschritten. Der Druckverlust ändert sich dann entlang den Kurven b und c , unabhängig davon, ob die Kurven mit steigender oder sinkender Anströmgeschwindigkeit durchlaufen werden. Im Vergleich zur dichten Schicht weist die lockere Schicht bei gleichem Partikelvolumen die etwas größere Schichthöhe h_L mit dem Lückengrad ε_L auf.

Theoretisch erstreckt sich der Wirbelschichtbereich von der unteren Grenzgeschwindigkeit, der Lockerungsgeschwindigkeit \bar{w}_L , bis zur oberen Grenzgeschwindigkeit \bar{w}_s . Innerhalb dieses Geschwindigkeitsbereiches wird die Partikelschicht in zunehmendem Maße aufgelockert. Die Schichthöhe ändert sich von $h = h_L$ bis $h = \infty$ und der Lückengrad von $\varepsilon = \varepsilon_L$ bis $\varepsilon = 1$. Nahe der oberen Grenze ist die Schicht so stark ausgedehnt, daß jede einzelne Partikel unbeeinflusst vom benachbarten im Fluidstrom schwebt. Mit \bar{w}_s wird also die Fluidgeschwindigkeit bezeichnet, bei der eine Einzelpartikel gerade schwebt. Sie ist dem Betrag nach gleich der Sinkgeschwindigkeit der Einzelpartikel im unendlich ausgedehnten Raum. Die Sinkgeschwindigkeit von Einzelpartikeln ist in Abschnitt 5 behandelt worden.

Bei schematisierender Betrachtungsweise, wovon in *Bild 9.1* Gebrauch gemacht wurde, trifft Kurve c bei $\bar{w} = \bar{w}_s$ auf die Druckverlustkurve d , die für das leere Rohr gilt. In der Nähe von Kurve d wurde Kurve c jedoch gestrichelt, da dieser Bereich der Wirbelschicht nicht realisierbar und Gl.(9.2) nicht mehr anwendbar ist.

Der gesamte Wirbelschichtbereich läßt sich in zwei Bereiche unterteilen. Bei kleinen Fluidgeschwindigkeiten stellt sich die homogene und bei großen Fluidgeschwindigkeiten die inhomogene Wirbelschicht ein. In der homogenen Wirbelschicht sind die Partikeln innerhalb des gesamten Wirbelschichtvolumens gleichmäßig verteilt; der Lückengrad ist zeitlich und räumlich konstant. In der inhomogenen Wirbelschicht sind die Partikeln ungleichmäßig verteilt, so daß auch

der Lückengrad starken örtlichen und zeitlichen Schwankungen unterliegt. Bei der in *Bild 9.1* angegebenen Anströmgeschwindigkeit \bar{w}_2 bildet das Fluid innerhalb der Partikelschicht die mit B bezeichneten Blasen aus. Bei der höheren Geschwindigkeit \bar{w}_3 ist die Schicht noch stärker ausgedehnt, und die Partikeln sind für jeweils kurze Zeiten zu Ballen oder Partikelwolken zusammengefaßt. Neben diesen beiden Zustandsformen der inhomogenen Wirbelschicht gibt es noch weitere, die in starkem Maße von den Abmessungen der Partikeln und der Schicht abhängen. Bislang ist es noch nicht möglich, die Zustandsformen der Wirbelschicht für den gesamten Geschwindigkeitsbereich von \bar{w}_L bis \bar{w}_s vorauszusagen.

Im folgenden wird insbesondere auf die für den Ingenieur wichtigen Größen der Wirbelschicht näher eingegangen. Diese sind die untere und die obere Grenzgeschwindigkeit \bar{w}_L und \bar{w}_s , der Lückengrad ε sowie die Höhe h der Wirbelschicht und schließlich die günstigste Betriebsgeschwindigkeit.

9.2 Untere und obere Grenzgeschwindigkeiten

Im gesamten Bereich der Wirbelschicht ist der Druckverlust des Fluids unabhängig von der Anströmgeschwindigkeit \bar{w} und durch Gl.(9.2) gegeben. Gefragt wird zunächst nach der unteren Grenzgeschwindigkeit \bar{w}_L am Lockerungspunkt. Am Lockerungspunkt müssen für die Strömung die im Kapitel 8 behandelten Gesetze gelten. Nimmt man an, daß es sich bei den Partikeln um Granulat-körner handelt, dann ist der Druckverlust am Lockerungspunkt ΔP_L nach dem von ERGUN [9.9] mitgeteilten Widerstandsgesetz gemäß Gl.(8.54) zu berechnen:

$$\Delta P_L = 150 \frac{(1 - \varepsilon_L)^2}{\varepsilon_L^3} \frac{\eta \bar{w}_L h_L}{d_p^2} + 1,75 \frac{1 - \varepsilon_L}{\varepsilon_L^3} \frac{\rho \bar{w}_L^2 h_L}{d_p}. \quad (9.3)$$

Nach Gleichsetzen mit Gl.(9.2) erhält man die Lockerungsgeschwindigkeit \bar{w}_L in dimensionsloser Schreibweise zu

$$150 \frac{(1 - \varepsilon_L)^2}{\varepsilon_L^3} Re_L + 1,75 \frac{(1 - \varepsilon_L)^2}{\varepsilon_L^3} Re_L^2 = Ar. \quad (9.4)$$

Löst man diese quadratische Gleichung auf, so erhält man

$$Re_L = \left[1830 + 0,571 \cdot \frac{\varepsilon_L^3}{(1 - \varepsilon_L)^2} \cdot Ar \right]^{1/2} - 42,8. \quad (9.5)$$

Hierin sind

$$Re_L \equiv \frac{Re_{pL}}{1 - \varepsilon_L} = \frac{\bar{w}_L \cdot d_p / \nu}{1 - \varepsilon_L} \quad (9.6)$$

die Reynoldszahl am Lockerungspunkt und

$$Ar \equiv \frac{g d_p^3}{\nu^2} \cdot \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \quad (9.7)$$

die Archimedeszahl. Mit $d_p \equiv 6 V_p/A_p$ werden der Partikeldurchmesser und mit $\nu = \eta/\rho$ die kinematische Viskosität des Fluids bezeichnet. In *Bild 9.2* ist Re_{pL} , abhängig von Ar für einige Werte des Lückengrades am Lockerungspunkt ε_L dargestellt. Wie zu erwarten, sind Re_{pL} und demgemäß auch die Lockerungsgeschwindigkeit \bar{w}_L um so größer, je größer der Lückengrad am Lockerungspunkt ist.

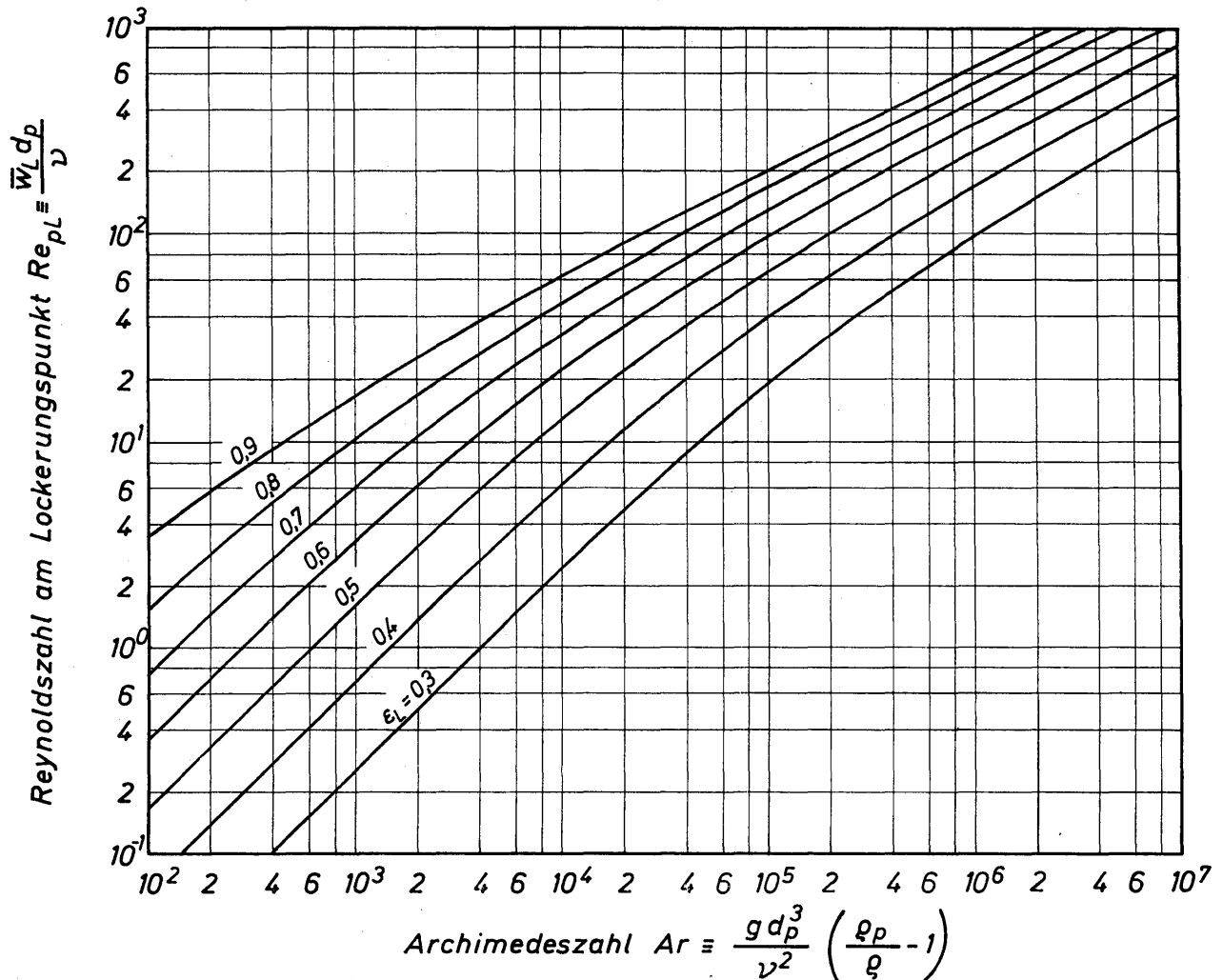


Bild 9.2. Die Reynoldszahl am Lockerungspunkt, abhängig von der Archimedeszahl Ar und dem Lückengrad ε_L am Lockerungspunkt

Die in *Bild 9.2* dargestellten Kurven lassen sich im Bereich kleiner Werte der Reynoldszahl, etwa für $Re_{pL} < 1$, durch die Beziehung

$$Re_{pL} = \frac{1}{150} \frac{\varepsilon_L^3}{1 - \varepsilon_L} \cdot Ar \quad (9.8)$$

und im Bereich großer Werte der Reynoldszahl, etwa für $Re_{pL} > 10^2$, durch

$$Re_{pL} = \left[\frac{\varepsilon_L^3}{1,75} Ar \right]^{1/2} \quad (9.9)$$

ausdrücken. In den Gültigkeitsbereichen der Gleichungen (9.8) und (9.9) ist die Strömung entweder überwiegend laminar oder turbulent. In sehr vielen prakti-

schen Fällen darf man mit laminarem Strömungszustand rechnen. Hierfür ergibt sich aus Gl.(9.8) die Lockerungsgeschwindigkeit zu

$$\bar{w}_L = \frac{1}{150} \frac{\varepsilon_L^3}{1 - \varepsilon_L} \frac{g d_p^2}{\nu} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right). \quad (9.10)$$

Sie ist um so größer, je größer der Partikeldurchmesser d_p , das Dichteverhältnis ρ_p/ρ und der Lückengrad ε_L sind. Der Stand der experimentellen Untersuchungen über die untere Grenzgeschwindigkeit geht aus umfangreichen Studien von RAJU und RAO [9.10], NARSIMHAN [9.11] und WEN und YU [9.12] hervor. Von WEN und YU wurde durch Auswertung der Angaben von 12 verschiedenen Forschern festgestellt, daß der Lückengrad am Lockerungspunkt allein als Funktion eines Formfaktors f_A dargestellt werden kann. Die Meßwerte lassen sich durch folgende einfache Gleichung mit befriedigender Genauigkeit ausgleichen:

$$\frac{1 - \varepsilon_L}{\varepsilon_L^3} = 11 \cdot f_A^2. \quad (9.11)$$

Der Formfaktor f_A stellt das Verhältnis aus der Oberfläche einer Kugel, die das gleiche Volumen wie die Partikel aufweist, und der wirklichen Oberfläche der Partikel dar. In *Bild 9.3* ist ε_L , abhängig von f_A , aufgetragen. Bei Verwendung dieser Funktion lassen sich die von 14 verschiedenen Forschern stammenden 283 Meßwerte für Re_L mit einer mittleren Streuung von $\pm 25\%$ durch Gl.(9.5) ausgleichen. Dabei hat es sich als zulässig erwiesen, den Partikeldurchmesser d_p als geometrischen Mittelwert aus den Maschenweiten der Siebe zu berechnen, durch die die Partikel gerade noch hindurchfällt und auf denen sie liegen bleibt. Damit darf die untere Grenzgeschwindigkeit des Wirbelschichtbereiches als bekannt angesehen werden.

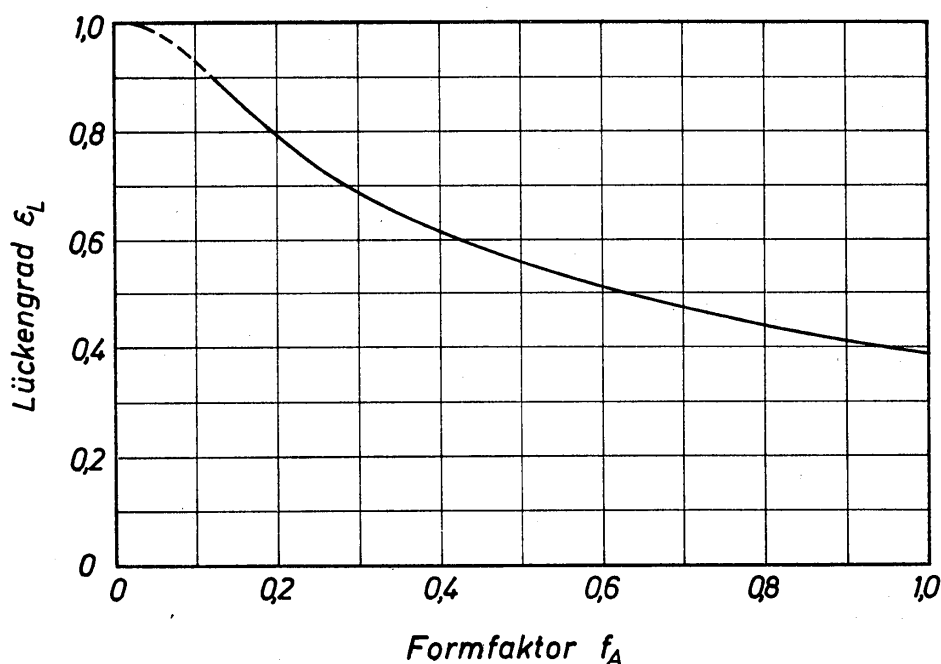


Bild 9.3. Abhängigkeit des Lückengrades am Lockerungspunkt ε_L vom Formfaktor f_A

Die obere Grenze des Wirbelschichtbereiches wird dann erreicht, wenn die Schicht so stark aufgelockert ist, daß sich benachbarte Partikeln nicht mehr in ihrer Bewegung beeinflussen. Theoretisch ist das nur dann der Fall, wenn der Abstand zwischen den Partikeln unendlich groß geworden ist. Unter diesen Bedingungen ist die Anströmgeschwindigkeit \bar{w} gemäß *Bild 9.1* gleich der für die Einzelpartikel gültigen Schwebegeschwindigkeit \bar{w}_s geworden. Die Schwebegeschwindigkeit \bar{w}_s läßt sich aus *Bild 5.11* entnehmen, in dem die mit der Schwebegeschwindigkeit gebildete Reynoldszahl (w_s ist durch \bar{w}_s zu ersetzen) abhängig von der Archimedeszahl dargestellt ist.

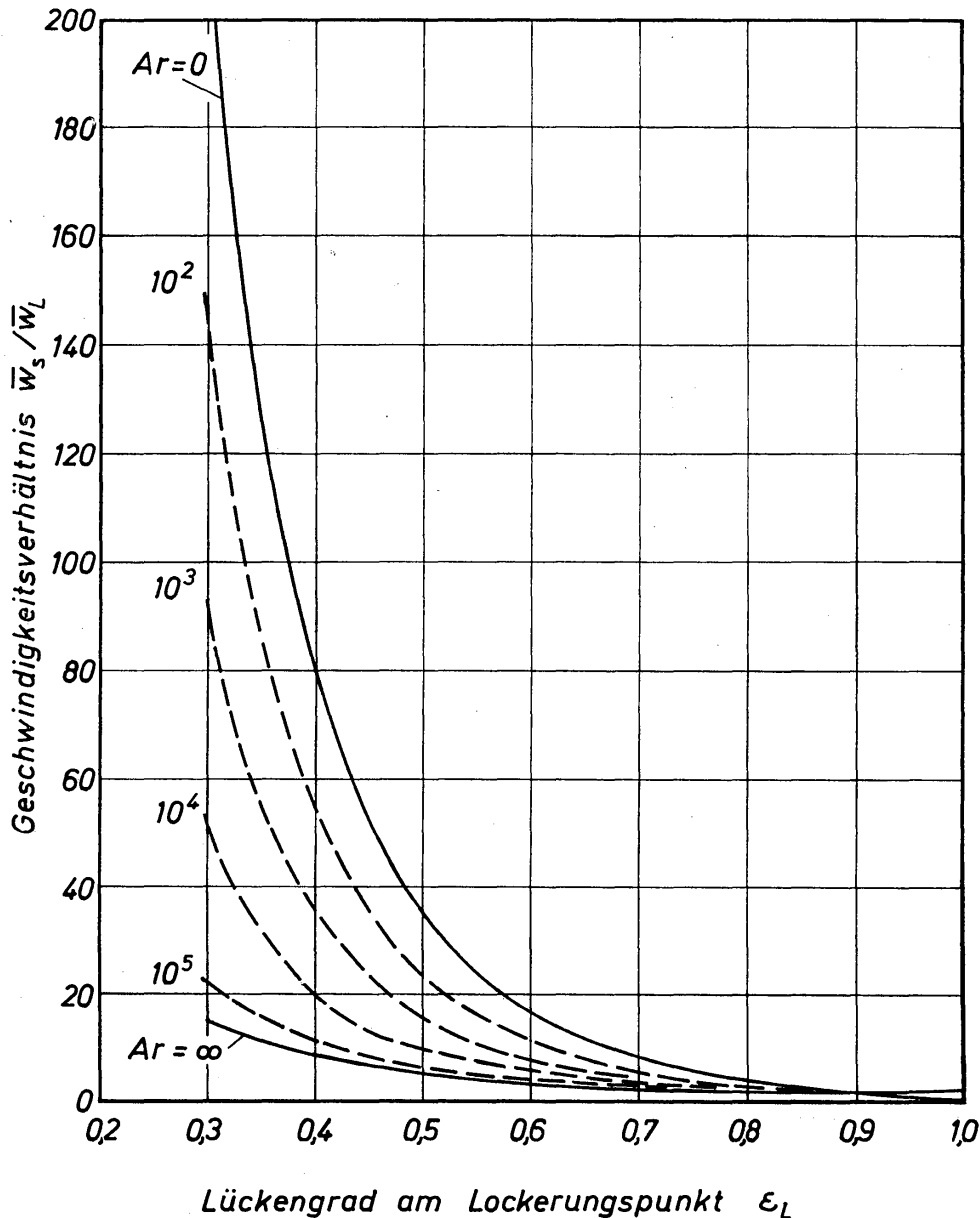


Bild 9.4. Verhältnis der Grenzgeschwindigkeiten \bar{w}_s/\bar{w}_L , abhängig vom Lückengrad ϵ_L am Lockerungspunkt, für einige Werte der Archimedeszahl Ar

Ein sehr guter Überblick über die Änderung der Anströmgeschwindigkeit innerhalb des Wirbelschichtbereiches ergibt sich, wenn man das Verhältnis der Grenzgeschwindigkeiten \bar{w}_s/\bar{w}_L über dem Lückengrad am Lockerungspunkt ϵ_L aufträgt. Diese Darstellungsweise zeigt *Bild 9.4*. Parameter ist dabei die Archimedes-

zahl Ar . Der Zusammenhang zwischen der Archimedeszahl und der Reynoldszahl Re_L am Lockerungspunkt wurde bereits in *Bild 9.2* angegeben. Für $Ar = 0$ ist auch $Re_L = 0$ und für $Ar = \infty$ ist auch $Re_L = \infty$. Die für $Ar = 0$ und $Ar = \infty$ erhaltenen Kurven sind in *Bild 9.4* ausgezogen worden, da sie das Kurvenfeld begrenzen. Die für andere Werte von Ar berechneten Kurven wurden gestrichelt. Die beiden Grenzkurven schneiden sich bei etwa $\varepsilon_L = 0,9$. Während diejenige für $Ar = 0$ bei $\varepsilon_L = 1$ den Wert $\bar{w}_s/\bar{w}_L = 0$ zeigt, nähert sich die Grenzkurve für $Ar = \infty$ bei $\varepsilon_L = 1$ dem Wert $\bar{w}_s/\bar{w}_L = 2,42$. Beide Grenzwerte für \bar{w}_s/\bar{w}_L sind falsch, da das Ergunsche Widerstandsgesetz für $\varepsilon_L = 1$ nicht mehr gilt. Für $\varepsilon_L = 1$ müßte in jedem Falle $\bar{w}_s/\bar{w}_L = 1$ sein. Aus diesem Grunde sollte *Bild 9.4* nur für $\varepsilon_L \leq 0,9$ angewendet werden. Diese Einschränkung hat keine praktische Bedeutung, da bei den im technischen Betrieb auftretenden Wirbelschichten der Lückengrad am Lockerungspunkt ε_L etwa zwischen 0,3 und 0,7 liegt.

Man entnimmt *Bild 9.4*, daß das Geschwindigkeitsverhältnis mit zunehmendem Lückengrad am Lockerungspunkt ε_L kleiner wird. Für $Ar = 0$ ist beispielsweise $\bar{w}_s/\bar{w}_L = 78$ bei $\varepsilon_L = 0,4$, während bei $\varepsilon_L = 0,6$ das Verhältnis \bar{w}_s/\bar{w}_L nur noch 15,5 beträgt. Der Wert des Geschwindigkeitsverhältnisses hat sich in diesem Falle also auf etwa 1/5 verringert. Ferner zeigt *Bild 9.4*, daß das Geschwindigkeitsverhältnis mit zunehmenden Werten der Archimedeszahl, und das heißt auch der Reynoldszahl, am Lockerungspunkt kleiner wird. Für die Grenzwerte $Ar = \infty$ und $Re_L = \infty$ nimmt das Geschwindigkeitsverhältnis seinen niedrigsten Wert an, der kaum noch vom Lückengrad ε_L abhängt.

Die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverhältnisses \bar{w}_s/\bar{w}_L von der Archimedeszahl kann für den Betrieb einer Wirbelschicht sehr bedeutsam sein und muß daher sorgfältig beachtet werden. Überschreitet das Geschwindigkeitsverhältnis die in *Bild 9.4* angegebenen Werte, dann werden die Partikeln vom Fluidstrom mitgerissen.

9.3 Ausdehnung der Wirbelschicht

Am Lockerungspunkt mit der Lockerungsgeschwindigkeit \bar{w}_L hat die Partikelschicht den Lückengrad ε_L und die Höhe h_L . Erhöht man die Anströmgeschwindigkeit \bar{w} über die Lockerungsgeschwindigkeit hinaus, so nimmt der Lückengrad den Wert ε und die Höhe den Wert h an. Im folgenden soll der Zusammenhang des Lückengrades mit der Schichthöhe und mit der Anströmgeschwindigkeit berechnet werden.

Bezieht man die Schichthöhe h auf diejenige am Lockerungspunkt, so erhält man aus der Definitionsgleichung für den Lückengrad $\varepsilon \equiv 1 - V_s/V_p$ den einfachen Zusammenhang

$$\frac{h}{h_L} = \frac{1 - \varepsilon_L}{1 - \varepsilon} \quad (9.12)$$

Mit steigenden Werten des Lückengrades ε wächst auch das Höhenverhältnis.

Die zunehmende Auflockerung der Wirbelschicht wird durch Erhöhen der Anströmgeschwindigkeit \bar{w} erreicht. Das Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}/\bar{w}_L läßt sich mit der Gl.(9.3) berechnen, die auch für einen beliebigen Punkt innerhalb des Wirbelbereiches angewendet werden kann, so man \bar{w}_L durch \bar{w} und ε_L durch ε ersetzt. Unter Berücksichtigung von Gl.(9.12) erhält man nach Umformung:

$$\frac{\bar{w}}{\bar{w}_L} \cdot \frac{1 + 1,167 \cdot 10^{-2} Re_L \frac{1 - \varepsilon_L}{1 - \varepsilon} \frac{\bar{w}}{\bar{w}_L}}{1 + 1,167 \cdot 10^{-2} Re_L} = \frac{1 - \varepsilon_L}{1 - \varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_L} \right)^3. \quad (9.13)$$

Hierin bedeutet Re_L die durch Gl.(9.6) definierte Reynoldszahl am Lockerungspunkt. Das Geschwindigkeitsverhältnis hängt vom Lückengrad ε ab, der die mit der Geschwindigkeit zunehmende Ausdehnung der Wirbelschicht kennzeichnet, und weiterhin von den am Lockerungspunkt geltenden Größen ε_L sowie Re_L . Die Reynoldszahl kann sich theoretisch zwischen $Re_L = 0$ und $Re_L = \infty$ ändern. Aus Gl.(9.13) folgt für $Re_L = 0$

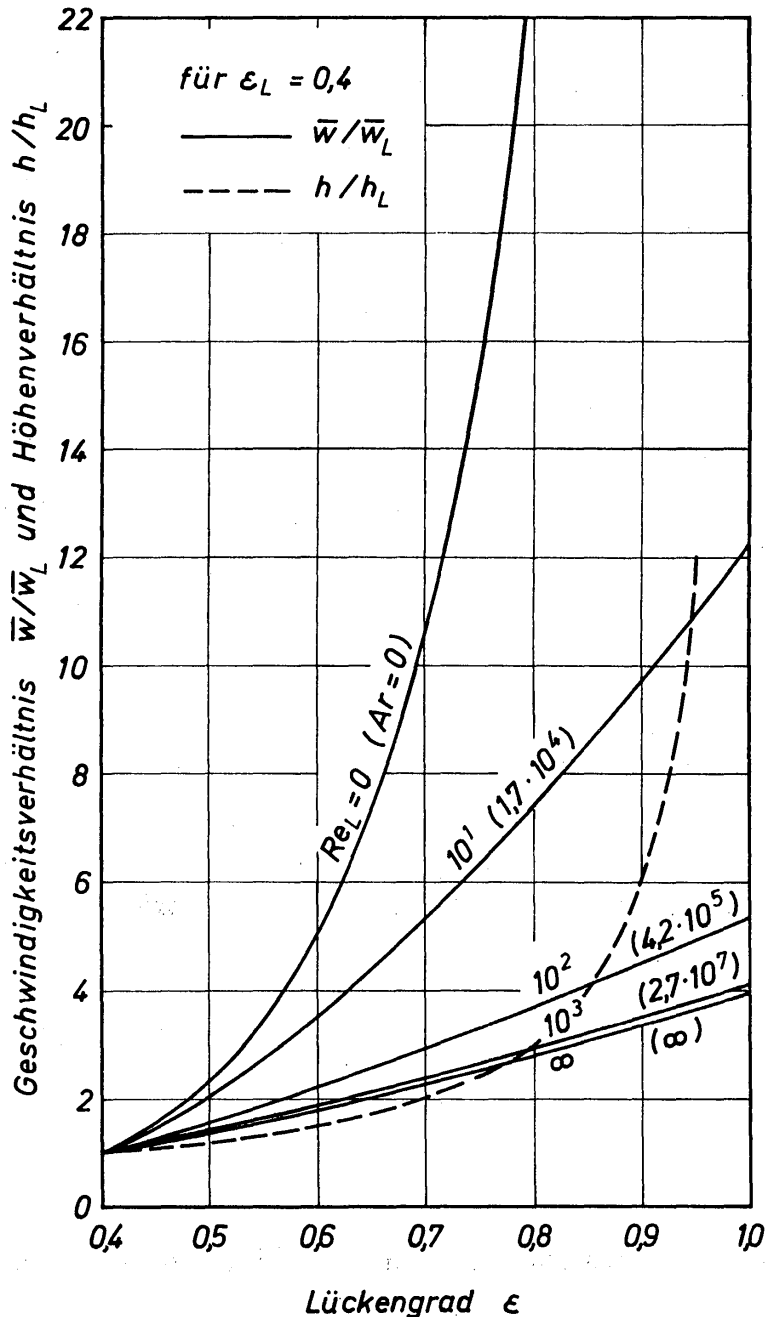


Bild 9.5
Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}/\bar{w}_L
und Höhenverhältnis h/h_L ,
abhängig vom Lückengrad ε , für
einige Werte der Reynoldszahl
am Lockerungspunkt Re_L bei
konstantem Lückengrad am
Lockerungspunkt $\varepsilon_L = 0,4$

$$\frac{\bar{w}}{\bar{w}_L} = \frac{1 - \varepsilon_L}{1 - \varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_L} \right)^3 \tag{9.14}$$

und für $Re_L = \infty$

$$\frac{\bar{w}}{\bar{w}_L} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_L} \right)^{3/2} \tag{9.15}$$

In *Bild 9.5* ist das Geschwindigkeitsverhältnis für $\varepsilon_L = 0,4$, abhängig vom Lückengrad, und mit der Reynoldszahl Re_L bzw. der Archimedeszahl Ar als Parameter dargestellt. Je niedriger die Reynoldszahl am Lockerungspunkt ist, desto stärker ändert sich das Geschwindigkeitsverhältnis mit dem Lückengrad ε . Für $Re_L = 0$ ist $\bar{w}/\bar{w}_L = \infty$ bei $\varepsilon = 1$; für alle anderen Werte von Re_L nimmt \bar{w}/\bar{w}_L bei $\varepsilon = 1$

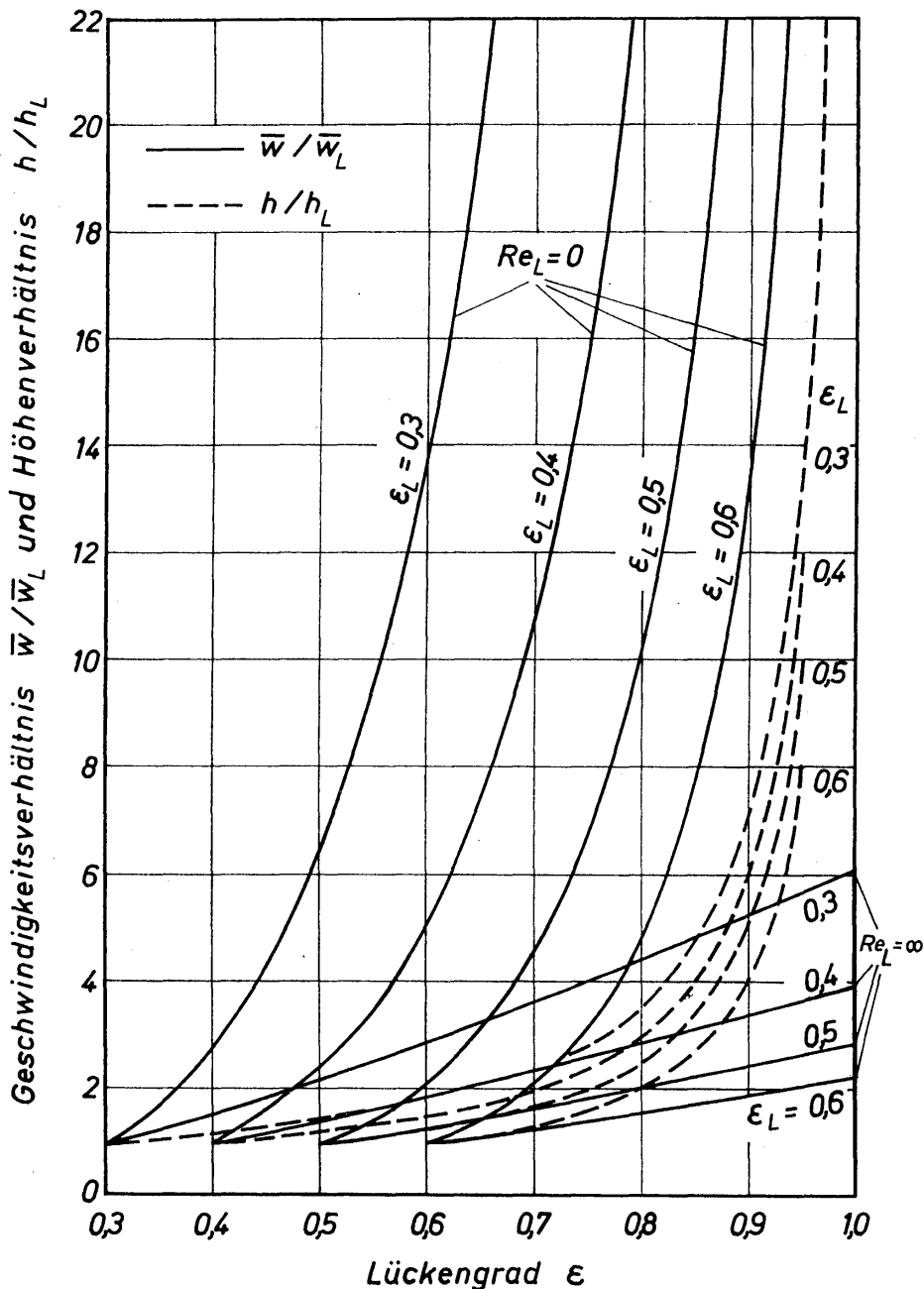


Bild 9.6. Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}/\bar{w}_L und Höhenverhältnis h/h_L , abhängig vom Lückengrad ε , für 4 verschiedene Werte von ε_L ; \bar{w}/\bar{w}_L ist jeweils für $Re_L = 0$ und $Re_L = \infty$ dargestellt

endliche Werte an. So ergibt sich bei $Re_L = \infty$ und $\varepsilon = 1$ für \bar{w}/\bar{w}_L der Wert 4,0. In der technischen Praxis nimmt die Reynoldszahl am häufigsten Werte zwischen $Re_L = 0$ und $Re_L = 10$ an. In diesem Bereich ist aber, wie *Bild 9.5* zu erkennen gibt, der Einfluß von Re_L auf das Geschwindigkeitsverhältnis am größten. Das heißt also, daß der Einfluß von Re_L auf \bar{w}/\bar{w}_L sorgfältig beachtet werden muß.

Neben dem Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}/\bar{w}_L ist in *Bild 9.5* das Höhenverhältnis h/h_L gemäß Gl.(9.12) durch die gestrichelte Kurve angegeben. Es ist allein eine Funktion des Lückengrades ε und dessen Wert ε_L am Lockerungspunkt. Eine sehr starke Änderung des Höhenverhältnisses tritt erst in der Nähe von $\varepsilon = 1$ ein; bei $\varepsilon = 1$ ist $h/h_L = \infty$. Liegt gemäß *Bild 9.5* am Lockerungspunkt ein Lückengrad von $\varepsilon_L = 0,4$ vor und möchte man die Wirbelschicht so stark ausdehnen, daß $\varepsilon = 0,7$ wird, dann sind hierfür ein Geschwindigkeitsverhältnis von $\bar{w}/\bar{w}_L = 10,7$ bei $Re_L = 0$ und von $w/w_L = 5,3$ bei $Re_L = 10$ erforderlich. Unter diesen Bedingungen ist das Höhenverhältnis $h/h_L = 2$.

Für vier Lückengrade am Lockerungspunkt, die zwischen 0,3 und 0,6 liegen, sind das Geschwindigkeits- und Höhenverhältnis in *Bild 9.6* dargestellt. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, wurden für \bar{w}/\bar{w}_L nur jeweils die obere und die untere Grenzkurve mit $Re_L = 0$ bzw. $Re_L = \infty$ angegeben.

Der Berechnung des Geschwindigkeits- und Höhenverhältnisses liegt die Annahme zugrunde, daß sich die Wirbelschicht vollkommen gleichförmig ausdehnt. In jedem Volumelement der Wirbelschicht soll sich demnach die gleiche Zahl von Partikeln befinden. Diese Annahme ist nur im Bereich der homogenen Wirbelschicht, wie in *Bild 9.1* bereits angedeutet wurde, näherungsweise erfüllt. Innerhalb des in *Bild 9.1* näher bezeichneten Bereiches der inhomogenen Wirbelschicht liefern die mitgeteilten Gesetze bestenfalls Näherungswerte. Genaue Angaben über die obere Gültigkeitsgrenze lassen sich noch nicht machen.

9.4 Günstige Betriebsgeschwindigkeit

Die günstigste Betriebsgeschwindigkeit ist diejenige Fluidgeschwindigkeit, bei der eine für den in der Wirbelschicht ablaufenden Prozeß *bestimmende* Größe den günstigsten Wert erreicht. Bei Wärme- und Stoffübergangsprozessen sind als charakteristische Größen die Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten zu wählen. Die Anströmgeschwindigkeiten, bei welchen die Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten α und β ihre maximalen Werte erreichen, werden mit \bar{w}_α und \bar{w}_β bezeichnet. Unmittelbar nach Einsetzen der Auflockerung steigen α und β fast sprunghaft an. Mit weiter wachsender Anströmgeschwindigkeit nehmen beide nur noch sehr langsam zu, durchlaufen das bereits genannte Maximum und fallen dann wieder ab. Für den Fall des Wärmeaustausches zwischen der Wirbelschicht und einer Heiz- bzw. Kühlfläche hat MERSMANN [9.13] die Geschwindigkeit \bar{w}_α aus fremden Meßwerten ermittelt. In *Bild 9.7* ist \bar{w}_α , bezogen auf die Lockerungsgeschwindigkeit \bar{w}_L , über der Archimedeszahl Ar aufgetragen. Zum Vergleich

ist auch das Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}_s/\bar{w}_L angegeben. Beide Kurven zeigen in qualitativer Hinsicht den gleichen Verlauf. Die Geschwindigkeitsverhältnisse nehmen mit zunehmender Archimedeszahl ab. Das Verhältnis \bar{w}_α/\bar{w}_L ist jedoch erwartungsgemäß stets kleiner als das Verhältnis \bar{w}_s/\bar{w}_L . Zu beachten ist, daß \bar{w}_α/\bar{w}_L im Bereich sehr kleiner Werte der Archimedeszahl, d. h. also, bei Wirbelschichten mit sehr feinkörnigen Feststoffen, bis auf etwa 35 ansteigt. Nach Gl.(9.14) ist dann aber $\varepsilon \approx 0,84$ und $h/h_L = 3,8$ gemäß Gl.(9.12), wenn man $Re_L = Ar = 0$ annimmt. Bei Wirbelschichten mit sehr feinkörnigen Partikeln muß also eine sehr starke Ausdehnung erreicht sein, damit der Wärmeübergangskoeffizient seinen maximalen Wert annimmt. Bei grobkörnigen Partikeln hingegen tritt der maximale Wert des Wärmeübergangskoeffizienten schon bei sehr geringer Ausdehnung der Wirbelschicht auf.

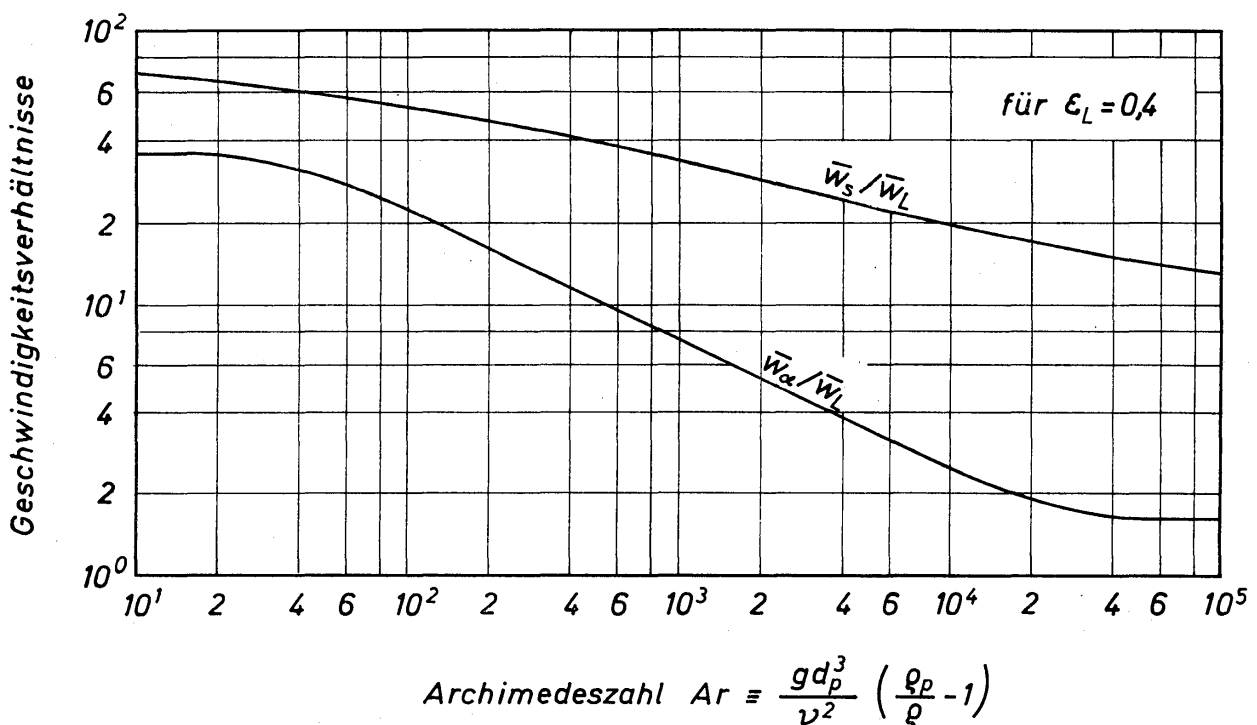


Bild 9.7. Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}/\bar{w}_L , bei dem der Wärmeübergangskoeffizient seinen maximalen Wert annimmt, abhängig von der Archimedeszahl Ar . Zum Vergleich ist das Verhältnis \bar{w}_s/\bar{w}_L eingetragen

Ist die Wirbelschicht stark ausgedehnt, so muß man mit einer sehr inhomogenen Zustandsform rechnen. Verbunden ist damit eine zeitlich starke Schwankung des Lückengrades und der Schichthöhe. Im allgemeinen vermeidet man beim Betrieb von Wirbelschichten diesen Zustand. Das bedeutet aber auch, daß in Schichten mit sehr feinkörnigen Partikeln die maximalen Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten nicht erreicht werden. In diesen Fällen richtet sich die Betriebsgeschwindigkeit nach der zulässigen Höhenänderung der Schicht. Das Höhenverhältnis wird häufig zu $h/h_L = 1,2$ bis $1,5$ gewählt. Dabei ergeben sich für die Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten Werte, die nicht viel kleiner sind als die maximalen, da die Erhöhung des Wärme- und Stoffüberganges vornehmlich in unmittelbarer Nähe der Lockerungsgeschwindigkeit erfolgt.

9.5 Bewegung von Feststoff und Fluid

In diesem Abschnitt soll auf die Bewegung des Feststoffes und des Fluids innerhalb der Wirbelschicht eingegangen werden. Dabei wird zunächst die Bewegung in der homogenen und anschließend die in der inhomogenen Wirbelschicht besprochen.

9.51 Bewegungen in der homogenen Wirbelschicht

Die homogene Wirbelschicht zeichnet sich dadurch aus, daß der Lückengrad, der sich bei einer bestimmten Anströmgeschwindigkeit \bar{w} einstellt, innerhalb des gesamten Schichtvolumens konstant ist. Die Partikeln sind also gleichmäßig im Volumen verteilt, und jede Partikel wird von einem gleich großen Fluidvolumen umgeben. Man kann auch sagen, daß sich in jedem Element des Schichtvolumens eine Partikel befindet. Die Größe des Volumelementes hängt vom Lückengrad der Wirbelschicht ab. Jede Partikel führt statistische Schwankungsbewegungen aus, denen häufig Rotationsbewegungen überlagert sind. Dabei können benachbarte Partikeln ihre Plätze tauschen. Somit steht also in der homogenen Wirbelschicht jeder Partikel das gesamte Schichtvolumen für ihre Bewegung zur Verfügung. Diese Bewegungsfreiheit kann jedoch nur durch Platztausch ausgenutzt werden, da der Lückengrad stets als konstant vorausgesetzt ist.

In der homogenen Wirbelschicht sollen zwischen den Partikeln keine Bindekräfte auftreten, die Partikeln sollen also über eine ideale Beweglichkeit verfügen. Dieser Zustand ist näherungsweise gegeben, wenn die Partikeln Kugelform besitzen, von einheitlicher Größe sind und elektrische Feldkräfte ausgeschlossen werden.

Unter den geschilderten Bedingungen können sich die Partikeln innerhalb des gesamten Schichtvolumens bewegen. Es findet also eine Durchmischung der Partikeln in axialer und in radialer Richtung statt, obgleich die Geschwindigkeit des Fluidstromes, aufgeteilt in viele einzelne Teilströme, über dem gesamten Querschnitt konstant ist. Von der Durchmischung in axialer Richtung vermitteln die in *Bild 9.8* zusammengestellten photographischen Aufnahmen eine anschauliche Vorstellung. Eine dünne Schicht aus schwarz gefärbten Partikeln vermischt sich unter Einwirkung eines Fluidstromes mit den nicht gefärbten Partikeln. Unmittelbar nach Einsetzen der Durchströmung, siehe *Bilder 9.8b* und *c*, führen Anlaufeffekte zu ungleichmäßiger Mischung. In *Bild 9.8e* erkennt man das Fortschreiten der Durchmischung nach Abschluß des Anlaufvorganges. Die Ausbreitung der gefärbten Partikelschicht in der gesamten Wirbelschicht erinnert an einen Diffusionsvorgang. Zur Kennzeichnung der Mischvorgänge wird daher auch ein Diffusionskoeffizient definiert, den RUCKENSTEIN [9.14 und 9.15] sowie JINESCU, TEOREANU und RUCKENSTEIN [9.16] berechneten. Ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen ergab in qualitativer Hinsicht eine gute Übereinstimmung. Mit zunehmendem Lückengrad wird die Durchmischung intensiver. Nach Untersuchungen von TALMOR und BENENATI [9.17] sind der Partikeldurchmesser und die auf die Lockerungsgeschwindigkeit bezogene Fluidgeschwin-

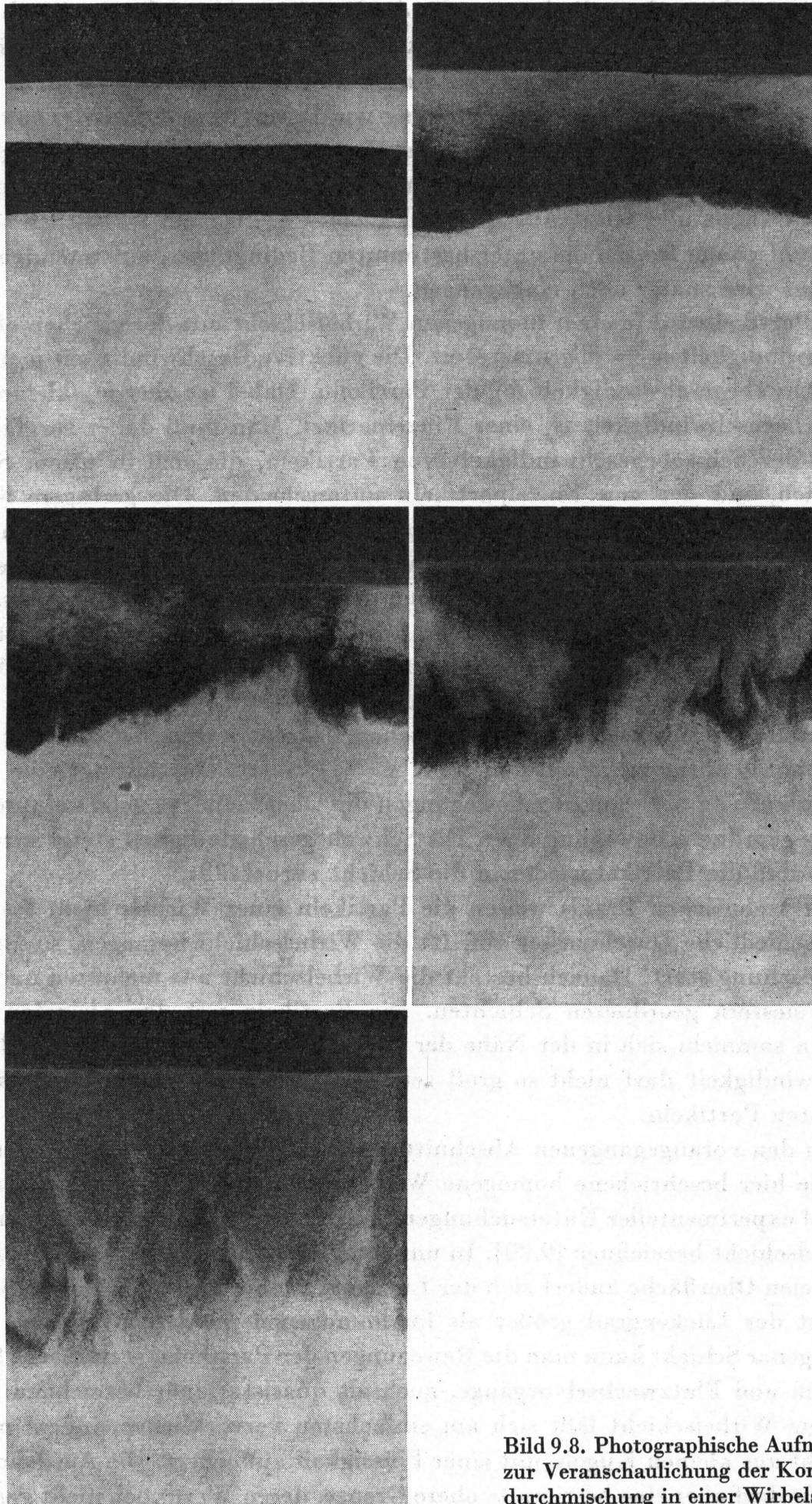


Bild 9.8. Photographische Aufnahmen zur Veranschaulichung der Korn-durchmischung in einer Wirbelschicht

digkeit von besonderer Bedeutung für die Durchmischung. Es ergab sich, daß die Feststoffzirkulation eine lineare Funktion der bezogenen Fluidgeschwindigkeit und eine Exponentialfunktion des Partikeldurchmessers ist. Zu dem gleichen Ergebnis führte auch eine Untersuchung von BUROVOI und SVETOSAROVA [9.18]. Von Interesse für den Mischvorgang ist das Spektrum der Geschwindigkeit, mit der sich die Partikeln innerhalb der Wirbelschicht bewegen. Ein solches Spektrum haben CARLOS und RICHARDSON [9.19] gemessen. Zu einer wesentlich stärkeren Durchmischung führen die unter bestimmten Bedingungen auftretenden Blasen. Hierauf wird später noch eingegangen.

Jede Partikel wird in einer homogenen Wirbelschicht mit der gleichen effektiven Geschwindigkeit $\bar{w}_e = \bar{w}/\varepsilon$ umströmt. Die effektive Geschwindigkeit \bar{w}_e ist gleich der Schwebegeschwindigkeit \bar{w}_{ss} der Partikeln. Dabei ist aber \bar{w}_{ss} kleiner als die Schwebegeschwindigkeit \bar{w}_s einer Einzelpartikel. Man muß daher sorgfältig zwischen der Schwebegeschwindigkeit von Partikeln, die sich in einem Schwarm befinden, und der von Einzelpartikeln unterscheiden. Die geringere Schwebegeschwindigkeit der im Schwarm befindlichen Partikeln ist vornehmlich auf den größeren Impulsaustausch mit dem Fluid zurückzuführen, das die Wirbelschicht durchströmt. Die für Partikelschwärme geltenden Gesetze sind in Abschnitt 7 behandelt worden. Mit zunehmender Ausdehnung der Wirbelschicht steigt die Schwebegeschwindigkeit \bar{w}_{ss} stetig an und erreicht als obere Grenze den Wert \bar{w}_s , die Schwebegeschwindigkeit der Einzelpartikel.

Die homogene Wirbelschicht hat eine scharf begrenzte Oberfläche, in der sich der Lückengrad sprunghaft auf den Wert $\varepsilon = 1$ ändert. Durchdringt eine Partikel im Verlauf von Schwankungsbewegungen die Oberfläche, so geht sie unmittelbar in eine geordnete Bewegung über. Die Schwebegeschwindigkeit steigt sprunghaft an, so daß die Partikel wieder in die Schicht zurückfällt.

In der technischen Praxis weisen die Partikeln einer Wirbelschicht fast immer unterschiedliche Durchmesser auf. Ist die Wirbelschicht homogen, so findet eine Entmischung statt. Danach besteht die Wirbelschicht aus mehreren nach Korn-durchmessern geordneten Schichten. Die Partikeln mit den kleinsten Abmessungen sammeln sich in der Nähe der freien Oberfläche. Die zulässige Betriebsgeschwindigkeit darf nicht so groß sein wie die Schwebegeschwindigkeit \bar{w}_s der kleinsten Partikeln.

Die in den vorangegangenen Abschnitten mitgeteilten Gesetze gelten streng nur für die hier beschriebene homogene Wirbelschicht. Als homogen kann man auf Grund experimenteller Untersuchungen immer nur den mittleren Abschnitt einer Wirbelschicht bezeichnen [9.20]. In unmittelbarer Nähe des Anströmbodens und der freien Oberfläche ändert sich der Lückengrad sehr stark. In beiden Abschnitten ist der Lückengrad größer als im homogenen mittleren Bereich. Nur bei homogener Schicht kann man die Bewegungen der Partikeln, statistische Schwankungen und Platzwechselvorgänge, noch als quasistationär bezeichnen. Die homogene Wirbelschicht läßt sich am einfachsten verwirklichen, indem man eine Schicht aus kleinen Kugeln mit einer Flüssigkeit auflockert. Die Ausdehnung der Schicht darf aber eine bestimmte obere Grenze, deren Wert noch nicht genau fest-

liegt, keinesfalls überschreiten. Wird die Partikelschicht von einem Gas durchströmt, dann ist nach bisherigen Erkenntnissen die höchste Geschwindigkeit, bei der die Wirbelschicht noch homogen ist, wesentlich niedriger, als wenn die Schicht von Flüssigkeiten durchströmt wird. Die Bestimmung der oberen Grenzgeschwindigkeit für die homogene Wirbelschicht ist wegen der großen Zahl von Einflußgrößen sehr schwierig.

9.52 Bewegungen in der inhomogenen Wirbelschicht

Die Wirbelschicht ist inhomogen, wenn sich der Lückengrad räumlich oder zeitlich stark ändert. Die wichtigsten Ursachen der Inhomogenität sind Blasen, die das Fluid in der Schicht bilden. Die Mehrzahl aller Untersuchungen über die Bewegung von Blasen wurde an gasdurchströmten Wirbelschichten durchgeführt [9.8].

Die Form der Gasblasen und die Bewegung der Feststoffpartikeln gehen aus den schematischen Darstellungen in *Bild 9.9* hervor, die nach Angaben von REUTER [9.21] sowie von ROWE und PARTRIDGE [9.22] angefertigt wurden. Die aufsteigende Blase hat die Form einer Kugel. Ihre Schale, von einigen wenigen Kornschichten gebildet, ist in der Lage, so große Stützkkräfte zu übertragen, daß die Kugelform erhalten bleibt. Die Partikeln der Schale werden im Verlauf des Blasenanstiegs fortlaufend erneuert. An der Blasenkappe bildet sich ein Stau-punkt, von dem aus die Schale mit neuen Partikeln versorgt wird. Hinter der Blase tritt ein Unterdruckgebiet auf, in das Partikeln, die sich mit größerer Geschwindigkeit bewegen als die aufsteigende Blase, eindringen und dabei in die

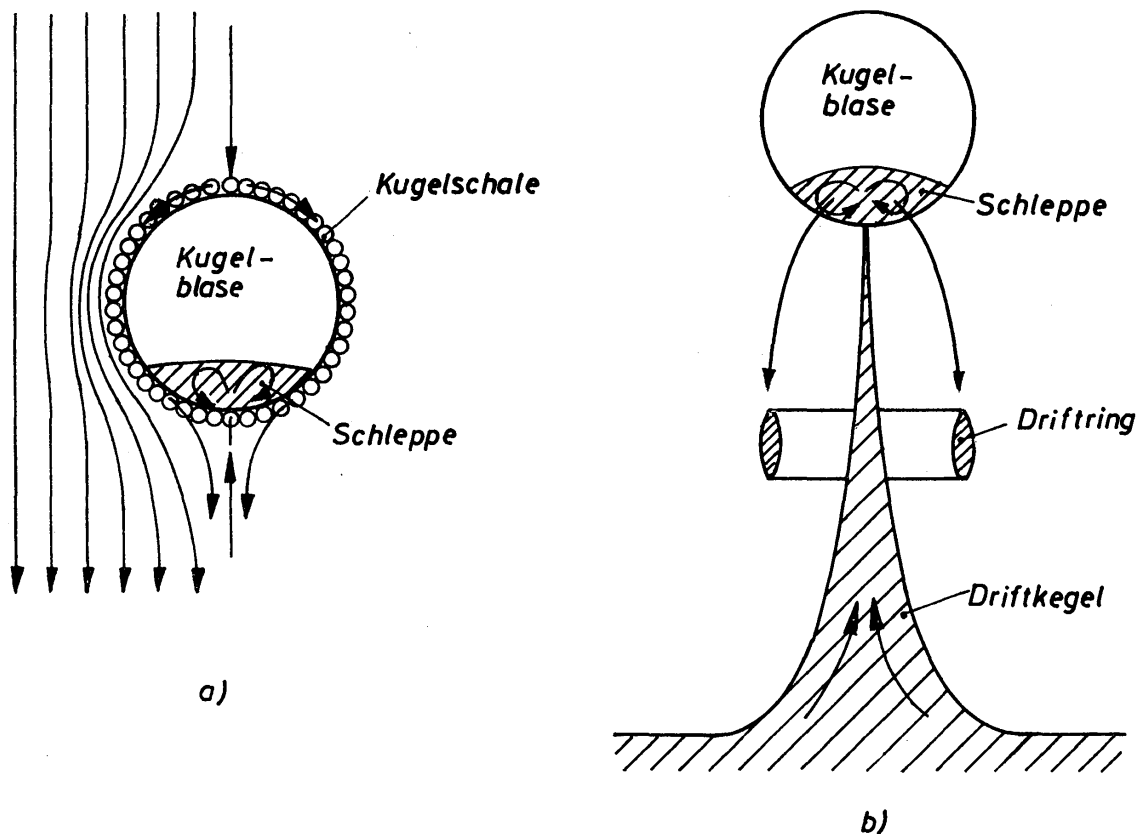


Bild 9.9. Schematische Darstellungen von der Bewegung von Kugelblasen durch Partikelschichten

Blase selbst gelangen. Die Partikelbewegung im Nachlaufgebiet der Blase ist in *Bild 9.9b* gesondert dargestellt. Im Nachlaufgebiet entsteht ein Driftkegel, durch den die Partikeln bis in die Blase gelangen, wo sie eine als Schleppe bezeichnete sekundäre Wirbelschicht bilden. Das in die Blase stetig eindringende Schleppmaterial wird in kurzen zeitlichen Abständen in Driftringen wieder ausgeschieden. Im Idealfall ist die Blasenschale so stabil, daß sie mit Ausnahme des rückwärtigen Staupunktes für Feststoffpartikeln undurchlässig ist, es «rieselt» also kein Feststoff von oben her in die Blase hinein. Zum Durchrieseln kommt es nur bei gestörter Blasenbewegung, z. B. wenn sehr viele Blasen in der Wirbelschicht vorhanden sind. Hierbei können auch stärkere Deformationen auftreten, wobei die Blasen die Form eines Rotationsellipsoids annehmen.

Der Feststofftransport im Driftkegel führt zu einer starken Durchmischung in axialer Richtung. Das ist auch dann der Fall, wenn die Partikeln unterschiedliche Durchmesser aufweisen. Die Feststoffdurchmischung in axialer Richtung ist für den Wärme- und Stoffübergang in Wirbelschichten fast immer von Nachteil.

Die Strömung des Gases durch die Wirbelschicht hängt im wesentlichen von der Steiggeschwindigkeit der Blasen ab. Bei sehr kleinem Gasdurchsatz ist die Steiggeschwindigkeit der Blasen größer als die Gasgeschwindigkeit in der angrenzenden Partikelschicht. In diesem Falle saugt die Blase Gas aus der angrenzenden Schicht an, deren Lückengrad dadurch verringert wird. Ist hingegen die Gasgeschwindigkeit größer als die Steiggeschwindigkeit der Blasen, dann wird die Blase stetig vom Gas durchströmt.

Für die stationäre Steiggeschwindigkeit $w_{b,s}$ von Blasen gilt, so man die Dichte des Gases gegenüber der Dichte des Feststoffes vernachlässigen kann, die allgemeine Beziehung

$$w_{b,s} = \frac{4}{3} \left(\frac{g d_b}{\zeta} \right)^{1/2} . \quad (9.16)$$

Hierin bedeuten d_b den Blasendurchmesser und ζ den Widerstandsbeiwert der Blase. Nach Angaben von ROWE und PARTRIDGE [9.22] liegt der Widerstandsbeiwert ζ in der Größenordnung von 3 und nach Angaben von REUTER [9.23] in der Größenordnung von 2. Für die Bewegung von Gasblasen in Flüssigkeiten würden sich unter vergleichbaren Bedingungen Werte von $\zeta = 0,47$ ergeben. Der Widerstandsbeiwert von Blasen ist also in Wirbelschichten ein Vielfaches des Widerstandsbeiwertes von Blasen in Flüssigkeiten. Weitere Angaben über die Blasenbewegung in Wirbelschichten sind in einer Arbeit von PYLE und HARRISON [9.24] zusammengefaßt.

Bei sehr großem Gasdurchsatz wird der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Blasen so gering, daß die nacheilende Blase in das Unterdruckgebiet der vorausseilenden gelangt. Dadurch erhöht sich ihre Steiggeschwindigkeit, und es kommt zur Vereinigung beider Blasen. Wegen des größeren Durchmessers besitzt die neue Blase eine größere Steiggeschwindigkeit. Auch nebeneinander aufsteigende Gasblasen können sich vereinigen, wenn ihr Abstand zu gering geworden ist.

Dank sehr sorgfältiger Messungen konnte REUTER [9.25] genauen Aufschluß über die Druckverteilung in der Umgebung der Blase erhalten. In *Bild 9.10* ist der Druck in der senkrechten Symmetrieachse der Blase qualitativ angegeben. In einer homogenen Wirbelschicht ändert sich der Druck entlang der gestrichelten Linie. Bei Vorhandensein einer Blase gibt die ausgezogene Linie den Druckverlauf wieder. Unterhalb der Blase stellt sich ein größerer Druckgradient ein als oberhalb. Folglich tritt ein zusätzlicher Gasstrom auf, der, von unten kommend, in die Blase eindringt und sie oben wieder verläßt. Der Druckmittelpunkt ist wegen der Schleppe aus dem Kugelmittelpunkt verschoben.

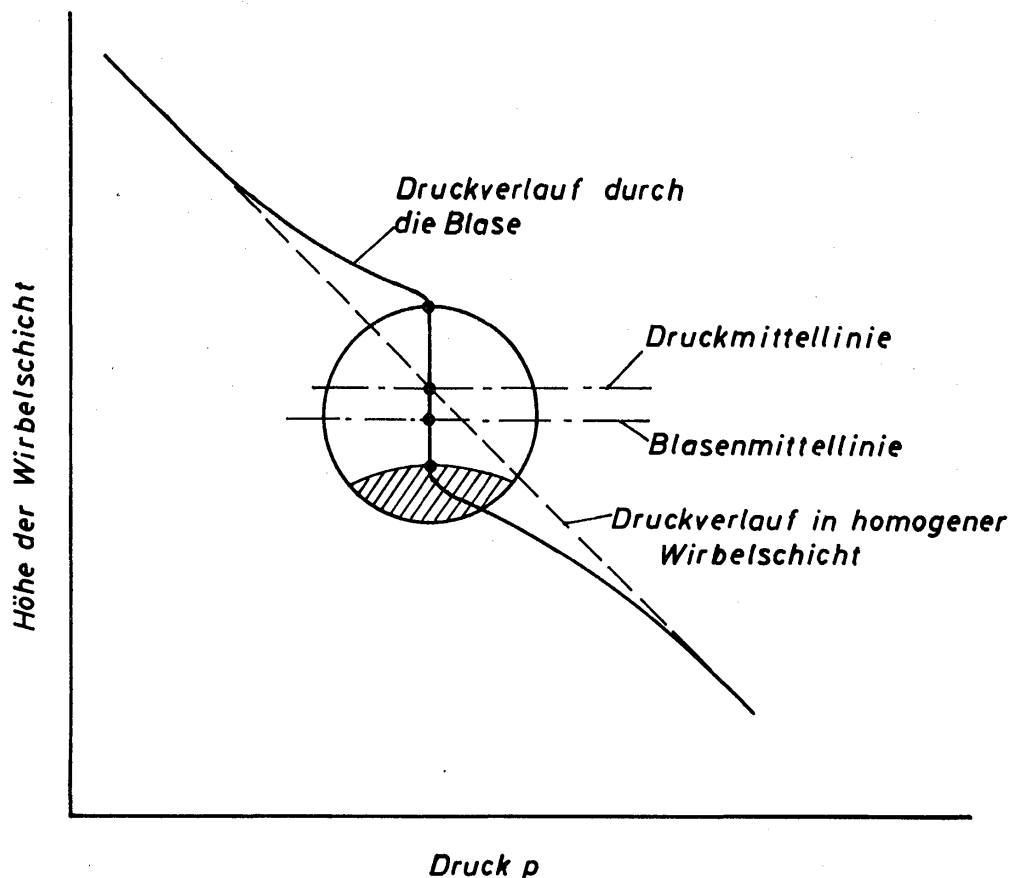


Bild 9.10. Druckverlauf in der Umgebung einer Kugelblase, die sich durch eine Partikelschicht bewegt

Nach zahlreichen Untersuchungen, deren Ergebnisse von DAVIDSON und HARRISON [9.8] zusammenfassend diskutiert werden, sind in einer Wirbelschicht nur solche Blasen stabil, die einen bestimmten Durchmesser nicht überschreiten. Größere Blasen, die sich beim Eintreten des Fluids in die Schicht und durch Vereinigung mehrerer kleiner bilden, zerfallen wieder. Der größte stabile Durchmesser von Flüssigkeitsblasen ist wesentlich kleiner als der von Gasblasen. Sind die Durchmesser von Blase und Gefäß von gleicher Größenordnung, dann besteht die Gefahr, daß größere Anteile des Feststoffes als kolbenförmige Einheiten von den Gasblasen hochgedrückt werden. Die Feststoffkolben lösen sich nur sehr langsam auf, indem die Partikeln durch die Blase hindurchrieseln. Die

Wirbelschicht dehnt sich zu großer Höhe aus, die man jedoch nicht vorausberechnen kann. Dieser Betriebszustand sollte unbedingt vermieden werden. Bei sehr starker Ausdehnung der Wirbelschicht, wobei der Lückengrad nicht mehr sehr weit von $\varepsilon = 1$ entfernt ist, neigen die Feststoffpartikeln zur Bildung von Ballen oder Wolken, wie es in *Bild 9.1* bereits angedeutet ist. Ähnlich wie die Gasblasen bei noch verhältnismäßig niedrigem Lückengrad, sind auch die Partikelballen und -wolken starken zeitlichen Änderungen unterworfen. Im Verlauf der Bildungs- und Auflösungsvorgänge vermögen sich sowohl die örtlichen als auch die mittleren Werte des Lückengrades und somit auch die Schichthöhe in weiten Grenzen zu ändern.

Auf Grund der zahlreichen Beobachtungen über die Blasenbewegung gelangten TOOMEY und JOHNSTONE [9.26] zu der Vorstellung, daß in einer von Blasen durchsetzten Wirbelschicht der hindurchtretende Fluidstrom in zwei Teile zerlegt gedacht werden kann. Der eine Teil bewegt sich in Form von Blasen durch die Schicht, während der zweite Teil durch die homogene Schicht strömt. Dieser zweite Anteil ist gerade so groß, daß seine Geschwindigkeit mit der am Lockerungspunkt übereinstimmt und somit in der Lage ist, die Beweglichkeit der Partikeln zu gewährleisten. Diese Vorstellung wurde später insbesondere von LOCKETT, DAVIDSON und HARRISON [9.27], PYLE und HARRISON [9.28], MARSHEK und GOMEZPLATA [9.29] sowie HALWAGI und A. GOMEZPLATA [9.30] weiterentwickelt, experimentell überprüft und weitgehend bestätigt gefunden.

9.53 Übergang von der homogenen zur inhomogenen Wirbelschicht

Der Übergang von der homogenen zur inhomogenen Wirbelschicht ist durch das Auftreten von Blasen gekennzeichnet. Nach JACKSON [9.31] sowie PIGFORD und BARON [9.32] ist die Blasenbildung auf die Instabilität der homogenen Wirbelschicht gegenüber kleinen periodischen Störungen zurückzuführen. Die homogene Wirbelschicht ist demnach grundsätzlich instabil. Man gelangt zu der Vorstellung, daß ein Fluid die Wirbelschicht immer in Form von Blasen durchdringt, deren Durchmesser bei sehr geringem Fluidstrom die Größenordnung der Partikeldurchmesser besitzen und somit nicht wahrgenommen werden. Erst bei größerem Fluidstrom sind die Blasen so weit angewachsen, daß sie beobachtet werden können. Diese Vorstellung von der Bewegung des Fluids widerspricht jedoch den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen, über die WILHELM und KWAIK [9.33] sowie LEVA [9.3] berichtet haben.

Wegen dieser unbefriedigenden Ergebnisse haben sich in der Folge zahlreiche Forscher mit diesem Problem eingehend beschäftigt [9.34 bis 9.39]. Eine endgültige Klärung ist aber noch nicht erreicht worden. Trotzdem soll hier auf ein interessantes Ergebnis hingewiesen werden, welches MOLERUS [9.40] erzielte, indem er die Instabilität der homogenen Wirbelschicht auf der Grundlage eines gegenüber früheren Rechnungen erweiterten mathematischen Modells untersuchte. Für die fluide Phase wird eine schleichende Bewegung, also $Re \rightarrow 0$, vorausgesetzt. Als Maß für die Stabilität definiert MOLERUS eine Größe

$$S \equiv \frac{\nu \cdot \frac{\rho}{\rho_p} e^{\frac{4,1(1-\varepsilon)}{0,64+\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon^3 \cdot (1-\varepsilon) (1-\rho/\rho_p) g d_p^3}} \quad (9.17)$$

Überschreitet S einen bestimmten Wert, dann wird die homogene Wirbelschicht instabil, und es bilden sich Blasen. Zur graphischen Darstellung von Gl.(9.17) ist es zweckmäßig, sie in die folgende Form zu bringen:

$$S^2 Ar \frac{\rho_p}{\rho} = \frac{e^{\frac{8,2(1-\varepsilon)}{0,64+\varepsilon}}}{\varepsilon^3(1-\varepsilon)} \quad (9.18)$$

In *Bild 9.11* ist diese Gleichung dargestellt. Für S wurde von MOLERUS aus Versuchsergebnissen der Wert $1,42 \cdot 10^{-2}$ ermittelt, der möglicherweise aber nicht konstant, sondern mit dem Lückengrad ε veränderlich ist. Der mitgeteilte Wert ergab sich aus Untersuchungen, denen zufolge die Wirbelschicht bei $\varepsilon = 0,6$ instabil wurde. Es wären also weitere Untersuchungen erwünscht, die darüber Aufschluß liefern, in welchem Maße ε den Wert von S beeinflusst.

Bild 9.11 zufolge sind alle Wirbelschichten, für die $S^2 Ar \rho_p/\rho$ kleiner als 24 ist, grundsätzlich stabil. Das kann in praktischen Fällen fast immer nur dann zutreffen, wenn die Partikelschicht durch Flüssigkeiten aufgewirbelt wird. Dieses Ergebnis stimmt mit der Erfahrung überein. Bei von Gasen aufgewirbelten

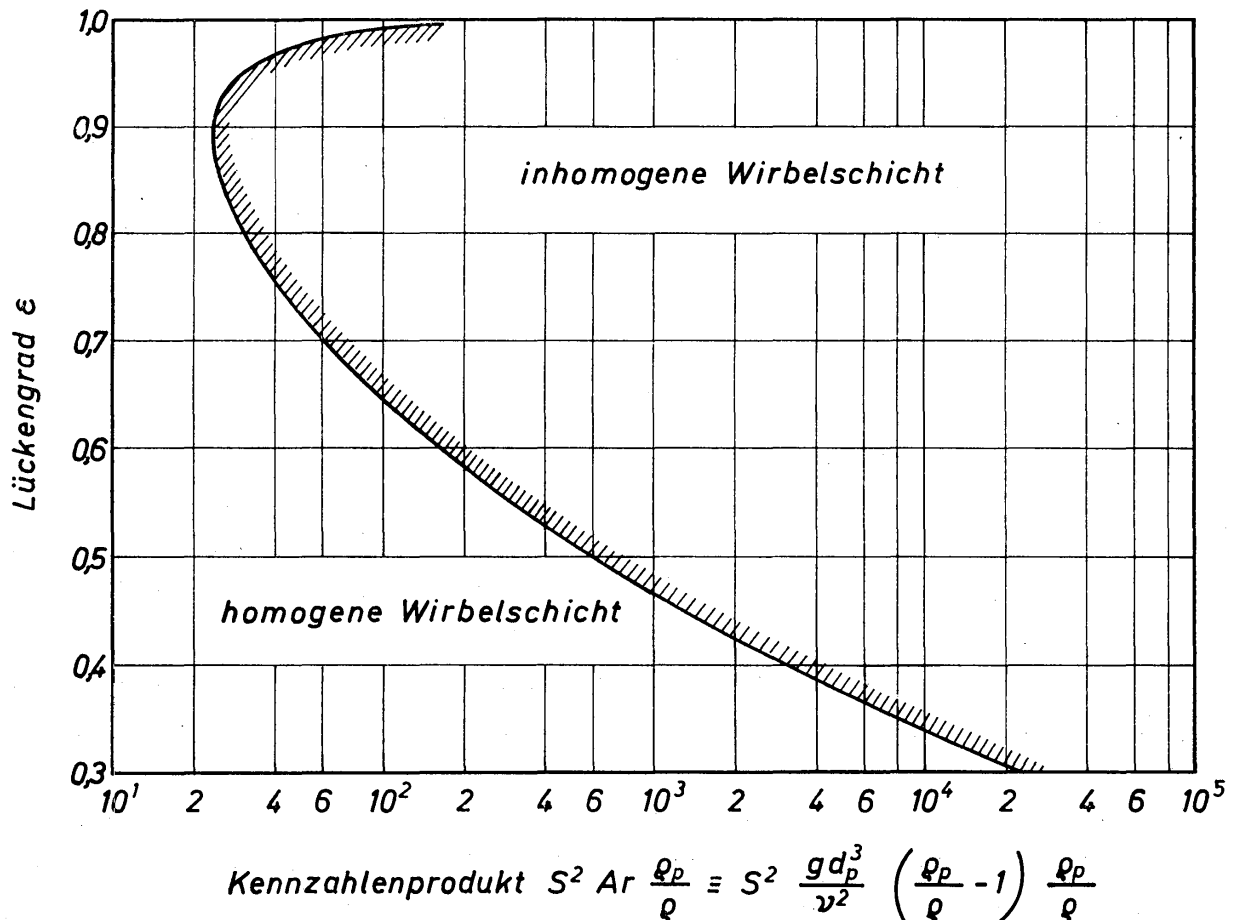


Bild 9.11. Abgrenzung des homogenen vom inhomogenen Bereich der Wirbelschicht. Die Grenzlinie wurde nach Gl.(9.18) berechnet

Schichten muß man indes mit den für die Instabilität charakteristischen Blasen rechnen. Bemerkenswert ist jedoch, daß die Instabilität stets auf einen begrenzten Bereich des Lückengrades ε beschränkt ist. So ist es theoretisch also möglich, daß die Wirbelschicht bei Werten von ε , die nur wenig kleiner als 1 sind, wieder stabil wird. Diese Stabilität ist in den meisten Fällen jedoch nicht mehr von praktischer Bedeutung. Interessant ist jedoch, daß dieses theoretische Ergebnis durch Versuche, über die LEVA [9.3] berichtet hat, bestätigt wird. Hingewiesen sei ferner darauf, daß WILHELM und KWAUK [9.33] auf Grund experimenteller Untersuchungen zu einem sehr ähnlichen Ausdruck für das Stabilitätsmaß gelangten wie MOLERUS.

Experimentelle und theoretische Untersuchungen weisen darauf hin, daß es durch günstige Gestaltung des Auflagebodens für die Wirbelschicht offenbar möglich ist, die Instabilitätsgrenze zu erhöhen [9.41]. So gelang die Beseitigung der Blasenbildung beispielsweise dadurch, daß man auf den Auflageboden, der aus porösem nichtrostendem Stahl bestand, zunächst eine Schicht aus Glaskugeln und anderen Füllkörpern legte [9.42].

Bei sehr strenger Auslegung der physikalischen Bedingungen gelten die in den Abschnitten 9.2 und 9.3 durchgeführten Rechnungen nur innerhalb des Bereiches der homogenen Wirbelschicht. Tatsächlich werden sie aber auch noch jenseits der Stabilitätsgrenze, also für die inhomogenen Wirbelschichten, gelten, so lange die zeitlichen Schwankungen des Lückengrades und somit auch der Schichthöhe nicht zu groß sind. Verhältnismäßig geringe Schwankungen sind dann zu erwarten, wenn die Zahl der Blasen nicht zu groß und wenn der Blasendurchmesser klein im Verhältnis zu den Schichtabmessungen ist. Ungültig sind die Rechnungen indes, wenn die inhomogene Wirbelschicht so stark ausgedehnt ist, daß sich Partikelballen oder Partikelwolken bilden; denn hierbei sind die zeitlichen Schwankungen von Lückengrad und Schichthöhe im allgemeinen sehr groß.

9.54 Periodische Schwankungsbewegungen der Kornmasse

Eine beim praktischen Betrieb von Wirbelschichten beobachtete Erscheinung zeichnet sich dadurch aus, daß sich die Verteilung der Kornmasse innerhalb der Wirbelschicht periodisch ändert. Diese Erscheinung sei an Hand von *Bild 9.12* erörtert. Bei sehr kleiner Anströmgeschwindigkeit wird sich die in einer Wirbelschicht befindliche Kornmasse über den gesamten Strömungsquerschnitt gleichmäßig verteilen. Dieser Zustand ist in *Bild 9.12a* angedeutet. Erhöht man die Anströmgeschwindigkeit über einen kritischen Wert hinaus, so ändert sich die Höhe der Kornmasse über den Säulenquerschnitt. Dieser Vorgang verläuft den Beobachtungen zufolge periodisch. Er ist in den *Bildern 9.12b* und *c* in schematisierter Form dargestellt. Die periodische Änderung der Kornmassenverteilung bleibt für einen begrenzten Bereich der Anströmgeschwindigkeit erhalten. Erst bei Überschreiten eines weiteren kritischen Wertes der Anströmgeschwindigkeit stellt sich eine andere Verteilung der Kornmasse ein, die gleichzeitig mit neuen Bewegungszuständen verbunden ist.

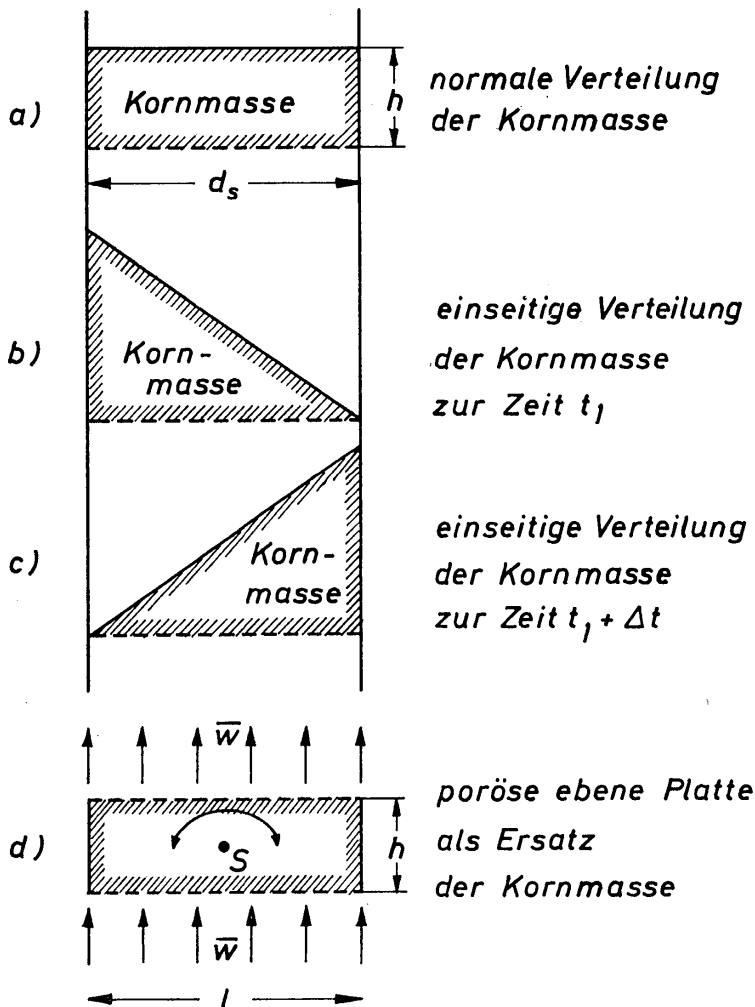


Bild 9.12
 Zur Erläuterung von periodischen Schwankungsbewegungen der in Wirbelschichten befindlichen Kornmassen

Befindet sich die Wirbelschicht in einer zylindrischen Säule mit verhältnismäßig kleinem Durchmesser, so beobachtet man nebst den in den *Bildern 9.12b* und *c* dargestellten Verteilungen eine Bewegung der Kornmasse in Umfangsrichtung. Der Kornmassenbewegung in radialer ist eine solche in tangentialer Richtung überlagert.

Bleiben die Anströmgeschwindigkeit und die Höhe der Kornmasse unverändert und vergrößert man den Säulendurchmesser über einen bestimmten Wert hinaus, so beobachtet man folgendes: Die Wirbelschicht bildet mehrere Zellen aus; innerhalb einer jeden Zelle laufen die bereits beschriebenen periodischen Vorgänge ab. Eine Ortsänderung der Zellen ist dabei aber durchaus möglich.

Die beschriebenen Vorgänge werden sowohl in Laboratoriumsanlagen als auch in technischen Anlagen beobachtet. In solchen mit großen Abmessungen können sie zu Betriebsstörungen führen. In jedem Falle sind sie eine entscheidende Ursache dafür, daß die in Wirbelschichten ablaufenden Prozesse entweder gar nicht oder nur sehr ungenau vorausberechnet werden können. Aus diesem Grunde wäre eine gründliche Untersuchung der Kornmassenbewegung sehr erwünscht.

In der obigen Beschreibung wurde die sehr verwickelte Kornmassenbewegung stark vereinfacht und schematisiert. Wollte man den Versuch unternehmen, diese Vorgänge theoretisch zu untersuchen, so müßte man sicher ein Modell entwickeln, das noch erheblich einfacher ist als das in den *Bildern 9.12b* und *c* dargestellte. Ein solches vereinfachtes Modell wäre beispielsweise eine ebene, poröse Platte,

die in *Bild 9.12d* skizziert ist. Die Platte wird von einem Fluid durchströmt, dessen mittlere Anströmgeschwindigkeit \bar{w} ist. Eine Umströmung der Platte wird ausgeschlossen. Innerhalb der Platte ist die Kornmasse unbeweglich. Die in der Wirbelschicht beobachtete periodische Änderung der Kornmassenverteilung wird durch eine Schwingung der Platte um den Schwerpunkt S zum Ausdruck gebracht. Amplitude und Frequenz dieser Schwingungen sind mit Sicherheit Funktionen der Plattenlänge l , der Dicke h , des Lückengrades ε , der Materialdichte ρ_p , der Fluidgeschwindigkeit \bar{w} sowie sonstiger Größen der Platte und des Fluids. Die Schwingungen werden ausgelöst durch periodische Änderungen in der Geschwindigkeitsverteilung auf der Anströmseite. Hierdurch werden auf der Anströmseite der Platte ein ortsveränderliches Druckfeld und innerhalb der porösen Platte ortsveränderliche Reibungskräfte hervorgerufen. Die auf dieser Grundlage durchgeführten Rechnungen würden sicherlich wertvolle Hinweise auf das Verhalten von Wirbelschichten liefern.

Für den in der Praxis tätigen Ingenieur wird das Problem vornehmlich darin bestehen, die Wirkung der periodisch veränderlichen Kornmassenverteilung zu verringern. Eine Lösungsmöglichkeit wäre die Aufteilung der Wirbelschicht in viele kleine Zellen, da dann nur noch kleine Kornmassen in schwingende Bewegung geraten.

9.6 Mehrstufige Wirbelschichtanlagen

In diesem Abschnitt soll das Verhalten einer neuartigen mehrstufigen Wirbelschichtanlage beschrieben werden, die sich dadurch auszeichnet, daß sich sowohl das Fluid als auch der körnige Feststoff kontinuierlich durch sie hindurchbewegen. Zum besseren Verständnis der besonderen Eigenschaften dieser Anlage sollen einige allgemeine Bemerkungen über Wirbelschichten und herkömmliche Bauarten vorausgeschickt werden.

Unter bestimmten Bedingungen lassen sich in Ruhe befindliche Schüttschichten durch entgegen der Schwerkraft strömende Fluide so stark auflockern, daß man eine Wirbelschicht erhält. Sie wird der ruhenden Schüttschicht vielfach vorgezogen, wenn es insbesondere auf eine gute Ausnutzung der Partikeloberfläche ankommt. Je größer die verfügbare Phasengrenzfläche ist, desto wirkungsvoller verlaufen z. B. katalytische Reaktionen sowie Wärme- und Stoffaustauschvorgänge.

Die Verwirbelung der Partikeln begünstigt den Ausgleich von Temperaturen und Konzentrationen innerhalb der gesamten Wirbelschicht. Der Ausgleichsvorgang über den Querschnitt des Apparates ist fast immer vorteilhaft, der in axialer Richtung hingegen fast immer nachteilig. Die Austauschvorgänge in beiden Richtungen sind untrennbar miteinander verbunden. Es ist daher nicht möglich, den Ausgleichsvorgang in Längsrichtung zu vermindern, ohne nicht auch gleichzeitig den in Querrichtung herabzusetzen.

In jeder Wirbelschicht gibt es Bereiche, in denen sich die Partikeln und das Fluid in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung bewegen. Am günstigsten ist für

Wärme- und Stoffaustauschprozesse der Gegenstrom, da sich hierbei die größten Temperatur- bzw. Konzentrationsdifferenzen ergeben. Das gleichzeitige Auftreten von Gleichstrom- und Gegenstrombereichen ist zwangsläufig; es ist daher auch nicht möglich, den Gleichstrom zu verhindern und den Gegenstrom zu verstärken. Im Gleichstrombereich ist der Lückengrad, der die Auflockerung der Schicht kennzeichnet, geringer als im Gegenstrombereich. Der relativ größere Anteil des Fluidvolumens strömt deshalb durch den Gleichstrombereich. Somit ist jede Wirbelschicht durch eine ungleichmäßige Durchströmung gekennzeichnet, die sich mit zunehmender Auflockerung verstärkt.

Gleichzeitig nehmen auch die örtlichen und zeitlichen Schwankungen der Verteilung des Feststoffes innerhalb der Schicht, d.h. des Lückengrades, zu. Das bedeutet, daß insbesondere die Höhe der Wirbelschicht zeitlich starken Änderungen unterliegt und somit die Apparatehöhe nicht eindeutig festgelegt werden kann. Aus diesem Grunde werden in der technischen Praxis die stark aufgelockerten Wirbelschichten nach Möglichkeit vermieden und die dichten Wirbelschichten bevorzugt. Die dabei auftretenden Fluidgeschwindigkeiten sind nicht sehr viel größer als die am Lockerungspunkt und daher wesentlich kleiner als diejenigen, die zur Erzielung des günstigsten Wärmeüberganges erstrebenswert sind.

Im Hinblick auf die Weiterentwicklung von Wirbelschichtanlagen muß man sich, da ihre Vorteile genügend bekannt sind, der Nachteile bewußt sein. Bei einstufigen Anlagen üblicher Bauart sind diese:

- 1) absatzweiser Betrieb im Hinblick auf den Feststoff;
- 2) Durchmischung von Feststoff und Fluid in axialer Richtung;
- 3) breites Verweilzeitspektrum für das Fluid;
- 4) starke Änderung des Lückengrades in axialer Richtung infolge der hohen Auflockerung;
- 5) die bevorzugte Fluidgeschwindigkeit ist wesentlich niedriger als die für einen guten Wärmeaustausch mit der Umgebung optimale.

Einige dieser Nachteile lassen sich bei Verwendung einer mehrstufigen Wirbelschicht vermeiden. In *Bild 9.13 a* und *b* sind zwei verschiedene Anlagen in schematisierter Form dargestellt. *Bild 9.13 a* zeigt die herkömmliche Bauart. Die gesamte Wirbelschicht ist in mehrere Stufen unterteilt. Üblicherweise beträgt die Stufenzahl etwa 3 bis 4. Die Öffnungen in einem Stufenrost sind so bemessen, daß nur das Fluid hindurchtreten kann. Dabei ist der Durchmesser der Öffnungen sehr klein, damit die Feststoffpartikeln nicht hindurchtreten können. Zwischen zwei übereinander angeordneten Stufen befindet sich ein Verbindungskanal, durch den sich die Partikeln vom höheren zum tieferen Boden bewegen. Diese Anlage ist also dadurch gekennzeichnet, daß sich Fluid und Partikeln auf getrennten Wegen von einem Boden zum anderen bewegen. Jeder Durchmischungsperiode beider Phasen in einer Wirbelschichtstufe folgt eine Entmischungsperiode, während der die beiden Phasen zur nächsten Stufe gelangen. Die fluide Phase bewegt sich zur nächst höheren und die partikelförmige feste Phase zur nächst tieferen Stufe. Diese Art der mehrstufigen Wirbelschichtanlage stimmt weit-

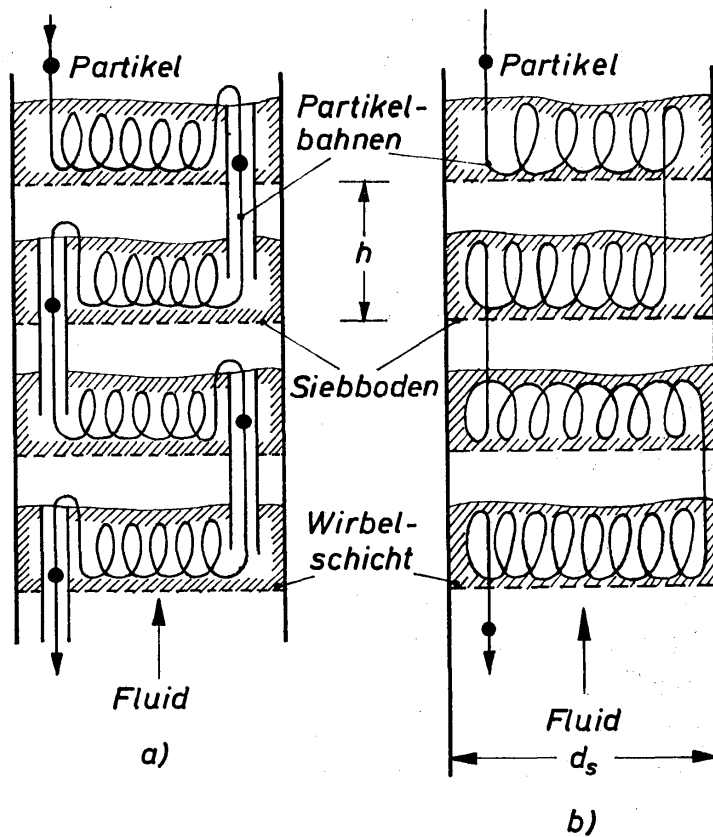


Bild 9.13

Schemazeichnungen von zwei Bauformen für mehrstufige Wirbelschichtanlagen mit kontinuierlichem Partikeldurchfluß

gehend mit der Siebbodenkolonne überein, die für die Rektifikation verwendet wird. Ein sicherer Betrieb dieser Anlage ist nur innerhalb eines begrenzten Bereiches der Fluidbelastung gewährleistet, da der Druckverlust bei der Durchströmung eines Bodens stets kleiner sein muß als bei der Durchströmung der Verbindungskanäle. Das Betriebsverhalten solcher herkömmlichen mehrstufigen Wirbelschichtanlagen ist von WINTERSTEIN und ROSE [9.43], ROSE und WINTERSTEIN [9.44] und in dem Buch von BERANEK, SOKOL und WINTERSTEIN [9.7] ausführlich beschrieben worden.

Im Vergleich zur einstufigen Anlage werden mittels der in *Bild 9.13 a* dargestellten mehrstufigen Anlage die beiden folgenden Vorteile erzielt: 1) Sowohl das Fluid als auch der körnige Feststoff bewegen sich kontinuierlich durch die Anlage. 2) Die Rückvermischung des Feststoffes und des Fluids ist in axialer Richtung auf eine Stufe begrenzt. Die anderen für einstufige Wirbelschichten bereits genannten Nachteile werden nicht vermieden. Es treten sogar weitere Nachteile auf, die vor allem durch die getrennten Wege beim Transport der Partikeln und des Fluids zur jeweils nächsten Stufe bedingt sind. Erwähnt seien insbesondere die eingeeengte Nutzung des Kolonnenquerschnitts für die Wirbelschicht, der begrenzte Betriebsbereich bezüglich der Fluidbelastung und die erschwerten Anfahr- und Abschaltvorgänge dieser Anlage.

Diese Nachteile lassen sich vermeiden, wenn man eine mehrstufige Wirbelschichtanlage entsprechend der in *Bild 9.13 b* gezeigten Art verwendet. Hierbei sind die Öffnungen der Bodenroste so groß, daß sowohl das Fluid als auch die Partikeln durch sie hindurchtreten können. Dadurch ergibt sich der denkbar einfachste Aufbau für eine mehrstufige Wirbelschichtanlage. Die periodische Entmischung

der beiden Phasen in Anlagen des in *Bild 9.13 a* gezeigten Typs tritt hierbei nicht auf. Da die Partikeln durch die Bodenöffnungen hindurchrieseln, spricht man von einer Rieselboden-Wirbelschicht. Sie zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

- 1) kontinuierlicher Durchfluß des körnigen Feststoffes und des Fluids;
- 2) Gegenstrom von Feststoff und Fluid;
- 3) gleichmäßige Verteilung des Feststoffes über der Höhe der Anlage;
- 4) nahezu ideale Durchmischung von Feststoff und Fluid in jeder Stufe;
- 5) sehr enges Verweilzeitspektrum für Feststoff und Fluid bei größerer Stufenzahl;
- 6) geringe Rückvermischung für Feststoff und Fluid;
- 7) weiter Bereich für die Fluidbelastung;
- 8) sicherer Betrieb bei dichten und lockeren Wirbelschichten,
- 9) einfacher Aufbau der Anlage und
- 10) Möglichkeit zur Berechnung der für den Betrieb wichtigen Größen.

Zur Berechnung der mehrstufigen Rieselboden-Wirbelschichtanlage müssen der Druckverlust, die Konzentration der Partikeln in einer Stufe, der Partikel-durchfluß bzw. die mittlere Verweilzeit und die Verweilzeitverteilung in einer Stufe bekannt sein. Die hierfür erforderlichen Untersuchungen wurden an einer Anlage durchgeführt, deren Durchmesser $d_s = 64$ mm betrug. In der Anlage befanden sich entweder 14 oder 27 Stufen. Der Stufenabstand betrug 60 mm. Auf die Gesetzmäßigkeiten für die erwähnten Größen wird im folgenden eingegangen.

9.61 Druckverlust

Für eine einzelne Stufe setzt sich der insgesamt auftretende Druckverlust Δp aus dem Anteil Δp_R für die Reibung an der Kolonnenwand, aus dem Anteil Δp_B für die Durchströmung des Bodens und aus dem Anteil Δp_W für die Durchströmung der Wirbelschicht zusammen:

$$\Delta p = \Delta p_R + \Delta p_B + \Delta p_W. \quad (9.19)$$

Auf die Ermittlung der Anteile Δp_B und Δp_W wird im folgenden eingegangen. Die Versuche ergaben, daß der Anteil Δp_R im Vergleich zu den beiden anderen Anteilen vernachlässigbar klein ist.

9.611 Druckverlust bei der Durchströmung eines Bodens

Die Böden bestanden aus Messingscheiben, deren Durchmesser $d_s = 64$ mm und deren Dicke $s = 1$ mm betragen. In den Scheiben befanden sich Löcher mit dem Durchmesser d_B , die in den Eckpunkten gleichseitiger Dreiecke angeordnet waren. Ist t die Länge einer Dreiecksseite, dann ist t/d_B das Teilungsverhältnis.

Der Druckverlust eines gelochten Bodens hängt von dem Verhältnis φ aus freier Lochquerschnitts- und Scheibenquerschnittsfläche ab. Bei Anordnung der Löcher auf den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks ist

$$\varphi = \frac{0,907}{(t/d_B)^2} \quad (9.20)$$

Mit $t/d_B = 1$ ergibt sich als maximaler Wert $\varphi_{\max} = 0,907$. Der praktisch auftretende Wert ist jedoch wesentlich niedriger, da zwischen den Löchern noch ein Steg vorhanden sein muß. Bei einem Lochdurchmesser von $d_B = 7$ mm wurde $t = 8$ mm gewählt. Für diesen Fall erhält man mit Gl. (9.20) $\varphi = 0,695$. Wegen unvermeidbarer Störungen am Scheibenrand wird das Flächenverhältnis φ nochmals kleiner. In den bei den Versuchen verwendeten Scheiben waren 51 Löcher, so daß sich $\varphi = 0,61$ ergab. Der Bohrungsgrat wurde entfernt, so daß leicht abgerundete Lochkanten entstanden.

Zur Darstellung des Druckverlustes in dimensionsloser Form wurden der Widerstandsbeiwert für den Lochboden

$$\zeta_B \equiv \frac{\Delta p_B}{\rho \bar{w}_B^2/2}, \quad (9.21)$$

die Reynoldszahl

$$Re_B \equiv \frac{\bar{w}_B \cdot d_B}{\nu} \quad (9.22)$$

und das Verhältnis d_B/s verwendet. Mit \bar{w}_B werden die in einer Bohrung auftretende mittlere Geschwindigkeit und mit s die Bodendicke bezeichnet. Der untersuchte Bereich erstreckte sich von $Re_B = 179$ bis 692 bzw. von $Re_B \cdot d_B/s = 815$ bis 3150. Innerhalb dieses Bereiches hatte die Widerstandszahl den konstanten Wert $\zeta_B = 0,77$. Dieser Wert gilt, wie bereits angedeutet wurde, für einen Wert des Flächenverhältnisses von $\varphi = 0,61$. Für $\varphi \rightarrow 0$ ist $\zeta_B = 1,67$, somit also etwa 2,7 mal größer als für $\varphi = 0,61$. Ein allgemeines Gesetz für den Widerstandsbeiwert, welches auch den Einfluß des Flächenverhältnisses berücksichtigt, ist in Abschnitt 17 angegeben worden [9.46]. Dieses Gesetz gibt auch die von MERSMANN [9.47] und ZELFEL [9.48] mitgeteilten Meßergebnisse für $\varphi \rightarrow 0$ gut wieder.

9.612 Druckverlust der Wirbelschichtstufe

Bei den Versuchen zur Bestimmung des Druckverlustes Δp_W der auf einer Stufe befindlichen Wirbelschicht wurden Partikeln aus verschiedenen Materialien verwendet, so daß sich die Dichte ρ_p zwischen 950 kg/m^3 und 1639 kg/m^3 und der Partikeldurchmesser d_p zwischen 2,18 mm und 4,31 mm änderte. Nähere Angaben über die Partikeln enthält *Tabelle 9.1*.

Da bei den Versuchen der Bohrungsdurchmesser d_B der Scheiben unverändert blieb, änderte sich das Verhältnis von Lochdurchmesser zu Partikeldurchmesser bei den Meßreihen 1 und 6 zwischen $d_B/d_p = 3,21$ und $d_B/d_p = 1,624$.

Zur dimensionslosen Darstellung des Druckverlustes Δp_W ist es zweckmäßig, zunächst die Grenzgesetze zu betrachten. In der Nähe des Lockerungspunktes muß eines der Gesetze für die ruhende Füllkörperschicht gelten. Da es sich bei den Partikeln vornehmlich um Granulate handelte, soll das Widerstandsgesetz von

Tabelle 9.1: Angaben über die bei den Versuchen verwendeten Partikeln

Meßreihe	Material	Dichte ρ_p (kg/m ³)	Partikeldurchmesser d_p (m)	Archimedeszahl $Ar \equiv \frac{d_p^3 g}{\nu^2} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right)$
1	Polyamidgranulat	1140	$2,18 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^5$
2	Polyäthylengranulat	950	$2,84 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^5$
3		950	$3,56 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^6$
4	Aluminiumsilicat-	1639	$2,86 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^6$
5	kugeln	1639	$3,63 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^6$
6		1639	$4,31 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^6$

ERGUN [9.9] verwendet werden. In einer für die vorliegenden Zwecke sinnvollen Form lautet dieses Gesetz:

$$\psi_w = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \left[300 \frac{1 - \varepsilon}{Re_p} + 3,50 \right]. \tag{9.23}$$

Hierin bedeuten

$$\psi_w \equiv \frac{\Delta p_w}{\rho \bar{w}^2 / 2} \frac{d_p}{h} \tag{9.24}$$

die Widerstandszahl und

$$Re_p \equiv \frac{\bar{w} d_p}{\nu} \tag{9.25}$$

die Reynoldszahl. Mit ρ und ν werden die Dichte und die kinematische Viskosität des Fluids, mit \bar{w} die auf den Querschnitt der leeren Kolonne bezogene mittlere Geschwindigkeit und mit h der Abstand zwischen zwei Böden gemäß *Bild 9.13* bezeichnet. Ferner ist $\varepsilon = 1 - V_p/V_s$ der Lückengrad, wobei $V_s = d_s^2 \cdot \pi h/4$ das Volumen einer Wirbelschichtstufe und V_p das darin befindliche Partikelvolumen sind.

Mittels Gl.(9.23) läßt sich die Widerstandszahl in der Nähe des Lockerungspunktes, abhängig von der Reynoldszahl Re_p und dem Lückengrad ε , darstellen. Darüber hinaus ist es sinnvoll, das Widerstandsgesetz auch in der Form

$$\psi_w = f(Re_p; Ar) \tag{9.26}$$

zu erhalten. Das ist möglich, wenn man aus Gl.(9.5) den Lückengrad $\varepsilon = \varepsilon_L$ als Funktion der Reynoldszahl Re_p und der Archimedeszahl Ar ermittelt und in Gl.(9.23) einführt. Damit ist also das Widerstandsgesetz in der Nähe des Lockerungspunktes in zwei verschiedenen Formen bekannt.

Erhöht man die Fluidgeschwindigkeit so weit, daß die Partikeln vom Fluidstrom mitgerissen werden, dann ist die Schicht so stark aufgelockert, daß die Gesetze für die Bewegung einer Einzelpartikel gelten. Für diesen Fall muß also das in Abschnitt 5.11 mitgeteilte Widerstandsgesetz von KASKAS gelten:

$$\zeta = \frac{24}{Re_p} + \frac{4}{Re_p^{0,5}} + 0,4. \quad (9.27)$$

Hierin sind $\zeta \equiv 2W/(F_p \cdot \rho \bar{w}_s^2)$ der Widerstandsbeiwert der Einzelkugel, W der Widerstand, F_p der größte Kugelquerschnitt, ρ die Fluiddichte und \bar{w}_s die Schwebegeschwindigkeit des Fluids, bei der eine Einzelkugel gerade in Schwebelage gehalten wird. Um dieses Gesetz in Zusammenhang mit den Gleichungen (9.23) und (9.26) anwenden zu können, muß es umgeformt werden. Zu dem Zweck geht man folgendermaßen vor. Die im Fluidstrom auftretende Widerstandskraft $\Delta p_w F_s$ ist gleich der von den n im Fluidstrom vorhandenen Kugeln verursachten Widerstandskraft $W = n\zeta \rho \cdot w_s^2 F_p/2$. Mit F_s und F_p werden die Querschnittsflächen der Kolonne und der Partikeln bezeichnet. Die Zahl n der in einer Wirbelschichtstufe befindlichen Kugeln läßt sich mittels des Lückengrades $\varepsilon = 1 - V_p/V_s$ berechnen, wenn man $V_s = h d_s^2 \pi/4$ und $V_p = n d_p^3 \pi/6$ einführt. Es ergibt sich

$$n = \frac{3}{2} (\varepsilon - 1) \frac{h}{d_p} \left(\frac{d_s}{d_p} \right)^2. \quad (9.28)$$

Aus der Gleichheit der Widerstandskräfte erhält man mit den Gleichungen (9.24), (9.27) und (9.28) das gesuchte Widerstandsgesetz:

$$(\psi_w)_{\varepsilon \rightarrow 1} = \frac{3}{2} (\varepsilon - 1) \left[\frac{24}{Re_p} + \frac{4}{Re_p^{0,5}} + 0,4 \right]. \quad (9.29)$$

Es gilt für Werte von ε in der Nähe von 1 und gestattet die Berechnung von ψ_w , abhängig von ε und Re_p . Für $\varepsilon = 1$ befinden sich theoretisch keine Kugeln mehr in einer Wirbelschichtstufe; dann ist Gl. (9.29) zufolge auch $(\psi_w)_{(\varepsilon \rightarrow 1)} = 0$. Das ist gerade dann der Fall, wenn die Fluidgeschwindigkeit den Wert der Schwebegeschwindigkeit erreicht hat. Unter dieser Bedingung besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Reynoldszahl $Re_{p(\varepsilon \rightarrow 1)}$ und der Archimedeszahl:

$$Re_{p(\varepsilon \rightarrow 1)} = f(Ar). \quad (9.30)$$

Die zusammengehörigen Wertepaare lassen sich aus *Bild 5.11* entnehmen. Im Bereich $10^4 \leq Ar \leq 10^8$ läßt sich die dort dargestellte Kurve durch die empirische Beziehung

$$Re_{p(\varepsilon \rightarrow 1)} = 1,12 Ar^{0,52} \quad (9.31)$$

gut wiedergeben.

Mit den hergeleiteten Grenzgesetzen für den Widerstand von Wirbelschichten, ausgedrückt durch die Gleichungen (9.23) und (9.26) sowie (9.29) und (9.30), lassen sich die Meßwerte für den Widerstand von Wirbelschichten übersichtlich darstellen. *Bild 9.14* zeigt diese Darstellung. Die mit einem Kreis zusätzlich hervorgehobenen Meßwerte bezeichnen die Zustände am Lockerungspunkt. Die strichpunktierten Linien geben die Abhängigkeit der Widerstandszahl ψ_w von der Reynoldszahl Re_p und dem Lückengrad ε an; die Kurven für $\varepsilon = 0,4$ bis $0,8$ wurden mittels Gl. (9.23) und die Kurven für $\varepsilon = 0,96$ und $0,98$ mittels Gl. (9.29)

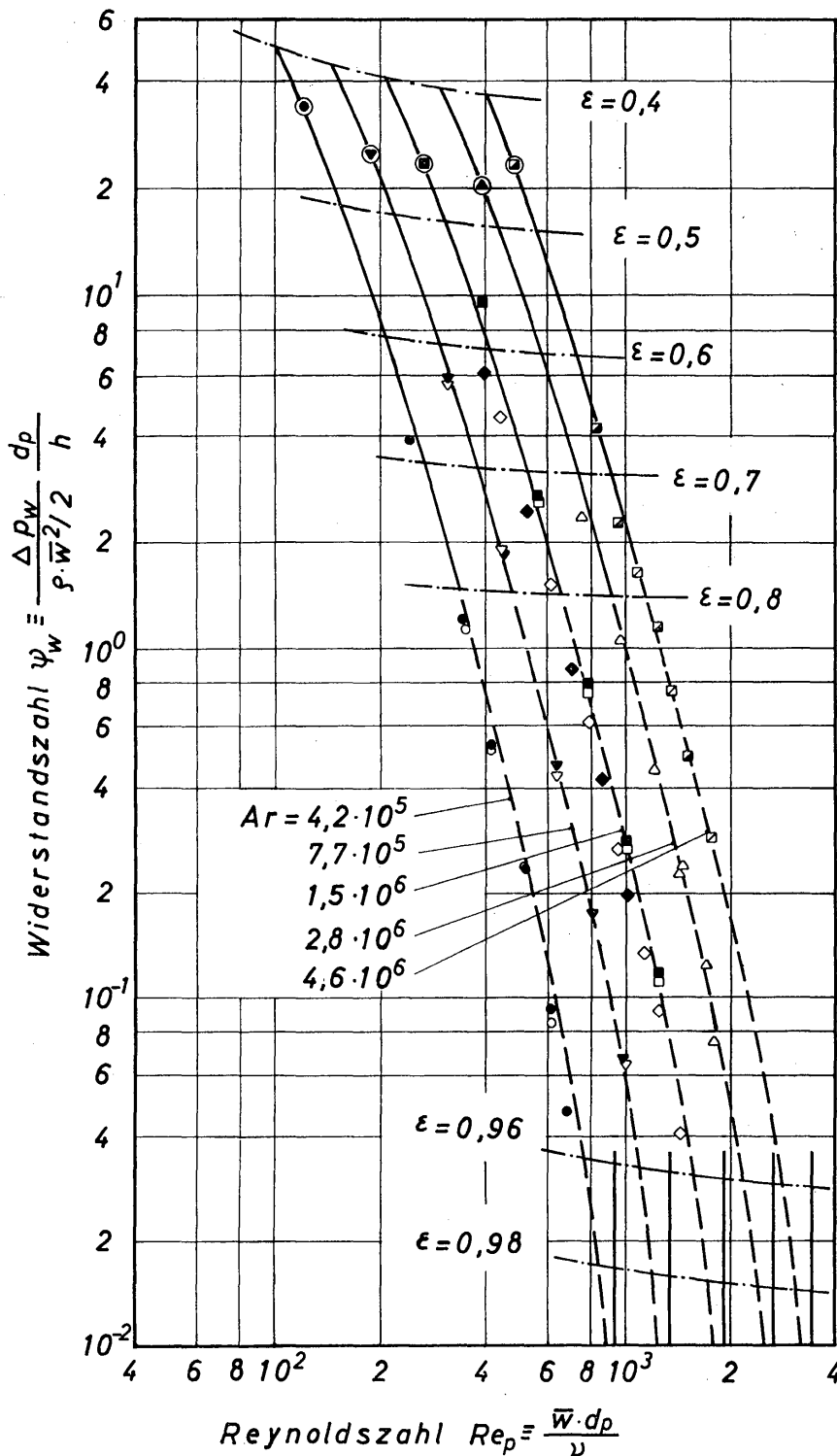


Bild 9.14. Abhängigkeit der Widerstandszahl ψ_w für mehrstufige Wirbelschichten von der Reynoldszahl Re_p , der Archimedeszahl Ar und dem Lückengrad ϵ

berechnet. Die für jeweils konstante Werte der Archimedeszahl geltenden Meßwerte wurden durch Kurven ausgeglichen. Die zwischen $\epsilon = 0,4$ bis $\epsilon = 0,8$ ausgezogenen Kurvenäste berechnete man mittels Gl.(9.26). Die anschließend gestrichelt verlaufenden Kurvenäste nähern sich mit $\varphi_w \rightarrow 0$ einem Grenzwert der Reynoldszahl, der durch Gl.(9.31) festgelegt ist. Die Grenzwerte sind durch kurze, senkrechte Striche angedeutet. Der gestrichelte Kurvenast ließ sich nicht berechnen. Man erkennt aber aus *Bild 9.14*, daß sich die Meßwerte dem theoretisch berechneten Grenzwert zwanglos annähern. Im Arbeitsbereich der mehr-

stufigen Wirbelschichtanlage, der sich etwa von $\varepsilon = 0,6$ bis $\varepsilon = 0,96$ erstreckt, lassen sich die Versuchsergebnisse mit guter Näherung durch parallele Geraden ausgleichen, für die sich folgende empirische Gleichung aufstellen ließ:

$$\psi_w = 0,126 \left(\frac{Ar^{1/2}}{Re_p} \right)^{3,6} . \quad (9.32)$$

Diese Gleichung gestattet die Berechnung des durch Gl. (9.19) festgelegten Druckverlustanteils Δp_w für eine Stufe einer mehrstufigen Wirbelschichtanlage mit kontinuierlichem Durchfluß der Partikeln. Aus Gl. (9.32) geht hervor, daß zur Berechnung von ψ_w nur die Reynoldszahl Re_p und die Archimedeszahl Ar bekannt sein müssen. Angaben über den Lückengrad sind nicht erforderlich. Der Lückengrad ist eine eindeutige Funktion von Re_p und Ar . Die Gl. (9.32) wird in *Bild 9.15* durch Kurve *a* wiedergegeben.

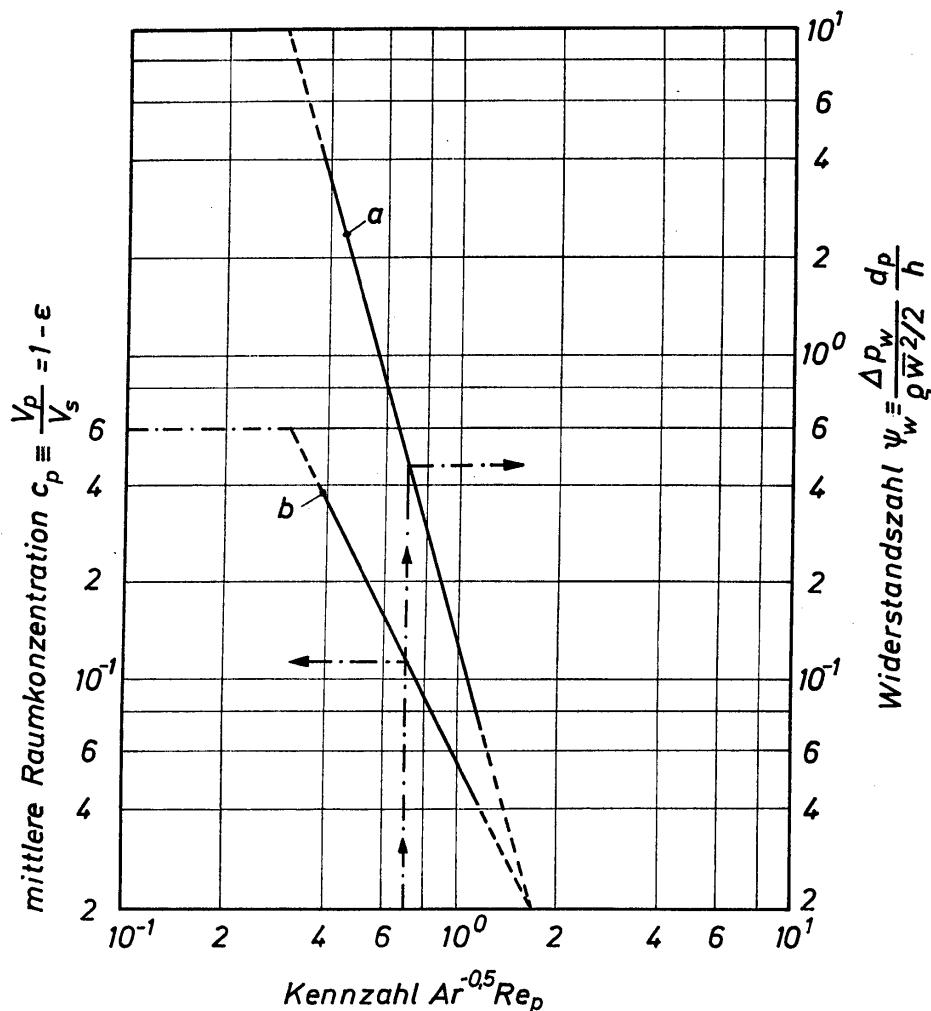


Bild 9.15. Diagramm zur Ermittlung der Widerstandszahl ψ_w und der Raumkonzentration c_p für mehrstufige Wirbelschichtanlagen

Aus Gl. (9.32) geht hervor, daß die Widerstandszahl und somit auch der Druckverlust keine Funktion der kinematischen Viskosität des Fluids ist. Das dürfte jedoch nur im Bereich großer Werte der Reynoldszahl Re_p möglich sein. Bei Anwendung von Gl. (9.32) ist also eine gewisse Vorsicht geboten.

9.62 Lückengrad einer Wirbelschichtstufe

Für die Beurteilung des Verhaltens einer kontinuierlich betriebenen vielstufigen Wirbelschichtanlage muß das in einer Stufe vorhandene Feststoffvolumen V_p bekannt sein. Es läßt sich entweder mittels des Lückengrades $\varepsilon = 1 - V_p/V_s$ oder durch die volumetrische Konzentration der Partikeln $c_p = V_p/V_s = 1 - \varepsilon$ ausdrücken. Die Konzentration muß den Ausführungen über den Druckverlust zufolge eine Funktion der Reynolds- und der Archimedeszahl sein.

In der Nähe des Lockerungspunktes ist c_p bzw. ε mittels Gl.(9.5) als Funktion von $Re = Re_p/(1-\varepsilon)$ und Ar zu bestimmen. Das zweite Grenzgesetz, welches in der Nähe von $\varepsilon = 1$ bzw. $c_p = 0$ zutrifft, läßt sich mittels Gl.(9.31) aufstellen, wenn man beide Gleichungsseiten durch $(1-\varepsilon)$ dividiert:

$$\left(\frac{Re_p}{1-\varepsilon} \right)_{\varepsilon \rightarrow 1} = 1,12 \frac{Ar^{0,52}}{(1-\varepsilon)}. \quad (9.33)$$

In *Bild 9.16* sind Meßwerte für die mittlere Konzentration $c_p = 1 - \varepsilon$ über der Reynoldszahl $Re_p/(1-\varepsilon)$ mit der Archimedeszahl Ar als Parameter aufgetragen. Die ausgezogenen Kurvenäste sind nach den Grenzgesetzen berechnet und die gestrichelten interpoliert worden. Aus den dargestellten Ergebnissen läßt sich folgende empirische Gleichung aufstellen:

$$c_p = (1 - \varepsilon) = 5,7 \cdot 10^{-2} \left(\frac{Ar^{1/2}}{Re_p} \right)^2. \quad (9.34)$$

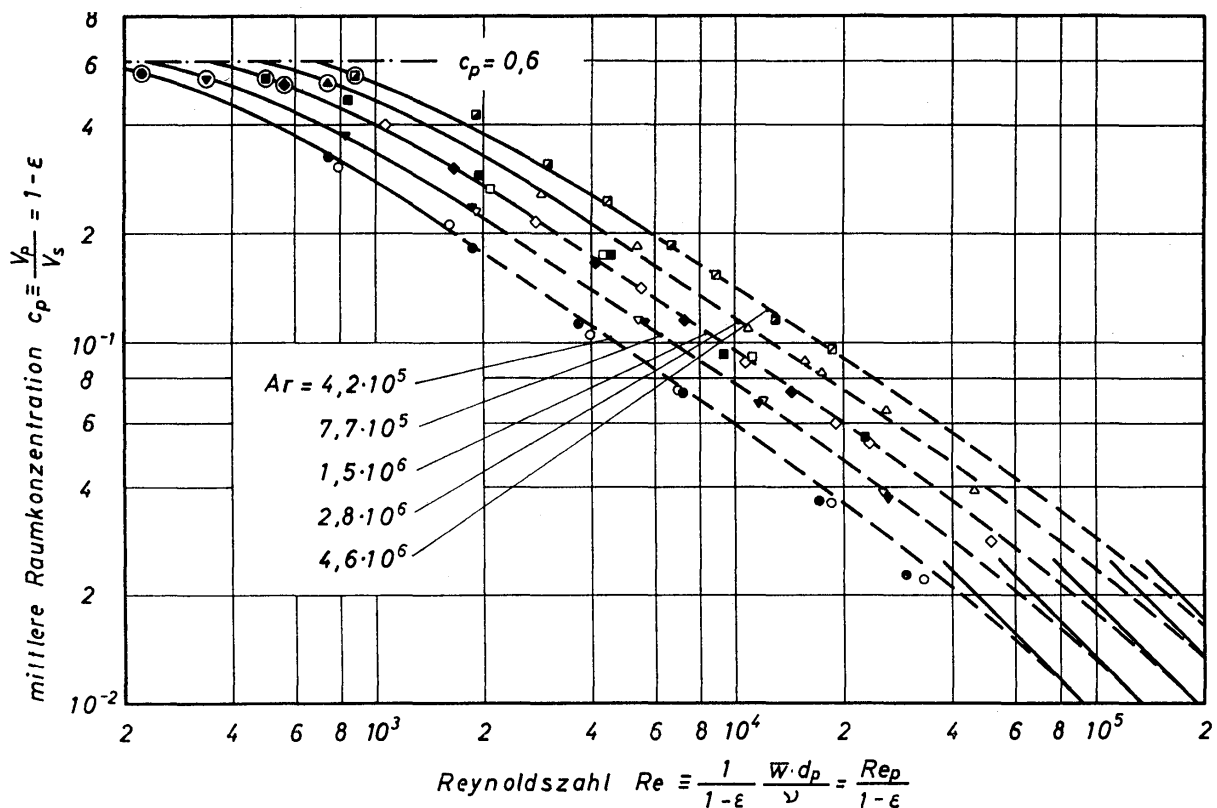


Bild 9.16. Abhängigkeit der mittleren Raumkonzentration in einer Stufe einer mehrstufigen Wirbelschichtanlage von der Reynoldszahl $Re_p/(1-\varepsilon)$ und der Archimedeszahl Ar

Der Gültigkeitsbereich erstreckt sich von $c_p = 0,4$ bis $0,04$ bzw. von $\varepsilon = 0,6$ bis $0,96$. Die mittlere Partikelkonzentration in einer Stufe ist gleich der mittleren Konzentration in der gesamten mehrstufigen Anlage. In *Bild 9.15* wird Gl. (9.34) durch Kurve *b* wiedergegeben. Für Gl. (9.34) gilt ebenfalls die Einschränkung, die für Gl. (9.32) erläutert wurde.

9.63 Verweilzeit der Partikeln in einer Wirbelschichtstufe

Zur Berechnung von Wärme- und Stofftransportprozessen muß die Verweilzeit der Partikeln in einer Wirbelschichtstufe bekannt sein. Man hat zwischen der mittleren Verweilzeit aller Partikeln und der Verweilzeit der einzelnen Partikeln zu unterscheiden. Da der Aufenthalt der einzelnen Partikeln in einer Stufe von stochastischen Bewegungen innerhalb dieser Stufe abhängt, wird die Verweilzeit der einzelnen Partikeln eine Verteilung aufweisen, die sich über einen bestimmten Zeitabschnitt erstreckt. Im folgenden wird auf die mittlere Verweilzeit und auf die Verweilzeitverteilung eingegangen.

9.631 Mittlere Verweilzeit

Die mittlere Verweilzeit \bar{t} ist folgendermaßen definiert:

$$\bar{t} \equiv \frac{V_p}{\dot{V}_p} = \frac{c_p \varrho_p V_s}{\dot{M}_p}. \quad (9.35)$$

Hierin bedeuten V_p das in einer Wirbelschichtstufe befindliche Feststoffvolumen, \dot{V}_p den Volumstrom und $\dot{M}_p = \dot{V}_p \varrho_p$ den Massenstrom der Partikeln durch die Stufe, ϱ_p die Partikeldichte, c_p die Raumkonzentration der Partikeln in einer Stufe und V_s das Volumen einer Stufe. Sind die Größen V_p bzw. c_p sowie ϱ_p und V_s bekannt, dann läßt sich durch Messen des Volumstromes \dot{V}_p oder des Massenstromes \dot{M}_p die mittlere Verweilzeit berechnen. Ist andererseits eine Berechnungsgleichung für die mittlere Verweilzeit \bar{t} bekannt, dann kann man mittels Gl. (9.35) \dot{V}_p oder \dot{M}_p ermitteln.

Mit Hilfe einer Dimensionsanalyse lassen sich die Einflußgrößen für die mittlere Verweilzeit \bar{t} zu den folgenden sieben Kennzahlen zusammenfassen:

f_p	Formfaktor der Partikeln
$c_p = V_p/V_s$	Raumkonzentration der Partikeln je Stufe
$d^* = d_p/d_B$	Durchmesser Verhältnis
$h^* = h/d_B$	bezogene Höhe der Wirbelschichtstufe
$\bar{t}^* = \frac{v}{d_p h} \bar{t}$	bezogene mittlere Verweilzeit
$(\varrho_p/\varrho) - 1$	Dichtekennzahl
$Ar = \frac{d_p^3 g}{v^2} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right)$	Archimedeszahl

Von diesen Kennzahlen blieb bei den von SCHMIDT [9.49] durchgeführten Untersuchungen allein die bezogene Höhe h^* unverändert. Die Messungen wurden jeweils in Abhängigkeit von der Raumkonzentration c_R bei im übrigen konstant gehaltenen Parametern durchgeführt. Die Untersuchung wurde an der gleichen Anlage durchgeführt, die für die Druckverlustmessungen verwendet wurde. Als Strömungsmedium diente Luft. Die Eigenschaften der verwendeten Partikeln sind in Tabelle 9.2 angegeben.

Tabelle 9.2:

Eigenschaften der bei den Verweilzeitmessungen verwendeten Partikeln

Material	Form	Mittlere Partikel- \varnothing (mm)	ϱ_p/ϱ	Ar	d_p/d_B
ND-Polyäthylen	Doppellinsen	3,56	791	$1,5 \cdot 10^6$	0,51
	Linsen	2,84	791	$7,1 \cdot 10^5$	0,41
Polyamid	Zylinder	2,18	950	$4,2 \cdot 10^5$	0,31
		2,97	2460	$2,8 \cdot 10^6$	0,42
Glas	Kugeln	1,90	2460	$7,3 \cdot 10^5$	0,27
		1,18	2460	$1,7 \cdot 10^5$	0,17

Einen Überblick über die Versuchsergebnisse vermittelt *Bild 9.17*, in dem die mittlere Verweilzeit für alle untersuchten Partikelarten über der Raumkonzentration aufgetragen ist. Die durch die Meßwerte gelegten Ausgleichskurven zeigen ein mehr oder weniger stark ausgeprägtes Minimum. Für $c_p \rightarrow 0$, d. h. bei großen Gasdurchsätzen, befinden sich nur wenige Partikeln in den Wirbelschichtstufen, und der Volumstrom \dot{V}_p wird verschwindend klein. Somit muß für $c_p \rightarrow 0$ die Verweilzeit unendlich große Werte annehmen. Mit zunehmender Raumkonzentration steigt die mittlere Verweilzeit nach Durchlaufen des Minimums wieder an. Der höchste Wert für die Konzentration liegt in der Größenordnung von etwa 0,5. Die Partikeln weisen dann die dichteste Anordnung auf. Hierbei können jedoch zwei Fälle unterschieden werden. Im ersten Falle bildet sich eine ruhende, dichte Partikelschicht aus. Ein Durchfluß von Partikeln tritt nicht mehr auf. Folglich ist die Verweilzeit unendlich groß. Im zweiten Falle bewegt sich die Kornmasse kolbenförmig durch die Wirbelschichtstufe. Für die Verweilzeit stellt sich dann ein endlicher Wert ein. In beiden geschilderten Fällen ist in der Nähe des größtmöglichen Wertes der Raumkonzentration mit einem steilen Anstieg der mittleren Verweilzeit zu rechnen.

Das bereits erwähnte Minimum in den Verweilzeitkurven ist um so stärker ausgeprägt, je größer das Durchmesser Verhältnis d_p/d_B und je geringer das Dichteverhältnis ϱ_p/ϱ sind. Mit zunehmender Abflachung der Kurven verschiebt sich die Lage des Minimums zu höheren Konzentrationen. Eine Ausnahme bilden dabei die zylinderförmigen Partikeln aus Polyamid, deren Formfaktor von dem der anderen Partikeln stark abweicht.

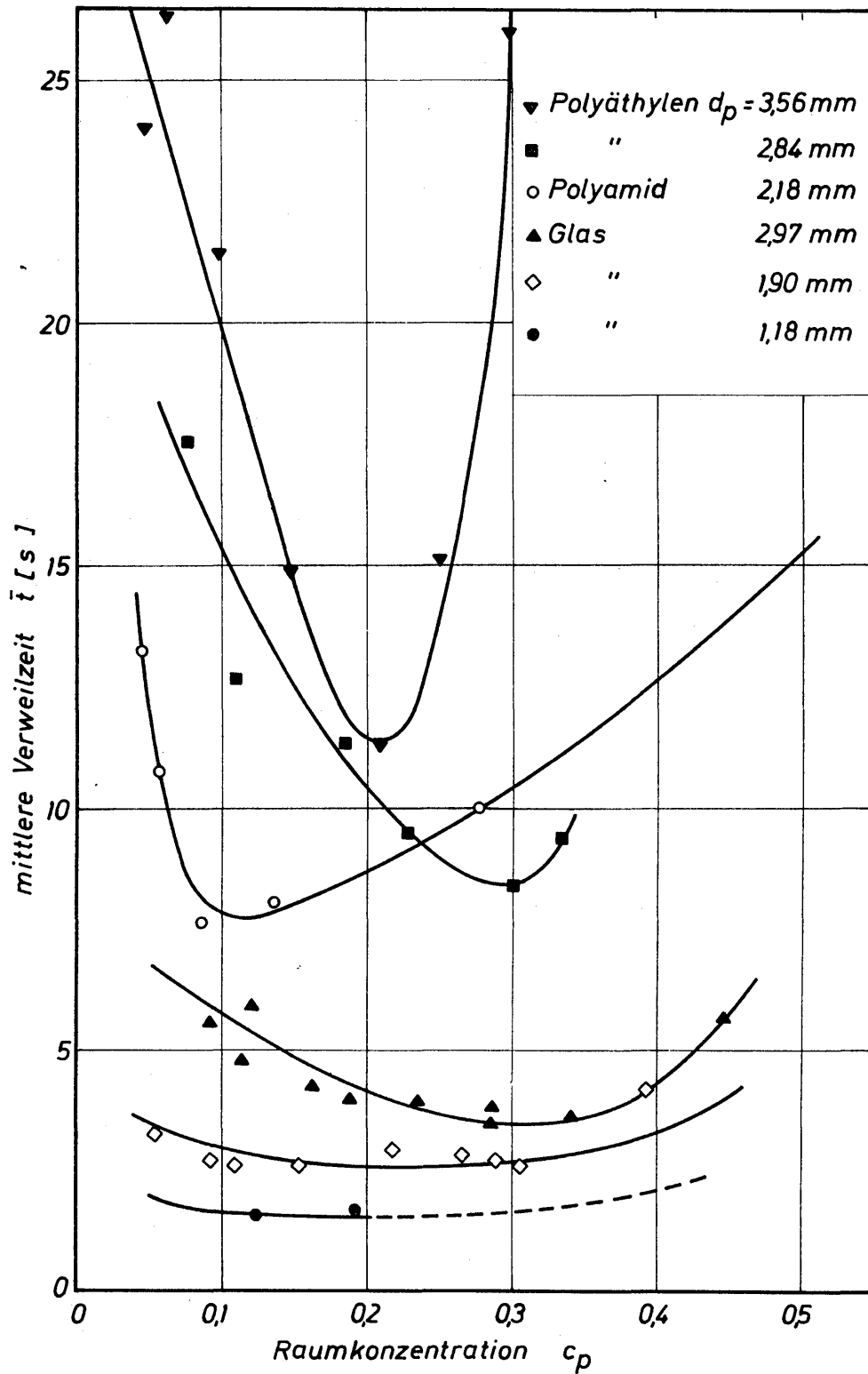


Bild 9.17. Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit von der Raumkonzentration in einer Wirbelschichtanlage

Eine zusammenfassende Darstellung der Versuchsergebnisse ist bislang nur im Bereich für Konzentrationen $c_p \leq 0,15$ gelungen. Hierzu gelangt man, wenn die Verweilzeitkennzahl

$$K_v \equiv \bar{t}^* Ar^{1/2} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{d_B}{d_p} \right)^2 = \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \cdot \frac{g^{1/2} d_B^2}{d_p^{1,5} \cdot h} \cdot \bar{t} \quad (9.36)$$

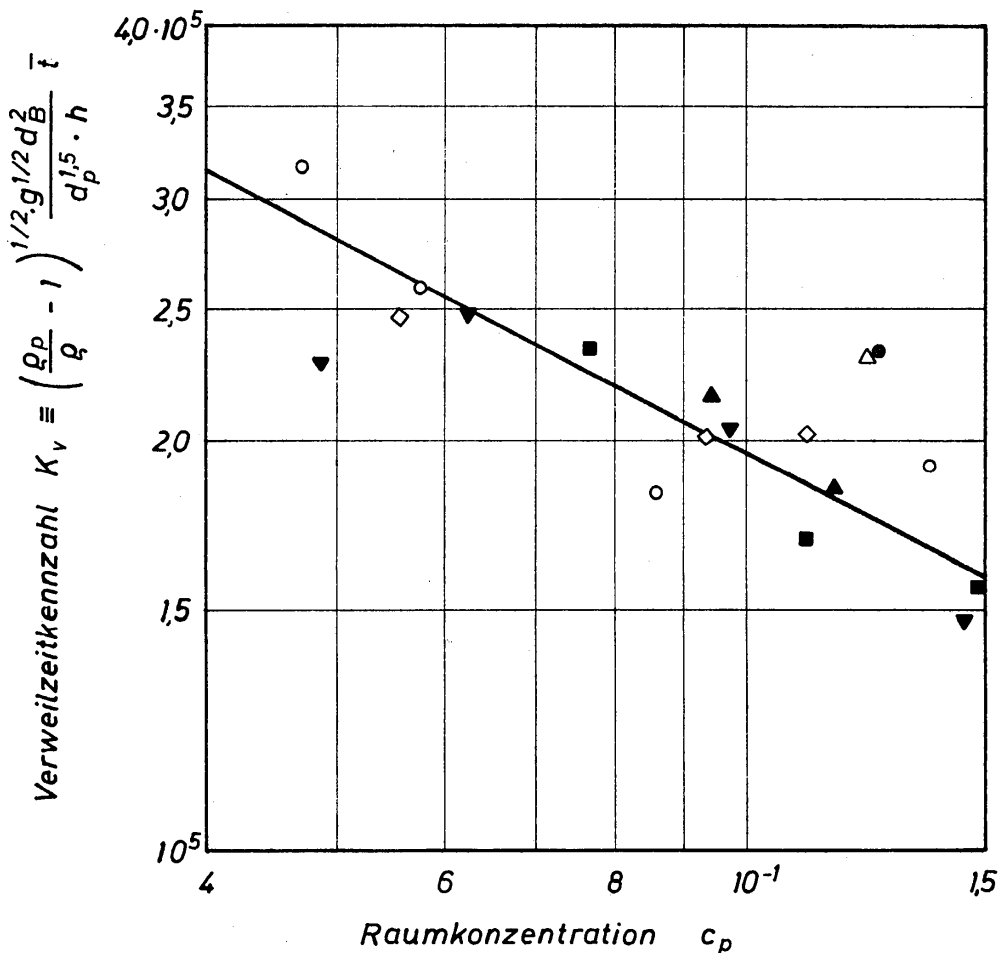


Bild 9.18. Dimensionslose Darstellung der mittleren Verweilzeit in einer Wirbelschichtstufe

über der Raumkonzentration c_p aufgetragen wird. Bild 9.18 zeigt diese Darstellung. Für die Verweilzeitkennzahl folgt die empirische Gleichung

$$K_v = \frac{6,54 \cdot 10^5}{c_p^{1/2}}. \quad (9.37)$$

Den Ergebnissen zufolge scheint der Formfaktor der Partikeln zumindest im Bereich niedriger Konzentration nur von untergeordneter Bedeutung zu sein. Da bislang noch nicht alle in der Verweilzeitkennzahl K_v enthaltenen Einflußgrößen systematisch verändert wurden, ist bei Anwendung von Gl.(9.37) eine gewisse Vorsicht geboten. Ferner sei auf folgenden Sachverhalt hingewiesen. Die Archimedeszahl hat gemäß Gl.(9.36) den Exponenten $1/2$. Aus diesem Grunde enthält die Verweilzeitkennzahl K_v nicht die Viskosität des Fluids. Das darf jedoch nur dann der Fall sein, wenn der Widerstandsbeiwert der einzelnen Partikeln unabhängig von der Reynoldszahl, also konstant ist. Bei den durchgeführten Versuchen war das wegen der großen Partikeln zu erwarten. Bei wesentlich kleineren Partikeln wird man jedoch mit einer Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes von der Reynoldszahl rechnen müssen. In diesem Falle wird die Verweilzeitkennzahl anders definiert werden müssen, damit auch die Viskosität auftritt.

9.632 Verweilzeitverteilung

Die mittlere Verweilzeit \bar{t} läßt sich als die Zeit deuten, die ein aus allen Partikeln gebildeter Feststoffkolben zur Bewegung durch eine Wirbelschichtstufe benötigt. In Wirklichkeit führen jedoch alle Partikeln zusätzliche Bewegungen in allen drei Richtungen aus, so daß die Verweilzeit der einzelnen Partikeln eine mehr oder weniger breite Verteilung aufweist. Die Häufigkeit, mit der bestimmte Verweilzeitklassen auftreten, wird mit $\varphi(t)$ bezeichnet.

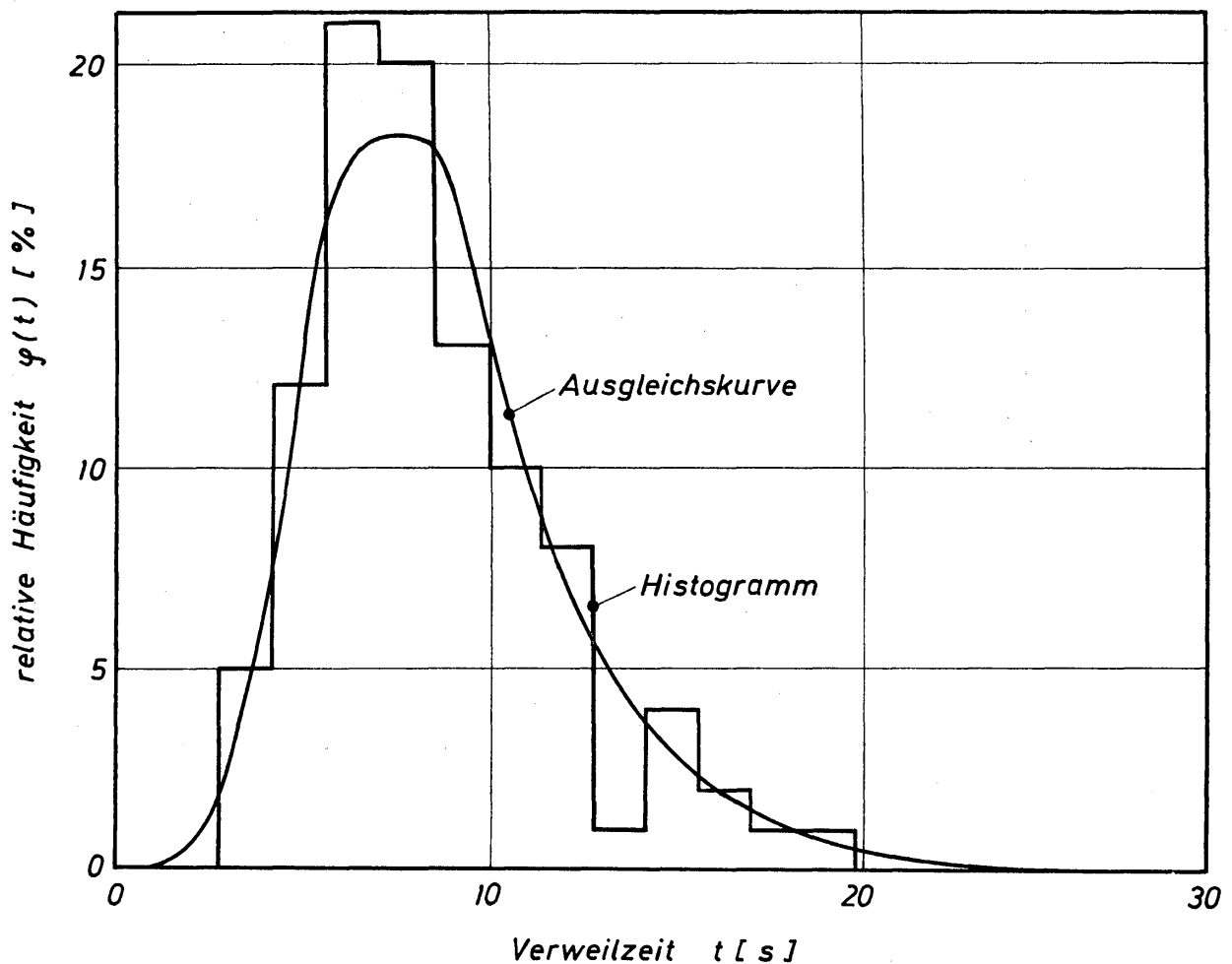


Bild 9.19. Relative Häufigkeit der Verweilzeit von Partikeln in einer Stufe einer aus 13 Stufen bestehenden Wirbelschichtanlage

In Bild 9.19 ist die relative Häufigkeit der Verweilzeit von Partikeln in einer Stufe einer aus 13 Stufen bestehenden Wirbelschichtanlage in Form eines Histogrammes dargestellt. Ferner ist die flächengleiche Ausgleichskurve für die Verweilzeitverteilung eingezeichnet. Die sich ergebende Glockenkurve ist unsymmetrisch und weist eine Verschiebung zu größeren Verweilzeiten auf. Diese Beobachtung wurde auch schon von anderen Autoren bei Wirbelschichten festgestellt. Als Ursache für eine solche Erscheinung mag die verzögernde Wirkung der Lochböden in Betracht kommen.

Die Verweilzeitverteilungskurve läßt sich nicht ohne weiteres aus dem Histogramm entwickeln, da dessen Form von der gewählten Breite der einzelnen Ver-

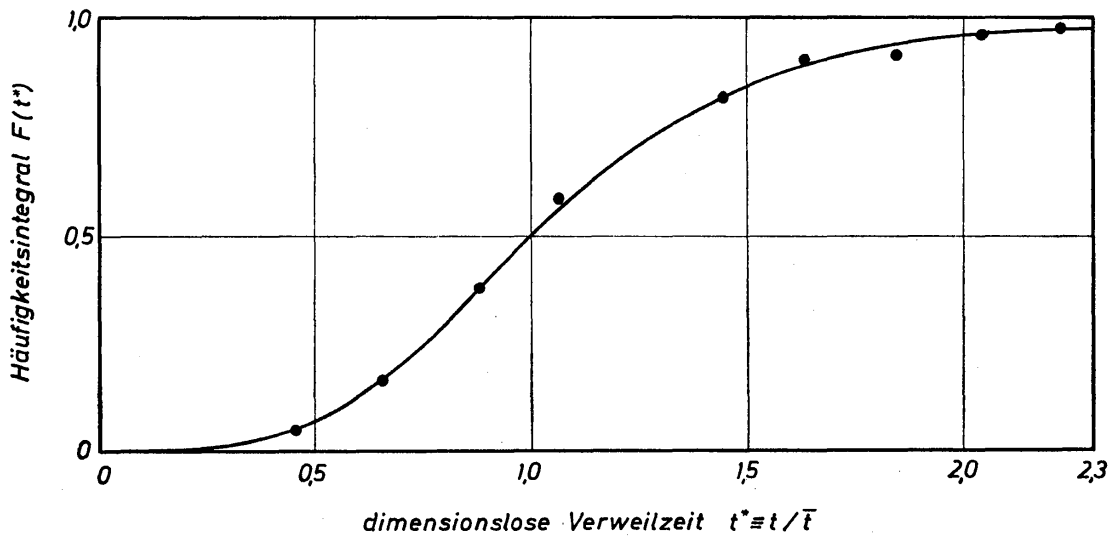


Bild 9.20. Häufigkeitsintegral $F(t^*)$, abhängig von der dimensionslosen Verweilzeit t^* , für die in Bild 9.19 angegebenen Bedingungen

weilzeitklassen abhängt. Deshalb ist es sinnvoller, das Häufigkeitsintegral $F(t)$ zu betrachten, welches die Summe der Häufigkeiten φ in Abhängigkeit von der Verweilzeit t wiedergibt.

In Bild 9.20 ist das Häufigkeitsintegral $F(t^*)$ als Funktion der dimensionslosen Verweilzeit $t^* = t/\bar{t}$ dargestellt, wobei \bar{t} die mittlere Verweilzeit bedeutet. Für $t = \bar{t}$ ist $t^* = 1$, und das Häufigkeitsintegral nimmt unabhängig von der Stufenzahl n den Wert $F(t^*) = 0,5$ an. Demnach besitzen 50% der Partikeln in der Wirbelschicht eine Verweilzeit von $t \leq t^*$. Die auf diese Weise definierte mittlere Verweilzeit \bar{t} stimmt mit der durch Gl. (9.35) definierten gut überein.

Das Häufigkeitsintegral läßt sich mit Hilfe einer Modellvorstellung berechnen, die an Hand von Bild 9.21 erläutert werden soll. Man geht davon aus, daß zur Zeit $t = 0$ am Eintritt in einen Kontrollraum der Höhe h die Farbe der Partikeln plötzlich von weiß (w) auf schwarz (s) geändert wird. Die Trenngrenze zwischen den unterschiedlich gefärbten Partikeln würde bei reiner Kolbenströmung den Kontrollraum nach der Verweilzeit $t = \bar{t}$ verlassen. Die Konzentration $c(t)$ der schwarzen Teilchen würde dabei von $c = 0$ auf $c = 1$ springen.

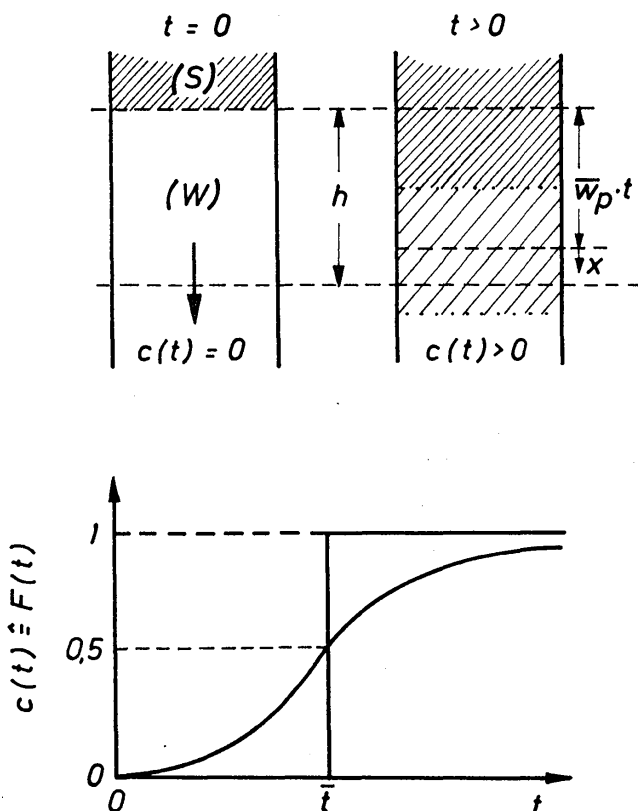


Bild 9.21. Modellvorstellung zur Berechnung des Häufigkeitsintegrals

Tatsächlich bleibt aber die Trenngrenze wegen der Eigenbewegung der Partikeln nicht erhalten, und die Konzentration $c(t)$ nimmt gemäß dem s-förmig geschwungenen Kurvenverlauf zu. Der Konzentrationsverlauf $c(t)$ entspricht dem in *Bild 9.20* gezeigten Verlauf des Häufigkeitsintegrals $F(t^*)$.

Für die mathematische Beschreibung der zeitlichen Konzentrationsänderung sind zwei verschiedene Geschwindigkeitsansätze bekannt. Der einfachste gilt für den Fall der idealen Durchmischung der Partikeln in einer Wirbelschicht:

$$\frac{dc}{dt^*} = -k(1 - c). \quad (9.38)$$

Gemäß dem betrachteten Farbbeispiel hängt demnach dc/dt^* von einer Geschwindigkeitskonstanten k sowie von der Konzentration c der weißen Partikeln ab. Mit der Randbedingung

$$c(t^* = 1) = 0,5 \quad (9.39)$$

gelangt man zu der Lösung

$$c(t^*) = F(t^*) = 1 - 2^{-t^*}. \quad (9.40)$$

Das Modell der idealen Durchmischung wird bei herkömmlichen Wirbelschichten im allgemeinen jedoch nicht erfüllt. Deshalb sind verschiedene Erweiterungen dieses Ansatzes versucht worden, wobei die Abweichungen vom idealen Verhalten durch empirische Konstanten berücksichtigt werden. BERANEK, SOKOL und WINTERSTEIN [9.50] haben auf der Grundlage dieses Modells auch Rechnungen für mehrstufige Wirbelschichtsysteme durchgeführt. Der Nachteil ihrer Ergebnisse besteht darin, daß der Wert $c(t^* = 1) \neq 0,5$ ist und außerdem von der Stufenzahl n abhängt. Das widerspricht aber den zugrunde liegenden physikalischen Vorstellungen und Versuchsergebnissen.

Rechnungen mit sinnvolleren Ergebnissen lassen sich mittels des Diffusionsmodells durchführen. Ähnlich dem zweiten Fickschen Gesetz für die eindimensionale Diffusion wird hierbei ein Ansatz für die zeitliche Konzentrationsänderung in Abhängigkeit von der bezogenen axialen Koordinate $x^* = x/H$ gemacht:

$$\frac{\partial c}{\partial t^*} = D_H^* \frac{\partial^2 c}{\partial x^{*2}}. \quad (9.41)$$

Als kennzeichnende Größe für die gegenseitige Durchmischung der Partikeln in einer aus n Stufen bestehenden Wirbelschicht mit der Gesamthöhe H ist hierbei die dimensionslose Mischzahl D_H^* eingeführt. Ist h die Höhe einer Stufe, dann ist $H = nh$. Zwischen der Mischzahl für die gesamte Anlage,

$$D_H^* \equiv \frac{D_H \bar{t}}{h \cdot n}, \quad (9.42)$$

und der Mischzahl D^* für eine Stufe besteht der Zusammenhang

$$D_H^* = \frac{D^*}{n}. \quad (9.43)$$

Mit Hilfe einer Laplace-Transformation läßt sich Gl. (9.41) unter Beachtung einer Anfangsbedingung und zweier Randbedingungen lösen, und man erhält mit einer Reihenentwicklung für das Argument der Fehlerfunktion nach t^* folgende Beziehung:

$$c(t^*) = F(t^*) = 0,5 \{1 - \operatorname{erf} [11,5 (n/D^*)^{0,5} \cdot \lg(t^*)]\}. \quad (9.44)$$

Gl. (9.44) hat die Form einer logarithmischen Normalverteilung, so daß das Häufigkeitsintegral $F(t^*)$ im logarithmischen Wahrscheinlichkeitspapier eine Gerade ergibt.

Für die Mischzahl erhält man bei Annahme idealer Durchmischung in einer Stufe den Wert $D^* = 0,663$. In diesem Falle müssen die Steigungen der Häufigkeitsintegrale gemäß den Gleichungen (9.40) und (9.44) im Punkt $t = \bar{t}$ übereinstimmen.

Trägt man die Versuchsergebnisse für das bereits angeführte Beispiel einer 13stufigen Wirbelschicht in einem Wahrscheinlichkeitspapier auf, *Bild 9.22*, so lassen sich diese tatsächlich sehr gut durch eine Gerade ausgleichen. Das in diesem Bild gezeigte Ergebnis ist typisch für alle übrigen Versuchsergebnisse. Mit Hilfe des Diffusionsmodells kann somit das Häufigkeitsintegral F bei der mehr-

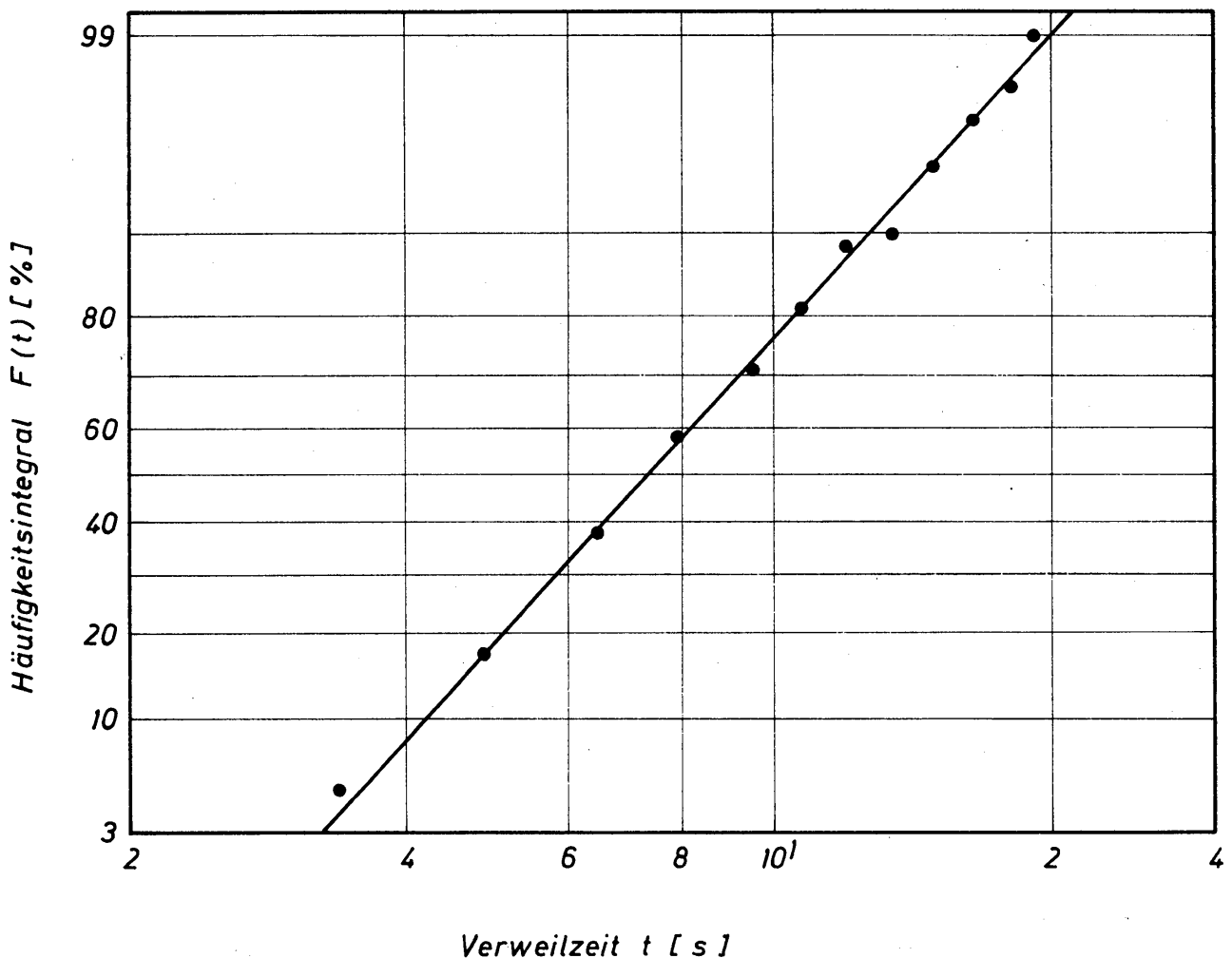


Bild 9.22. Darstellung des Häufigkeitsintegrals $F(t)$ im Wahrscheinlichkeitsnetz. Die eingezeichneten vollen Kreise geben Meßwerte wieder

stufigen Rieselboden-Wirbelschicht durch eine einfache mathematische Beziehung beschrieben werden. Außerdem läßt sich bei der Darstellung im logarithmischen Wahrscheinlichkeitspapier bei $F(t^*) = 0,84$ und $F(t^*) = 0,16$ unmittelbar der Wert der Standardabweichung σ von der mittleren Verweilzeit \bar{t} entnehmen.

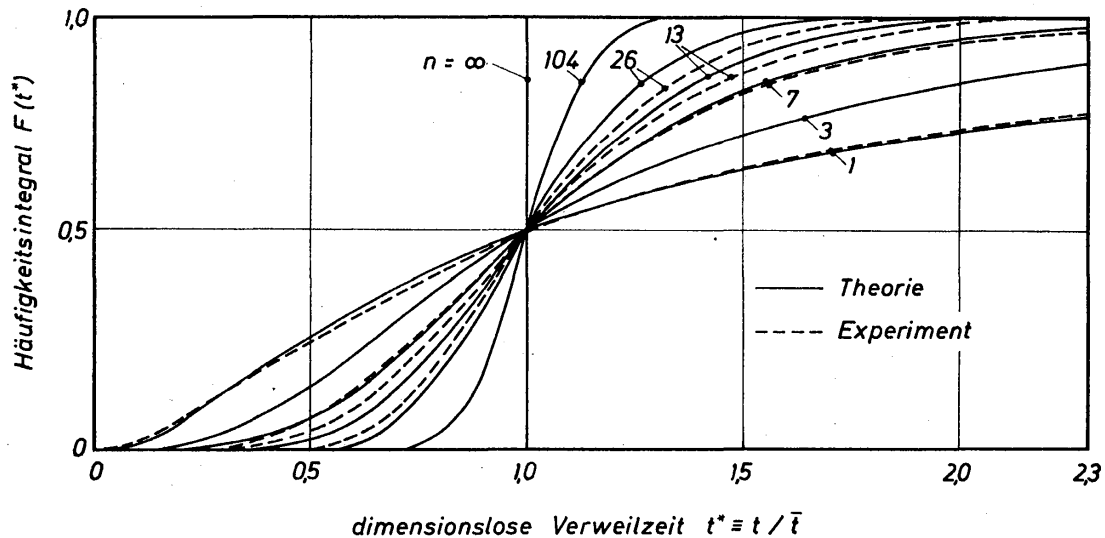


Bild 9.23. Vergleich zwischen den theoretisch und experimentell ermittelten Kurven für das Häufigkeitsintegral für verschiedene Stufenzahlen n

In Bild 9.23 ist das Häufigkeitsintegral $F(t^*)$ wiederum in der etwas anschaulicheren Weise in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Die gestrichelten Kurven geben die ausgeglichenen Versuchsergebnisse für verschiedene Stufenzahlen n der Wirbelschicht wieder. Man erkennt, wie der Anstieg der Kurven bei $t^* = 1,0$ mit zunehmender Stufenzahl größer wird. Das heißt, die Streuung der bezogenen Verweilzeit t^* um den Mittelwert $t^* = 1$ nimmt bei zunehmender Stufenzahl ab. Hat beispielsweise eine Partikel die erste Stufe sehr schnell passiert, so ist es unwahrscheinlich, daß auch in der anderen Stufe die Verweilzeit sehr kurz sein wird. Es findet also eine Glättung der Schwankungen statt. Die ausgezogenen Kurven in Bild 9.23 wurden mit dem Diffusionsmodell berechnet, wobei für die Mischzahl D^* die Annahme idealer Durchmischung zugrunde gelegt ist. Bei kleinen Stufenzahlen, etwa bis $n = 7$, ergibt sich eine hervorragende Übereinstimmung zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen. Daraus darf geschlossen werden, daß bei der mehrstufigen Rieselboden-Wirbelschicht nahezu ideale Durchmischung der Partikeln vorliegt, was für Austauschvorgänge natürlich sehr günstig ist. Bei größeren Stufenzahlen summieren sich die Einflüsse für die Abweichung vom idealen Verhalten, so daß die experimentellen Kurven zunehmend niedriger verlaufen als die theoretischen Ergebnisse.

In Bild 9.24 ist schließlich die Standardabweichung σ als Funktion der Stufenzahl n dargestellt. Die ausgezogene Kurve gilt wiederum für den theoretischen Fall der idealen Durchmischung, während die Symbole die gefundenen Meß-

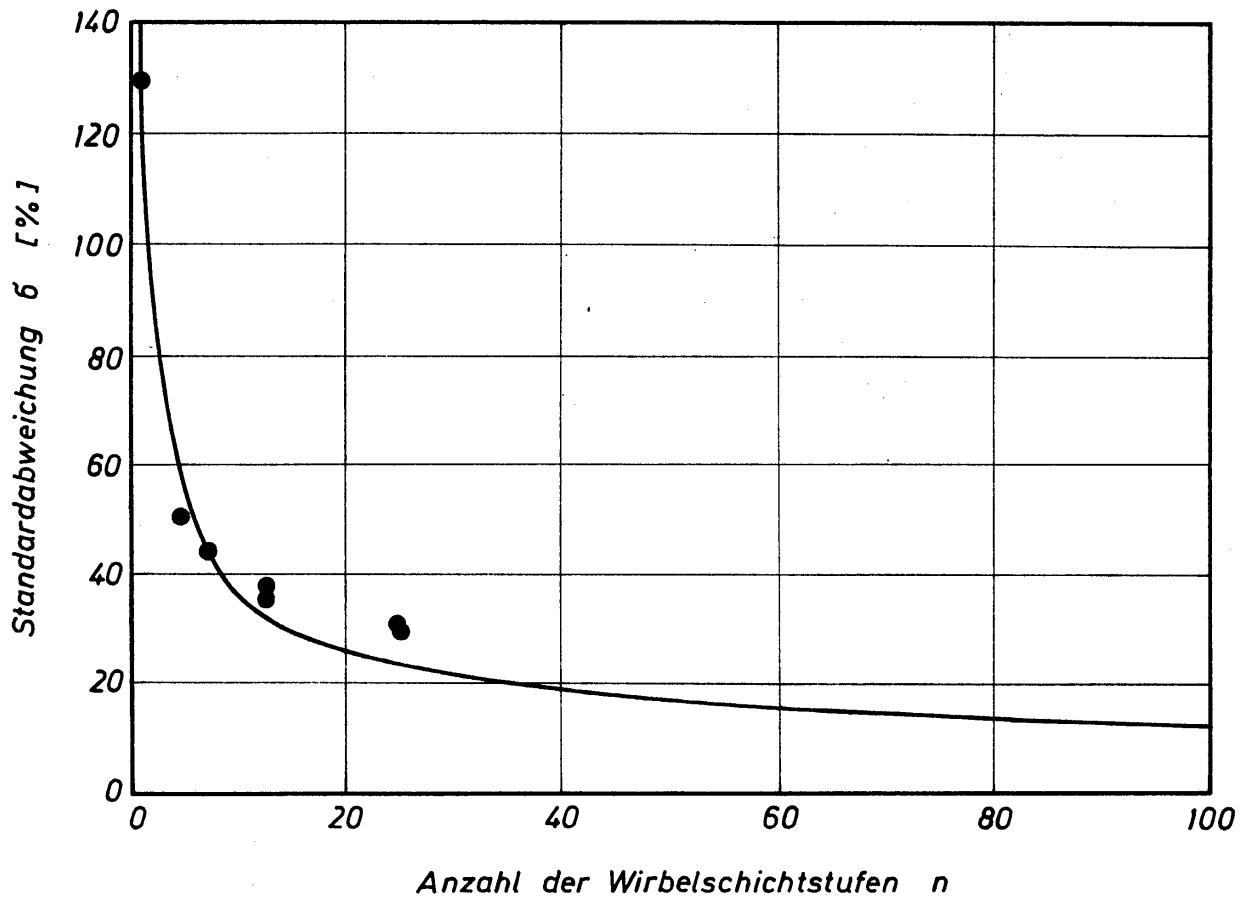


Bild 9.24. Standardabweichung, abhängig von der Stufenzahl der Wirbelschichtanlage. Die ausgezogene Kurve wurde aus den theoretisch bestimmten Kurven für das Häufigkeitsintegral ermittelt. Die Kurve wird durch die empirische Gl.(9.45) gut wiedergegeben. Die eingetragenen Punkte stellen Meßwerte dar

ergebnisse darstellen. Die empirische Ausgleichsfunktion für die ausgezogene Kurve lautet:

$$\sigma = 1,22/n^{1/2}. \quad (9.45)$$

Bis zu $n = 10$ nimmt die Streuung mit zunehmender Stufenzahl sehr stark ab. Wird auf eine geringe Verweilzeitstreuung, also auf eine sehr gleichmäßige Behandlung der Partikeln in der Wirbelschicht, Wert gelegt, so kommen Stufenzahlen zwischen 20 und 30 in Frage. Eine weitere Erhöhung über $n = 30$ hinaus dürfte jedoch nur dann sinnvoll sein, wenn auch eine größere Gesamtverweilzeit der Partikeln in der Anlage erforderlich ist.

9.7 Beschreibung der Strahlschicht

Die Strahlschicht ist ein Sonderfall der Wirbelschicht, in die ein Fluidstrom als Strahl eingeleitet wird. Strahlschichten lassen sich sowohl mit Gasen als auch mit Flüssigkeiten betreiben. Sie können für die Durchführung von Trocknungs- und Extraktionsprozessen [9.51 bis 9.53] herangezogen werden. Auch als chemischer Reaktor ist die Strahlschicht bereits in Erwägung gezogen worden [9.54].

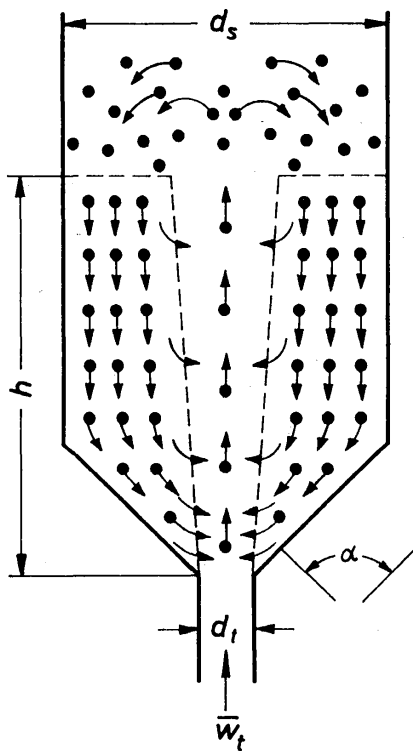


Bild 9.25

Schematische Darstellung einer Strahlschicht

Die sich in der Strahlschicht einstellende Partikelbewegung ist in *Bild 9.25* in schematisierter Form dargestellt. Die Strahlschicht befindet sich in einem zylindrischen Gefäß mit dem Durchmesser d_s . Am unteren Ende ist ein Konus mit dem Öffnungswinkel α angesetzt, in den das Strahlrohr mündet, dessen Durchmesser d_t ist. Durch das Strahlrohr tritt das Fluid in die Partikelschicht ein. Ist der Volumstrom \dot{V} größer als ein Mindestwert \dot{V}_0 , dann bildet sich in der Achse der Partikelschicht ein Strahlkanal aus, der die gesamte Schicht durchdringt.

In ihm werden Partikeln vom Strahl hochgerissen und nach Verlassen der Schicht wieder ausgeschieden. Es findet also ein steter Kreislauf der Partikeln statt. Innerhalb der durch gestrichelte Linien angedeuteten kreisringförmigen Randzone bewegen sich die Partikeln nach unten. Der konusförmige Boden erleichtert die Einschleusung der Partikeln in den Fluidstrom. Wie in *Bild 9.25* durch Pfeile angedeutet ist, gelangen aber auch längs des gesamten Strahlkanals Partikeln in den Strahl; dieser Anteil ist aber verhältnismäßig klein [9.55].

In einer Strahlschicht gemäß *Bild 9.25* wird das Fluid im wesentlichen durch den Strahlkanal strömen. Nur ein kleiner Anteil des Fluidstromes strömt durch die Randzone und trägt dazu bei, die Partikelmasse in einem fließfähigen Zustand zu halten. Diese Vorstellung ist, wie bereits betont wurde, stark schematisiert; sie gilt vermutlich am ehesten für Strahlschichten mit geringer Höhe h . Bei größeren Höhen strömt bis zu 85% des Volumstromes des Fluids durch die Randzone, wie MATHUR und GISHLER [9.56] feststellten. Wie die gleichen Autoren in einer anderen Arbeit beobachteten, nimmt unter diesen Bedingungen der Durchmesser des Strahlkanals mit Annäherung an die freie Oberfläche wieder ab [9.57]. Der obere Teil der Strahlschicht verhält sich dann näherungsweise wie eine Wirbelschicht. Die Experimente ließen auch erkennen, daß sich die Strahlschicht nur unter bestimmten Betriebsbedingungen einstellt.

Eine für den praktischen Betrieb von Strahlschichten bedeutsame Größe ist die zu ihrer Ausbildung erforderliche Mindestgeschwindigkeit $w_0 = \dot{V}_0 / (d_s^2 \pi / 4)$. Hierfür haben MATHUR und GISHLER [9.56] folgende empirische Gleichung mitgeteilt:

$$\sqrt{\frac{w_0^2}{gh}} = 1,414 \left(\frac{d_p}{d_s}\right) \left(\frac{d_t}{d_s}\right)^a \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)^{1/2}. \quad (9.46)$$

Hierin sind ρ_p und ρ die Dichten von Partikeln und Fluid, d_p der Partikeldurchmesser und g die Erdbeschleunigung. Der Exponent a war bei einer Säule mit $d_s = 152,4$ mm gleich $1/3$ und unabhängig vom Konuswinkel α , der zwischen 45° und 85° verändert worden war. Bei einer Säule mit $d_s = 609,6$ mm und d_t zwischen $47,5$ mm und $101,6$ mm erwies sich a als abhängig vom Konuswinkel; für $\alpha = 45^\circ$ ist $a = 0,23$ und für $\alpha = 85^\circ$ ist $a = 0,13$. Die Versuche wurden mit Luft und Wasser durchgeführt. Als Partikeln dienten verschiedene Erntegüter sowie Mineralien, deren Durchmesser zwischen $0,58$ und $6,35$ mm und deren Dichte zwischen 1100 kg/m³ und 7400 kg/m³ lag. Die Schichthöhe h wurde zwischen 76 mm und 2695 mm verändert.

Der Gl.(9.46) sehr ähnliche Beziehungen sind auch auf der Grundlage stark vereinfachender theoretischer Betrachtungen von MADONNA und LAMA [9.58] sowie von GHOSH [9.59] entwickelt worden. Diese Untersuchungen betrafen stets den Fall, daß alle Partikeln den gleichen Durchmesser haben. Für Gemische aus Partikeln mit unterschiedlichen Durchmessern haben SMITH und REDDY [9.60] eine empirische Gleichung mitgeteilt.

Mit der Frage des Druckverlustes in Strahlschichten haben sich insbesondere MADONNA und LAMA [9.61], MADONNA, LAMA und BRISSON [9.62] sowie MALEK und LU [9.63] befaßt. In der Untersuchung der zuletzt genannten Autoren wurde auch auf die zulässige Höhe der Strahlschicht eingegangen. Eng verknüpft mit dem Druckverlust ist der Durchmesser des Strahlkanals, für den MALEK, MADONNA und LU [9.64] auf Grund zahlreicher Versuche eine empirische Gleichung aufstellen konnten. Hiernach ist der Durchmesser des Strahlkanals nur eine Funktion des Säulendurchmessers d_s und der Massenstromdichte des Gases. Der Durchmesser d_p und die Dichte ρ_p der Partikeln sowie der Durchmesser d_t des Strahlrohres üben keinen Einfluß auf den Durchmesser des Kanals aus.

Weitere Untersuchungen betreffen die Vorgänge in der Randschicht, in welcher sich die Partikeln abwärts bewegen. MADONNA [9.65] führte Experimente zur Bestimmung des Lückengrades und BECKER [9.66] zur Bestimmung der Partikelbewegung durch. Von CHATTOPADHYAY [9.67] wurden Versuche über die Partikelumwälzung innerhalb der Strahlschicht durchgeführt. Die Ergebnisse lassen sich durch die grobempirische Gleichung

$$\frac{M_p}{\dot{V}/\dot{V}_0} = 0,217 + 38,6 d_p - 1,84 \cdot 10^{-5} \rho_p \quad (9.47)$$

darstellen. Hierin bedeuten M_p (kg/s) die in der Zeiteinheit umgewälzte Partikelmasse, \dot{V} den Volumstrom des Fluids, \dot{V}_0 den mittels Gl.(9.46) berechneten Mindestvolumstrom, d_p (m) den Partikeldurchmesser und ρ_p (kg/m³) die Partikeldichte. Bei den Versuchen wurden der Partikeldurchmesser d_p von $1,08 \cdot 10^{-3}$ bis $2,84 \cdot 10^{-3}$ m und die Partikeldichte ρ_p von 1120 bis 2640 kg/m³ verändert. Unverändert blieben der Säulendurchmesser mit $d_s = 0,15$ m, der Durchmesser des Strahlrohres $d_t = 0,00952$ m und der Kegelwinkel $\alpha = 60^\circ$. Die Schichthöhe h lag bei den Versuchen vermutlich zwischen $0,05$ und $0,2$ m. Die praktische Bedeutung von Gl.(9.47) ist daher nur gering.

Schließlich sei aus Gründen der Vollständigkeit erwähnt, daß auch der Wärmeübergang zwischen der Gefäßwand und der Strahlschicht untersucht worden ist [9.68 bis 9.70]. Dabei stellte sich heraus, daß der Wärmeübergang an Strahlschichten wesentlich schlechter ist als der an Wirbelschichten.

Schrifttum

- [9.1] H. REUTER, « Wirbelschicht », « Fließbett » oder « Fluidatbett », *Chemiker-Ztg. Chem. Apparatur* 89 (1965) 8, 274–6
- [9.2] H. REUTER, Stand der technischen Anwendungen fluidisierter Feststoffe, *Chemiker-Ztg. Chem. Apparatur* 89 (1965) 8, 276–82
- [9.3] ● M. LEVA, *Fluidization*, McGraw-Hill, New York/Toronto/London 1959
- [9.4] ● F. A. ZENZ und D. F. OTHMER, *Fluidization and Fluid-Particulate Systems*, Reinhold, New York 1960
- [9.5] ● F. SCHYTL, *Wirbelschichttechnik*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961
- [9.6] ● S. S. ZABRODSKY, *Hydrodynamics and Heat Transfer in Fluidized Beds* (aus dem Russischen übersetzt), The MIT Press, Cambridge (Mass.) und London (England) 1966
- [9.7] ● J. BERANEK, D. SOKOL und G. WINTERSTEIN, *Wirbelschichttechnik*, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1964
- [9.8] ● J. F. DAVIDSON und D. HARRISON, *Fluidized Particles*, Cambridge University Press, 1963
- [9.9] S. ERGUN, Fluid flow through packed columns, *Chem. Eng. Progr.* 48 (1952) 2, 89–94
- [9.10] K. S. RAJU und C. V. RAO, Critical mass velocities in fluidized beds, *Ind. J. Technol.* 2 (1964) 7, 222–6
- [9.11] G. NARSIMHAN, On a generalized expression for prediction of minimum fluidization velocity, *AIChE J.* 11 (1965) 3, 550–4
- [9.12] C. Y. WEN und Y. H. YU, A generalized method for predicting the minimum fluidization velocity, *AIChE J.* 12 (1966) 3, 610–2
- [9.13] A. MERSMANN, Zum Wärmeübergang in Wirbelschichten, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5–6, 349–53
- [9.14] E. RUCKENSTEIN, Homogeneous fluidization, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 3 (1965) 3, 260–8
- [9.15] E. RUCKENSTEIN, Nonhomogeneous fluidization, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 5 (1966) 1, 139–41
- [9.16] G. JINESCU, I. TEOREANU und E. RUCKENSTEIN, The mixing of solid particles in a fluidized bed, *Can. J. Chem. Eng.* 44 (1966) 2, 73–6
- [9.17] E. TALMOR und R. F. BENENATI, Solids mixing and circulation in gas fluidized beds, *AIChE J.* 9 (1963) 4, 536–40
- [9.18] I. A. BUROVOI und G. I. SVETZAROVA, The determination of mixing coefficients in fluidized bed reactors, *Int. Chem. Eng.* 5 (1965) 4, 711–4
- [9.19] C. R. CARLOS und J. F. RICHARDSON, Particle speed distribution in a fluidized system, *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 4, 705–6
- [9.20] G. J. V. J. RAJU, K. S. RAJU und C. V. RAO, Studies on batch fluidized beds: Distribution of particles in fluids, *Ind. J. Technol.* 4 (1966) 12, 359–61
- [9.21] H. REUTER, Mechanismus der Blasen im Gas-Feststoff-Fließbett, *Chem.-Ing.-Techn.* 35 (1963) 3, 219–28
- [9.22] P. N. ROWE und B. A. PARTRIDGE, Particle movement caused by bubbles in a fluidized bed, *3rd Congress of the European Federation of Chemical Engineering*, 20.–29. 6. 1962, B. 22–B. 29

- [9.23] H. REUTER, Steiggeschwindigkeit von Blasen im Gas-Feststoff-Fließbett, *Chem.-Ing.-Techn.* 37 (1965) 10, 1062-6
- [9.24] D. L. PYLE und D. HARRISON, The rising velocity of bubbles in two-dimensional fluidised beds, *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 4, 531-5
- [9.25] H. REUTER, Druckverteilung um Blasen im Gas-Feststoff-Fließbett, *Chem.-Ing.-Techn.* 35 (1963) 2, 98-103
- [9.26] R. D. TOOMEY und H. F. JOHNSTONE, Gaseous fluidization of solid particles, *Chem. Eng. Progr.* 48 (1952) 5, 220-6
- [9.27] M. L. LOCKETT, J. F. DAVIDSON und D. HARRISON, On the two-phase theory of fluidisation, *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 8, 1059-66
- [9.28] D. L. PYLE und D. HARRISON, An experimental investigation of the two-phase theory of fluidisation, *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 9, 1199-207
- [9.29] R. M. MARSHEK und A. GOMEZPLATA, Particle flow patterns in a fluidized bed, *AIChE J.* 11 (1965) 1, 167-73
- [9.30] M. M. EL HALWAGI und A. GOMEZPLATA, An investigation of solids distribution, mixing, and contacting characteristics of gas-solid fluidized beds, *AIChE J.* 13 (1967) 3, 503-12
- [9.31] R. JACKSON, The mechanics of fluidised beds, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 41 (1963) 1, 13-21
- [9.32] R. L. PIGFORD und T. BARON, Hydrodynamic stability of a fluidized bed, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 4 (1965) 1, 81-7
- [9.33] R. H. WILHELM und M. KWAWUK, Fluidization of solid particles, *Chem. Eng. Progr.* 44 (1948) 3, 201-8
- [9.34] J. S. M. BOTTERILL und P. D. BLOORE, Channels and chains of bubbles in gas fluidized beds, *Can. J. Chem. Eng.* 41 (1963) 3, 111-5
- [9.35] I. TEOREANU, On certain problems in the dynamics of fluidization, *Int. Chem. Eng.* 3 (1963) 4, 459-63
- [9.36] A. I. TAMARIN, The origin of self-excited oscillations in fluidized beds, *Int. Chem. Eng.* 4 (1964) 1, 51-4
- [9.37] R. L. PIGFORD und T. BARON, Hydrodynamic stability of a fluidized bed, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 4 (1965) 1, 81-7
- [9.38] K. JANIO, Investigation of the dynamics of a heterogeneous fluidized bed, *Int. Chem. Eng.* 6 (1966) 3, 422-5
- [9.39] E. RUCKENSTEIN und O. MUNTEAN, On the mechanism of bubble formation in a fluidized bed, *Can. J. Chem. Eng.* 45 (1967) 2, 95-7
- [9.40] O. MOLERUS, Hydrodynamische Stabilität des Fließbetts, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5/6, 341-8
- [9.41] J. W. HIBY, Untersuchungen über den kritischen Mindestdruckverlust des Anströmbodens bei Fluidatbetten, *Chem.-Ing.-Techn.* 36 (1964) 3, 228-9
- [9.42] J. P. SUTHERLAND, G. VASSILATOS, H. KUBOTA und G. L. OSBERG, The effect of packing on a fluidized bed, *AIChE J.* 9 (1963) 4, 437-41
- [9.43] G. WINTERSTEIN und K. ROSE, Ein Beitrag zur Theorie der mehrstufigen Fluidisierung: Auslegung von mehrstufigen Wirbelreaktoren. Zusammenhänge zwischen geforderter Verweilzeit und Reaktordimensionen, *Chem. Techn.* 13 (1961) 10, 590-4
- [9.44] K. ROSE und G. WINTERSTEIN, Ein Beitrag zur Theorie der mehrstufigen Fluidisierung: Temperaturführung in mehrstufigen Wirbelreaktoren, *Chem. Techn.* 13 (1961) 11, 658-61
- [9.45] H. BRAUER, J. MÜHLE und M. SCHMIDT, Mehrstufige Wirbelschichtanlage mit kontinuierlichem Partikeldurchfluß, *Chem.-Ing.-Techn.* 42 (1970) 7, 494-502
- [9.46] H. A. MOSER, *Untersuchung des Druckverlustes von dünnen Lochplatten*, Dipl.-Arbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin 1969

- [9.47] A. MERSMANN, Druckverlust und Schaumhöhen von gasdurchströmten Flüssigkeitsschichten auf Siebböden, *VDI-Forschungsh.* 491, VDI-Verlag, Düsseldorf 1962
- [9.48] E. ZELFEL, *Experimentelle Untersuchungen des Druckverlustes an Siebböden*, Dissertation, TH München 1966
- [9.49] M. SCHMIDT, *Untersuchung der Verweilzeit von Partikeln in einer mehrstufigen Rieselsboden-Wirbelschicht*, Dipl.-Arbeit am Institut für Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin 1969
- [9.50] ● J. BERANEK, D. SOKOL und G. WINTERSTEIN, *Wirbelschichttechnik*, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1964
- [9.51] C. B. COWAN, W. S. PETERSON und G. L. OSBERG, Drying of wood chips in a spouted bed, *Pulp & Paper Mag. Canada* 58 (1957 Dez.) 138–42
- [9.52] H. A. BECKER und H. R. SALLANS, Drying wheat in a spouted bed, *Chem. Eng. Sci.* 13 (1961) 2, 97–112
- [9.53] T. R. JOHNSTON, C. W. ROBINSON und N. EPSTEIN, A spouted mixer-settler, *Can. J. Chem. Eng.* 39 (1961) 1, 1–8
- [9.54] R. H. BUCHANAN und F. MANURUNG, Spouted bed low-temperature carbonization of coal, *Brit. Chem. Eng.* 6 (1961) 6, 402–3
- [9.55] B. THORLEY, J. B. SAUNBY, K. B. MATHUR und G. L. OSBERG, An analysis of air and solid flow in a spouted wheat bed, *Can. J. Chem. Eng.* 37 (1959) 5, 184–92
- [9.56] K. B. MATHUR und P. E. GISHLER, A technique for contacting gases with coarse solid particles, *AIChE J.* 1 (1955) 2, 157–64
- [9.57] K. B. MATHUR und P. E. GISHLER, A study of the application of the spouted bed technique to wheat drying, *J. Appl. Chem.* 5 (1955) 11, 624–36
- [9.58] L. A. MADONNA und R. F. LAMA, The derivation of an equation for predicting minimum spouting velocity, *AIChE J.* 4 (1958) 4, 497
- [9.59] B. GHOSH, A study on the spouted bed, Part I: A theoretical analysis, *Indian Chem. Eng.* 7 (1965) 1, 16–9
- [9.60] J. W. SMITH und K. V. S. REDDY, Spouting of mixed particle-size beds, *Can. J. Chem. Eng.* 42 (1964) 5, 206–10
- [9.61] L. A. MADONNA und R. F. LAMA, How to calculate pressure drop in spouted beds, *Ind. Eng. Chem.* 52 (1960) 2, 169–72
- [9.62] L. A. MADONNA, R. F. LAMA und W. L. BRISSON, Solids-air jets, *Brit. Chem. Eng.* 6 (1961) 8, 524–8
- [9.63] M. A. MALEK und B. C.-Y. LU, Pressure drop and spouted bed height in spouted beds, *Ind. Eng. Chem. Process Design & Development* 4 (1965) 1, 123–8
- [9.64] M. A. MALEK, L. A. MADONNA und B. C.-Y. LU, Estimation of spout diameter in a spouted bed, *Ind. Eng. Chem. Process Design & Development* 2 (1963), 30–4
- [9.65] L. A. MADONNA, Void fraction variation in the spouted bed annulus, *Ind. Eng. Chem. Process Design & Development* 5 (1966) 1, 47–50
- [9.66] H. A. BECKER, An investigation of laws governing the spouting of coarse particles, *Chem. Eng. Sci.* 13 (1961) 4, 245–62
- [9.67] A. CHATTOPADHYAY, Studies in spouted bed columns, IIT Bombay, Department of Chemistry of Engineering
- [9.68] J. KLASSEN und P. E. GISHER, Heat transfer from column wall to bed in spouted, fluidized, and packed systems, *Can. J. Chem. Eng.* 36 (1958) 1, 12–8
- [9.69] B. GOSH und G. L. OSBERG, Heat transfer in water spouted beds, *Can. J. Chem. Eng.* 37 (1959) 6, 205–7
- [9.70] M. A. MALEK und B. C.-Y. LU, Heat transfer in spouted beds, *Can. J. Chem. Eng.* 42 (1964) 1, 14–20

10 Pneumatischer und hydraulischer Transport körniger Feststoffe

Mittels Gas- oder Flüssigkeitsströmen lassen sich körnige Feststoffe durch Rohrleitungen fördern. Man bezeichnet die Förderung der Feststoffe in einem Gas als pneumatischen und in einer Flüssigkeit als hydraulischen Transport. Dabei dient als Gas vornehmlich Luft und als Flüssigkeit in den meisten Fällen Wasser. Die geförderten Feststoffe sind beispielsweise Kohle, Sand, Erze, Zement, viele Arten von landwirtschaftlichen Erntegütern sowie zahlreiche Produkte der chemischen Industrie und der Lebensmittelindustrie. Die größten technischen Anlagen wurden bislang für den Blas- und den Spülversatz von Waschbergen im Bergbau, für den Transport von Baggersand und von Kohle errichtet. Eine der bedeutsamsten Transportleitungen für Kohle, deren Länge 175 km beträgt, wurde 1956 bei Pittsburgh gebaut.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem pneumatischen und hydraulischen Transport besteht im Verhältnis der Dichte des geförderten Feststoffes zur Dichte des Fördermittels. Das Dichteverhältnis liegt beim pneumatischen Transport in der Größenordnung von 2000 und beim hydraulischen Transport in der Größenordnung von 2. Dies hat zur Folge, daß die Fördergeschwindigkeiten beim pneumatischen Transport um etwa eine Zehnerpotenz größer und die volumetrischen Feststoffkonzentrationen um eine oder auch mehrere Zehnerpotenzen kleiner sind als beim hydraulischen Transport. Für die theoretische Behandlung des Transportproblems spielt ferner das Verhältnis aus Partikelgeschwindigkeit und mittlerer Strömungsgeschwindigkeit eine große Rolle. Bei pneumatischer Förderung kann es Werte annehmen, die wesentlich kleiner als 1 sind. Bei hydraulischer Förderung hingegen darf dieses Verhältnis mit guter Näherung gleich 1 gesetzt werden.

Wegen der geschilderten Bedingungen kommen für den pneumatischen Transport durch Rohrleitungen fast ausschließlich sehr feinkörnige oder staubförmige Feststoffe in Betracht. Die Länge der Förderleitungen beträgt im allgemeinen nicht mehr als bis zu einigen 100 m. Der pneumatische Transport ist also im allgemeinen eine für die Technik bedeutsame Form des Nahtransportes. Nur hierfür läßt sich der Druckverlust des Gasstromes in einer wirtschaftlich vertretbaren Höhe halten. Bedeutsame Beiträge zur Aufklärung der physikalischen Vorgänge beim pneumatischen Transport haben GASTERSTÄDT [10.1], BARTH [10.2, 10.3], WEIDNER [10.4], JUNG [10.5], MUSCHELKNAUTZ [10.6], SCHULTZ-GRUNOW [10.7], MEYER [10.8], ADAM [10.9] und WELSCHOF [10.10] geliefert.

Im Gegensatz zum pneumatischen Transport ist der hydraulische Transport insbesondere für den Ferntransport geeignet. Um den Druckverlust in erträglichen Grenzen halten zu können, ist man gezwungen, den Feststoff so zu zerkleinern, daß ein vorgeschriebener Korndurchmesser nicht überschritten wird. In Sonder-

fällen wird vom hydraulischen Transport aber auch im Rahmen des Nahtransportes Gebrauch gemacht. Hierbei ist der Druckverlust von nicht so entscheidender Bedeutung, so daß die Förderung sehr grobstückiger Feststoffe, wie z. B. Schlacke, möglich ist. Grundlegende Untersuchungen über den Druckverlust des Fördermediums beim hydraulischen Transport haben insbesondere NEWITT, RICHARDSON, ABBOTT und TURKE [10.11], FÜHRBÖTER [10.12], WORSTER und DENNY [10.14], HOWARD [10.15] sowie KRIEGEL und BRAUER [10.16, 10.17] durchgeführt. Um den Feststofftransport aufrechterhalten zu können, darf die Geschwindigkeit des Fördermediums einen bestimmten unteren Wert nicht unterschreiten. Diesen unteren Wert nennt man Ablagerungsgeschwindigkeit, da bei ihm der Feststoff aus dem Förderstrom ausfällt und sich in horizontalen Leitungen auf dem Rohrboden ablagert. Über den Ablagerungsvorgang und die Ablagerungsgeschwindigkeit liegen Untersuchungen von einigen der bereits genannten Forscher [10.11], 10.12, 10.13, 10.16, 10.17] sowie von SINCLAIR [10.18], SPELLS [10.19] und SMITH [10.20] vor.

Der pneumatische und der hydraulische Transport sind fast immer von zwei sehr nachteiligen Vorgängen begleitet. Diese sind der Verschleiß der Rohrleitungen und der Abrieb des Fördergutes. In beiden Fällen handelt es sich um Zerkleinerungsvorgänge. Der Verschleiß von Rohrleitungen tritt in stärkerem Maße immer nur dann auf, wenn eine Entmischung von Feststoff und Fluidstrom herbeigeführt wird. Da das in besonders starkem Maße in Rohrkrümmern der Fall ist, sind diese auch dem stärksten Verschleiß ausgesetzt. Mit den Fragen des Verschleißes haben sich insbesondere MAIER [10.21, 10.22], WELLINGER und Mitarbeiter [10.23, 10.24] sowie BRAUER und KRIEGEL [10.25 bis 10.28] befaßt. Ein Abrieb der Feststoffpartikeln tritt insbesondere bei hohen Fördergeschwindigkeiten (pneumatischer Transport) oder langen Transportleitungen (hydraulischer Transport) auf. Durch den Abrieb werden die Partikeln gleichzeitig kleiner und in den meisten Fällen auch kugelförmiger. Systematische Untersuchungen über den Abrieb liegen noch nicht vor. Für den Transportvorgang selbst ergeben sich durch den Abrieb kaum Nachteile. Unerwünscht ist der Abrieb im wesentlichen nur deshalb, weil durch ihn staubförmige Feststoffanteile gebildet werden, die sich nur mit größerem technischem Aufwand vom Fluidstrom trennen lassen. Im folgenden werden die mit dem pneumatischen und hydraulischen Transport zusammenhängenden Probleme behandelt. Von besonderer Bedeutung sind der Druckverlust des Fördermediums und die Ablagerungsgeschwindigkeit. Transportleitungen werden sowohl in horizontalen, vertikalen und beliebig geneigten Ebenen verlegt. Am verwickeltsten sind die Förderbedingungen in horizontal verlegten Rohren. Hierauf wird daher vornehmlich eingegangen.

10.1 Beschreibung der feststoffbeladenen Strömung

10.11 Konzentration des Feststoffs im Fluidstrom

Die Konzentration des Feststoffs im Fluidstrom läßt sich durch zwei Maße kennzeichnen, die an Hand von *Bild 10.1* erläutert werden sollen. Dargestellt ist ein

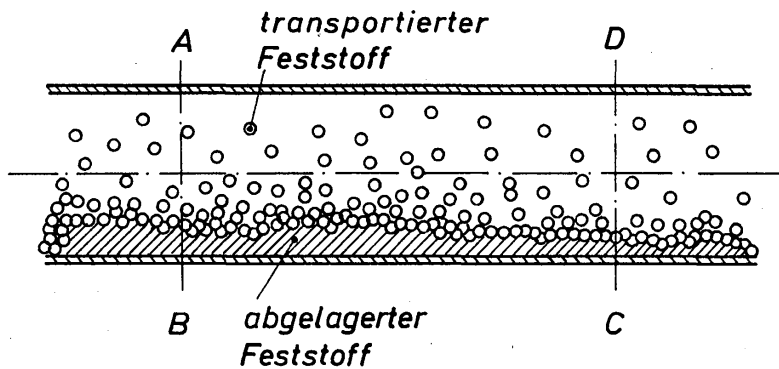


Bild 10.1. Rohrabschnitt zur Erläuterung der Raum- und der Transportkonzentration

Rohrstück vom Volumen V_R , das durch die beiden Querschnitte AB und CD begrenzt wird. Am Rohrboden befindet sich eine abgelagerte, schraffiert gezeichnete Feststoffschicht. Darüber bewegen sich als Kreise dargestellte Feststoffkörner rollend oder auch schwebend durch den Rohrabschnitt. Im stationären Zustand ist der Feststoffgehalt im Rohrvolumen unveränderlich. Bezeichnet man das aus abgelagertem und transportiertem Anteil bestehende gesamte Feststoffvolumen mit V_p , so gilt für die volumetrische Konzentration c_R des Feststoffes im Rohr die Beziehung

$$c_R \equiv \frac{V_p}{V_R} = \frac{V_p}{V + V_p}. \quad (10.1)$$

Hierin ist V das im Rohrvolumen V_R befindliche Fluidvolumen. Die Größe c_R wird mittlere Raumkonzentration genannt, da sie das gesamte im betrachteten Raum befindliche Feststoffvolumen erfaßt. Sie kann in der Weise bestimmt werden, daß man ein langes Rohrstück beispielsweise durch Kükenhähne plötzlich abschließt. Durch Ausspülen oder Ausblasen des Feststoffes läßt sich dessen Volumen ermitteln.

Ein zweites Konzentrationsmaß ist die Transportkonzentration c_T . Zu dieser Größe gelangt man, wenn man allein die durch das Rohrstück hindurchtretenden Volumströme \dot{V}_p und \dot{V} für Feststoff und Fluid betrachtet, die verhältnismäßig einfach zu messen sind. Der abgelagerte Anteil des Feststoffes bleibt hierbei also unberücksichtigt. Die mittlere volumetrische Transportkonzentration ist somit wie folgt definiert:

$$c_T \equiv \frac{\dot{V}_p}{\dot{V} + \dot{V}_p}. \quad (10.2)$$

In vielen Fällen, insbesondere beim pneumatischen Transport, ist der Volumstrom des Feststoffes \dot{V}_p klein im Vergleich zum Volumstrom des Fluids \dot{V} . Dann läßt sich mit guter Näherung auch

$$c_T \equiv \frac{\dot{V}_p}{\dot{V}} \quad (10.3)$$

schreiben. Die Transportkonzentration steht in engem Verhältnis zum Massenstromverhältnis

$$\mu \equiv \frac{\dot{M}_p}{\dot{M}}, \quad (10.4)$$

wobei $\dot{M}_p = \dot{V}_p \rho_p$ und $\dot{M} = \dot{V} \rho$ die Massenströme des Feststoffes und des Fluids bedeuten. Mit ρ_p und ρ werden die entsprechenden Dichten bezeichnet. Somit gilt also der Zusammenhang

$$c_T = \mu \frac{\rho}{\rho_p}. \quad (10.5)$$

Die Größe μ wird häufig auch Gutbeladung genannt. Richtiger wäre jedoch die Bezeichnung Fluidbeladung, da der Fluidstrom mit Feststoff beladen wird.

Zur genauen Beschreibung eines Transportprozesses müssen sowohl Angaben über die Größe der Transportkonzentration c_T als auch über die Größe der Raumkonzentration c_R gemacht werden. Die alleinige Angabe von c_T vermag keine Vorstellung über das in einem Rohrabschnitt befindliche Feststoffvolumen V_p zu vermitteln. Andererseits gibt die Raumkonzentration c_R keinen Hinweis auf das tatsächlich transportierte Feststoffvolumen \dot{V}_p . Da in der technischen Praxis in erster Linie das Ergebnis des Transportprozesses interessiert, ist es verständlich, daß man sich mit der Angabe der Transportkonzentration c_T bzw. des Massenstromverhältnisses μ zu begnügen versucht. Man muß dann aber bedenken, daß die Transportkonzentration c_T im allgemeinen kleiner ist als die Raumkonzentration c_R . Gleichheit beider Konzentrationsmaße ist nur bei sehr hohen Fördergeschwindigkeiten zu erreichen.

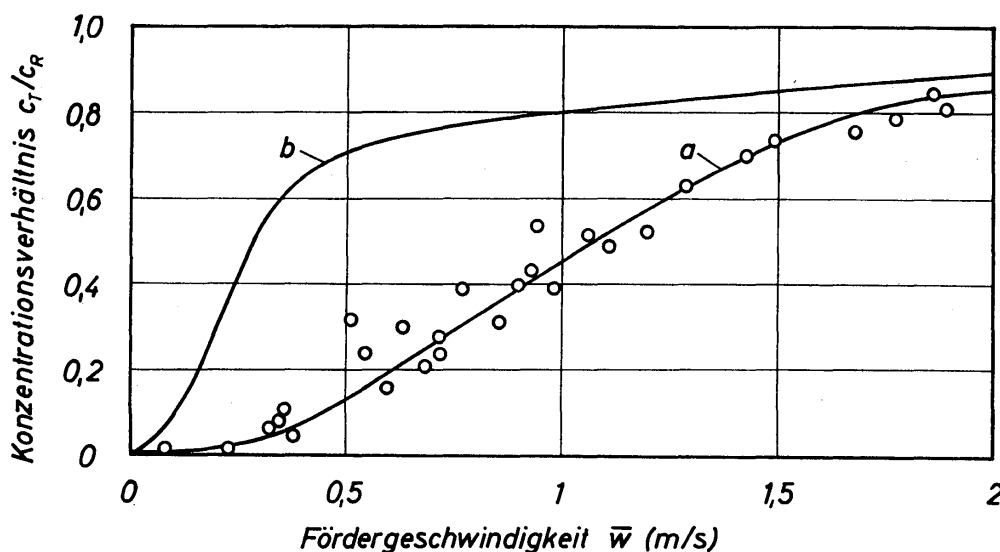


Bild 10.2. Verhältnis der Transportkonzentration c_T zur Raumkonzentration c_R , abhängig von der mittleren Fördergeschwindigkeit \bar{w} , für zwei verschiedene Beispiele des hydraulischen Transportes

Bild 10.2 läßt diese Verhältnisse sehr deutlich erkennen. Aufgetragen ist das Konzentrationsverhältnis c_T/c_R über der Fördergeschwindigkeit \bar{w} . Kurve *a* gleicht Meßwerte von KRIEGEL und BRAUER [10.16] aus, die den hydraulischen Transport eines Koksgemisches untersuchten. Der mittlere Partikeldurchmesser betrug 1,44 mm. Kurve *b* wurde von DURAND [10.13] mitgeteilt, der den hydraulischen Transport von Asche mit dem einheitlichen Partikeldurchmesser $d_p = 0,05$ mm untersuchte. Eine Annäherung der Transportkonzentration an die Raumkon-

zentration tritt bei steigender Fördergeschwindigkeit um so eher auf, je kleiner die Feststoffkörner sind. Das ist darauf zurückzuführen, daß die Ablagerung des Feststoffes bei großem Korndurchmesser bereits bei einer größeren Geschwindigkeit einsetzt als bei kleinem Korndurchmesser. Zu beachten ist, daß selbst bei einer Fördergeschwindigkeit von 2 m/s, die zu einer ablagerungsfreien Förderung der untersuchten Feststoffe vollkommen ausreicht, das Konzentrationsverhältnis noch immer unter 0,9 liegt.

Der Zusammenhang zwischen der Raum- und der Transportkonzentration läßt sich sehr leicht angeben, wenn die mittlere Fluidgeschwindigkeit \bar{w} und die mittlere Partikelgeschwindigkeit \bar{w}_p bekannt sind. Da dann näherungsweise

$$\dot{V}_p = V_p w_p / L \quad (10.6)$$

und

$$\dot{V} = V \bar{w} / L \quad (10.7)$$

gesetzt werden kann, erhält man aus Gl.(10.2)

$$c_T = \frac{w_p V_p / V}{\bar{w} + w_p V_p / V} \quad (10.8)$$

Unter Berücksichtigung von Gl.(10.1) und Umformung erhält man

$$\frac{c_T}{c_R} = \frac{\frac{w_p / \bar{w}}{1 - c_R}}{1 + \frac{w_p}{\bar{w}} \frac{c_R}{1 - c_R}} \quad (10.9)$$

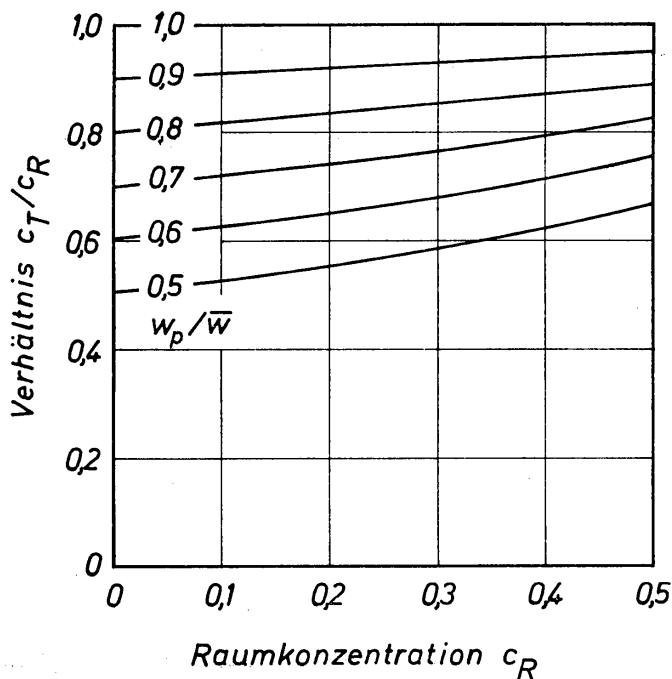


Bild 10.3
Abhängigkeit des Konzentrationsverhältnisses c_T/c_R von der Raumkonzentration c_R und dem Geschwindigkeitsverhältnis w_p/\bar{w}

Das Konzentrationsverhältnis c_T/c_R ist also eine Funktion der Raumkonzentration c_R und des Geschwindigkeitsverhältnisses w_p/\bar{w} . Bild 10.3 zeigt eine graphische Darstellung von Gl.(10.9). Haben Fluid und Feststoff die gleiche Geschwindigkeit,

dann ist die Transportkonzentration immer gleich der Raumkonzentration. Für alle Werte $w_p/\bar{w} < 1$ ist c_T/c_R immer kleiner als 1, steigt aber mit zunehmender Raumkonzentration leicht an. Für $c_R = 0$ folgt aus Gl.(10.9):

$$\frac{c_T}{c_R} = \frac{w_p}{w}. \quad (10.10)$$

Der hiernach berechnete Wert des Konzentrationsverhältnisses liefert für die Erfordernisse der technischen Praxis bis etwa $c_R = 0,2$ genügend genaue Werte. Damit werden also die üblichen Fälle beim pneumatischen und auch beim hydraulischen Transport erfaßt. Die Größe des Geschwindigkeitsverhältnisses w_p/\bar{w} liegt beim pneumatischen Transport etwa zwischen 0,5 und 0,8 und beim hydraulischen Transport zwischen 0,8 und 0,9. Zur Vereinfachung der Rechnungen wird beim hydraulischen Transport durch horizontale Rohre vielfach $w_p/\bar{w} = 1$ gesetzt. Beim Transport durch vertikale Rohre ist eine genaue Berechnung des Geschwindigkeitsverhältnisses sehr leicht möglich und daher stets zu empfehlen.

Aus wirtschaftlichen Überlegungen bemüht man sich, den gewünschten Transport mit einer möglichst niedrigen Fördergeschwindigkeit durchzuführen. Unter diesen Bedingungen ist c_R stets wesentlich größer als c_T . Dabei ist es dann möglich, daß trotz einer sehr kleinen Transportkonzentration die Raumkonzentration sehr groß ist und das Rohr zu verstopfen droht.

Die größtmögliche Raumkonzentration c_R läßt sich durch eine einfache Überlegung ermitteln. Bei der Behandlung der ruhenden Füllkörperschicht in Abschnitt 8.12 war zu deren Beschreibung der Lückengrad ε eingeführt. Mit den hier verwendeten Bezeichnungen lautet die Definitionsgleichung:

$$\varepsilon \equiv \frac{V_R - V_P}{V_R} = 1 - \frac{V_P}{V_R}. \quad (10.11)$$

Bei einer ruhenden Schüttung aus feinkörnigem Granulat einheitlichen Durchmessers ist ε etwa 0,5. Wegen

$$c_R = 1 - \varepsilon \quad (10.12)$$

heißt das also, daß die maximale Raumkonzentration nicht größer als 0,5 sein kann. Da beim Transport die Granulatschicht in sich beweglich sein muß, wird man mit einem Lückengrad von etwa $\varepsilon = 0,6$ rechnen müssen, so daß die Raumkonzentration kaum größer als maximal 0,4 sein kann. Berücksichtigt man ferner, daß die Transportkonzentration c_T stets kleiner ist als die Raumkonzentration c_R , so wird man für c_T kaum einen größeren Wert als 0,35 erreichen können. Dieser Wert gilt für Feststoffe mit einheitlicher Korngröße. Bei Korngemischen mit sehr breitem Durchmesserpektrum kann die Transportkonzentration geringfügig größer sein.

In technischen Anlagen werden diese Konzentrationswerte bislang nur beim hydraulischen Transport erreicht. Beim pneumatischen Transport liegt die Transportkonzentration in der Größenordnung von 0,01, d.h. 1%, und darunter.

10.12 Verteilung und Bewegung des Feststoffs im Fluidstrom

Zunächst soll ein Sonderfall betrachtet werden, bei dem die Sinkgeschwindigkeit der Partikeln im betrachteten Fördermedium verschwindend klein ist. Das ist beispielsweise möglich, wenn der Partikeldurchmesser außerordentlich klein ist oder wenn die Partikeldichte mit der Fluidichte nahezu übereinstimmt. Von technischem Interesse ist nur der Fall des sehr kleinen Partikeldurchmessers. Sind diese Partikeln gleichmäßig in der Flüssigkeit verteilt, so spricht man von einer homogenen Suspension. Hierin führen Flüssigkeitselemente und Partikeln näherungsweise die gleichen Bewegungen aus, so daß eine Unterscheidung kaum möglich ist. In dieser Beziehung sind die Flüssigkeitselemente und die Partikeln nicht mehr zu identifizieren. Aus dem ursprünglich zweiphasigen System ist durch Vermischung ein einphasiges System geworden. Diesem System werden eigene Stoffeigenschaften, wie z. B. Dichte und Viskosität, zugeordnet. In vielen Fällen ist es dann möglich, daß sich die Fließeigenschaften des neuen Systems ganz erheblich von denen der reinen Flüssigkeit unterscheiden. Während die reine Flüssigkeit Newtonsches Verhalten zeigt, kann das neue System ausgeprägte nicht-Newtonsche Eigenschaften aufweisen. Derartige Systeme sollen hier nicht betrachtet werden. Beim pneumatischen und hydraulischen Transport soll stets davon ausgegangen werden, daß Fluid und Feststoff keine neue Phase bilden. Ihre charakteristischen Phaseneigenschaften sollen erhalten bleiben. Der Transport körniger Feststoffe im Fluidstrom ist also ein Problem der mehrphasigen Strömung.

Einige charakteristische Formen der Verteilung und Bewegung des Feststoffes im Fluidstrom sollen an Hand von *Bild 10.4* beschrieben werden. Hierin sind einige photographische Aufnahmen vom hydraulischen Transport sehr feinkörnigen Kokes bei verschiedenen Wassergeschwindigkeiten in einem horizontal angeordneten Rohr zusammengestellt [10.17]. Eine Unterscheidung zwischen dem hydraulischen und pneumatischen Transport ist für die folgende Beschreibung der grundsätzlichen Vorgänge nicht notwendig.

Die *Bilder 10.4a* und *10.4b* zeigen eine nahezu gleichmäßige Verteilung des Feststoffes über den Querschnitt und in der Längsrichtung des Rohres, obgleich die Wassergeschwindigkeit in *Bild 10.4a* 2,5 m/s und in *Bild 10.4b* 2,0 m/s beträgt. Bei Verminderung der Wassergeschwindigkeit auf 1,7 m/s läßt *Bild 10.4c* bereits die ersten Merkmale der ungleichmäßigen Feststoffverteilung deutlich erkennen. Der Feststoffgehalt steigt zum Rohrboden hin beträchtlich an. In *Bild 10.4d*, das zu einer Geschwindigkeit von 1 m/s gehört, bildet der Feststoff am Rohrboden bereits eine zusammenhängende, gleitende Schicht. Der gesamte Feststoff wird dabei noch von der strömenden Flüssigkeit in Bewegung gehalten. Bei noch weiter abnehmender Strömungsgeschwindigkeit reicht die von der Flüssigkeit an die Feststoffschicht übertragene Energie nicht mehr aus, die Schicht zu bewegen. Sie kommt gemäß *Bild 10.4e* zur Ruhe.

Die Förderzustände in den *Bildern 10.4a* bis *10.4e* sind durch einen regen Austausch von Feststoff quer zur Strömungsrichtung gekennzeichnet. Dieser Aus-

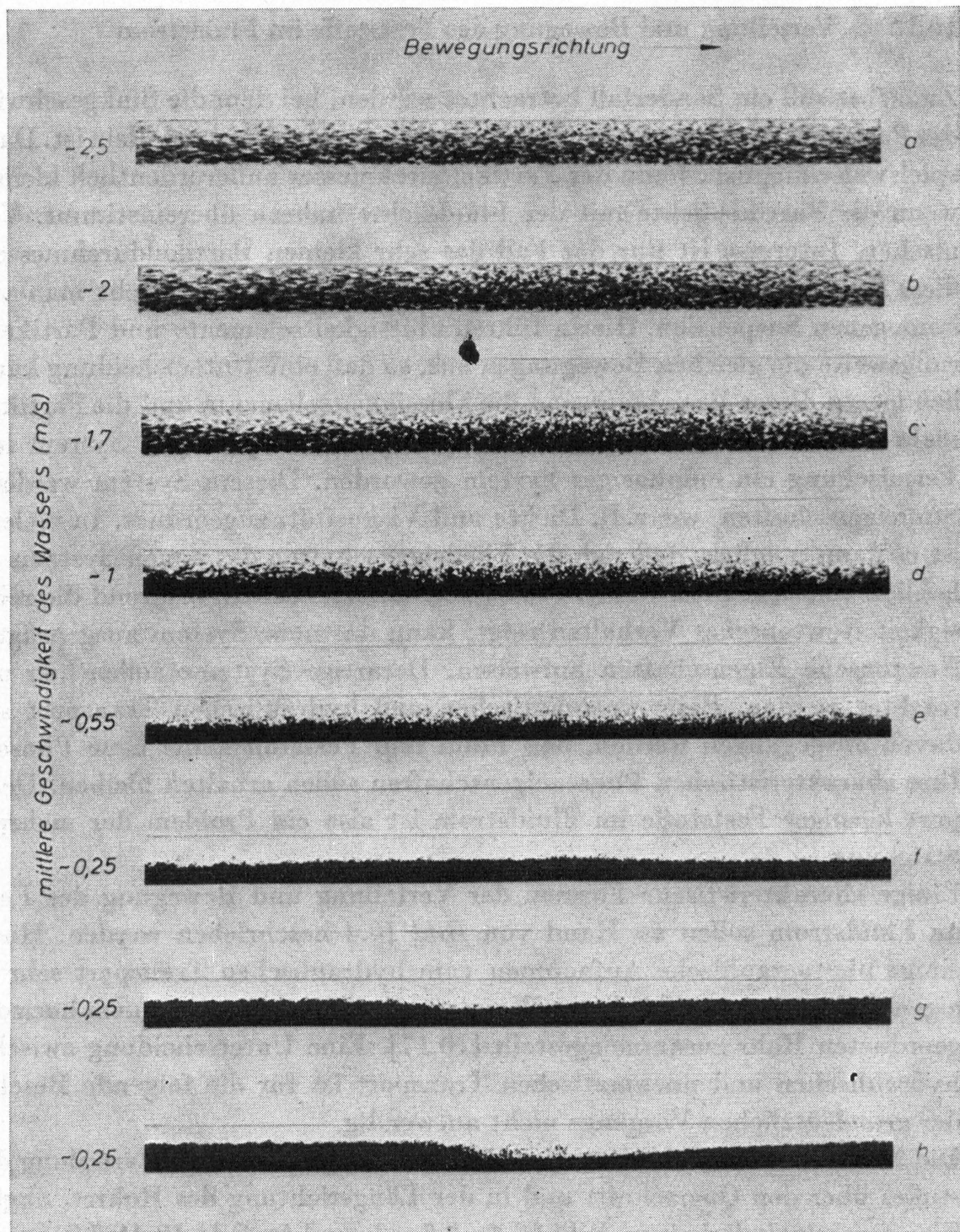


Bild 10.4. Photographische Aufnahmen von der Verteilung feiner Koks Körner, deren Durchmesser zwischen 0,3 mm und 0,5 mm lag, im Flüssigkeitsstrom. Bilder a bis e für verschiedene Wassergeschwindigkeiten; Bilder f bis h für die gleiche Wassergeschwindigkeit, aber zu verschiedenen Zeiten

tausch läßt sich besonders deutlich bei den kleineren Geschwindigkeiten erkennen, bei denen sich schon eine gleitende oder ruhende Feststoffschicht am Rohrboden gebildet hat. Die oberen Körner der Schicht werden immer wieder von der darüber strömenden turbulenten Flüssigkeit aufgewirbelt. Dabei lösen sich auch ganze Feststoffballen eruptionsartig aus der unteren Schicht. Während die Körner dieser Ballen langsam wieder zu Boden sinken, werden an anderen Stellen neue Ballen hochgerissen.

Bei noch weitergehender Erniedrigung der Flüssigkeitgeschwindigkeit tritt die Trennungslinie zwischen den beiden Phasen immer schärfer hervor. Die *Bilder 10.4f bis 10.4h* zeigen diesen Zustand zu verschiedenen Zeiten bei der gleichen Geschwindigkeit von 0,25 m/s. Je nach Größe der Geschwindigkeit und der mittleren Raumkonzentration bilden sich verschiedene Formen der Feststoffschicht aus. In den *Bildern 10.4f bis 10.4h* erkennt man beispielsweise die Ausbildung von Feststoffdünen, die sich von links nach rechts bewegen. Die beobachtete Wanderung der Dünen ist fast allein auf die Wirkung der Magnuskräfte zurückzuführen. Diese sind proportional der dritten Potenz des Partikeldurchmessers und daher nur für die größeren Partikeln bedeutsam. Die Magnuskräfte lösen also die Partikeln am hinteren Ende aus der Düne heraus und treiben sie bis zum Dünenkopf. An dieser Stelle werden die Magnuskräfte unwirksam, da die Geschwindigkeit wegen der Querschnittserweiterung zu stark absinkt. Am Kopf der Düne lagern sich die Feststoffkörner also ab. Der Abstand zwischen den Dünen hängt von der Feststoffkonzentration und der Fluidgeschwindigkeit ab. Bei sehr hohen Konzentrationen wachsen die Dünen so stark an, daß sie nahezu den ganzen Rohrquerschnitt ausfüllen; derartige Dünen nennt man auch Feststoffpfropfen.

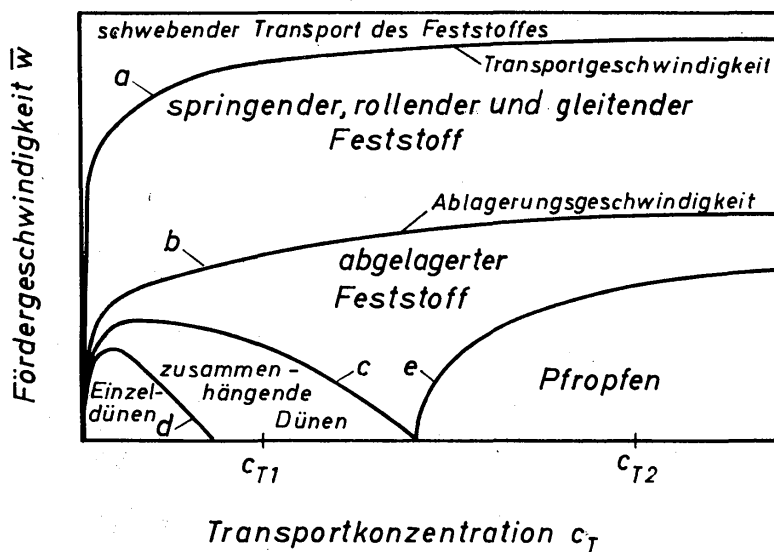


Bild 10.5
Bewegungsformen des Feststoffes, abhängig von der Fördergeschwindigkeit \bar{w} und der Transportkonzentration c_T

Diese Ausführungen haben also ergeben, daß verschiedene Formen der Feststoffbewegung auftreten, die insbesondere von der Fluidgeschwindigkeit und der Konzentration abhängen. NEWITT und Mitarbeiter [10.11] haben den Einfluß dieser Größen auf die Feststoffbewegung experimentell untersucht und das in *Bild 10.5* wiedergegebene Ergebnis gefunden. Auf genaue Zahlenangaben wurde verzichtet, da das Bild nur für die bei den Versuchen verwendete Flüssigkeit, das verwendete Kornmaterial und den Korndurchmesser gilt. Zu beachten ist, daß je nach Größe der Konzentration mit zunehmender Geschwindigkeit unterschiedliche Formen der Feststoffverteilung auftreten können. Ein schwebender Transport aller Feststoffteilchen tritt oberhalb der Transportgeschwindigkeit auf, die in *Bild 10.5* durch Kurve *a* gekennzeichnet ist. Bei den theoretischen Untersuchungen ist bislang vorwiegend der schwebende Transport behandelt worden.

Die bisherigen Aussagen betrafen die Verteilung und Bewegung der Feststoffe beim hydraulischen und pneumatischen Transport in waagerechten Rohrleitungen. Wesentlich einfachere Verhältnisse ergeben sich beim Transport durch senkrechte Rohrleitungen. Das geht in sehr deutlicher Form aus *Bild 10.6* hervor, das eine photographische Aufnahme vom hydraulischen Transport durch einen horizontalen und vertikalen Rohrabschnitt, der durch einen Krümmer verbunden ist, wiedergibt. Im horizontalen Abschnitt hat sich der größte Teil des Feststoffes bereits abgelagert. Im anschließenden Krümmer löst sich die abgelagerte Schicht auf, so daß im vertikalen Rohrabschnitt ein zügiger Transport beobachtet werden kann. Dabei ist der Feststoff ziemlich gleichmäßig über den Rohrquerschnitt verteilt. Daß die gleichmäßige Verteilung keinerlei Aussage über das Konzentrationsverhältnis c_T/c_R ermöglicht, sei an dieser Stelle nur vermerkt. Genauere Aussagen werden hierüber noch gemacht, wenn der Transport in vertikal angeordneten Rohren näher untersucht wird.

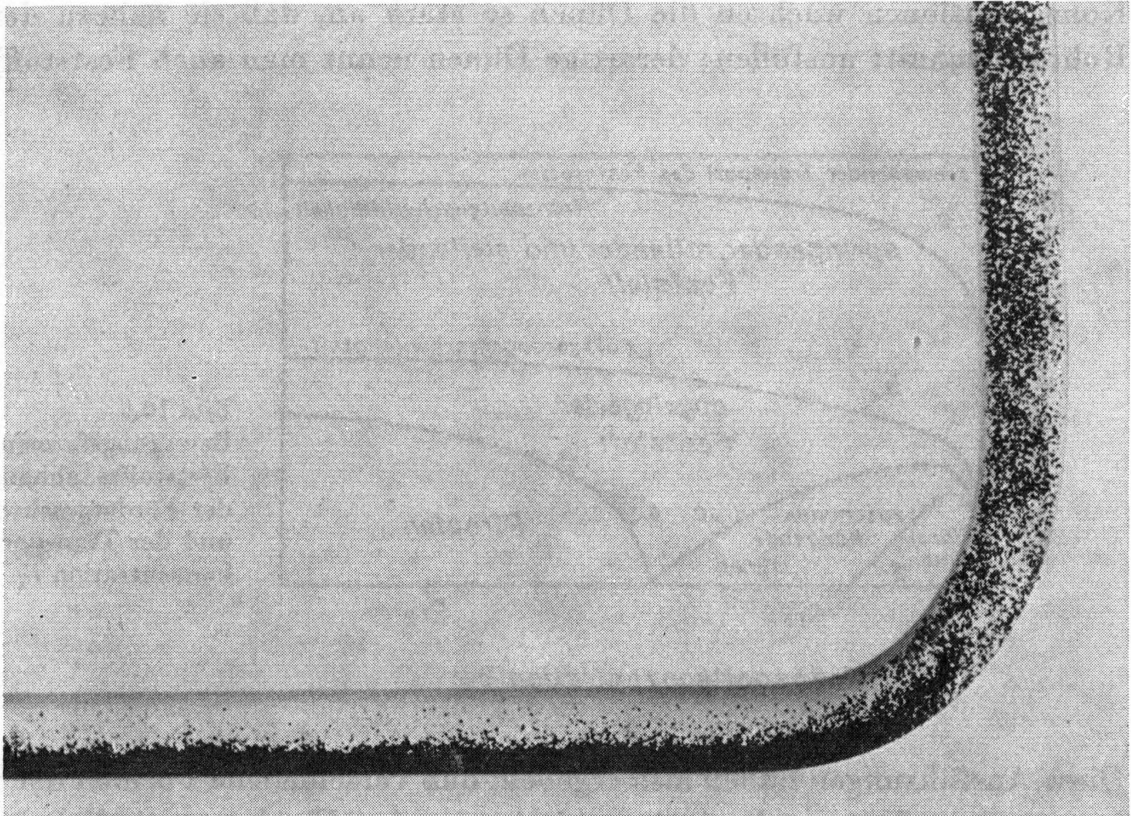


Bild 10.6. Photographische Aufnahme vom hydraulischen Transport in einem waagerechten und einem senkrechten Rohrabschnitt

Abweichungen von der gleichmäßigen Verteilung des Feststoffes über den Querschnitt von senkrecht angeordneten Rohren beobachtet man häufig dann, wenn der Feststoff eine einheitliche Korngröße aufweist. Bei aufwärts oder auch abwärts gerichtetem Strom treibt die Magnuskraft die Körner von der Rohrwand weg, so daß ein an Feststoff verarmtes Ringvolumen in Wandnähe entsteht. Da die Magnuskraft nur bei größeren Körnern wirksam ist, wird die beschriebene Form der ungleichmäßigen Verteilung auch nur hierbei beobachtet.

Eine weitere Ursache für die Störung der gleichmäßigen Verteilung ist die elektrostatische Aufladung, die insbesondere beim pneumatischen Transport auftreten kann. Die Folge sind örtliche Zusammenballung und Strähnenbildung des Feststoffes. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß ungleichmäßige Verteilungen bei senkrecht aufwärts gerichteter Förderung auch immer dann auftreten müssen, wenn die Fördergeschwindigkeit die Größenordnung der Sinkgeschwindigkeit der Partikeln annimmt.

10.13 Physikalische Ursachen des Feststofftransportes

In diesem Abschnitt sollen die wesentlichen Ursachen für den Feststofftransport in vertikalen und horizontalen Rohrleitungen aufgedeckt werden. Man erhält damit die für eine theoretische und experimentelle Untersuchung des Fördervorganges wichtigsten Grundlagen. Zur Vereinfachung der Aufgabe wird zunächst jeweils die Bewegung einer einzelnen Partikel betrachtet. Erst im Anschluß daran wird die Bedeutung des Partikelschwarmes in die Untersuchung des Fördervorgangs eingeschlossen.

Bei der aufwärts gerichteten Förderung in vertikalen Röhren ergeben sich besonders einfache Verhältnisse. An jeder Partikel besteht Gleichgewicht zwischen der abwärts gerichteten Schwerkraft und den aufwärts gerichteten Auftriebs- und Widerstandskräften. In Abschnitt 5.33 wurde dieses Kräftegleichgewicht zur Berechnung der Relativgeschwindigkeit $w_r = \bar{w} - w_p$ verwendet, wobei \bar{w} die Geschwindigkeit des Fluids und w_p die absolute Geschwindigkeit der Partikel bedeuten. Für $w_p = 0$ schwebt die Partikel; die hierfür erforderliche Fluidgeschwindigkeit \bar{w} ist gleich der Relativgeschwindigkeit und wird Schwebegeschwindigkeit genannt. Erhöht man die Fluidgeschwindigkeit über den Wert der Schwebegeschwindigkeit hinaus, dann wird $|w_p| > 0$ und die Partikel wird gefördert. Die Bedingung für den Partikeltransport in vertikalen Rohrleitungen lautet also: $|\bar{w}| > |w_p|$. Die Größe der Relativgeschwindigkeit w_r läßt sich aus *Bild 5.11* entnehmen. Das hierin dargestellte Diagramm gilt streng genommen nur für die Bewegung von Partikeln in ruhenden oder in laminar strömenden Medien. Für die Relativgeschwindigkeit in turbulent strömenden Medien liegen noch keine zuverlässigen Angaben vor. Man darf aber mit Sicherheit annehmen, daß die Relativgeschwindigkeit bei den üblichen Förderbedingungen im turbulenten Strömungsfeld kleiner ist als im laminaren. Die Ermittlung von w_r mittels *Bild 5.11* enthält daher bei turbulenter Strömung eine Sicherheitsspanne.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich also das wichtige Ergebnis, daß der Feststofftransport durch vertikale Röhre sowohl bei laminarem als auch bei turbulentem Zustand des Fördermediums möglich ist. Die für die Fördermöglichkeit entscheidende Kraft ist die Widerstandskraft. Förderung der Partikeln tritt ein, sobald die Fluidgeschwindigkeit größer als die Schwebegeschwindigkeit ist.

Zu wesentlich verwickelteren Verhältnissen gelangt man, wenn die Partikelbewegung in horizontalen Röhren betrachtet wird. Die Bewegung läßt sich in eine horizontale und in eine vertikale Komponente unterteilen. Für die horizon-

tale Bewegungskomponente ist wieder die Widerstandskraft die entscheidende Kraft, so daß sich eine weitere Erörterung dieser Komponente erübrigt. Die bei der Feststoffförderung in horizontalen Rohren auftretenden Schwierigkeiten sind im wesentlichen durch die vertikale Bewegungskomponente bedingt.

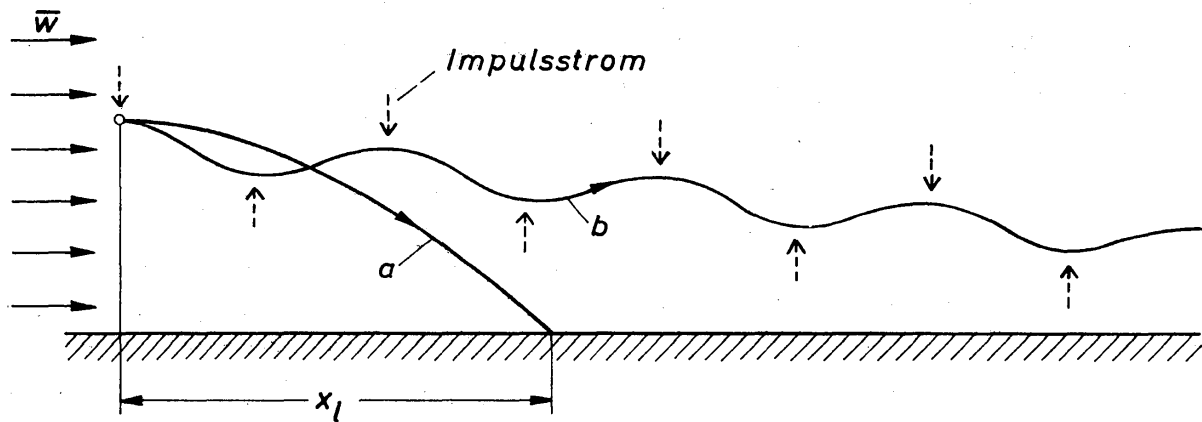


Bild 10.7. Bewegung eines Einzelkornes in einem Fluidstrom, dessen Geschwindigkeit w ist. Kurve a für den laminaren und Kurve b für den turbulenten Strömungszustand des Fluids

Für die Bewegung in vertikaler Richtung sind bei laminarem Strömungszustand des Fördermediums die Schwerkraft, die Auftriebskraft und die Widerstandskraft maßgebend. Die Partikel bewegt sich mit der aus diesen Kräften folgenden Sinkgeschwindigkeit nach unten. Da kein aufwärts gerichteter Fluidstrom vorhanden ist, kann die Sinkbewegung nicht verhindert werden. Die von einer einzelnen Partikel durchlaufene Bahnkurve muß daher bei einer beliebigen Axialgeschwindigkeit des Fluids gemäß der in *Bild 10.7* angegebenen Kurve a verlaufen. Nach einer Förderstrecke x_l trifft die Partikel auf den Rohrboden. Die Förderstrecke x_l läßt sich durch Erhöhen der Fluidgeschwindigkeit \bar{w} vergrößern. Somit läßt sich also das Auftreffen auf die Rohrwand hinauszögern, jedoch niemals vermeiden.

Die Sinkbewegung der Partikel läßt sich nur durch eine Kraftwirkung verhindern, die senkrecht aufwärts gerichtet ist. Hierfür sind aber nur die in turbulenten Strömungen auftretenden «turbulenten Impulsströme» verfügbar [10.16]. Deren Größe und Richtung ist statistischen Schwankungen unterworfen. Zur Vereinfachung der Überlegungen soll nur die vertikale Schwankungskomponente betrachtet und angenommen werden, daß sie im periodischen Wechsel nach oben und unten gerichtet ist und jeweils die gleiche Größe hat. Da die Sinkgeschwindigkeit im turbulenten Strömungsfeld geringer ist als im laminaren, ergibt sich unter diesen Bedingungen für die betrachtete Partikel die in *Bild 10.7* eingezeichnete Bahnkurve b . Durch Pfeile ist die Richtung der periodisch wirksamen Impulsströme angedeutet. Die Größe der Impulsströme bestimmt die Amplitude der Bahnkurvenschwingungen. Durch die Einwirkung der Impulsströme auf die Partikeln wird deren Absinken zwar verzögert, aber keineswegs verhindert. Somit ist es also auch bei turbulenter Strömung nicht möglich, eine einzelne Partikel ohne Höhenverlust, also schwebend, zu transportieren.

Ein schwebender Transport ist nur möglich, wenn sich in einer turbulenten Strömung ein Partikelschwarm befindet. Diese Vorstellung geht auf Überlegungen von PRANDTL [10.29] zurück, die in Zusammenhang mit der Konzentrationsverteilung körniger Feststoffe in offenen Strömungskanälen angestellt wurden. Im Gleichgewichtszustand des schwebenden Transportes müssen sich im statistischen Mittel gleich viele Körner nach oben und nach unten bewegen. Die Abwärtsbewegung der Körner ist sowohl durch die normale Sinkbewegung als auch durch den turbulenten Impulsstrom bedingt, während die Aufwärtsbewegung allein auf dem turbulenten Impulsstrom beruht. Der nach oben gerichtete Impulsstrom muß daher im Mittel mehr Körner transportieren als der nach unten gerichtete. Diese Forderung ist nur dann erfüllbar, wenn die Feststoffkonzentration zum Rohrboden ansteigt. Dieses ist die nach PRANDTL stabile Konzentrationsverteilung. Sie ist in *Bild 10.8* in schematisierter Form angegeben.

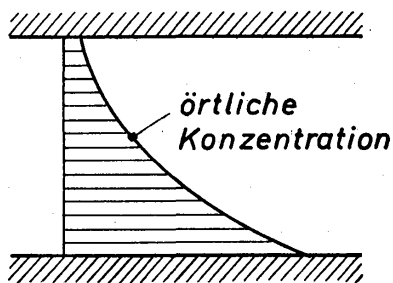


Bild 10.8. Stabile Konzentrationsverteilung für den körnigen Feststoff beim Transport im Fluidstrom durch horizontale Rohre

Die Anwesenheit eines Partikelschwarms beim Transport im Fluidstrom ist für die Wirksamkeit der turbulenten Impulsströme von zweifacher Bedeutung. Wie bereits erwähnt, ermöglicht erst der Partikelschwarm die Ausbildung einer zum Rohrboden ansteigenden Konzentration. Darüber hinaus erfordert das Anheben einer im Schwarm befindlichen Partikel einen insgesamt geringeren turbulenten Impulsstrom als das Anheben einer Einzelpartikel. Bei der Behandlung der Schwarmgesetze in Abschnitt 7.22 wurde nämlich gezeigt, daß im Schwarm befindliche Partikeln eine wesentlich geringere Sinkgeschwindigkeit haben als Einzelpartikeln.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß der Transport körniger Feststoffe im Fluidstrom durch horizontale Rohre nur möglich ist, wenn sich der Fluidstrom im turbulenten Zustand befindet, der Feststoff als Partikelschwarm vorhanden ist und die Konzentration zum Rohrboden hin zunimmt.

Diese Erörterungen gelten sowohl für den hydraulischen als auch für den pneumatischen Transport. Um die beim pneumatischen Transport beobachteten Vorgänge leichter deuten zu können, scheinen hierzu aber noch einige weitere Bemerkungen sinnvoll zu sein. Die Turbulenz ist für den Feststofftransport um so wirksamer, je größer das Verhältnis aus turbulentem Impulsstrom und der Massenkraft der Partikel, verringert um die Auftriebskraft, ist. Der turbulente Impulsstrom J_t ist dem Ausdruck $\rho w'^2 d_p^2$ proportional, worin w' die vertikale turbulente Schwankungsgeschwindigkeit, ρ die Fluidichte und d_p den Partikeldurchmesser bedeuten. Für die Massenkraft, verringert um die Auftriebskraft,

gilt $M - A = \pi d_p^3 g (\rho_p - \rho)/6$, so daß sich für das Verhältnis $J_t/M - A$ die Proportionalität

$$\frac{J_t}{M - A} \sim \frac{w'^2}{g d_p} \frac{1}{\rho_p/\rho - 1}$$

ergibt [10.32]. Beim pneumatischen Transport ist das Verhältnis $J_t/M - A$ im Vergleich zur hydraulischen Förderung der gleichen Teilchen etwa eine Zehnerpotenz niedriger. Dies legt die Vermutung nahe, daß die Turbulenz für den pneumatischen Transport nicht sehr bedeutsam ist. Außerdem ist bei der pneumatischen Förderung die Transportkonzentration sehr klein, wodurch auch deshalb ein schwebender pneumatischer Feststofftransport auf Grund der Turbulenz des Fluids unwahrscheinlich ist. Indes kann diese Annahme möglicherweise falsch sein. Denn häufig beobachtet man beim pneumatischen Transport Feststoffstrahlen, in denen die Konzentration um eine Zehnerpotenz höher sein kann als der volumetrische Mittelwert, der üblicherweise angegeben wird. Die Strahlenbildung des Feststoffes ließe sich also als Sonderfall der über den Rohrquerschnitt immer veränderlichen Konzentration, die als notwendige Voraussetzung für jede Form des Feststofftransportes bereits genannt wurde, deuten. Es soll aber nicht verschwiegen werden, daß die Strahlenbildung auch durch elektrostatische und andere Kräfte begünstigt werden kann. Weitergehende Aussagen über die Bedeutung der Strahlen für den Feststofftransport sind nicht möglich, da man bislang nicht weiß, unter welchen Betriebsbedingungen sie entstehen. Hierüber sind noch gründliche Untersuchungen notwendig.

In zwei besonders bedeutsamen Arbeiten [10.30 und 10.31] wird der heutige Stand theoretisch und experimentell erarbeiteter Erkenntnisse über Natur und Größe der zwischen festen Körnern wirksamen Haftkräfte in zusammenfassender Form aufgezeigt. Es wird aber sicherlich noch großen Anstrengungen bedürfen, diese Erkenntnisse für die pneumatische Förderung und insbesondere für die Strahlenbildung nutzbar zu machen.

Schließlich muß beim pneumatischen Transport noch auf eine weitere Bewegungsform des Feststoffes hingewiesen werden, die insbesondere bei hohen Fördergeschwindigkeiten und niedrigen Konzentrationen beobachtet wird. Hierbei bewegen sich die Körner auf näherungsweise geraden Bahnen. Richtungsänderungen werden, wie in *Bild 10.9* angedeutet, durch Zusammenstöße mit anderen Körnern oder durch Wandstöße erzwungen. Bei dieser Bewegungsform besitzen die Körner eine sehr große kinetische Energie, so daß die Turbulenz des Fluidstroms mit Sicherheit nur eine untergeordnete Rolle spielen kann. Wegen der zahlreichen Wandstöße werden die elastischen Eigenschaften des Kornmaterials und des Wandmaterials für den Transportvorgang von Bedeutung sein.

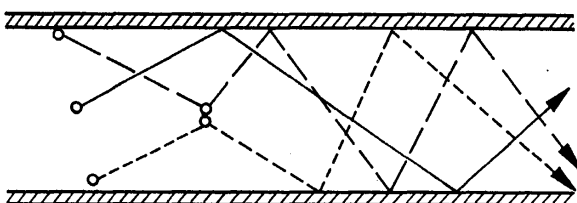


Bild 10.9. Schematische Darstellung der Kornbewegung bei hohen Fluidgeschwindigkeiten

10.14 Druckverlustdiagramm des Feststofftransportes

Als Abschluß der allgemeinen Beschreibung der feststoffbeladenen Strömung und gleichzeitig zur Vorbereitung der nachfolgenden theoretischen Behandlung des Feststofftransportes soll an Hand von *Bild 10.10* der Druckverlust in qualitativer Form erörtert werden. Der Druckverlust ist für zwei verschiedene Fälle über der mittleren Fördergeschwindigkeit \bar{w} aufgetragen. Die mit $\dot{V}_p = 0$ bezeichnete Kurve gilt für die reine Fluidströmung, in der noch kein Feststoff transportiert wird. Die zweite Kurve gilt für den Druckverlust ΔP_g , der sich bei einem konstanten Volumstrom des Feststoffes \dot{V}_p und veränderlicher mittlerer Fördergeschwindigkeit \bar{w} einstellt. Mit zunehmender Fördergeschwindigkeit nähern sich beide Kurven, da die Zahl der im Rohrvolumen befindlichen Körner abnimmt.

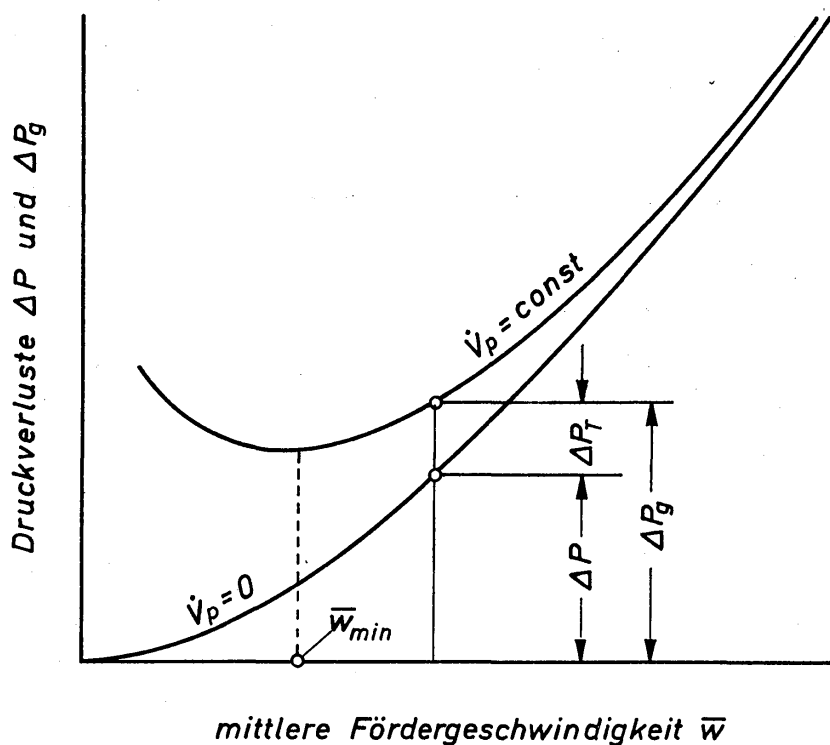


Bild 10.10
Zur Erläuterung des
Druckverlustes beim
Feststofftransport

In Richtung abnehmender Fördergeschwindigkeit durchläuft die Kurve für $\dot{V}_p = \text{const}$ ein Minimum und steigt dann wieder an. Im Kurvenminimum ist die Fördergeschwindigkeit $\bar{w} = \bar{w}_{\min}$; bezüglich des Druckverlustes ist dieses die günstigste Fördergeschwindigkeit. Im allgemeinen darf man erwarten, daß für $\bar{w} > \bar{w}_{\min}$ ein von Ablagerungen freier Feststofftransport erfolgt. Hingegen muß man im Bereich $\bar{w} < \bar{w}_{\min}$ mit Ablagerung des Feststoffes rechnen. Im praktischen Betrieb wird man also die Fördergeschwindigkeit \bar{w} so einstellen, daß sie nur wenig oberhalb der Minimumgeschwindigkeit \bar{w}_{\min} liegt.

Der insgesamt auftretende Druckverlust läßt sich gedanklich in die beiden Anteile ΔP und ΔP_T unterteilen. Hiervon ist ΔP der Druckverlust der reinen Fluidströmung, die keinen Feststoff transportiert. Man errechnet ΔP mittels der bekannten Widerstandsgesetze für die einphasige Rohrströmung. Mit ΔP_T wird derjenige Druckverlustanteil bezeichnet, der auf Grund des Feststofftransportes zusätzlich erforderlich ist. In formaler Hinsicht darf man also schreiben:

$$\Delta P_g = \Delta P + \Delta P_T. \quad (10.13)$$

Der zusätzliche Druckverlust ΔP_T setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der eine Anteil stellt denjenigen Druckverlust dar, der auf die erforderliche Arbeit zum Ausgleich der Sinkbewegung und zum Ausgleich der Verzögerung der Partikeln in axialer Richtung zurückzuführen ist. Die Anwesenheit der Feststoffkörner wirkt sich aber auch auf die Bewegung des Förderfluids aus und ruft insbesondere eine Änderung des Geschwindigkeitsprofils hervor. Der hierdurch bedingte zusätzliche Druckverlust des Fluids ist der zweite Anteil von ΔP_T . Da beide Anteile von den gleichen Einflußgrößen abhängen, ist ihre Zusammenfassung in ΔP_T zweckmäßig. Zahlreiche Untersuchungen haben ergeben, daß die additive Zusammensetzung des Druckverlustes gemäß Gl.(10.13) gerechtfertigt ist. Sie bildet daher eine der wichtigsten Voraussetzungen für die theoretische Berechnung des Druckverlustes beim Feststofftransport. Die Theorie beschränkt sich also auf die Berechnung des zusätzlichen Druckverlustes ΔP_T .

10.2 Grundgleichung für den pneumatischen und hydraulischen Transport in horizontalen Rohren

Es soll ein allgemeines Gesetz hergeleitet werden, das die Berechnung des zusätzlichen Druckverlustes ΔP_T bei pneumatischem und hydraulischem Feststofftransport gestattet. Aus dem allgemeinen Gesetz werden sodann die speziellen Gesetze für die beiden Transportarten entwickelt.

10.21 Allgemeine Definitionen und Gesetze

Im vergangenen Abschnitt wurde bereits ausgeführt, daß sich der beim Feststofftransport auftretende gesamte Druckverlust ΔP_g additiv aus den beiden Anteilen ΔP und ΔP_T zusammensetzt. Mit ΔP wird der Druckverlust der reinen Fluidströmung und mit ΔP_T der beim Feststofftransport zusätzlich auftretende Druckverlust bezeichnet. In dimensionsloser Schreibweise mittels Widerstandszahlen gilt in entsprechender Weise:

$$\psi_g = \psi + \psi_T. \quad (10.14)$$

Mit

$$\psi_g \equiv \frac{\Delta P_g}{\rho \bar{w}^2/2} \frac{d}{L} \quad (10.15)$$

wird die für den gesamten Widerstand maßgebende Widerstandszahl, mit

$$\psi \equiv \frac{\Delta P}{\rho \bar{w}^2/2} \frac{d}{L} \quad (10.16)$$

die für die feststofffreie Fluidströmung maßgebende Widerstandszahl und mit

$$\psi_T \equiv \frac{\Delta P_T}{\rho \bar{w}^2/2} \frac{d}{L} \quad (10.17)$$

die für den zusätzlichen Widerstand beim Feststofftransport maßgebende Widerstandszahl definiert. Dabei bedeuten ρ die Dichte des Fluids, d den Durchmesser und L die Länge des Rohres. Die Druckverluste ΔP_g , ΔP und ΔP_T werden sämtlich auf den gleichen Staudruck bezogen, der mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{w} des Fluids gebildet wird. Hierfür gilt die Beziehung

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{d^2 \pi/4} \frac{1}{1 - c_R}. \quad (10.18)$$

Hierin berücksichtigen \dot{V} den Volumstrom der Flüssigkeit und $1 - c_R$ die teilweise Versperrung des Rohrquerschnittes durch den Feststoff. Mit \bar{w} wird die Geschwindigkeit des Gemisches ausgedrückt. Der Zusammenhang zwischen der Raumkonzentration c_R und der Transportkonzentration c_T ist bereits durch Gl.(10.9) gegeben.

Die Widerstandszahl der feststofffreien Fluidströmung in Rohren läßt sich nach dem Blasius'schen Gesetz

$$\psi = \frac{0,3164}{Re^{1/4}} \quad (10.19)$$

berechnen. Re ist die Reynoldszahl der Fluidströmung und wie folgt definiert:

$$Re \equiv \frac{\bar{w} d \rho}{\eta}. \quad (10.20)$$

Mit η wird die dynamische Viskosität des Fluids bezeichnet. Gl.(10.19) gilt für den turbulenten Strömungsbereich bis etwa zu einer Reynoldszahl $Re = 10^5$. Für größere Werte der Reynoldszahl ist das Prandtl'sche Widerstandsgesetz gemäß Gl.(1.49) anzuwenden.

Die anschließend zu berechnende Widerstandszahl für den Feststofftransport ψ_T ist unter anderem eine Funktion des Widerstandsbeiwertes ζ der Feststoffpartikeln. Bei Annahme von kugelförmigen Partikeln gilt für den Widerstandsbeiwert das in Abschnitt 5.11 mitgeteilte Gesetz:

$$\zeta = \frac{24}{Re_p} + \frac{4}{Re_p^{1/2}} + 0,4. \quad (10.21)$$

Hierin sind ζ und die Reynoldszahl der Partikel Re_p wie folgt definiert:

$$\zeta \equiv \frac{W/F_p}{\rho w_r^2/2}, \quad (10.22)$$

$$Re_p \equiv \frac{w_r d_p \rho}{\eta}. \quad (10.23)$$

Es bedeuten W den Widerstand der Partikel, $F_p = d_p^2 \pi/4$ deren größte Querschnittsfläche, d_p deren Durchmesser, ρ die Dichte des Fluids, η die dynamische Viskosität des Fluids und w_r die Relativgeschwindigkeit zwischen Fluid und Partikeln. In allgemeiner Form gilt hierfür:

$$w_r = \sqrt{w_{py}^2 + (\bar{w} - w_{px})^2} = \bar{w} \sqrt{\left(\frac{w_{py}}{\bar{w}}\right)^2 + \left(1 - \frac{w_{px}}{\bar{w}}\right)^2}. \quad (10.24)$$

Mit \bar{w} wird die mittlere Fluidgeschwindigkeit, mit w_{px} die x -Komponente und mit w_{py} die y -Komponente der absoluten Partikelgeschwindigkeit bezeichnet; w_{px} ist parallel und w_{py} senkrecht zu \bar{w} gerichtet. Mit dieser Vereinbarung ist Gl.(10.24) sowohl für die Partikelbewegung in horizontalen als auch in vertikalen Rohren anzuwenden.

Das Widerstandsgesetz nach Gl.(10.21) gilt, wie bereits erwähnt, für kugelförmige Partikeln. In den meisten Fällen weisen die im Fluidstrom transportierten Partikeln jedoch eine von der Kugel abweichende Form auf. In diesem Falle hat es sich als zweckmäßig erwiesen, einen Formfaktor k zu definieren:

$$w'_s = k w_s. \quad (10.25)$$

Mit w'_s wird die Sinkgeschwindigkeit eines beliebig geformten Kornes und mit w_s diejenige einer volumgleichen Kugel bezeichnet, deren Durchmesser d_p wie folgt bestimmt wird:

$$d_p = \sqrt[3]{M_p \frac{6}{n \pi \rho_p}}. \quad (10.26)$$

Hierin bedeuten M_p die Masse von n beliebig geformten Partikeln und ρ_p deren Dichte. Mit diesem Durchmesser d_p wird die Sinkgeschwindigkeit w_s nach den Angaben in Abschnitt 5.33 berechnet. Bei den üblichen granulatartigen Körnern darf man erwarten, daß der Formfaktor k stets kleiner als 1 ist. Mit dem durch Gl.(10.25) definierten Formfaktor erhält man den Widerstandsbeiwert ζ_k der beliebig geformten Partikeln unter Berücksichtigung von Gl.(5.30) zu:

$$\zeta_k = \zeta/k^2. \quad (10.27)$$

Auf Grund experimenteller Untersuchungen darf man erwarten, daß k um so weniger vom Wert 1 abweicht, je kleiner die Körner sind. Bei längeren Transportwegen erleiden die Körner ferner einen Abrieb, wobei sich ihre Form immer mehr derjenigen einer Kugel annähert. Das heißt also, daß sich k nach längeren Transportwegen dem Wert 1 nähert.

10.22 Beschreibung des Transportmodells

Das Modell vom Feststofftransport im Fluidstrom liefert die Grundlage zur Berechnung der Transportwiderstandszahl ψ_T , die von SCHUCHART [10.32] durchgeführt wurde. Das Modell erfaßt sowohl die wesentlichen Merkmale des pneumatischen als auch des hydraulischen Transportes und ist eine Erweiterung des von NEWITT und Mitarbeitern [10.11] entwickelten Modells für den hydraulischen Transport.

Das Transportmodell ist in *Bild 10.11* dargestellt. Es enthält die an einem Einzelkorn angreifenden Kräfte und die für die Bewegung maßgebenden Geschwindig-

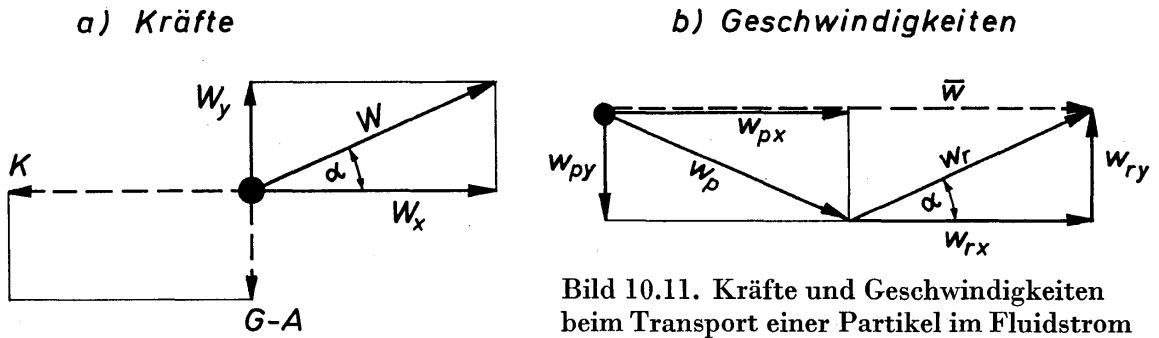


Bild 10.11. Kräfte und Geschwindigkeiten beim Transport einer Partikel im Fluidstrom

keiten. Die x -Koordinate verläuft in Richtung der mittleren Fluidgeschwindigkeit \bar{w} und die y -Koordinate senkrecht dazu. Betrachten wir zunächst die beiden Kräfte, die die gewünschte Bewegung der Partikeln behindern. Die um die Auftriebskraft verminderte Massenkraft $G - A$ versucht der Partikel die abwärts gerichtete Geschwindigkeit w_{py} aufzuzwingen. Die stromaufwärts gerichtete Kraft K verzögert die Partikelbewegung in x -Richtung, so daß die Partikelgeschwindigkeit w_{px} kleiner wird als die Fluidgeschwindigkeit \bar{w} . Durch das Zusammenwirken der Kräfte K und $G - A$ wird der Partikel die resultierende Geschwindigkeit w_p aufgezwungen. Zum Ausgleich dieser Bewegung muß vom strömenden Fluid die Kraft W , die als Widerstandskraft aufzufassen ist und deren Komponenten W_x und W_y sind, auf die Partikel einwirken. Die Richtung der Kraft W fällt mit der Richtung der Relativgeschwindigkeit w_r zusammen, deren Komponenten w_{rx} und w_{ry} sind.

Die Widerstandskraft W folgt aus Gl.(10.22) zu

$$W = \frac{\pi}{8} \zeta \rho d_p^2 w_r^2, \quad (10.28)$$

und für die Komponenten gilt

$$W_x = W \cos \alpha \quad (10.29)$$

und

$$W_y = W \sin \alpha. \quad (10.30)$$

Mit

$$\cos \alpha = \frac{\bar{w} - w_{px}}{w_r} \quad (10.31)$$

und

$$\sin \alpha = \frac{w_{py}}{w_r} \quad (10.32)$$

sowie mit Gl. (10.28) erhält man für die Komponenten der Widerstandskraft die folgenden Ausdrücke:

$$W_x = \frac{\pi}{8} \zeta \rho d_p^2 w_r (\bar{w} - w_{px}), \quad (10.33)$$

$$W_y = \frac{\pi}{8} \zeta \rho d_p^2 w_r w_{py}. \quad (10.34)$$

Hiervon wird bei der Herleitung der Grundgleichung des Feststofftransportes Gebrauch gemacht.

10.23 Herleitung der Grundgleichung

Um den schwebenden Transport einer Partikel gewährleisten zu können, muß ihr fortlaufend Energie zugeführt werden, die aus der Fluidströmung stammt. Die Energiebilanz lautet:

$$\Delta P_{T_1} F dx = W_x dx + W_y dy. \quad (10.35)$$

Mit dem Index 1 wird angedeutet, daß die Gleichung für eine Einzelpartikel gilt. Auf der linken Seite steht die von der Strömung abgegebene und auf der rechten Seite die von der Partikel aufgenommene Energie. Ferner ist F die Querschnittsfläche des Rohres. Mit

$$dx = \bar{w} dt \quad (10.36)$$

und

$$dy = w_{py} dt \quad (10.37)$$

wird hieraus

$$\Delta P_{T_1} F = W_x + W_y \frac{w_{py}}{\bar{w}}. \quad (10.38)$$

Da vom Fluidstrom nicht nur eine einzelne Partikel, sondern n Partikeln transportiert werden sollen, sind beide Seiten dieser Gleichung mit n zu multiplizieren. Der gesamte Druckverlust $n \cdot \Delta P_{T_1}$ wir mit ΔP_T bezeichnet.

Für die Partikelzahl n läßt sich mittels der Raumkonzentration eine Gleichung herleiten. Ist V_{p_1} das Volumen einer einzelnen Partikel, dann gilt für die Raumkonzentration:

$$c_R \equiv \frac{V_P}{V_R} = \frac{n V_{p_1}}{FL}. \quad (10.39)$$

Mit $V_{p_1} = d_p^3 \pi / 6$ und $F = d^2 \pi / 4$ erhält man hieraus

$$n = \frac{3}{2} c_R \frac{d^2 L}{d_p^3}. \quad (10.40)$$

Ersetzt man die Raumkonzentration c_R mittels Gl.(10.10) durch die Transportkonzentration, dann ergibt sich

$$n = \frac{3}{2} c_T \frac{\bar{w}}{w_{px}} \frac{d^2 L}{d_p^3}. \quad (10.41)$$

Für den Transport von n Partikeln folgt somit aus Gl.(10.38):

$$\Delta P_T = \frac{6}{\pi} c_T \frac{\bar{w}}{w_{px}} \frac{L}{d_p^3} \left[W_x + W_y \frac{w_{py}}{\bar{w}} \right]. \quad (10.42)$$

Führt man hierin die Gleichungen (10.33) und (10.34) für W_x und W_y und die Transportwiderstandszahl ψ_T gemäß Gl.(10.17) ein, so erhält man:

$$\psi_T = \frac{3}{2} c_T \frac{d}{d_p} \frac{\bar{w}}{w_{px}} \sqrt{\left(\frac{w_{py}}{\bar{w}}\right)^2 + \left(1 - \frac{w_{px}}{\bar{w}}\right)^2} \left[\left(\frac{w_{py}}{\bar{w}}\right)^2 + \left(1 - \frac{w_{px}}{\bar{w}}\right) \right] \zeta. \quad (10.43)$$

Dieses ist das allgemeine Gesetz für den Transportwiderstand. Es gilt für den ablagerungsfreien pneumatischen und hydraulischen Transport durch gerade, waagerechte Rohre bei nicht zu hohen Transportkonzentrationen und unter der Annahme, daß der Transport durch die benachbarten Partikeln und die Rohrwand nicht beeinflußt wird und daß ferner der Feststofftransport keine Rückwirkungen auf die Fluidströmung ausübt. Außerdem wird die instationäre Partikelbewegung im physikalischen Modell vereinfachend als stationär angenommen. Diese Vorgänge können auf Grund der bisher vorliegenden experimentellen Untersuchungen nur dadurch berücksichtigt werden, daß man die aus dem allgemeinen Gesetz folgenden speziellen Gesetze für den pneumatischen und für den hydraulischen Transport in empirischer Form erweitert. Dabei ergibt sich für die praktische Anwendung gleichzeitig der Vorteil, daß die speziellen Gesetze erheblich einfacher aufgebaut sind als das allgemeine.

10.3 Pneumatischer Transport durch gerade, horizontale Rohre

10.31 Spezielles Widerstandsgesetz

Das spezielle Widerstandsgesetz für den pneumatischen Transport folgt aus Gl.(10.43) auf Grund einiger zulässiger Vereinfachungen. Zum leichteren Verständnis der physikalischen Bedeutung dieser Vereinfachungen sei auf Gl.(10.35) zurückverwiesen. Experimentelle Befunde weisen darauf hin, daß die am Korn verrichtete Arbeit $W_x dx$ groß ist im Vergleich zu der Arbeit $W_y dy$, und die letztere daher vernachlässigt werden kann. Von maßgebender Bedeutung für den pneumatischen Transport ist demgemäß auch das Verhältnis w_{px}/\bar{w} aus der Horizontalgeschwindigkeit der Partikeln und der des Gases. Das mit der vertikalen Geschwindigkeitskomponente der Partikeln gebildete Verhältnis w_{py}/\bar{w} ist vernachlässigbar klein. Das leuchtet auch unmittelbar ein, wenn man die Partikelbewegung im Gas genauer betrachtet. Die von der Partikel in vertikaler Richtung durchlaufenen Wegstrecken liegen unter den üblichen Bedingungen in der Größenordnung weniger Partikeldurchmesser. Im Verlauf des zurückgelegten Weges ändert sich die Geschwindigkeit, ausgehend von $w_{py} = 0$ bis auf einen Wert, der gemäß den Ausführungen in Abschnitt 5.34 klein im Vergleich zur stationären Sinkgeschwindigkeit ist. Da die Fluidgeschwindigkeit \bar{w} größer als die stationäre Sinkgeschwindigkeit ist, muß folglich auch w_{py} klein im Vergleich zu \bar{w} sein. Somit darf also $(w_{py}/\bar{w})^2$ gegenüber $(1 - w_{px}/\bar{w})$ vernachlässigt werden. Berücksichtigt man die beiden angeführten Bedingungen, $W_y \cdot dy \approx 0$ und $w_{py}/\bar{w} \approx 0$, so erhält man, ausgehend von Gl.(10.35), nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\psi_T = \frac{3}{2} c_T \frac{d}{d_p} \frac{\bar{w}}{w_{px}} \left(1 - \frac{w_{px}}{\bar{w}}\right)^2 \zeta. \tag{10.44}$$

Dieses ist das spezielle Widerstandsgesetz für den pneumatischen Transport. Es hat eine wesentlich einfachere Form als das allgemeine Gesetz nach Gl.(10.43).

Den vereinbarten Voraussetzungen zufolge wird Gl. (10.44) dann zutreffen, wenn während des Transportes keine Feststoffstrahlen oder Feststoffballen auftreten und wenn die mittlere Transportkonzentration verhältnismäßig klein ist. Die theoretische und experimentelle Behandlung des pneumatischen Fördervorganges bei hohen Gutbeladungen kann noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden. Allgemeine Aussagen über diesen technisch besonders bedeutsamen Vorgang sind noch keineswegs möglich. Wertvolle Hinweise enthalten jedoch neuere Arbeiten von WEBER [10.33] und WELSCHOF [10.10], in welchen auch das ältere Schrifttum zitiert wird.

Weicht die Form der transportierten Körner von der einer Kugel ab, dann ist der für Kugeln geltende Widerstandsbeiwert ζ durch ζ/k^2 gemäß Gl. (10.27) zu ersetzen, wobei k den Formfaktor darstellt. Bei der Herleitung von Gl. (10.44) wurde von der Vorstellung ausgegangen, daß der Feststofftransport keine Rückwirkung auf die Gasströmung ausübt. Ob diese Annahme gerechtfertigt ist, läßt sich nur durch Vergleich mit Versuchsergebnissen erfahren. Sollte die Annahme nicht zutreffen, so ist eine geeignete Korrektur vorzunehmen. Unbekannt ist in Gl. (10.44) das Geschwindigkeitsverhältnis w_{px}/\bar{w} , worauf im folgenden Abschnitt näher eingegangen wird.

10.32 Geschwindigkeitsverhältnis

Zur Auswertung des zusätzlichen Widerstandes gemäß Gl. (10.44) muß das Geschwindigkeitsverhältnis w_{px}/\bar{w} bekannt sein. Die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} folgt aus Gl. (10.18). Meßtechnisch ermittelt werden mußte die x -Komponente der Partikelgeschwindigkeit. Derartige Messungen wurden von zahlreichen Forschern nach verschiedenen Verfahren durchgeführt. SCHUCHART [10.32] hat diese Meßwerte zusammengefaßt und für das Geschwindigkeitsverhältnis folgende empirische Gleichung aufgestellt:

$$\frac{w_{px}}{\bar{w}} = \frac{1}{1 + C \cdot k \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)^{2/3} \left(\frac{d_p}{d}\right)^{2/3} \left(1 + \frac{200}{Fr - Fr_0}\right) \left(\frac{1-e}{e}\right)^n}. \quad (10.45)$$

Hierin bedeuten

$$Fr \equiv \frac{\bar{w}^2}{g d} \quad (10.46)$$

die mit der mittleren Fluidgeschwindigkeit \bar{w} , dem Rohrdurchmesser d und der Feldbeschleunigung g gebildete Froudezahl und

$$Fr_0 \equiv \frac{\bar{w}_0^2}{g d} \quad (10.47)$$

den unteren Grenzwert der Froudezahl, die mit dem untersten Grenzwert der Fördergeschwindigkeit \bar{w}_0 gebildet wird. Bei \bar{w}_0 beginnt sich der Feststoff am Rohrboden abzulagern. Auf Grund zahlreicher Meßergebnisse liegt der Wert von Fr_0 beim Transport körniger Partikeln etwa zwischen 100 und 300. Eine genaue

Angabe von Fr_0 ist aus den Ergebnissen aber nicht zu erhalten. Man darf jedoch erwarten, daß Fr_0 mit ansteigendem Durchmesser- und Dichteverhältnis zunimmt. Es werden für den Wert von Fr_0 außerdem die Reibung zwischen der Rohrwand und dem Teilchen sowie bei rollenden Partikeln der Rollwiderstand von Bedeutung sein. Weiterhin sind als Einflüsse auf die Froudezahl Fr_0 die Widerstandszahl des abgelagerten einseitig umströmten Teilchens sowie die gegenseitige Abbremsung der Partikeln zu nennen. Bei höheren Froudezahlen übt Fr_0 in Gl.(10.45) indes nur einen geringen Einfluß auf w_{px}/\bar{w} aus. Höhere Froudezahlen Fr sind jedoch bei der Flug- und Sprungförderung zumeist gegeben. Deshalb ist es vertretbar, für Fr_0 mit überschlägigen Werten zu rechnen, wobei die in Tabelle 10.1 angegebenen Werte als Anhaltswerte dienen können. Ferner wird in Gl.(10.45) mit

$$e \equiv \frac{w_{px_2}}{w_{px_1}} \quad (10.48)$$

ein Stoßfaktor bezeichnet, der die Änderung der Axialgeschwindigkeit der Partikel w_{px_1} vor dem Stoß auf die Rohrwand auf den Wert nach dem Stoß w_{px_2} berücksichtigt. Der Stoßfaktor e ist mit Sicherheit eine Funktion vieler Größen, darunter befinden sich die Auftreffgeschwindigkeit w_{px_1} , der Auftreffwinkel, die Rauigkeit des Korns und der Rohrwand sowie die elastischen Eigenschaften des Korn- und des Rohrwandmaterials. Es ist bislang noch nicht möglich gewesen, eine Funktion für den Stoßfaktor e und den Exponenten n der Stoßfunktion $(1 - e)/e$ aus Experimenten zu ermitteln. Aus diesem Grunde schlägt SCHUCHART vor, die Stoßfunktion und auch den empirischen Formfaktor k mit dem Zahlenwert C zu

$$C^* = Ck \left(\frac{1 - e}{e} \right)^n \quad (10.49)$$

zusammenzufassen. Dann erhält man für das Geschwindigkeitsverhältnis die folgende Beziehung:

$$\frac{w_{px}}{\bar{w}} = \frac{1}{1 + C^* \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right)^{2/3} \left(\frac{d_p}{d} \right)^{2/3} \left(1 + \frac{200}{Fr - Fr_0} \right)}. \quad (10.50)$$

Eine nähere Überprüfung ergibt, daß Gl.(10.45) bzw. Gl.(10.50) alle physikalisch sinnvollen Grenzwerte liefert:

Formfaktor	$k \rightarrow 0$	$w_{px}/\bar{w} \rightarrow 1$
	$k \rightarrow 1$	$w_{px}/\bar{w} \rightarrow$ minimalen Wert, ($0 < w_{px}/\bar{w} < 1$)
Dichteverhältnis	$\rho_p/\rho \rightarrow 1$	$w_{px}/\bar{w} \rightarrow 1$
	$\rho_p/\rho \rightarrow \infty$	$w_{px}/\bar{w} \rightarrow 0$
Durchmesserverhältnis	$d_p/d \rightarrow 0$	$w_{px}/\bar{w} \rightarrow 1$
Froudezahl	$Fr \rightarrow \infty$	$w_{px}/\bar{w} \rightarrow$ maximalen Wert, ($w_{px}/\bar{w} < 1$)
	$Fr \rightarrow Fr_0$	$w_{px}/\bar{w} \rightarrow 0$
Stoßzahl	$e \rightarrow 1$	$w_{px}/\bar{w} \rightarrow 1$
	$e \rightarrow 0$	$w_{px}/\bar{w} \rightarrow 0$

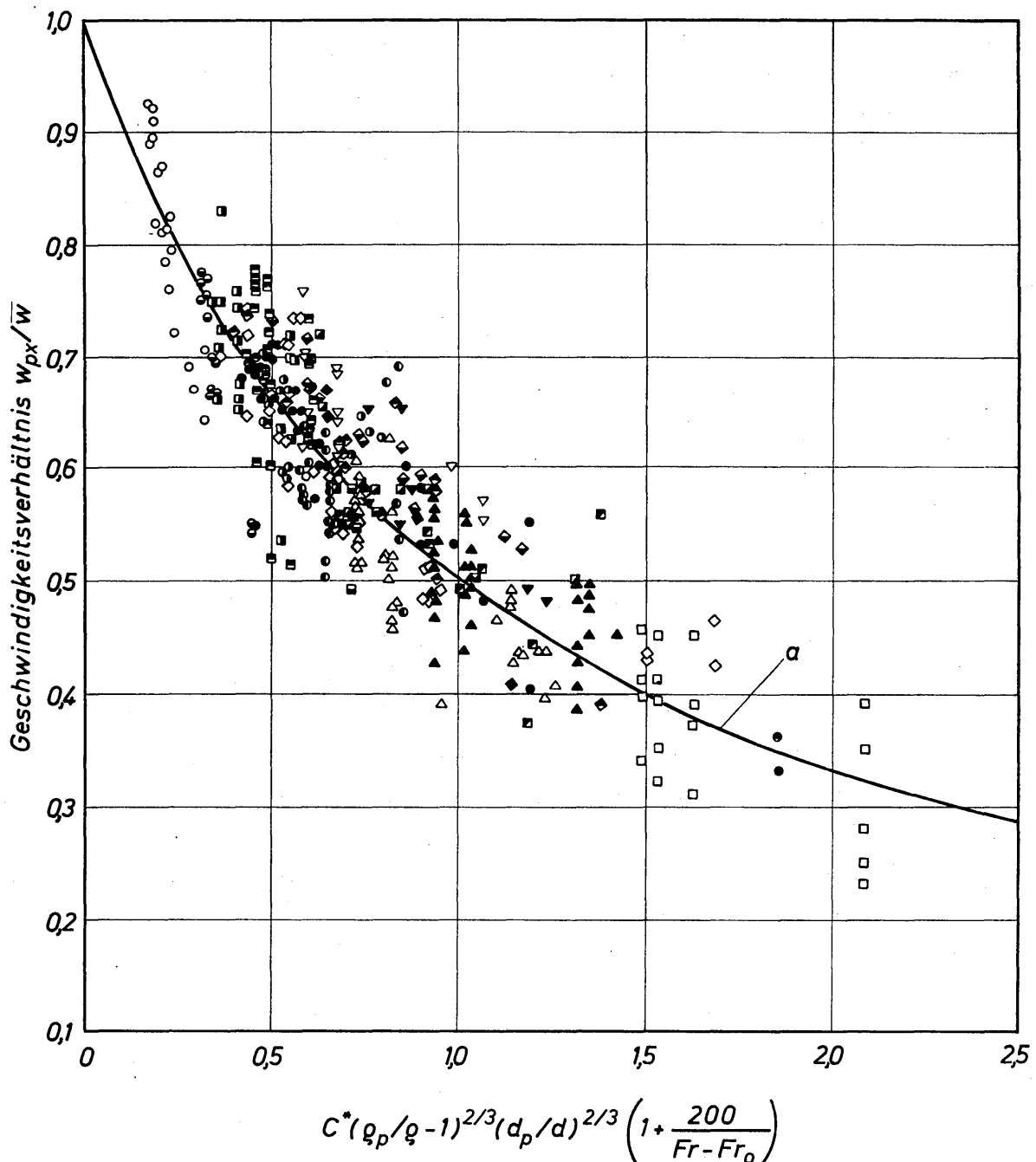


Bild 10.12. Vergleich zwischen dem nach Gl.(10.50) berechneten Geschwindigkeitsverhältnis w_{px}/\bar{w} (Kurve *a*) und Meßwerten, Meßwerte nach Tabelle 10.1

In *Bild 10.12* ist Gl.(10.50) dargestellt durch Kurve *a*, mit Meßwerten von verschiedenen Forschern verglichen. Nähere Angaben zu den Meßwerten und außerdem für die empirischen Größen C^* und Fr_0 sind in Tabelle 10.1 zusammengestellt. Die transportierten Partikeln waren verschiedene landwirtschaftliche Erntegüter, Glaskugeln, Stahlkugeln, Messinggranulat und Kies. Der Partikeldurchmesser d_p und die Partikeldichte ρ_p änderten sich in weiten Bereichen. Die mittlere Abweichung der Meßwerte von der Kurve *a* beträgt etwa $\pm 10\%$. Diese verhältnismäßig große Abweichung ist vornehmlich auf die ungeordnete Partikelbewegung zurückzuführen. Aus der schematischen Darstellung von *Bild 10.9* geht hervor, daß sich die Geschwindigkeitskomponente w_{px} zeitlich und örtlich in sehr starkem Maße ändern muß. Das heißt also, daß durch Gl.(10.50) ein zeitlich und

Tabelle 10.1: Angaben zu den Meßwerten für das Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}_{px}/\bar{w} , dargestellt in Bild 10.12

Zitat	Fördergut	Partikel-	Partikel-	Rohrdurch-	Rohr-	Mittlere Luftge-	Transport-	Berechnung		Zeichen		
		durchmesser	dichte	messer				nach	in Bild			
		d_p (mm)	ρ_p (kg/m ³)	d (mm)	material	geschwindigkeit	konzentration	Gl. (10.50)	Fr ₀	10.12		
						\bar{w} (m/s)	c_T (-)	C^*				
[10.2]	Weizen	3,9	1400	40	Aluminium	9 bis 22	bis 0,6	0,016	200	●		
	Weizengrieß	0 bis 1	1400			10 bis 20		bis 0,6	0,024	100	○	
[10.34]	Kresse	2,4	1170	25,4	Messing	13 bis 28	bis 0,8	0,015	150	○		
	Messinggranulat	0,15	8440					bis 0,12	0,035	100	○	
[10.35]	Kolbenhirse	1,63	1090	28,8	PVC	9 bis 25	bis 0,6	0,044	100	■		
[10.36]	Glaskugeln	7	2480	50,8 und 76,2	Stahlrohr mit Sicht- strecke aus Plexiglas	16 bis 30	bis 0,8	0,015	300	△		
		4	2710					0,026	200	▽		
	Kugelförmige Pillen	7	1830					0,015	200	▲		
								0,015	150	▼		
	Erbsen	7	1380					0,014	100	●		
				100	○							
[10.1]	Hohle Stahl- kugeln	7,6	1000 bis 3000	89	Stahl	15 bis 40		0,017	100	◇		
		9,2							100	◆		
		11							bis	100	◆	
		14							3000	bis	100	◆
		20								300	100	◆
[10.37]	Kieselsteine	30 bis 40	2600	150	Stahl	27 bis 44		0,021	200	□		
[10.39]	Quarz	0,5 bis 0,75	2500	50	Kupfer	20 bis 80	bis 0,04	0,09	100	■		

Geschwindigkeitsverhältnis beim pneumatischen Transport

örtlich gemittelter Wert für das Geschwindigkeitsverhältnis geliefert wird. Über die Genauigkeit dieses Mittelwertes gibt die Streuung der Meßwerte keinen zuverlässigen Anhalt. Das ist um so schwerwiegender, da sich die Unsicherheit des Geschwindigkeitsverhältnisses in sehr starkem Maße auf die Transportwiderstandszahl ψ_T auswirkt, was man aus Gl.(10.44) entnehmen kann.

10.33 Vergleich des Widerstandsgesetzes mit Meßwerten

Für beliebig geformte Partikeln lautet das Gesetz für die Transportwiderstandszahl

$$\psi_T = A c_T \frac{d}{d_p} \frac{\bar{w}}{w_{px}} \left(1 - \frac{w_{px}}{\bar{w}}\right)^2 \zeta / k^2. \quad (10.51)$$

Hierin ist A gemäß Gl.(10.44) der Zahlenwert $3/2$. Wie bereits erwähnt, wurde in dieser Gleichung eine mögliche Rückwirkung des Feststofftransportes auf die

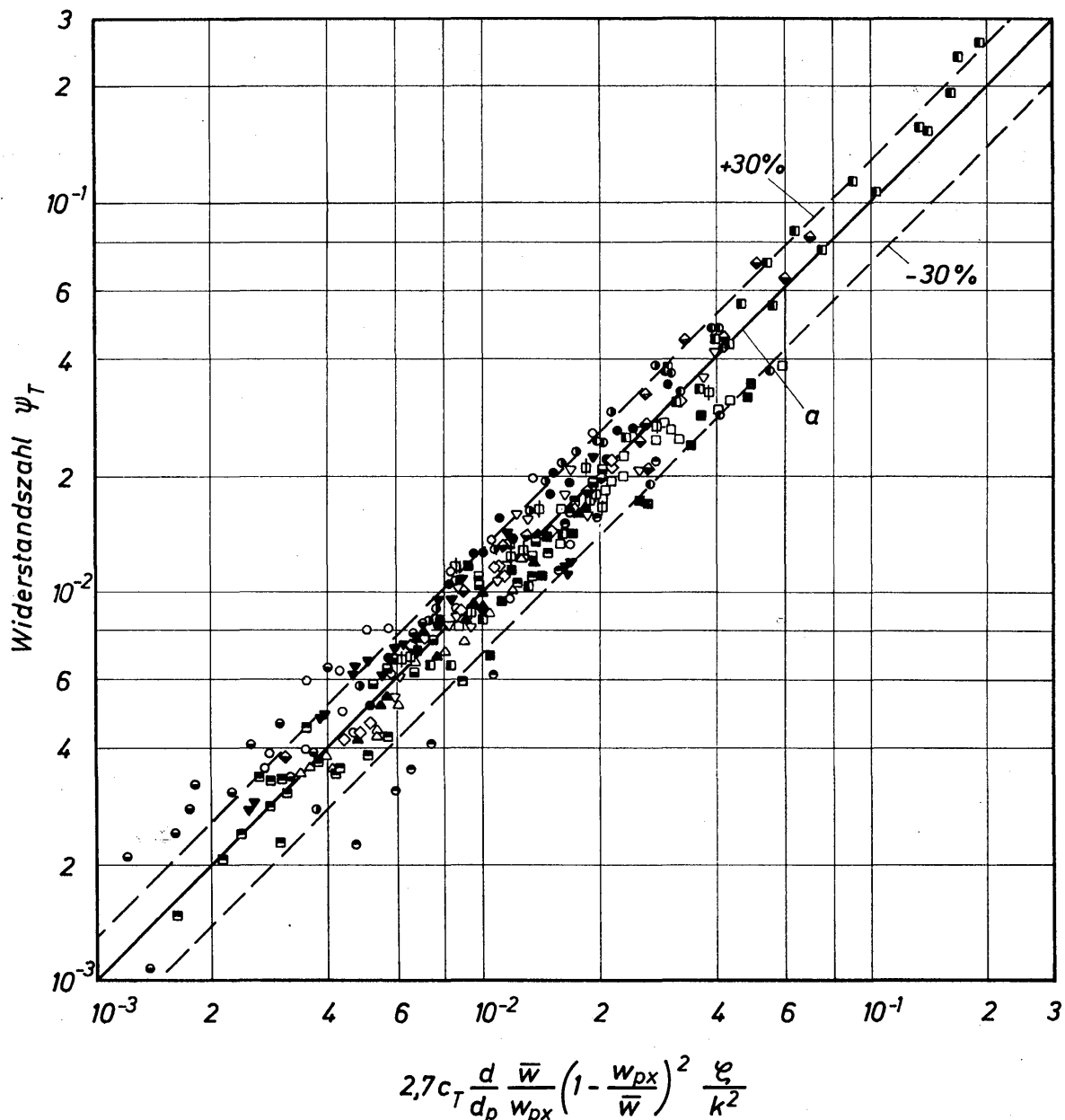


Bild 10.13. Vergleich zwischen der Widerstandszahl ψ_T für den pneumatischen Transport und Meßwerten; Kurve a nach Gl.(10.51), Meßwerte nach Tabelle 10.2

Gasströmung nicht berücksichtigt. Durch Vergleich mit Meßwerten sollte der genaue Wert der Konstante A , der die Rückwirkung erfassen soll, ermittelt werden.

In *Bild 10.13* ist Gl.(10.51) durch Gerade a dargestellt. Sie gibt die eingetragenen Meßwerte mit befriedigender Genauigkeit wieder, wenn man A zu 2,7 annimmt. Die gestrichelt eingetragenen Geraden geben eine prozentuale Abweichung von $\pm 30\%$ an. Nähere Angaben zu den Meßwerten sind in *Tabelle 10.2* zusammengestellt.

Tabelle 10.2: Angaben zu den Meßwerten in Bild 10.13

Zitat	Fördergut	d_p/d	q_p/q	C^*	k	Zeichen in Bild 10.13
[10.36]	Erbsen	0,14	1130	0,014	0,85 (Abrieb und Zersplitterung)	●
		0,092				○
	Glaskugeln	0,14	2030	0,015		⊕
		0,08	2250	0,026		□
		0,052				■
		0,14	1490	0,015		▽
0,092	▼					
[10.38]	Weizen	0,013	1100	0,016	0,82	●
		0,035				●
		0,085				●
[10.10]		0,064				■
[10.1]		0,041	1200 bis 1600			◇
[10.9]	Quarz	im Mittel 0,013	2800	0,09	0,73	●
[10.32]	Quarzkies	0,043	2000	0,016	0,8	◇
		0,054				▲
		0,069				■
	0,086	△				
	Polyamidgranulat	0,064	880	0,0155	0,9	■

10.4 Hydraulischer Transport durch gerade, horizontale Rohre

10.41 Spezielles Widerstandsgesetz

Das spezielle Widerstandsgesetz für den hydraulischen Transport folgt aus dem allgemeinen Gesetz gemäß Gl.(10.43), wenn man eine für diese Transportart charakteristische Eigenschaft beachtet: Die Dichten von Fluid und Feststoff

haben die gleiche Größenordnung. Die Folge ist, daß die in x -Richtung liegenden Komponenten der Partikel- und der Fluidgeschwindigkeit näherungsweise übereinstimmen und somit $w_{px}/\bar{w} = 1$ gesetzt werden kann. Das bedeutet gleichzeitig, daß beim hydraulischen Transport die Transportkonzentration c_T gemäß Gl.(10.9) gleich der Raumkonzentration ist. In technischen Anlagen stimmen c_T und c_R zumindest näherungsweise überein.

In der Energiegleichung (10.35) kann für den hydraulischen Transport der Energieanteil $W_x \cdot dx$ entfallen. Damit ergibt sich aus Gl.(10.35) oder auch unmittelbar aus Gl.(10.43) die Beziehung

$$\psi_T = \frac{3}{2} c_T \frac{d}{d_p} \left(\frac{w_{py}}{\bar{w}} \right)^3 \zeta. \quad (10.52)$$

Für die vertikale Geschwindigkeitskomponente w_{py} darf die stationäre Sinkgeschwindigkeit eingeführt werden, da der instationäre Sinkweg in Flüssigkeiten nach den Ausführungen in Abschnitt 5.34 verschwindend klein ist. Die einzuführende Sinkgeschwindigkeit muß jedoch für die Sinkbewegung im turbulenten Strömungsfeld gelten und wird daher mit w_{st} bezeichnet. Der Index t soll auf das turbulente Strömungsfeld hinweisen und damit eine Unterscheidung zu der in ruhenden oder in laminar strömenden Flüssigkeiten geltenden Sinkgeschwindigkeit w_s ermöglichen. Die Berücksichtigung des turbulenten Strömungsfeldes hat auch beim Widerstandsbeiwert zu erfolgen, so daß ζ durch ζ_t ersetzt werden muß. Für Gl.(10.52) ist daher zu schreiben:

$$\psi_T = \frac{3}{2} c_T \frac{d}{d_p} \left(\frac{w_{st}}{\bar{w}} \right)^3 \zeta_t. \quad (10.53)$$

In Anlehnung an die in Abschnitt 5.32 hergeleitete Gl.(5.30) läßt sich für den Zusammenhang zwischen w_{st} und ζ_t die folgende Beziehung angeben:

$$w_{st} = \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \frac{g d_p}{\zeta_t}}. \quad (10.54)$$

Nach Einsetzen in Gl.(10.53) und unter Berücksichtigung der Froudezahl Fr gemäß Gl.(10.46) erhält man für das spezielle Widerstandsgesetz die folgende Form:

$$\psi_T = 2 c_T \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \frac{w_{st}/\bar{w}}{Fr}. \quad (10.55)$$

Dieses Gesetz soll durch Einführen der Größe

$$\left(\frac{w_{st}}{w_s} \right)^m$$

empirisch erweitert werden, so daß die Rückwirkung des Feststofftransportes auf die Fluidströmung erfaßt wird. Diese Rückwirkung führt insbesondere zu einer starken Veränderung des Geschwindigkeitsprofils. Das Widerstandsgesetz lautet dann:

$$\psi_T = 2 c_T \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \left(\frac{w_{st}}{w_s} \right)^{1+m} \frac{w_s/\bar{w}}{Fr}. \quad (10.56)$$

Unbekannt sind in dieser Gleichung das Verhältnis der Sinkgeschwindigkeiten w_{st}/w_s und der Zahlenwert m .

KRIEDEL und BRAUER [10.16] haben den Sinkvorgang im turbulenten Strömungsfeld analysiert und die folgende theoretische Gleichung gefunden:

$$\frac{w_{st}}{w_s} = \frac{1}{(0,15 \bar{\kappa}^2 Re)^{1/2}} \quad (10.57)$$

Hierin bedeuten $\bar{\kappa}$ eine mittlere Austauschkonstante in der Gemischströmung und $Re \equiv \bar{w} d/\nu$ die Reynoldszahl der Rohrströmung. Für $\bar{\kappa}$ ließ sich aus experimentellen Ergebnissen von DURAND [10.13] der Wert 0,138 ermitteln. Mit diesem Wert berechnet man den für den turbulenten Queraustausch maßgebenden Mischungsweg $\bar{l} = \bar{\kappa} d/4$ zu 0,0345 d . Für die feststofffreie Flüssigkeitsströmung hat NIKURADSE [10.40] den Wert $\bar{l} = 0,035$ mitgeteilt. Die Übereinstimmung zwischen beiden Werten legt den Schluß nahe, daß die beim hydraulischen Transport in der Flüssigkeit befindlichen Körner die Turbulenzstruktur weder in qualitativer noch in quantitativer Weise verändern. Da die Reynoldszahl Re beim hydraulischen Transport zwischen 10^4 und 10^5 liegt, ergeben sich für das Geschwindigkeitsverhältnis w_{st}/w_s Werte zwischen 0,187 und 0,059. Im turbulenten Strömungsfeld ist die Sinkgeschwindigkeit also erheblich niedriger als in einer ruhenden Flüssigkeit und nimmt mit der Reynoldszahl ab.

Der in Gl. (10.56) noch unbekanntes Exponent m wurde folgendermaßen bestimmt. Sowohl aus zahlreichen Versuchen als auch nach theoretischen Überlegungen darf es als erwiesen angesehen werden, daß die Transportwiderstandszahl ψ_T unter den üblichen technischen Bedingungen des hydraulischen Transports nicht vom Verhältnis d_p/d des Partikeldurchmessers zum Rohrdurchmesser abhängt, da der Partikeldurchmesser immer klein im Vergleich zum Rohrdurchmesser ist. Diese Bedingung wird von Gl. (10.56) nur bei einem bestimmten Wert von m erfüllt. Setzt man daher in Gl. (10.56) für die Sinkgeschwindigkeit w_s Gl. (5.30) ein und führt eine Dimensionsanalyse durch, so erhält man $m = -5/3$. Das bedeutet also, daß die Rückwirkung des Feststofftransportes auf die Fluidströmung unter Berücksichtigung von Gl. (10.57) durch den Ausdruck

$$\left(\frac{w_{st}}{w_s}\right)^m = (0,15 \bar{\kappa}^2 Re)^{5/6} = 7,56 \cdot 10^{-3} Re^{5/6}$$

erfaßt wird. Die Rückwirkung wächst mit zunehmender Reynoldszahl der Flüssigkeitsströmung stark an. Das ist wahrscheinlich vor allem auf die für den Druckverlust maßgebenden Geschwindigkeitsgradienten an der Rohrwand zurückzuführen, die durch die geförderten Partikeln leicht verändert werden. Bei Reynoldszahlen von 10^4 und 10^5 ergeben sich für $(w_{st}/w_s)^m$ die Werte 16,2 und 112. Diese Zahlenwerte sind jedoch, worauf ausdrücklich hingewiesen sei, kein unmittelbares Maß für die Erhöhung des Transportwiderstandes mit der Reynoldszahl. Denn während sich die Rückwirkung vergrößert, verkleinert sich, wie bereits ausgeführt wurde, das Verhältnis der Sinkgeschwindigkeiten.

Führt man Gl. (10.57) sowie den Exponenten $m = -5/3$ in Gl. (10.56) ein, nimmt ferner eine Neuordnung der Kenngrößen gemäß

$$Re^{1/3} \frac{w_s}{w} Fr^{-1} = \left(\frac{w_s^3}{g \nu} \right) Fr^{-4/3} \quad (10.58)$$

vor und faßt die Zahlenwerte zusammen, dann erhält man

$$\psi_T = 0,282 c_T \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \left(\frac{w_s^3}{g \nu} \right)^{1/3} Fr^{-4/3} . \quad (10.59)$$

Dieses Gesetz gilt streng nur für Partikeln von Kugelform mit einheitlichem Durchmesser d_p . Zahlreiche Messungen zeigen jedoch, daß beide Einschränkungen entfallen, wenn man die nachfolgenden Vorschriften beachtet.

Haben die Partikeln eine von der Kugel abweichende Form, dann ist in Gl. (10.59) die Sinkgeschwindigkeit der Kugel w_s durch die Sinkgeschwindigkeit der beliebig geformten Partikel w'_s zu ersetzen. Diese Sinkgeschwindigkeit läßt sich durch Messen der Fallzeit für eine bestimmte Fallhöhe sehr leicht ermitteln. Einen Anhalt über die Größe von w'_s erhält man, wenn gemäß Gl. (10.25) $w'_s = k w_s$ gesetzt wird, wobei k einen Formfaktor darstellt, der kleiner als 1 ist. Vorausgesetzt wird dabei, daß Kugel und Partikeln gleiches Volumen besitzen. Für Kohle- und Sandkörner ist der Formfaktor k in Bild 10.14 nach Angaben von KRIEGEL und BRAUER [10.16] sowie DURAND [10.13] über dem Durchmesser d_p dargestellt. Der Formfaktor wird mit zunehmendem Durchmesser kleiner. Für Korndurchmesser unter $d_p = 0,1$ mm kann immer $k = 1$ gesetzt werden. Weiterhin ist zu bedenken, daß sich die Form der Partikeln im Verlauf eines längeren Transportweges durch Abrieb stets der Kugel annähert.

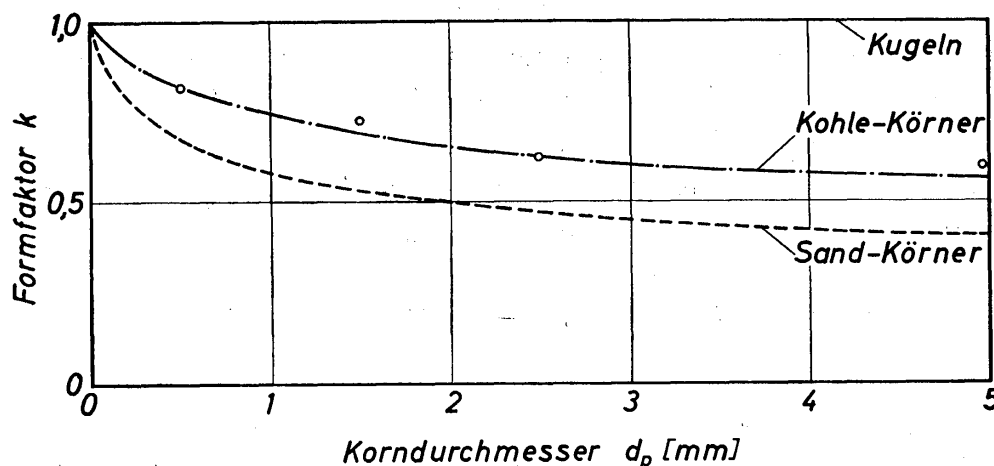


Bild 10.14. Abhängigkeit des Formfaktors k für Kohle und Sand vom Partikeldurchmesser d_p

In der technischen Praxis werden fast ausschließlich Korngemische gefördert, die aus Partikeln unterschiedlicher Größe bestehen. In diesem Falle bestimmt man mittels Siebanalyse die Durchgangskurve, unterteilt diese beispielsweise in 10 gleiche Massenanteile und mißt für jeden Massenanteil eine mittlere Sink-

geschwindigkeit. Die mittlere Sinkgeschwindigkeit des Korngemisches w'_{sm} berechnet man dann nach folgender Beziehung [10.16]:

$$w'_{sm} = \frac{1}{10} (w'_{s_6} + w'_{s_{15}} + \dots + w'_{s_{85}} + w'_{s_{95}}). \tag{10.60}$$

Hierin bedeutet beispielsweise $w'_{s_{85}}$ die mittlere Sinkgeschwindigkeit jener Fraktion, bei der man 85% Siebdurchgang erhält. Die Sinkgeschwindigkeit $w'_{s_{95}}$ läßt sich häufig wegen der unterschiedlichen Form und der unterschiedlichen Größe der in dieser Fraktion enthaltenen Partikeln nicht mit der gewünschten Genauigkeit bestimmen. Aus diesem Grunde bleibt $w'_{s_{95}}$ dann bei der Berechnung von w'_{sm} unberücksichtigt.

In *Bild 10.15* wird Gl.(10.59), dargestellt durch Kurve *a*, mit Meßwerten von mehreren Experimentatoren verglichen. Es ergibt sich eine sehr befriedigende Übereinstimmung. Nähere Angaben zu den Meßwerten werden in *Tabelle 10.3* gemacht. Die verwendeten Kornmaterialien waren Kohle, Koks, Sand, Kies und

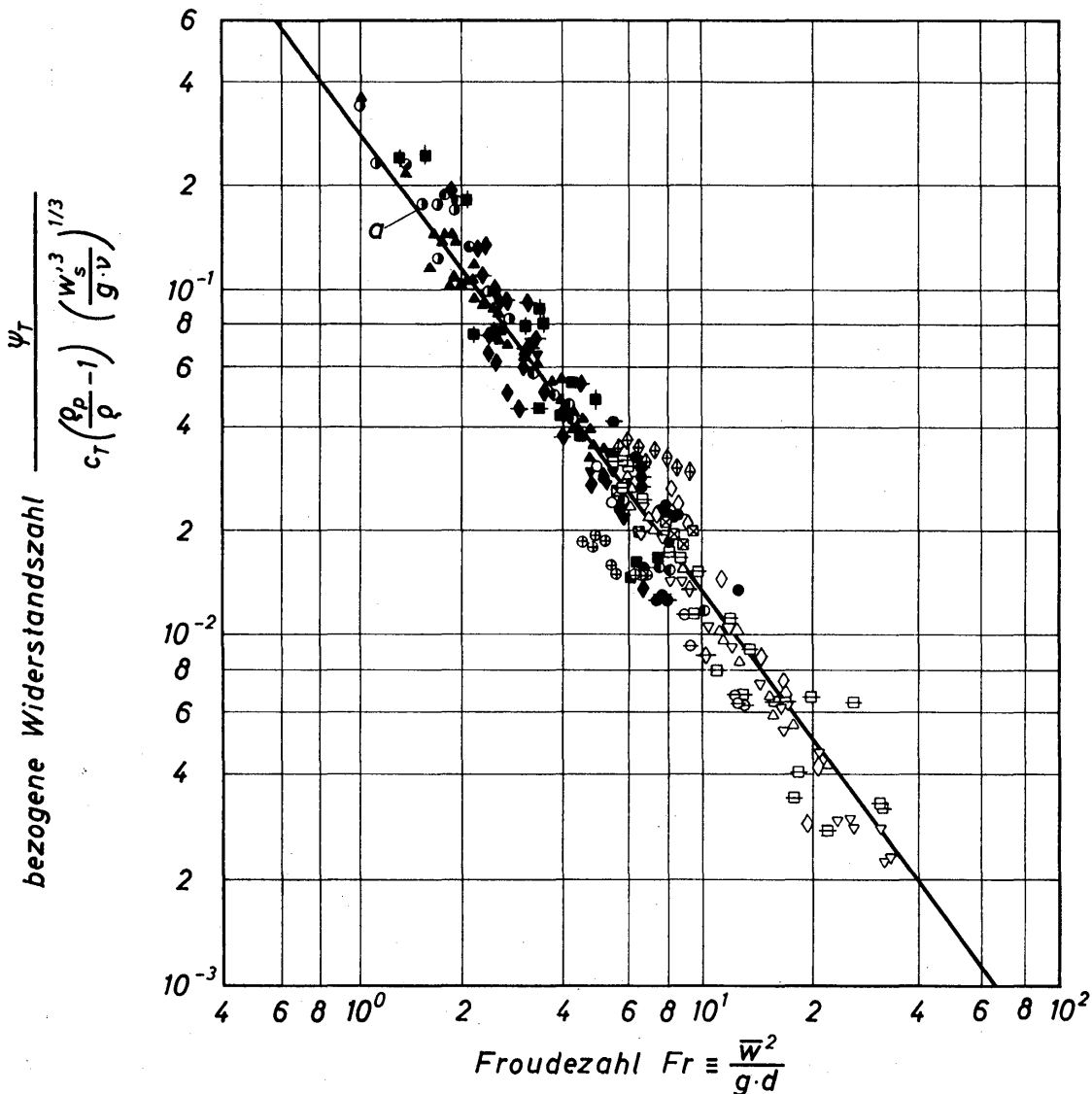


Bild 10.15. Abhängigkeit der bezogenen Widerstandszahl von der Froudezahl Fr bei ablagerungsfreiem hydraulischem Transport in waagerechten Rohren; Kurve *a* nach Gl.(10.59), Meßwerte nach *Tabelle 10.3*

Eisenerz, so daß sich das Dichteverhältnis ρ_p/ρ von 1,4 bis 4,62 änderte. Die Partikeldurchmesser d_p lagen zwischen 0,115 mm und 7,63 mm, die Rohrdurchmesser d lagen zwischen 40,6 mm und 300 mm, und die Transportkonzentrationen c_T , die bei den Versuchen jeweils maximal erreicht wurden, lagen zwischen 4,5% und 32%.

Diese Angaben lassen erkennen, daß das Transportwiderstandsgesetz nach Gl. (10.59) einen großen Gültigkeitsbereich hat und die in der Praxis auftretenden Förderbedingungen offensichtlich erfaßt. Eine Einschränkung liegt nur insofern vor, als die Konzentration nicht größer als 25% sein darf. Um die Wirtschaftlichkeit des hydraulischen Transportes über große Entfernungen erhöhen zu können, müßte man jedoch die Konzentration bis auf 35% oder sogar 40% erhöhen. Damit das Widerstandsgesetz bis in diesen Konzentrationsbereich angewendet werden kann, ist nochmals eine empirische Erweiterung notwendig.

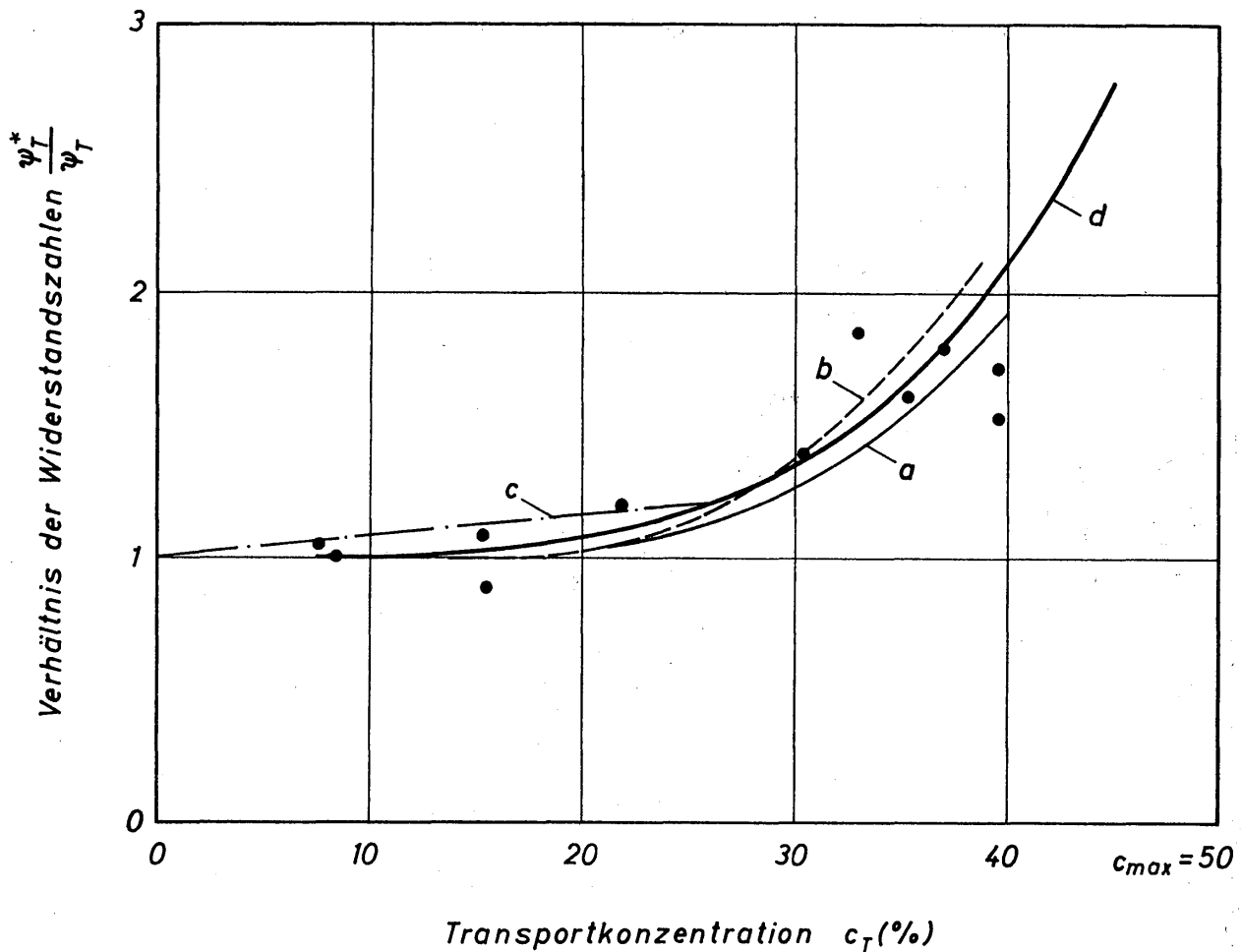


Bild 10.16. Verhältnis der Widerstandszahlen; abhängig von der Transportkonzentration c_T ; Kurve d nach Gl.(10.61), weitere Angaben im Text

In Bild 10.16 ist die für beliebig hohe Konzentrationen geltende Widerstandszahl ψ_T^* auf die für niedrige Konzentrationen geltende Widerstandszahl gemäß Gl. (10.59) bezogen und in Abhängigkeit von der Transportkonzentration c_T aufgetragen. Hierin gleichen die Kurve a Meßwerte von KRIEGEL und BRAUER [10.16] und die Kurve b Meßwerte von NEWITT und Mitarbeitern [10.11] aus. Ferner ist Kurve c nach Angaben von FÜHRBÖTER [10.12] eingezeichnet worden.

Tabelle 10.3: Angaben zu den in Bild 10.15 wiedergegebenen Meßwerten

Zeichen	Feststoff	Korndurchmesser		Sinkgeschwindigkeit		Dichteverhältnis	Formfaktor	Konzentration (maximale)	Rohrdurch- messer	Zitat
		d_p (mm)	d_{pm} (mm)	w'_s (m/s)	w'_{sm} (m/s)	ϱ_p/ϱ	k	c_T (%)	d (mm)	
▲	Koks		1,4		0,094	1,43	0,85	21	53,5	[10.16]
▼	Koks		1,61		0,076	1,4	0,64	6	53,5	[10.16]
◆	Koks		1,67		0,069	1,4	0,57	6	53,5	[10.16]
■	Koks		0,45		0,0375	1,72	0,79	14	53,5	[10.16]
▣	Koks		1,62		0,0748	1,4	0,62	19	53,5	[10.16]
■	Koks		1,2		0,08	1,46	0,82	20	53,5	[10.16]
○	Koks		1,9		0,107	1,44	0,84		53,5	[10.16]
○	Koks		1,44		0,079	1,43	0,72		53,5	[10.16]
◆	Kohle		1,15		0,056	1,38	0,67	15	53,5	[10.16]
●	Erz		0,115		0,026	4,62	1	20	53,5	[10.16]
●	Erz		0,115		0,026	4,62	1	4,5	53,5	[10.16]
⊖	Grobkies	7,63		0,29		2,65	0,4		104	[10.13]
△	Sand	3,78		0,20		2,65	0,42		104	[10.13]
▽	Sand	2,04		0,151		2,65	0,5	10	150	[10.13]
◇	Sand	0,44		0,052		2,65	0,69	15	104	[10.13]
⊠	Sand	0,44		0,052		2,65	0,69	15	150	[10.13]
◇	Sand	0,44		0,052		2,65	0,69	15	40,6	[10.13]
○	Sand	0,44		0,052		2,65	0,69	15	253	[10.13]
⊕	Sand	0,88		0,095		2,65	0,59	22	300	[10.12]
⊗	Sand		0,53		0,062	2,65	0,67	24	300	[10.12]
⊗	Sand		0,27		0,031	2,65	0,76	32	300	[10.12]

Im Mittel werden alle Angaben durch die Kurve d ausgeglichen. Der Kurvenverlauf stimmt bis zu Konzentrationen von etwa 20 oder 25% mit der Linie $\psi_T^*/\psi_T = 1$ mit hinreichender Genauigkeit überein. Nach Überschreiten dieser Grenze steigt Kurve d jedoch sehr steil an. Der Grund hierfür liegt darin, daß sich die Körner nicht mehr unabhängig voneinander bewegen können. Sie stoßen in zunehmendem Maße aneinander und gegen die Rohrwand. Schließlich wird der Abstand zwischen den Körnern so klein, daß sich die Bewegung der Partikelmasse in der Form eines nahezu starren Feststoffkolbens vollzieht. Ist dies der Fall, so ist die größtmögliche Transportkonzentration $c_{T_{\max}}$ erreicht, die für Feststoffe mit einheitlicher Korngröße bei etwa 50% und für Korngemische bei einem etwas größeren Wert liegt.

Der Verlauf der Kurve d in *Bild 10.16* läßt sich durch die Beziehung

$$\frac{\psi_T^*}{\psi_T} = 1 + 2,7 \left(\frac{c_T}{c_{T_{\max}}} \right)^4 \quad (10.61)$$

wiedergeben (mit $c_{T_{\max}} = 0,5$). Nach Einführen von Gl. (10.59) für ψ_T erhält man

$$\psi_T^* = 0,282 c_T \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \left(\frac{w_s'^3}{g \nu} \right)^{1/3} Fr^{-4/3} \left[1 + 2,7 \left(\frac{c_T}{c_{T_{\max}}} \right)^4 \right]. \quad (10.62)$$

Durch diese Gleichung hat das Widerstandsgesetz zum Berechnen des zusätzlichen Druckverlustes beim hydraulischen Transport körniger Feststoffe durch waagerechte Rohrleitungen seine allgemeinste Form erhalten.

10.42 Berechnung des gesamten Druckverlustes

Der beim Feststofftransport insgesamt auftretende Druckverlust ΔP_g setzt sich gemäß der bereits früher mitgeteilten Beziehung

$$\Delta P_g = \Delta P + \Delta P_T \quad (10.13)$$

aus zwei Anteilen additiv zusammen. Diese sind der Druckverlust ΔP des feststofffreien Flüssigkeitsstromes und ΔP_T der durch den Feststofftransport bedingte Druckverlust. Aus dem Blasius'schen Widerstandsgesetz gemäß Gl. (10.19) erhält man den Druckverlust ΔP zu

$$\Delta P = 0,158 L \frac{\bar{w}^{7/4} \rho^{3/4} \eta^{1/4}}{d^{5/4}} \quad (10.63)$$

oder zu

$$\Delta P = 0,241 L \frac{\dot{V}^{7/4} \rho^{3/4} \eta^{1/4}}{d^{19/4}}, \quad (10.64)$$

wenn man die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} näherungsweise durch $4 \dot{V}/d^2 \pi$ ersetzt. Bei einer genaueren Rechnung ist für den Zusammenhang zwischen \bar{w} und \dot{V} Gl. (10.18) zu verwenden. Die entsprechenden Gleichungen für den zusätzlichen Druckverlust ΔP_T erhält man bei nicht zu hoher Transportkonzentration c_T aus Gl. (10.59):

$$\Delta P_T = 0,141 L c_T w'_s (\rho_p - \rho) g \frac{d^{1/3} \rho^{1/3}}{\bar{w}^{2/3} \eta^{1/3}}, \quad (10.65)$$

$$\Delta P_T = 0,120 L c_T w'_s (\rho_p - \rho) g \frac{d^{5/3} \rho^{1/3}}{\dot{V}^{2/3} \eta^{1/3}}. \quad (10.66)$$

Zu beachten ist, daß ΔP mit zunehmenden Werten für \bar{w} bzw. \dot{V} größer, mit zunehmendem Rohrdurchmesser d jedoch kleiner wird. Im Gegensatz dazu wird ΔP_T mit zunehmenden Werten für \bar{w} bzw. \dot{V} kleiner, mit zunehmendem Rohrdurchmesser d jedoch größer. Auf dieses gegensätzliche Verhalten der Druckverlustanteile ΔP und ΔP_T ist das Verhalten des gesamten Druckverlustes ΔP_g zurückzuführen.

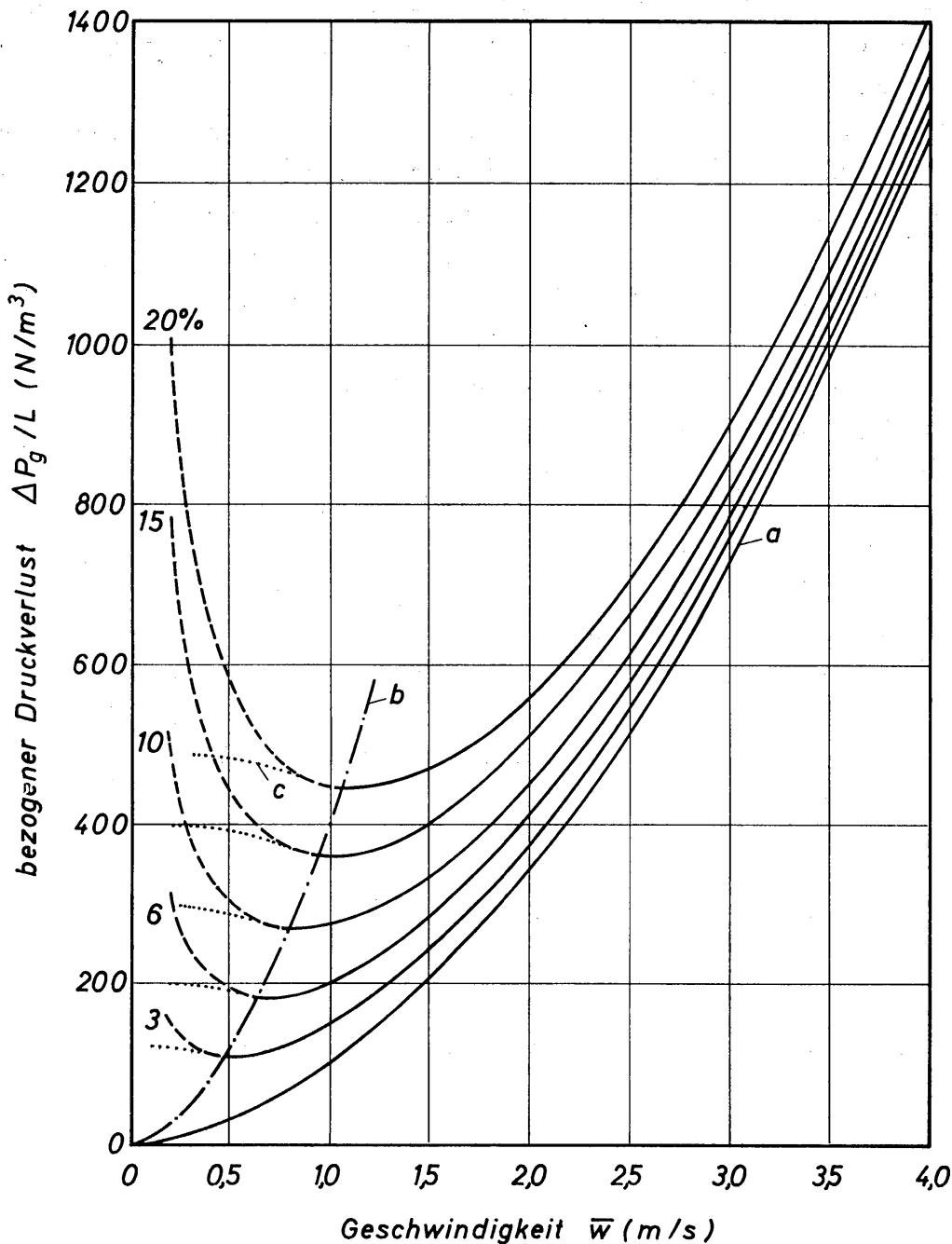


Bild 10.17. Gesamtdruckverlust $\Delta P_g/L$ eines Koks-Wasser-Gemisches, abhängig von der mittleren Fördergeschwindigkeit \bar{w} und der Transportkonzentration c_T ; Erläuterung der Transportbedingungen im Text

In *Bild 10.17* ist der auf die Rohrlänge L bezogene Gesamtverlust ΔP_g abhängig von der mittleren Geschwindigkeit \bar{w} des Fluids und der Konzentration c_T dargestellt. Die Rechnungen wurden für die Förderung von Koks im Wasserstrom durch ein Rohr mit dem Durchmesser $d = 100$ mm durchgeführt. Es wurde angenommen, daß der Korndurchmesser $d_p = 1,6$ mm, die Koksichte $\rho_p = 1360$ kg/m³ und die Viskosität des Wassers $\nu = 1,13 \cdot 10^{-6}$ m²/s betragen. Aus diesen Angaben ergibt sich ferner die Sinkgeschwindigkeit eines Kokskornes zu $w'_s = 0,086$ m/s.

Die in *Bild 10.17* als Parameter gewählte Konzentration wurde zwischen 0 und 20% verändert. Für $c_T = 0$ gilt Kurve a , die den Druckverlust ΔP der reinen Flüssigkeitsströmung wiedergibt. Bei sehr großen Fördergeschwindigkeiten \bar{w} nähern sich alle Kurven der Kurve a , da der zusätzliche Druckverlust ΔP_T schließlich verschwindend klein wird im Vergleich zu ΔP für die reine Flüssigkeitsströmung. Das zeigt also in einprägsamer Form, daß für die hydraulische Förderung bei hohen Geschwindigkeiten offensichtlich nur sehr wenig mehr Energie erforderlich ist als für die Förderung reinen Wassers. Der überwiegende Anteil des gesamten Energieaufwandes dient also dabei zur Förderung des Wassers, das als unerwünschter, wenn auch erforderlicher Ballast anzusehen ist.

In Richtung abnehmender Fördergeschwindigkeit nimmt der gesamte Druckverlust bis zum Erreichen eines Minimums ab, wobei der zusätzliche Anteil ΔP_T stetig zunimmt. Nach dem Minimum steigen die Kurven mit weiter abnehmender Fördergeschwindigkeit \bar{w} wieder an. Dieser letzte Kurvenast ist nicht mehr reell, da sich der Feststoff am Rohrboden abzulagern beginnt. Der tatsächlich zu erwartende Kurvenverlauf ist durch die punktierten Kurven c angedeutet.

Die Minima der Druckverlustkurven werden durch die Kurve b verbunden. Die im Minimum auftretende Fördergeschwindigkeit wird mit \bar{w}_{\min} bezeichnet. Für Fördergeschwindigkeiten $\bar{w} > \bar{w}_{\min}$ wird der Feststoff nach bisher vorliegenden Untersuchungsergebnissen vornehmlich ablagerungsfrei transportiert; für $\bar{w} < \bar{w}_{\min}$ beginnt sich der Feststoff am Rohrboden abzulagern.

Zur Berechnung von \bar{w}_{\min} führt man die Gleichungen (10.63) und (10.65) in Gl.(10.13) ein, bildet den Differentialquotienten $d \Delta P_g / d \bar{w}$ und setzt ihn anschließend gleich Null. Für \bar{w}_{\min} erhält man dann in dimensionsloser Form die folgende Beziehung:

$$\left(\frac{\bar{w}_{\min}^2}{g d} \right)^{29/24} = 0,34 c_T \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \left(\frac{w'_s{}^3}{g \nu} \right)^{1/3} \left(\frac{g d^3}{\nu^2} \right)^{1/8} \quad (10.67)$$

An der Stelle $\bar{w} = \bar{w}_{\min}$ tritt der maximale Wert für den zusätzlichen Druckverlust, also $\Delta P_{T_{\max}}$ bzw. $\psi_{T_{\max}}$ auf. Hierfür ergibt sich mit den Gleichungen (10.67) und (10.59) nach Zwischenrechnung

$$\psi_{T_{\max}} = 2,625 \psi_{\min} \quad (10.68)$$

Hierin ist ψ_{\min} die Widerstandszahl für die reine Flüssigkeitsströmung, deren Geschwindigkeit \bar{w}_{\min} ist. Zur Berechnung von ψ_{\min} ist das Blasius'sche Widerstandsgesetz nach Gl.(10.19) heranzuziehen. Aus dem obigen Ergebnis folgt dann, daß an der Stelle $\bar{w} = \bar{w}_{\min}$ die Gesamtwiderstandszahl $\psi_g = 3,625 \psi_{\min}$ und der

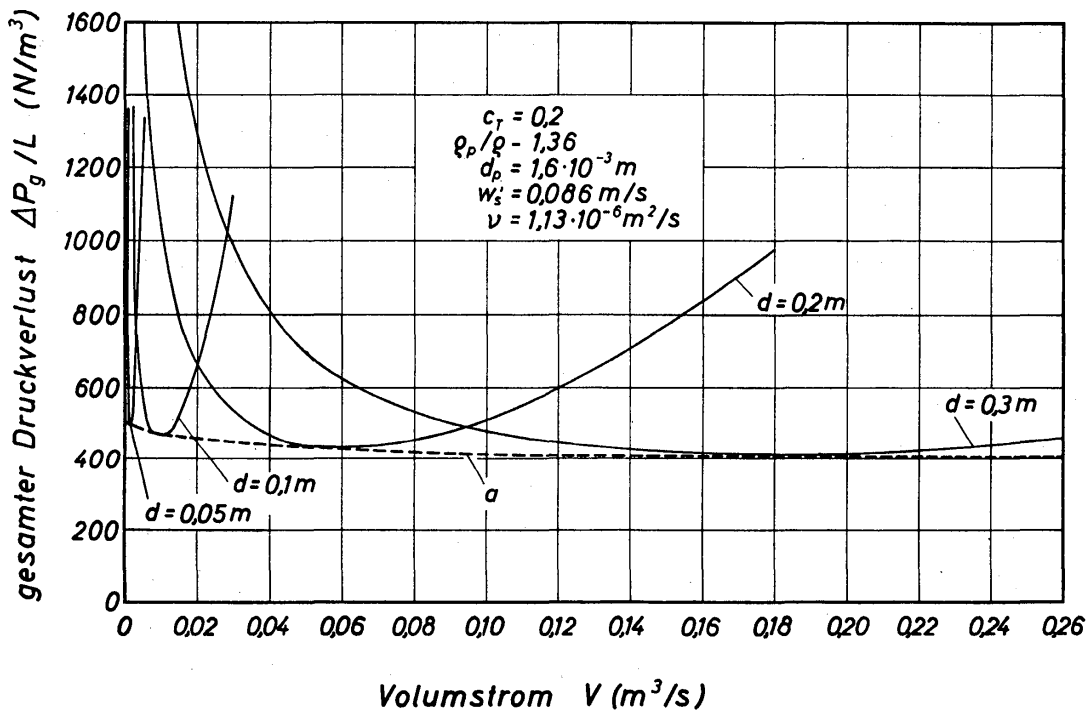


Bild 10.18. Gesamtdruckverlust $\Delta P_g/L$ eines Koks-Wasser-Gemisches, abhängig vom Volumstrom \dot{V} der Flüssigkeit und dem Rohrdurchmesser d für sonst gleiche Bedingungen wie in Bild 10.17

gesamte Druckverlust $\Delta P_g = 3,625 \Delta P_{\min}$ ist. Die Gültigkeit dieser Rechnungen läßt sich an Hand von *Bild 10.17* leicht überprüfen.

Um den Einfluß des Rohrdurchmessers auf den gesamten Druckverlust erkennen zu können, wurde $\Delta P_g/L$ für verschiedene Werte des Rohrdurchmessers d in Abhängigkeit vom Volumstrom \dot{V} bei einer Transportkonzentration $c_T = 0,2$ berechnet [10.17]. Die weiteren Förderbedingungen sind $d_p = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\nu = 1,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $w'_s = 0,086 \text{ m/s}$ und $\rho_p/\rho = 1,36$. Das Ergebnis der Rechnungen ist in *Bild 10.18* dargestellt. Für jeden Wert des Rohrdurchmessers d nimmt der gesamte Druckverlust mit zunehmendem Volumstrom \dot{V} zunächst sehr stark ab, durchläuft ein Minimum und steigt dann wieder an. Das Minimum ist um so stärker ausgeprägt, je kleiner der Rohrdurchmesser ist. Die Minima sind durch die gestrichelte Kurve *a* verbunden. Diese Kurve läßt eine für den praktischen Betrieb sehr bedeutsame Eigenschaft des gesamten Druckverlustes erkennen. Das Minimum des gesamten Druckverlustes ist nahezu unabhängig vom Volumstrom \dot{V} und Rohrdurchmesser d .

10.43 Ablagerung des Feststoffs im horizontalen Rohr

Unterschreitet die Fördergeschwindigkeit beim Feststofftransport einen bestimmten Wert, nämlich die Ablagerungsgeschwindigkeit \bar{w}_A , dann beginnt der Feststoff aus dem Förderstrom auszufallen und sich am Rohrboden anzusammeln. Auf diesen Vorgang ist in Zusammenhang mit *Bild 10.5* bereits hingewiesen worden. Um einen sicheren Betrieb von Transportleitungen gewährleisten zu können, darf die Ablagerungsgeschwindigkeit \bar{w}_A auf keinen Fall unterschritten werden.

Alle die Ablagerung begleitenden Vorgänge haben KRIEGEL und BRAUER [10.16] in einer zusammenfassenden Form beschrieben. Besondere Bedeutung wurde dabei dem Verhalten von Korngemischen geschenkt. Mit abnehmender Geschwindigkeit fallen die größten Körner als erste aus dem Förderstrom aus und bewegen sich dann zunächst springend durch das Rohr. Die Sprungbewegung beruht auf der Wirkung der Magnuskraft, die praktisch nur in der Nähe der Rohrwand auftritt. Für die Magnuskraft K_M gilt

$$K_M = f(d_p^3; w'_s; \rho; dw/dy), \quad (10.69)$$

d.h. K_M ist eine Funktion der dritten Potenz des Partikeldurchmessers d_p , der Sinkgeschwindigkeit w'_s , der Flüssigkeitsdichte ρ und des im Flüssigkeitsstrom auftretenden Geschwindigkeitsgradienten dw/dy . Die Magnuskraft erzeugt eine Bewegung der Partikeln radial zur Rohrachse. Unter dem gleichzeitigen Einfluß von Beschleunigungs-, Widerstands- und Massenkraft kommt die Sprungbewegung eines Kornes zustande. Da die Magnuskraft mit der dritten Potenz des Korndurchmessers ansteigt, werden große Körner auch noch bei wesentlich kleinerer Geschwindigkeit und somit auch noch bei wesentlich kleinerem Geschwindigkeitsgradienten die Sprungbewegung ausführen als kleine Körner. Obwohl große Körner bereits bei großen Geschwindigkeiten aus dem Förderstrom ausfallen und in die Sprungbewegung übergehen, werden sie aber erst bei kleineren Geschwindigkeiten zur Ruhe kommen als kleine Körner. In der abgelagerten Feststoffschicht eines Korngemisches findet man daher auch die kleinsten Körner am Rohrboden und die größten in der obersten Lage der Schicht. *Bild 10.19* zeigt eine photographische Aufnahme von der Ablagerung eines Korngemisches.

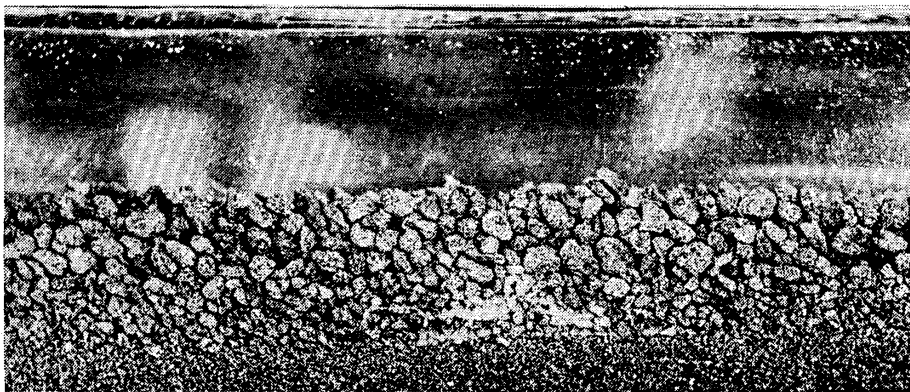


Bild 10.19. Ablagerung eines Korngemisches

Die im Schrifttum bekannt gewordenen Meßwerte für die Ablagerungsgeschwindigkeit \bar{w}_A haben SINCLAIR [10.18], SMITH [10.20], DURAND [10.13] sowie KRIEGEL und BRAUER [10.16] mitgeteilt. Sie sind in *Bild 10.20* zusammengestellt [10.16]. Die bei den Versuchen verwendeten Feststoffe waren Sand, Kohle, Koks und Eisen; die Flüssigkeiten waren Wasser und Petroleum. Die gewählten dimensionslosen Koordinaten gehen auf einen Vorschlag von SINCLAIR [10.18] zurück. Im Mittel lassen sich die Meßwerte durch die Kurve *a* gut ausgleichen. Hierfür gilt die folgende empirische Beziehung:

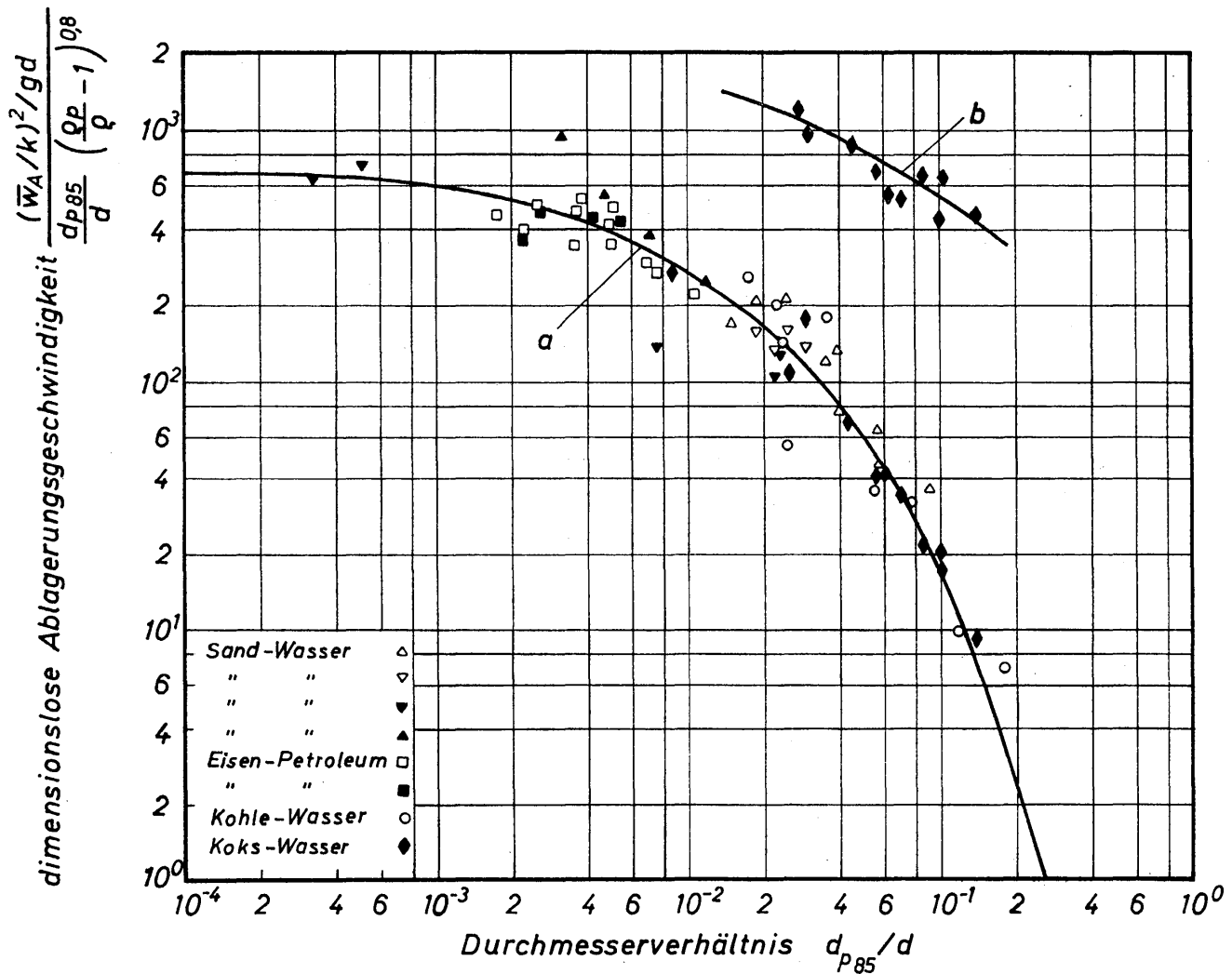


Bild 10.20. Dimensionslose Ablagerungsgeschwindigkeit, abhängig vom Durchmesser-
verhältnis $d_{p_{85}}/d$

$$\frac{(\bar{w}_A/k)^2}{g d} = \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)^{0,8} \frac{\frac{d_{p_{85}}}{d} \left(1 - \frac{d_{p_{85}}}{d}\right)}{1,5 \cdot 10^{-3} + 0,2 \frac{d_{p_{85}}}{d} + 35 \left(\frac{d_{p_{85}}}{d}\right)^3}. \quad (10.70)$$

Hierin bedeutet k den bereits erwähnten Formfaktor, der für Kugeln gleich 1 und für Granulate stets kleiner als 1 ist. Der Korndurchmesser $d_{p_{85}}$ ergibt sich aus der Siebanalyse. Die Wahl des Durchmessers $d_{p_{85}}$ als maßgebende Größe des Kornmischtes stützt sich auf die Vorstellung, daß der Ablagerungsvorgang durch die großen Körner eingeleitet wird. Gl.(10.70) erfüllt zwei wichtige Bedingungen, und zwar ist $\bar{w}_A = 0$ für $\rho_p/\rho = 1$ und für $d_{p_{85}}/d = 0$ sowie für $d_{p_{85}}/d = 1$. Als obere Anwendungsgrenze für Gl. (10.70) sollte $d_{p_{85}}/d = 0,3$ gesetzt werden.

Mit der theoretischen Behandlung des Ablagerungsvorganges hat sich in einer neueren Arbeit [10.41] THOMAS beschäftigt. Obgleich noch keine Gleichung geliefert werden konnte, die für die Praxis von vergleichbarer Bedeutung ist wie die empirische Gl.(10.70), dürfte die damit eingeleitete Entwicklung von großem Interesse sein. Das ist auch deshalb der Fall, da die theoretische Analyse des Ablagerungsvorganges sowohl für den hydraulischen als auch für den pneumatischen Transport gilt.

Die in *Bild 10.20* ebenfalls enthaltene Kurve *b* gleicht einige von KRIEGEL und BRAUER [10.16] mitgeteilte Meßwerte für die Schweb- oder Transportgeschwindigkeit \bar{w}_T aus. Hierzu ist in die als Ordinate verwendeten Größe \bar{w}_A durch \bar{w}_T zu ersetzen. Die Transportgeschwindigkeit ist innerhalb des untersuchten Bereiches etwa 3- bis 6 mal so groß wie die Ablagerungsgeschwindigkeit. Hierauf war schon in Zusammenhang mit *Bild 10.5* hingewiesen worden. Eine Gleichung läßt sich auf Grund der wenigen Meßwerte für \bar{w}_T noch nicht angeben.

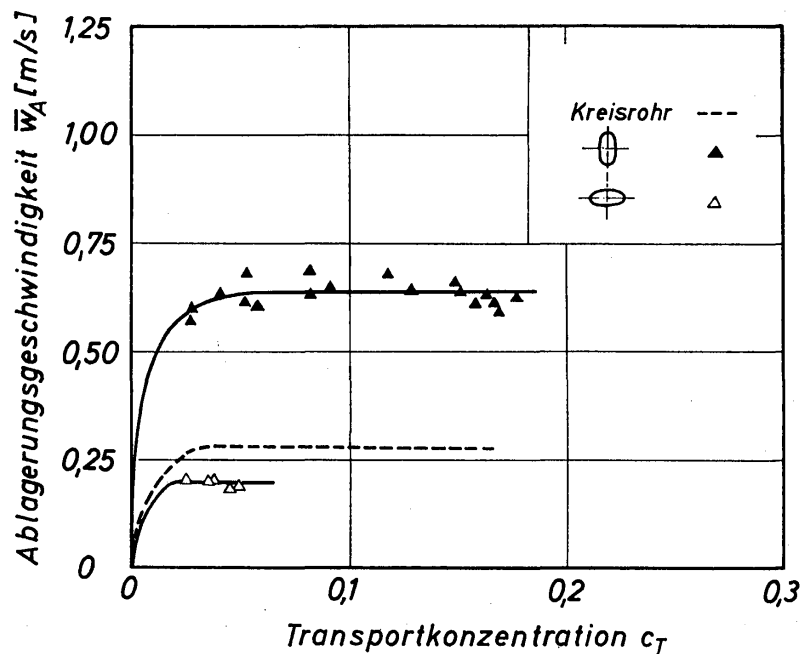


Bild 10.21. Abhängigkeit der Ablagerungsgeschwindigkeit \bar{w}_A für ein Koks-Wasser-Gemisch von der Konzentration c_T für verschieden geformte Rohre

Versuche von KRIEGEL und BRAUER haben ergeben, daß die Ablagerungsgeschwindigkeit \bar{w}_A sehr stark von der Querschnittsform des Rohres abhängt. Ein Plexiglasrohr wurde so verformt, daß es eine elliptische Querschnittsform mit einem Achsenverhältnis von 1:3 erhielt. Die Anordnung dieses Rohres während der Versuche wird durch die Lage der großen Ellipsenachse gekennzeichnet. *Bild 10.21* zeigt die Meßergebnisse. Zum Vergleich ist als gestrichelte Kurve das Ergebnis der Messungen an einem Kreisrohr angegeben. Man entnimmt dem Bild, daß die Ablagerungsgeschwindigkeit im elliptischen Rohr mit waagerechter Lage der großen Achse merklich kleiner ist als im vergleichbaren Kreisrohr. Das heißt also, daß bei dieser Anordnung des elliptischen Rohres der hydraulische Transport bei kleineren Transportgeschwindigkeiten durchgeführt werden darf als bei Verwendung von Kreisrohren. Wird das elliptische Rohr aber so angeordnet, daß sich die große Achse in einer lotrechten Ebene befindet, dann ist die Ablagerungsgeschwindigkeit sehr viel größer als im vergleichbaren Kreisrohr. Diese Anordnung des elliptischen Rohres ist daher zu vermeiden. Abschließend sei erwähnt, daß bei schwebendem Feststofftransport durch elliptische Rohre die Widerstandszahl ψ_T nach Gl.(10.59) berechnet werden kann, wenn für d der hydraulische Durchmesser eingeführt wird.

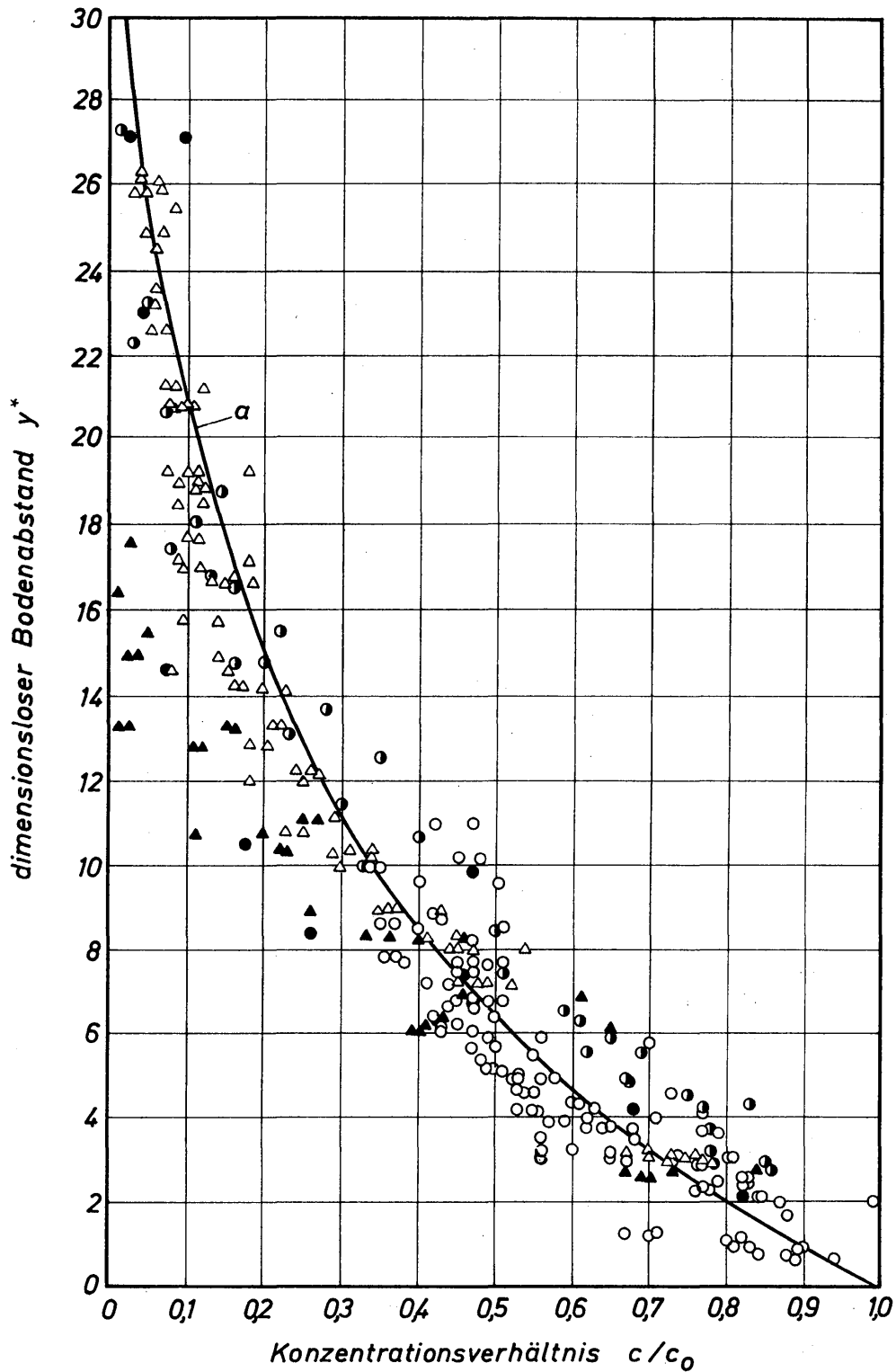


Bild 10.22. Abhängigkeit des Konzentrationsverhältnisses c/c_0 vom dimensionslosen Bodenabstand y^* ; eingezeichnete Kurve nach Gl.(10.71), Meßwerte nach Angaben in Tabelle 10.4

10.44 Konzentrationsprofile für den Feststoff im horizontalen Rohr

In einer theoretischen Arbeit hat KRIEDEL [10.42] die Konzentrationsprofile beim hydraulischen Feststofftransport in horizontalen Röhren berechnet. Dabei wurden die Einflüsse der Turbulenz, der Magnuskraft und der Schwarmbewegung berücksichtigt. Ohne auf die Herleitung näher einzugehen, sei die Gleichung unmittelbar angegeben:

Tabelle 10.4: Angaben zu den in Bild 10.22 dargestellten Meßwerten

Zeichen in Bild 10.22	Material	Dichte ρ_p (kg/m ³)	Partikel- durchmesser d_p (mm)	Sinkge- schwindig- keit w_s (m/s)	Konzen- tration c_{T_m} (Vol.-%)	Rohrdurch- messer d (mm)	Förder- mittel	Förderge- schwindig- keit \bar{w} (m/s)	Zitat
○	feiner Sand	2650	0,183	0,0198	2,6 bis 21	25,4	Wasser	2,2 bis 2,6	[10.43]
△	Zirkon-Sand	4600	0,117	0,0127	0,6 bis 5,7	25,4	Wasser	2,4 bis 2,7	[10.43]
▲	grober Sand	2660	0,7	0,0955	4,2 bis 8,3	25,4	Wasser	1,4 bis 2,0	[10.43]
●	Sand	2620	2,04	0,16	7	150	Wasser	3,0 bis 5,4	[10.13]
⊙	Sand	2620	0,18	0,02	6	150	Wasser	2,3 bis 5,5	[10.13]

$$\frac{c_T}{c_{T_0}} = e^{-0,108 y^*}. \quad (10.71)$$

Hierin ist zur Abkürzung

$$y^* = Re^{1/3} (1 - c_{T_m})^{3,5} [\zeta \cdot f(d_p/d)]^{1/2} \frac{w_s}{\bar{w}} \frac{y}{d} \quad (10.72)$$

mit

$$f(d_p/d) = \frac{1 - \frac{d_p}{d}}{1,5 \cdot 10^{-3} + 0,2 \frac{d_p}{d} + 35 \left(\frac{d_p}{d}\right)^3} \quad (10.73)$$

gesetzt worden. Es bedeuten c_T die örtliche Transportkonzentration, c_{T_0} diejenige am Rohrboden beim Abstand $y = 0$, c_{T_m} die mittlere Transportkonzentration, Re die durch Gl.(10.20) definierte Reynoldszahl des Flüssigkeitsstromes, ζ den Widerstandsbeiwert der geförderten Partikeln nach Gl.(10.21), d_p den Durchmesser und w_s die stationäre Sinkgeschwindigkeit der Partikeln, \bar{w} die mittlere Fluidgeschwindigkeit und d den Rohrdurchmesser. In *Bild 10.22* ist Gl.(10.71) dargestellt durch Kurve *a*, mit Meßwerten von DURAND [10.13] sowie von NEWITT, RICHARDSON und SHOOK [10.43] verglichen. Nähere Angaben zu den Meßwerten findet man in Tabelle 10.4. Unter Berücksichtigung der großen experimentellen Schwierigkeiten, die bei der Bestimmung der örtlichen Konzentrationen überwunden werden müssen, stimmen theoretische und experimentelle Ergebnisse noch in befriedigender Weise überein.

10.5 Pneumatischer und hydraulischer Transport durch gerade, vertikale Rohre

10.51 Berechnung des gesamten Druckverlustes

Der beim pneumatischen und hydraulischen Feststofftransport durch vertikale Rohrleitungen insgesamt auftretende Druckverlust ΔP_{gv} läßt sich, wenn Beschleunigungsanteile ausgeschlossen werden, aus vier Anteilen wie folgt zusammensetzen:

$$\Delta P_{gv} = \Delta P + \Delta P_h + \Delta P_{T_v} + \Delta P_{hT}. \quad (10.74)$$

Es bedeuten ΔP den durch Reibung des reinen Fluids an der Rohrwand bedingten Druckverlust, ΔP_h die je Volumeinheit des Fluids erforderliche Hubarbeit, ΔP_{T_v} den vornehmlich durch die Relativgeschwindigkeit zwischen Partikeln und Fluid bedingten Druckverlust und ΔP_{hT} die je Volumeinheit für den Feststoff erforderliche Hubarbeit. Der Anteil ΔP_{T_v} läßt sich, ohne daß sich ein zu großer Fehler ergibt, in vielen Fällen vernachlässigen. Insbesondere ist diese Vernachlässigung beim hydraulischen Transport gerechtfertigt, da hierbei die Relativgeschwindigkeit stets sehr klein ist. Wenn ΔP_{T_v} berücksichtigt werden muß, dann trifft das nur für Fälle des pneumatischen Transportes zu. Allgemeingültige Berechnungsgleichungen für ΔP_{T_v} liegen indes noch nicht vor. Einige Hinweise

hierzu enthält eine Untersuchung von JONES, BRAUN, DAUBERT und ALLENDORF [10.44], in welcher auch das weitere Schrifttum über den pneumatischen Transport in vertikalen Rohrleitungen erwähnt ist. Hingewiesen sei in diesem Zusammenhang auch auf eine Arbeit von DOIG und ROPER [10.45], in welcher die Geschwindigkeitsverteilung des Gasstromes beim pneumatischen Feststofftransport näher untersucht wurde.

Für die Berechnung des Reibungsverlustes ΔP lassen sich die aus dem Blasiuschen Widerstandsgesetz folgenden Gleichungen (10.63) und (10.64) heranziehen, wenn man die Rohrlänge L durch die geodätische Förderhöhe h ersetzt. Ferner gilt unter der Bedingung, daß die Relativgeschwindigkeit zwischen Fluid und Feststoff vernachlässigt werden darf, so daß die Raumkonzentration c_R gleich der Transportkonzentration c_T ist, für die Hubarbeit des Fluids die Beziehung

$$\Delta P_h = g \rho h (1 - c_T) \quad (10.75)$$

und für die Hubarbeit des Feststoffes die Beziehung

$$\Delta P_{hT} = g \rho_p h c_T. \quad (10.76)$$

Mit diesen beiden Gleichungen sowie Gl.(10.63) folgt aus Gl.(10.74)

$$\Delta P_{gv} = 0,158 h \frac{\bar{w}^{7/4} \rho^{3/4} \eta^{1/4}}{d^{5/4}} + g \rho h \left[1 + c_T \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \right]. \quad (10.77)$$

Ersetzt man Gl.(10.63) durch Gl.(10.64), so erhält man

$$\Delta P_{gv} = 0,241 h \frac{V^{7/4} \rho^{3/4} \eta^{1/4}}{d^{19/4}} + g \rho h \left[1 + c_T \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \right]. \quad (10.78)$$

Für den Sonderfall des hydraulischen Transportes ist unter den üblichen Betriebsbedingungen ΔP stets klein im Vergleich zu $\Delta P_h + \Delta P_{hT}$. Beim pneumatischen Transport hingegen vermögen beide Anteile von gleicher Größenordnung zu sein oder ΔP ist der größere.

10.52 Untere Fördergeschwindigkeit

Der Transport körniger Feststoffe im Fluidstrom durch vertikale Rohrleitungen ist nur möglich, wenn die Fördergeschwindigkeit \bar{w} größer ist als die Sinkgeschwindigkeit w'_s der Partikeln. Für $\bar{w} = w'_s$ werden die Partikeln vom Fluidstrom in der Schwebe gehalten, aber nicht gefördert. Wird dann fortlaufend Feststoff in die Rohrleitung eingespeist, so steigt die Feststoffkonzentration bis auf den maximalen Wert an, und das Rohr verstopft. Es muß daher gefragt werden, welchen unteren Wert \bar{w}_u die Fördergeschwindigkeit mindestens haben muß. Eine sinnvolle Angabe über die Größe der unteren Fördergeschwindigkeit ergibt sich, wenn man davon ausgeht, daß unter allen Umständen ein zügiger Transport gewährleistet sein muß und somit die Raumkonzentration nicht zu groß werden darf.

Bei nicht zu großer Raumkonzentration c_R ist das Konzentrationsverhältnis c_T/c_R gemäß Gl.(10.10) allein eine Funktion des Geschwindigkeitsverhältnisses w_p/\bar{w} . Hierin ist die Partikelgeschwindigkeit w_p gleich der Fluidgeschwindigkeit \bar{w} , vermindert um die Sinkgeschwindigkeit w'_{ss} der im Schwarm auftretenden Partikeln. Somit gilt also:

$$\frac{c_T}{c_R} = \frac{\bar{w} - w'_{ss}}{\bar{w}} = 1 - \frac{w'_{ss}}{\bar{w}}. \quad (10.79)$$

Die Sinkgeschwindigkeit w'_{ss} läßt sich nach Untersuchungen von RICHARDSON und ZAKI [10.46] näherungsweise nach der folgenden empirischen Beziehung berechnen:

$$\frac{w'_{ss}}{w'_s} = \left(1 - \frac{c_R}{c_{\max}}\right)^3. \quad (10.80)$$

Nach Einführen in Gl.(10.79) ergibt sich das Konzentrationsverhältnis zu

$$\frac{c_T}{c_R} = 1 - \frac{w'_s}{\bar{w}} \left(1 - \frac{c_R}{c_{\max}}\right)^3. \quad (10.81)$$

Mit w'_s wird die Sinkgeschwindigkeit einer beliebig geformten einzelnen Partikel und mit c_{\max} die maximale Raumkonzentration bezeichnet. Bei Partikeln gleicher Größe ist $c_{\max} \approx 0,5$, während bei Gemischen aus verschiedenen großen Partikeln c_{\max} etwas größer sein kann. Die Gültigkeit von Gl.(10.81) erstreckt sich etwa bis $c_R/c_{\max} = 0,75$. In *Bild 10.23* ist c_T/c_R abhängig vom Geschwindigkeitsverhältnis w'_s/\bar{w} und c_R/c_{\max} dargestellt.

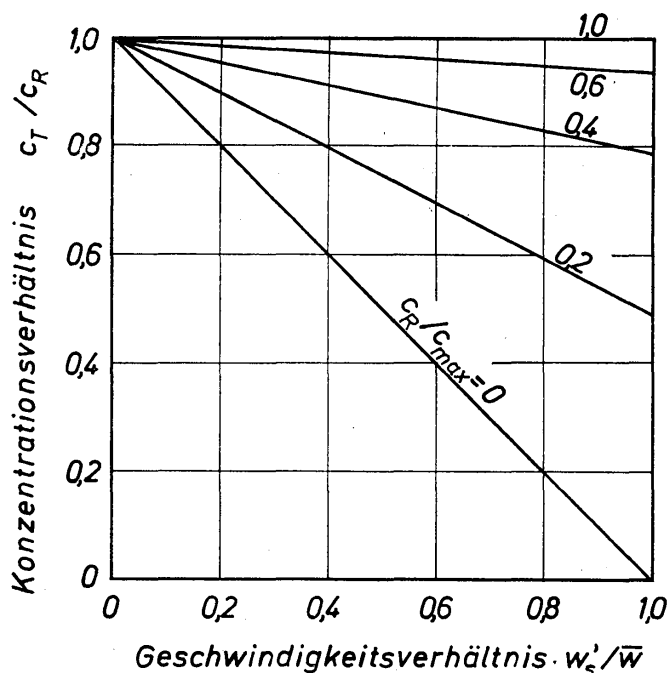


Bild 10.23. Konzentrationsverhältnisse c_T/c_R , abhängig vom Geschwindigkeitsverhältnis w'_s/\bar{w} und c_R/c_{\max} beim Transport in vertikalen Rohrstrecken

Geht man davon aus, daß die Transportkonzentration beim hydraulischen Transport im allgemeinen nicht sehr weit von der maximalen Konzentration entfernt ist, dann darf also c_T nicht sehr viel kleiner als c_R sein. Aus diesem Grunde emp-

fehlt sich ein Geschwindigkeitsverhältnis von $w'_s/\bar{w} = 0,2$. Damit ist die untere Fördergeschwindigkeit beim hydraulischen Transport festgelegt:

$$\bar{w}_u = 5 w'_s. \quad (10.82)$$

Beim pneumatischen Transport ist die Transportkonzentration im allgemeinen sehr niedrig, etwa in der Größenordnung von 1%. Hierbei ist es dann ohne nachteilige Folgen zulässig, das Konzentrationsverhältnis c_T/c_R kleiner als 0,5 werden zu lassen, so daß das Geschwindigkeitsverhältnis w'_s/\bar{w} größer als 0,5 wird.

Die untere Fördergeschwindigkeit für den Transport durch vertikale Rohrleitungen ist niedriger als die Minimum- und Ablagerungsgeschwindigkeit in horizontalen Rohren. Besteht die Förderleitung daher aus horizontalen und vertikalen Leitungsabschnitten, dann ist die für den horizontalen Abschnitt ermittelte Fördergeschwindigkeit für die gesamte Förderstrecke maßgebend. In diesem Falle verliert also die untere Fördergeschwindigkeit in vertikalen Rohrstrecken ihre Bedeutung.

10.6 Widerstand von Rohrkrümmern beim Feststofftransport

Der gesamte Druckverlust ΔP_{gk} eines feststoffbeladenen Fluids bei der Strömung durch Krümmer, die in einer horizontalen Ebene liegen, läßt sich aus zwei Anteilen zusammensetzen:

$$\Delta P_{gk} = \Delta P_k + \Delta P_{kT}. \quad (10.83)$$

Hierin bedeuten ΔP_k den Druckverlust des reinen Fluidstroms und ΔP_{kT} den durch Feststofftransport bedingten zusätzlichen Druckverlust. Die Berechnung von ΔP_k kann nach den in Abschnitt 1.62 mitgeteilten Angaben vorgenommen werden. Unbekannt ist also nur der Anteil ΔP_{kT} .

Zur Berechnung des zusätzlichen Druckverlustes ΔP_{kT} liegt es nahe, ihn auf den zusätzlichen Druckverlust ΔP_T , der in einer geraden Rohrleitung auftritt, zu beziehen, und für das Verhältnis $\Delta P_{kT}/\Delta P_T$ folgenden Ansatz zu machen:

$$\frac{\Delta P_{kT}}{\Delta P_T} = f(D/d; \gamma). \quad (10.84)$$

Mit D wird der Krümmerdurchmesser gemäß Bild 5.32, mit d der Rohrdurchmesser und mit γ der Umlenkungswinkel bezeichnet. Mit dem obigen Ansatz geht man von der Vorstellung aus, daß alle von der Kornbewegung im geraden Rohr abweichenden Bewegungen im Krümmer näherungsweise durch die geometrischen Größen D/d und γ erfaßt werden.

Experimentelle Untersuchungen über den zusätzlichen Druckverlust in Krümmern haben UEMATU und MORIKAWA [10.47] sowie SCHUCHART [10.32] durchgeführt. Die von SCHUCHART verwendeten Krümmer hatten alle einen Umlenkungswinkel von $\gamma = 90^\circ$ und einen Rohrdurchmesser von $d = 34,35$ mm. Verändert wurde der Krümmerdurchmesser D , so daß sich für das Durchmesser-Verhältnis D/d die folgenden Werte ergaben: 21,5; 18,4; 9,9; 4,95 und 3,5. Als

Feststoffe wurden bei den Versuchen Quarzkieskörner mit $\rho_p = 2610 \text{ kg/m}^3$ und Polyamidgranulat mit $\rho_p = 1140 \text{ kg/m}^3$ verwendet. Der Partikeldurchmesser lag zwischen $d_p = 1,49 \text{ mm}$ und $2,96 \text{ mm}$. Als Fördermedium diente bei allen Versuchen Luft. Die Strömungsgeschwindigkeit \bar{w} wurde zwischen 10 und 26 m/s und die Transportkonzentration c_T zwischen 0 und $0,5\%$ verändert. Aus den Meßergebnissen ermittelte SCHUCHART die folgende empirische Gleichung:

$$\frac{\Delta P_{kT}}{\Delta P_T} = 210 \left(\frac{d}{D} \right)^{1,15}. \quad (10.85)$$

In *Bild 10.24* ist Gl. (10.85) dargestellt durch die ausgezogene Kurve *a*. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten, wobei jedoch zu berücksichtigen ist, daß die Meßwerte mittlere Werte zahlreicher Einzelmessungen darstellen. Die mittlere Streuung der Einzelmessung beträgt etwa $\pm 20\%$. Zum Vergleich ist in *Bild 10.24* außerdem das Verhältnis der Druckverluste $\Delta P_k/\Delta P$ bei der Einphasenströmung nach einer empirischen Gleichung von PADMUREJIAH [10.48] durch Kurve *b* eingetragen. Man erkennt hieraus, daß das Verhältnis $\Delta P_k/\Delta P_T$ im untersuchten Bereich mit großer Näherung etwa eine Zehnerpotenz größer ist als das Verhältnis $\Delta P_k/\Delta P$. Außerdem ist Kurve *b* im Gegensatz zur Kurve *a* merklich gekrümmt. Im nicht mehr untersuchten Bereich sehr großer Krümmungsverhältnisse wird sich auch für Kurve *a* ein gekrümmter Verlauf ergeben und sich $\Delta P_{kT}/\Delta P_T$ dem Wert 1 nähern. Dies wird durch die gestrichelt gezeichnete Fortsetzung von Kurve *a* angedeutet.

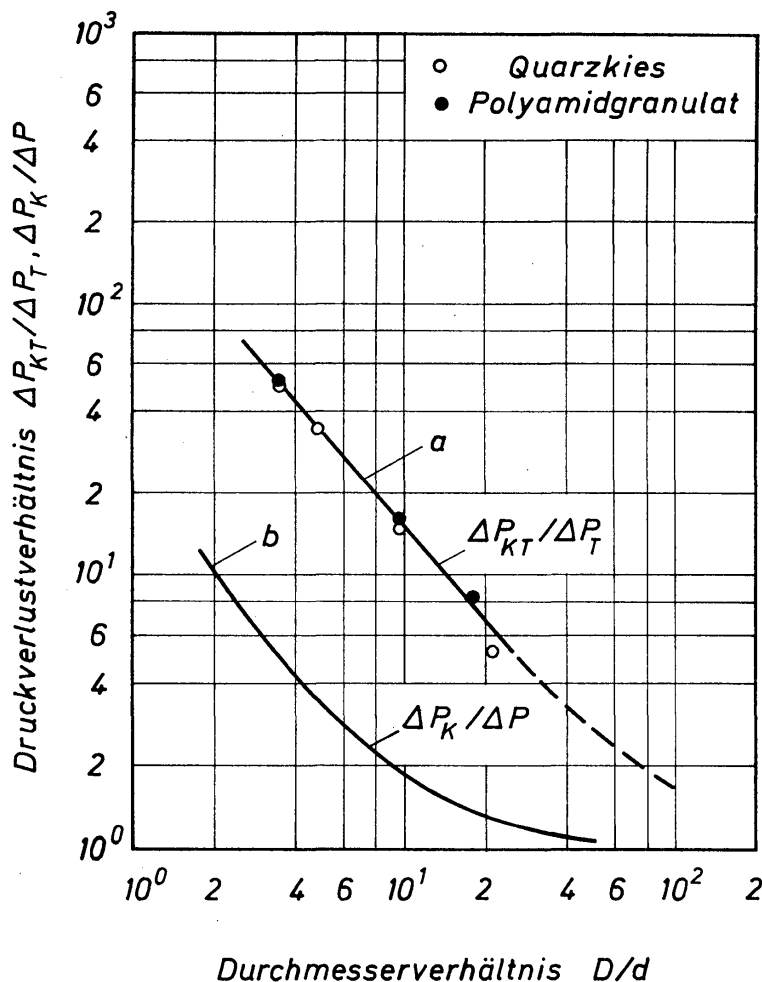


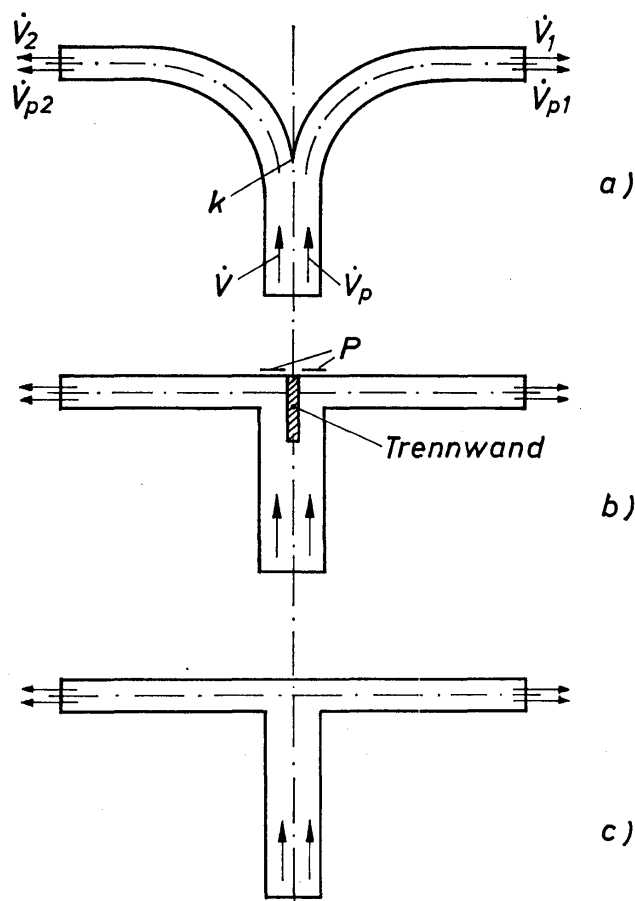
Bild 10.24. Abhängigkeit der Druckverhältnisse $\Delta P_{kT}/\Delta P_T$ und $\Delta P_k/\Delta P$ vom Durchmesser- verhältnis D/d der Rohrkrümmern

Wie bereits erwähnt, ist Gl. (10.85) aus Untersuchungen über den Druckverlust beim pneumatischen Transport hervorgegangen. Da das Druckverlustverhältnis allein eine Funktion der geometrischen Größe D/d ist, müßte man erwarten, daß Gl. (10.85) auch für die Berechnung des zusätzlichen Druckverlustes in Krümmern beim hydraulischen Transport angewendet werden darf. Zur Berechnung von ΔP_T ist dann Gl. (10.59) bzw. Gl. (10.62) heranzuziehen.

10.7 Verzweigung von Feststoffströmen

Die Bedeutung der Verzweigung von Feststoffströmen nimmt mit bei sich stetig ausweitender Anwendung des pneumatischen und hydraulischen Förderprinzips immer mehr zu. Grundlegende Beiträge zum Verzweigungsproblem haben die Untersuchungen von JUNG [10.49 und 10.50] und LEMPP [10.51] geliefert.

Mittels einer Verzweigung sollen sowohl der Volumstrom des Feststoffes \dot{V}_p als auch der Volumstrom des Fluids \dot{V} in vorgegebener Weise aufgeteilt werden. Diese Forderung läßt sich indes noch nicht, insbesondere nicht mit der gewünschten Genauigkeit, mit den technisch verfügbaren Einrichtungen erfüllen. Als günstigstes Verteilerelement hat sich das T-Stück erwiesen, von dem in *Bild 10.25* 3 Beispiele angegeben sind. Im ersten Beispiel sind zwei 90° -Krümmer an das Zuführrohr angeschlossen. Die Trennung des ankommenden Stromes mit \dot{V} und \dot{V}_p in die Teilströme \dot{V}_1 und \dot{V}_2 sowie \dot{V}_{p1} und \dot{V}_{p2} wird dadurch erleichtert, daß die äußeren Krümmerflächen mit der Kante k weit in den ankommenden Strom hineinragen und somit eine Trennwand bilden.



ersten Verteilerelementes entsteht das zweite. Die Aufteilung des Stromes wird durch die eingesetzte Trennwand begünstigt. Läßt man schließlich die Trennwand fort, dann erhält man als einfachstes Verteilerelement das in *Bild 10.25 c* gezeigte.

Bild 10.25
Formen von Rohrverzweigungen

Auf Grund der Ausführungen in den vorausgegangenen Abschnitten, insbesondere soweit sie die Konzentrationsverteilung des Feststoffes im Rohr betreffen, muß für die Aufteilung in zwei gleich große Feststoffströme \dot{V}_{p_1} und \dot{V}_{p_2} eine über den Querschnitt des Zuführrohres konstante Feststoffkonzentration gefordert werden. Diese Bedingung ist in hinreichendem Maße erfüllt, wenn das Zuführrohr eine senkrechte Achse besitzt. Trotzdem können jedoch für den Sonderfall des pneumatischen Transportes auf Grund von Strahlenbildungen sehr einseitige Konzentrationsprofile auftreten. Da die Betriebsbedingungen, unter denen sich Feststoffstrahlen einstellen, noch nicht geklärt sind, wird man sich durch Versuche von der Verteilungsform des Feststoffes überzeugen müssen. Man wird jedoch im allgemeinen erwarten dürfen, daß die Feststoffverteilung über den Rohrquerschnitt um so gleichmäßiger ist, je größer die Fördergeschwindigkeit ist. Die Verteiler a und b verhalten sich bezüglich der Auftrennung des Feststoffstromes sehr ähnlich. Unabhängig vom Verhältnis \dot{V}_1/\dot{V}_2 der Teilströme des Fluids werden für die Verteiler a und b die Feststoffströme \dot{V}_{p_1} und \dot{V}_{p_2} übereinstimmen. Denn nach den Ausführungen in Abschnitt 5.5 werden die Partikeln auch dann noch ihre Flugrichtung beibehalten, wenn das Fluid bereits seine Strömungsrichtung ändert. Die Partikeln werden also im Verteiler b in den Bereichen P auf die Wand aufprallen. Wie im Abschnitt 5.5 ausführlich dargelegt wurde, ist der Geradeausflug besonders beim pneumatischen Transport ausgeprägt, da hierbei die Trägheitskraft für die Bahnkurve ausschlaggebend ist. Beim hydraulischen Transport besteht dagegen stets die Gefahr, daß die Partikeln die Umlenkung des Fluids zumindest teilweise mitmachen, da hierbei die Widerstandskraft für die Bahnkurve maßgebend ist.

Als Übersichtsregel kann man somit festlegen: Entscheidet die Trägheitskraft über den Verlauf der Bahnkurve, dann ist $\dot{V}_{p_1}/\dot{V}_{p_2} = 1$ und somit unabhängig vom Volumstromverhältnis \dot{V}_1/\dot{V}_2 des Fluids. Entscheidet hingegen die Widerstandskraft über den Verlauf der Bahnkurve, dann ist $\dot{V}_{p_1}/\dot{V}_{p_2} \approx \dot{V}_1/\dot{V}_2$. Die beiden Verhältnisse der Volumströme sind also näherungsweise gleich.

In den meisten praktischen Fällen wird das Verhältnis $\dot{V}_{p_1}/\dot{V}_{p_2}$ zwischen den durch die letzten beiden Gleichungen festgelegten Grenzen liegen. Das gilt insbesondere auch dann, wenn ein Verteilerstück gemäß *Bild 10.25 c* verwendet wird. Mit diesem Verteilertyp hat LEMPP einige Versuche durchgeführt und dabei festgestellt, daß $\dot{V}_{p_1}/\dot{V}_{p_2} = 1$ um so besser erfüllt wird, je größer die Feststoffkonzentration ist. Im Rahmen seiner Untersuchungen hat LEMPP auch den Druckverlust von Verteilerstücken gemessen. Abschließend sei darauf hingewiesen, daß bei der Gestaltung von Verteilerstücken auf den Verschleiß Rücksicht zu nehmen ist.

10.8 Verschleiß von Rohrleitungen beim Feststofftransport

Der beim pneumatischen und hydraulischen Transport körniger Feststoffe durch Rohrleitungen beobachtete Verschleiß ist auf die mechanische Einwirkung des Feststoffes und auf die chemische Einwirkung des Fluids auf die Rohrwand zu-

rückzuführen. Das Ergebnis der mechanischen Einwirkung nennt man auch Erosion; die chemische Einwirkung ist die Korrosion. Im allgemeinen ist beim Feststofftransport der mechanische Verschleiß von ausschlaggebender Bedeutung. Es ist aber stets zu beachten, daß die Korrosion die Erosion erleichtert und umgekehrt. Die Ausführungen in diesem Abschnitt betreffen allein den mechanischen Verschleiß.

Im engeren Sinne versteht man unter mechanischem Verschleiß die ungewollte Werkstoffzerkleinerung der Rohrwand durch Einwirkung der Feststoffpartikeln. Da die Partikeln auf die Rohrwand aufprallen, spricht man von Prallverschleiß. Wird hiervon die gesamte Wandoberfläche gleichmäßig betroffen, so handelt es sich um Flächenverschleiß. Ist der Prallverschleiß hingegen auf kleine Flächenelemente begrenzt, dann bilden sich Verschleißmulden aus, und man spricht vom Muldenverschleiß. Beim pneumatischen und hydraulischen Transport ist es fast immer der Muldenverschleiß, der zu einer Zerstörung der Rohrwand führt. Mit den Problemen des Muldenverschleißes haben sich zahlreiche Forscher beschäftigt [10.21 bis 10.28].

10.81 Allgemeine Beschreibung des Verschleißes in Rohren

10.811 Verschleiß in vertikalen Rohren

Beim Feststofftransport in vertikalen geraden Rohren ist der Feststoff bei ungestörter Strömung gleichmäßig über den gesamten Rohrquerschnitt verteilt. Die Strömung des Gases oder der Flüssigkeit ist fast ausnahmslos turbulent, obgleich der Feststofftransport auch bei laminarer Strömung möglich ist. Da ein Verschleiß nur auftreten kann, wenn die Feststoffkörner auf die Rohrwand prallen, ist danach zu fragen, welches die Ursachen für die Querbewegung der Körner sind. In Abschnitt 10.13 wurde bereits nachgewiesen, daß der im turbulent strömenden Trägermedium auftretende Impulstransport durch diskrete Flüssigkeitsballen eine Querbewegung der Feststoffkörner hervorruft. Jede Querbewegung muß zwangsläufig die Wahrscheinlichkeit des Zusammenstoßes zwischen den Körnern erhöhen, woraus sich neue Querbewegungen ergeben. Ursache der Querbewegung von Körnern sind also sowohl die turbulenten Schwankungen im Trägerstoff, gegenseitige Zusammenstöße sowie Reflexionen nach einmal zustande gekommenem Aufprallen auf die Rohrwand.

Die Zahl der Körner, die auf Grund von Querbewegungen auf die Rohrwand treffen, wird von der insgesamt im Förderstrom befindlichen Kornzahl n abhängen:

$$n = \frac{V_p}{d_p^3 \pi/6} \quad (10.86)$$

Hierin wird mit V_p das Feststoffvolumen und mit d_p der Korndurchmesser bezeichnet. Für V_p läßt sich

$$V_p = c_R (V_p + V) = c_R V_R \quad (10.87)$$

schreiben, wobei c_R die volumetrische Feststoffkonzentration, V_R das betrachtete Rohrvolumen und V das darin befindliche Gas- oder Flüssigkeitsvolumen bedeuten. Aus den Gleichungen (10.86) und (10.87) ergibt sich dann die auf das Rohrvolumen V_R bezogene Kornzahl

$$\frac{n}{V_R} = \frac{6 c_R}{\pi d_p^3}. \quad (10.88)$$

Beim pneumatischen Transport liegt die Konzentration in der Größenordnung von 0,01 und beim hydraulischen Transport von 0,2. Nimmt man für den Korndurchmesser $d_p = 0,5 \cdot 10^{-3}$ m an, so ergibt sich für den pneumatischen Transport $n/V_R = 1,53 \cdot 10^5$ l/m³ und für den hydraulischen Transport $n/V_R = 3,06 \cdot 10^6$ l/m³. Die Bedeutung dieser Zahlenwerte läßt sich sehr leicht erfassen, wenn man, mit der Annahme gleichmäßiger Kornverteilung im Förderstrom, den Abstand a zwischen zwei benachbarten Körnern berechnet. Zu dem Zweck wird das Rohrvolumen V_R in n würfelförmige Elemente mit der Kantenlänge a aufgeteilt: Mit

$$V_R = n a^3 \quad (10.89)$$

und Gl.(10.88) erhält man

$$\frac{a}{d_p} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6 c_R}}. \quad (10.90)$$

Für den pneumatischen Transport ist mit $c_R = 0,01$ der Abstand zwischen benachbarten Körnern $a = 3,74 d_p$, und für den hydraulischen Transport mit $c_R = 0,2$ ist $a = 1,38 d_p$. Der Abstand zwischen benachbarten Körnern ist also beim pneumatischen Transport wesentlich größer als beim hydraulischen. Das heißt aber, daß beim pneumatischen Transport die freie Fluglänge der Körner etwa im gleichen Maße größer sein wird als beim hydraulischen. Man wird daher auch beim pneumatischen Transport viel seltener Zusammenstöße zwischen benachbarten Körnern erleben als beim hydraulischen. Andererseits werden sich aber die Querbewegungen auf Grund von Reflexionen wegen der großen freien Fluglänge beim pneumatischen stärker auswirken als beim hydraulischen Transport. Beim hydraulischen Transport hingegen werden wegen der großen Kornzahl und kleinen freien Fluglänge die Körner sich gegenseitig in ihrer Bewegung behindern. Die im Innern des Förderstromes befindlichen Körner werden auf dem Wege zur Wand durch Zusammenstöße wieder abgelenkt und werden sie nur in Ausnahmefällen erreichen. Wirksam für den Verschleiß sind beim hydraulischen Transport nur die in Wandnähe befindlichen Körner, während beim pneumatischen Transport wahrscheinlich alle Körner am Verschleiß beteiligt sind.

Aus diesen Überlegungen folgt zunächst nur, daß beim pneumatischen und hydraulischen Transport, obwohl sich die Konzentrationen sehr stark unterscheiden, etwa eine gleich große Anzahl von Körnern auf die Rohrwand treffen. Das heißt aber noch keineswegs, daß in beiden Fällen auch der Verschleiß gleich groß ist. Tatsächlich muß der Verschleiß beim pneumatischen Transport größer

sein als beim hydraulischen, da beim ersteren die Korngeschwindigkeit um eine volle Zehnerpotenz und die kinetische Energie je Korn somit um zwei Zehnerpotenzen größer ist als beim hydraulischen Transport. Im allgemeinen bringt man deshalb dem Verschleiß in senkrechten Rohren auch nur dann Interesse entgegen, wenn der Feststofftransport pneumatisch erfolgt.

Der Vergleich zwischen dem Verschleiß beim pneumatischen und hydraulischen Transport läßt noch keine Aussage über seine absolute Größe zu. Hierfür ist weiterhin in Betracht zu ziehen, daß die Körner auf Grund der turbulenten Querbewegungen im allgemeinen nur unter einem sehr flachen Winkel auf die Rohrwand prallen können. Da den maßgebenden Beitrag zur Zerkleinerung des Wandwerkstoffes die senkrecht zur Wand gerichtete Geschwindigkeitskomponente liefert, die sehr klein ist, muß auch der Verschleiß in senkrechten Rohren sehr klein sein.

10.812 Verschleiß in horizontalen Rohren

In horizontalen, geraden Rohren ist ein pneumatischer und hydraulischer Feststofftransport nur bei turbulenter Strömung des Trägermediums möglich. Eine weitere Bedingung ist die ungleichmäßige Verteilung des Feststoffes über den Rohrquerschnitt, wobei die örtliche Konzentration zum Rohrboden hin zunimmt. Diese ungleichmäßige Feststoffverteilung ist besonders ausgeprägt bei den aus Gründen der Wirtschaftlichkeit erforderlichen niedrigen Fördergeschwindigkeiten. Die Ursachen für die Querbewegung der Körner sind in waagerechten Rohren die gleichen wie in senkrechten. Zusätzlich tritt in waagerechten Rohren aber noch die zum Rohrboden gerichtete Sinkbewegung der Körner auf, die den Verschleiß in entscheidendem Maße beeinflusst. Auf den durch die Sinkbewegung zusätz-

lich hervorgerufenen Verschleiß soll deshalb etwas näher eingegangen werden.

Bild 10.26 zeigt den Querschnitt durch ein waagerechtes Rohr. Der Winkel, mit dem ein senkrecht absinkendes Korn auf die Rohrwand auftrifft, wird mit β_s bezeichnet. Für die untere Rohrhälfte ist β_s über den Rohrumfang aufgetragen.

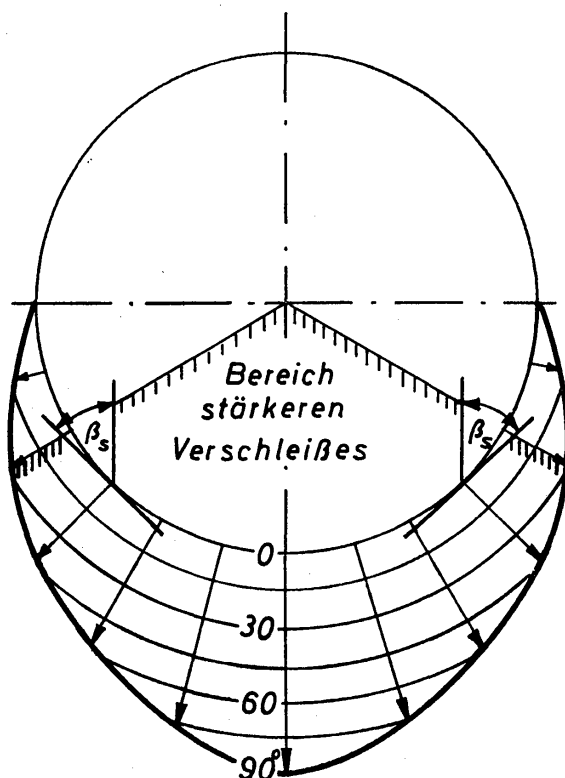
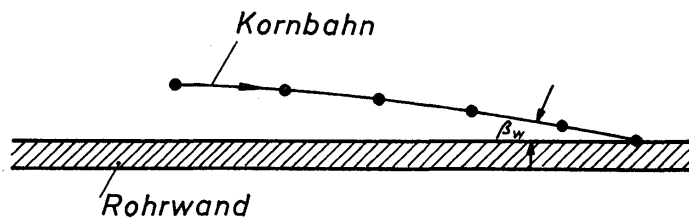


Bild 10.26
Auftrittswinkel β_s über dem Umfang der unteren Rohrhälfte

Im senkrechten Durchmesser ist $\beta_s = 90^\circ$ und im waagerechten 0° . Da bei einem Auftreffwinkel von $\beta_s = 0^\circ$ kein Prallverschleiß auftritt, nimmt der Verschleiß also in Richtung zum senkrechten Rohrdurchmesser hin zu. Der Bereich des stärkeren Verschleißes erstreckt sich über einen Umfangswinkel von etwa 120° . In der Praxis ist diese Bedingung bekannt. Damit die Rohre möglichst gleichmäßig verschleifen, dreht man sie nach einer bestimmten Betriebszeit um 120° . Der in *Bild 10.26* angegebene Auftreffwinkel β_s ist nur die senkrechte Komponente des räumlichen Auftreffwinkels β_s . Die zugehörige waagerechte Komponente β_w geht aus *Bild 10.27* hervor, in dem die Flugbahn eines Kornes dargestellt ist, das auf die untere Rohrwand auftrifft. Wegen der sehr flachen Flugbahnen der Körner, die sich bei den üblichen Fördergeschwindigkeiten ergeben, sind die Winkel β_w sehr klein.

Bild 10.27. Auftreffwinkel β_w

Im Längsschnitt ergibt sich bei sehr kleinem Winkel β_w , aber großer Auftreffgeschwindigkeit ein verhältnismäßig geringer Verschleiß. Im senkrechten Schnitt ist dagegen der Auftreffwinkel im Bereich des Rohrbodens sehr groß, die Sinkgeschwindigkeit aber klein im Vergleich zur Längsgeschwindigkeit, so daß auch hier der Verschleiß nur gering ist. Wegen der wesentlich höheren Sink- und Längsgeschwindigkeit ist der Verschleiß beim pneumatischen Transport erheblich größer als beim hydraulischen. In dieser Beziehung ergeben sich also ähnliche Verhältnisse wie im senkrechten Rohr. Der Unterschied besteht aber darin, daß sich der Verschleiß beim waagerechten Rohr im wesentlichen auf die untere Rohrhälfte beschränkt. In Längsrichtung ist der Verschleiß konstant, in Umfangsrichtung aber sehr stark veränderlich. Insofern dürfte man beim waagerechten Rohr auch nicht mehr von Flächenverschleiß sprechen. Weil der Unterschied zum örtlichen Verschleiß aber noch sehr groß ist, soll beim waagerechten Rohr von einem Flächenverschleiß in der unteren Rohrhälfte gesprochen werden. In der oberen Hälfte des waagerechten Rohres ist der Verschleiß wegen der Konzentrationszunahme in Richtung zum Rohrboden noch etwas geringer als im senkrechten Rohr und somit von untergeordneter Bedeutung.

Die Zerstörung eines geraden, waagerechten Rohres wird niemals durch den geschilderten Flächenverschleiß hervorgerufen, sondern stets durch einen örtlichen Verschleiß, der auf die Wirkung von Strömungshindernissen zurückzuführen ist. Hierfür liegen experimentelle Bestätigungen von BRAUER und KRIEDEL [10.28] wie auch von MÜLLER und POLTHIER [10.52] vor. Soll der örtliche Verschleiß in waagerechten Rohren vermindert werden, so handelt es sich stets um das Entdecken und um die Beseitigung der Strömungshindernisse.

10.813 Verschleiß in Rohrkrümmern

Die Bewegung der Feststoffkörner in einem Krümmer ist in *Bild 10.28* schematisch angegeben. Im Krümmer unterliegen die Feststoffkörner wegen ihrer größeren Masse der Wirkung wesentlich größerer Zentrifugalkräfte als die Elemente des Trägermediums. Die Folge ist eine weitgehende Entmischung von Feststoff und Trägermedium. Es bildet sich ein Feststoffstrahl aus, der auf ein verhältnismäßig kleines Flächenelement der Außenwand des Krümmers trifft und dort einen starken örtlichen Verschleiß hervorruft. Die Verschleißstelle hat die Form einer Mulde, weshalb man von Muldenverschleiß spricht. Die Zerstörungen in Rohrleitungen sind fast ausschließlich auf Muldenverschleiß zurückzuführen, der in der überwiegenden Mehrzahl der Schadensfälle in den Krümmern auftritt.

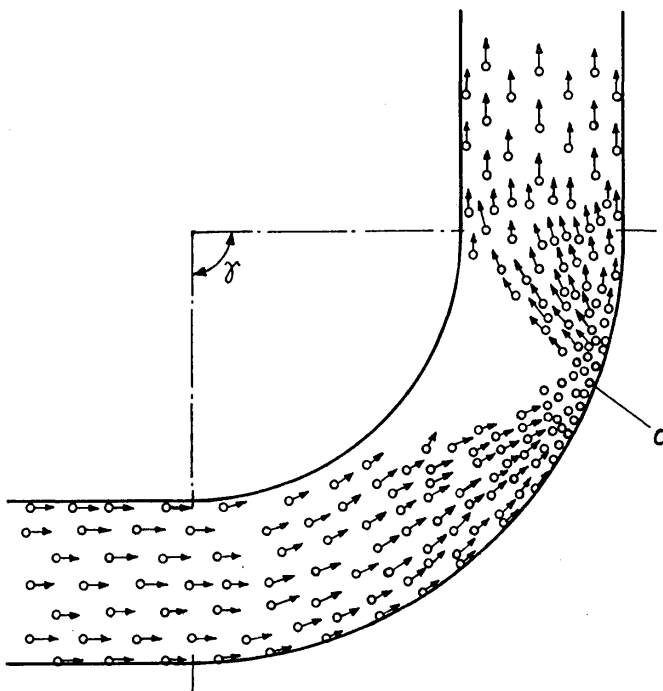


Bild 10.28

Bewegung von Feststoffpartikeln in einem Rohrkrümmer, dessen Umlenkwinkel $\gamma = 90^\circ$ ist; mit *a* wird auf den Ort des stärksten Verschleißes hingewiesen

Die charakteristische Form der Verschleißmulde in einem Krümmer geht aus *Bild 10.29* hervor. Die Lage der Verschleißmulde, festgelegt durch den Winkel ε , gilt mit guter Näherung für den pneumatischen Feststofftransport durch einen Krümmer mit dem Durchmesser Verhältnis $D/d = 6$. Beim hydraulischen Feststofftransport hat die Mulde grundsätzlich die gleiche Form; lediglich der Winkel ε ist etwas größer. In *Bild 10.29* ist angenommen, daß die Feststoffkörner bei Eintritt in den Krümmer gleichmäßig über den Rohrquerschnitt verteilt sind. Wie bereits in Abschnitt 5.53 nachgewiesen wurde, darf man mit guter Näherung annehmen, daß sich die Feststoffkörner beim pneumatischen Transport nach Eintritt in den Krümmer noch geradlinig fortbewegen. Die Körner treffen unter dem Winkel β auf die äußere Krümmungswand auf. Die Körner, die sich vor Eintritt in den Krümmer in der Nähe der Außenwand bewegen, treffen mit einem kleineren Winkel auf. Je kleiner der Abstand der Körner am Krümmereintritt von der Innenwand ist, desto größer ist ihr Auftreffwinkel. Die weitere

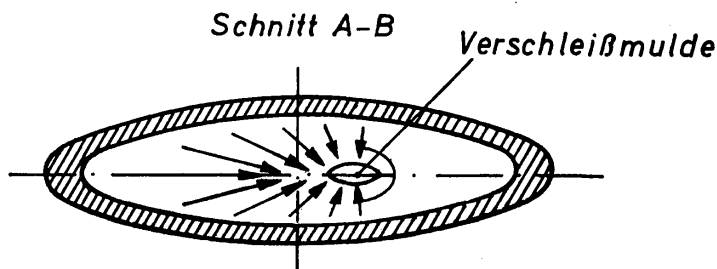
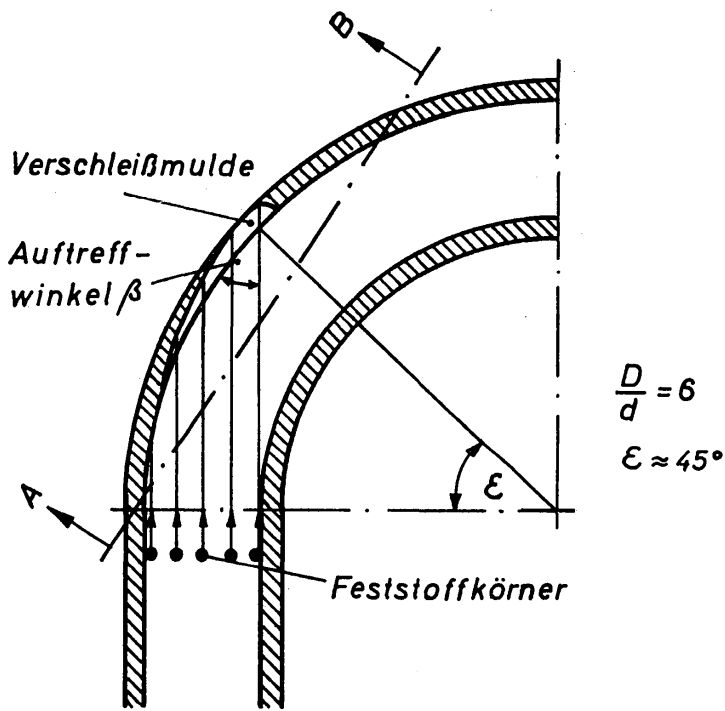


Bild 10.29. Verschleißmulde in der Außenwand eines Rohrkrümmers mit $D/d = 6$

Bewegung der Körner nach dem Auftreffen auf die Krümmerwand hängt vornehmlich von den elastischen Eigenschaften des Wand- und Kornmaterials ab. Zur Vereinfachung der Betrachtungen bleiben Ablösungen und Sekundärströmungen im Krümmer unberücksichtigt. Das ist auch mit guter Näherung gerechtfertigt, soweit der pneumatische Transport von Feststoffen untersucht wird. Man entnimmt dem *Bild 10.29* ferner, daß sich der Auftreffwinkel β mit zunehmender Ausbildung der Mulde sehr stark ändern muß. Diese Betrachtung gilt zunächst nur für die sich in der Schnittebene des Krümmers bewegenden Körner. Wie der Schnitt *A—B* erkennen läßt, treffen die in anderen Ebenen in den Krümmer gelangenden Teilchen unter anderen Winkeln auf die Krümmerwand. Dabei gleiten die Teilchen zumindest teilweise in der angedeuteten Pfeilrichtung zur tiefsten Stelle der Verschleißmulde. Die sehr verwickelten Bedingungen, unter denen die Feststoffkörner auf die Krümmerwand treffen, beeinflussen die Ausbildung der Muldenform erfahrungsgemäß nur sehr wenig. Von maßgebender Bedeutung sind für den Verschleiß allein die sich in unmittelbarer Umgebung der Schnittebene bewegenden Körner, da diese mit dem größten Winkel auf die Krümmerwand auftreffen.

10.814 Verschleiß in der Umgebung von Strömungshindernissen

Längere Rohrleitungen werden stets aus mehreren Rohrschüssen zusammengesetzt. Müssen die Leitungen, wie es z. B. im Bergbau der Fall ist, häufig ab- und wieder aufgebaut werden, so verbindet man die einzelnen Rohrschüsse mittels flexibler Kupplungen. Rohrkupplungen, die so konstruiert sind, daß zwischen den Rohrenden ein offener Spalt verbleibt, fördern den Verschleiß [10.26]. *Bild 10.30* zeigt die Verbindung der Rohrschüsse *a* und *b* mit offenem Spalt. Die erste Verschleißmulde tritt deshalb auf, weil das Rohrende in die Strömung hineinragt und der Feststoff gegen die freie Kante prallt. Die aus der ersten Verschleißmulde austretenden Feststoffkörper bewegen sich entlang der angedeuteten Kornbahnen, treffen erneut auf die Rohrwand auf und verursachen die zweite Verschleißmulde. Ursache beider Verschleißmulden ist allein die in die Strömung hineinragende freie Stoßkante des Rohres *b* am Spalt. Würde der Übergang von Rohr *a* zu Rohr *b* ohne Spalt und ohne die in die Strömung hineinragende Stoßkante sein, so träte keine der beiden Verschleißmulden auf. Die geringe Winkelablenkung ist für den Verschleiß bedeutungslos.

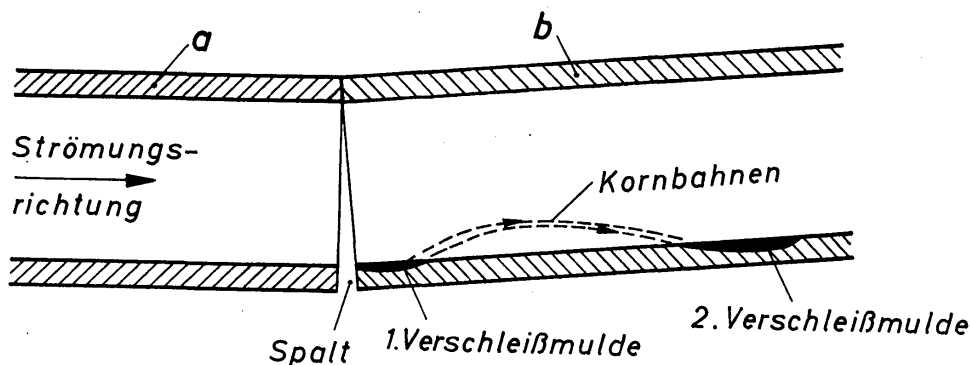


Bild 10.30. Verschleißmulde hinter einem Kupplungsspalt

Die Bedeutung eines Spaltes zwischen den zu verbindenden Röhren wird häufig auf Grund einer Messung des Druckverlustes abgeschätzt, der bei der Strömung reiner Gase oder Flüssigkeiten durch zwei Rohrschüsse auftritt. Die Meßwerte lassen entweder keine oder nur eine vernachlässigbar kleine Erhöhung des Druckverlustes erkennen. Diese Ergebnisse lassen aber keine Aussage über die Wirkung des Spaltes auf den Verschleiß beim pneumatischen und hydraulischen Feststofftransport zu. Sowohl in Laboratoriumsuntersuchungen als auch im praktischen Betrieb haben sich die in *Bild 10.30* angedeuteten Verschleißmulden ergeben.

Ein ganz ähnlicher Verschleiß ergibt sich auch dann, wenn zwei Rohrstücke, wie in *Bild 10.31*, durch eine sehr mangelhaft ausgeführte Schweißung verbunden werden. Am Rohrboden ragt die Schweißnaht in die Strömung hinein und zwingt den Feststoffkörnern die angedeuteten Bewegungsbahnen auf. An der Auftreffstelle bildet sich wieder eine Verschleißmulde aus. Die in die Strömung hineinragende Schweißnaht wird mit der Zeit ebenfalls verschlissen.

Auch ganz andere Strömungshindernisse verursachen den hier beschriebenen Muldenverschleiß. Ausschlaggebend ist dabei stets, daß die Feststoffkörner wegen

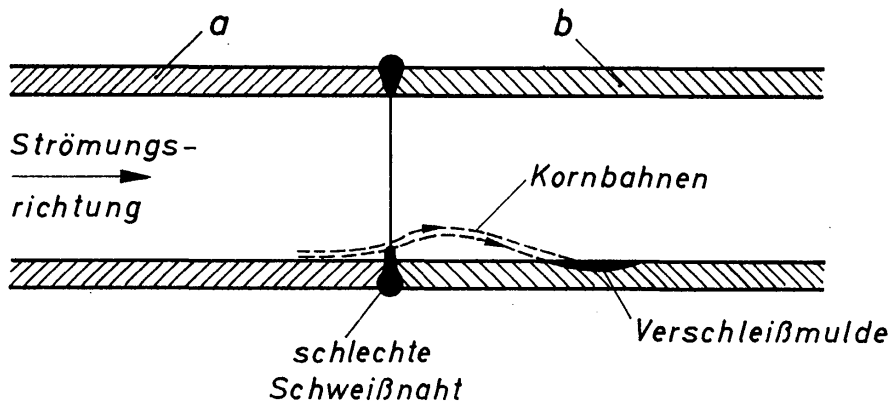


Bild 10.31. Verschleißmulde hinter einer mangelhaft ausgeführten Schweißnaht

ihrer größeren Masse stets größeren Zentrifugalkräften ausgesetzt sind und auf gekrümmten Strombahnen nicht mehr der Bewegung der Flüssigkeitselemente folgen. Dabei kommt es immer zu örtlichen Entmischungen und entsprechend hohen Feststoffkonzentrationen. Trifft der dabei entstehende Feststoffstrahl auf eine Wand auf, so ist wegen der hohen Trefferdichte und der hohen Trefferfrequenz ein starker örtlicher Verschleiß – Muldenverschleiß – unvermeidbar.

10.82 Die Verschleißmulde

10.821 Form und Entwicklung

Einen guten Eindruck von der Form und der zeitlichen Entwicklung der Verschleißmulde erhält man, wenn man diese an einer ebenen Platte untersucht [10.25]. *Bild 10.32* zeigt stark schematisiert zunächst die Endform der Verschleißmulde, wie sie sich nach längerer Einwirkung eines Feststoffstrahles ergibt. Der Winkel α gibt die Neigung des Strahles gegen die Plattenoberfläche an. Die Plattendicke ist s und die größte Muldentiefe Δs . Legt man durch die Mulde einen senkrecht zur Plattenoberfläche gerichteten Längsschnitt, so erkennt man die Gleitebene und die Prallebene. Die Gleitebene verläuft parallel zum Feststoffstrahl und die Prallebene senkrecht dazu. Der Verschleiß findet fast nur noch an der Prallebene statt, die mit zunehmender Verschleißzeit in der angegebenen Richtung in die Platte eindringt. Die Feststoffkörner treffen unter einem Winkel $\beta = 90^\circ$ auf die Prallebene. Das zeigt also sehr deutlich, daß Strahlwinkel α und Auftreffwinkel β keineswegs übereinstimmen. Bis die Verschleißmulde ihre End-

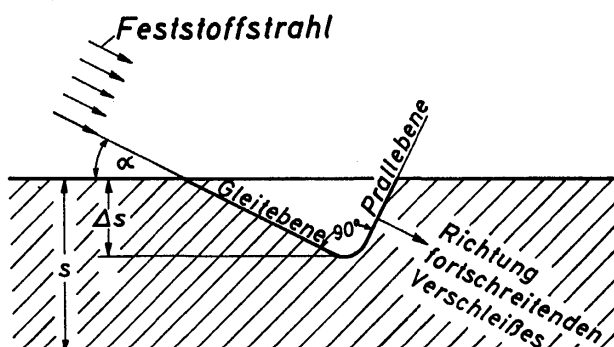


Bild 10.32. Schematisierte Endform einer Verschleißmulde in einer ebenen Platte

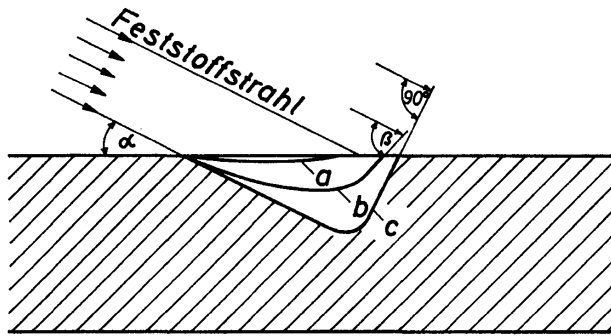


Bild 10.33. Zwischenformen der Verschleißmulde in einer ebenen Platte

form erreicht, durchläuft sie verschiedene Zwischenformen, die in *Bild 10.33* angedeutet sind: Nur zu Beginn des Verschleißes stimmen Strahlwinkel α und Auftreffwinkel β überein. Mit zunehmender Verschleißzeit ändert sich der Auftreffwinkel β und beträgt nach genügend langer Zeit 90° .

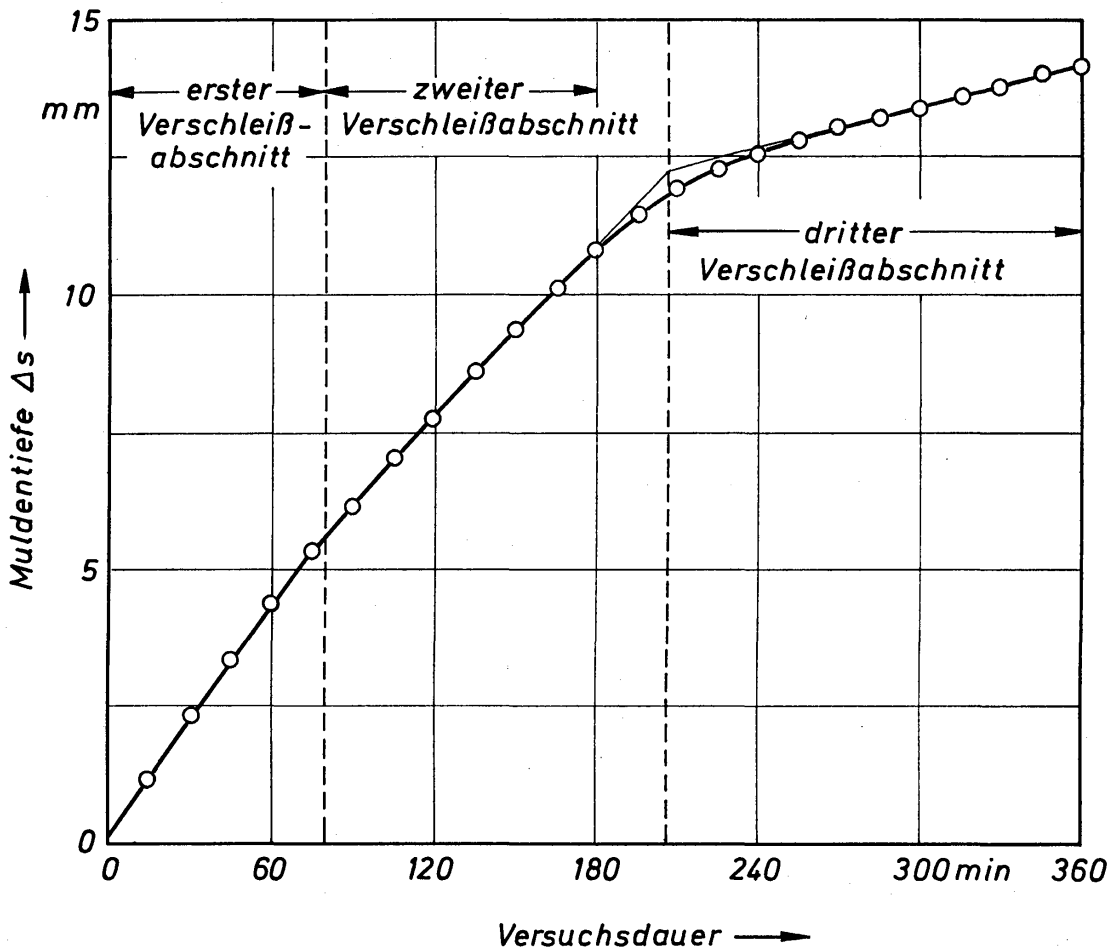


Bild 10.34. Abhängigkeit der Muldentiefe Δs von der Verschleißzeit für eine PVC-Platte, die unter 45° von einem Stahlsand/Luft-Strahl mit einer Geschwindigkeit von 70 m/s beaufschlagt wurde

Mißt man die Änderung der Muldentiefe Δs , abhängig von der Verschleißzeit, so erhält man den in *Bild 10.34* dargestellten Kurvenzug. Die Messungen wurden an einer PVC-Platte durchgeführt, gegen die ein Feststoffstrahl unter 45° gerichtet war. Der eingezeichnete Kurvenzug läßt deutlich drei Verschleißabschnitte erkennen:

- a) Im ersten Verschleißabschnitt stimmen Strahlwinkel α und Auftreffwinkel β weitgehend überein. In erster Näherung darf man $\alpha = \beta$ setzen, mit $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Die gesamte Muldenoberfläche wird nahezu gleichmäßig bestrahlt. Damit ist auch der Verschleiß in jedem Flächenelement gleich. Die Muldenoberfläche stimmt mit der vom Strahlwinkel abhängigen Querschnittsfläche überein. Die Verschleißgeschwindigkeit, gegeben durch den Anstieg der Kurve, ist eine eindeutige Funktion des mit dem Strahlwinkel α übereinstimmenden Auftreffwinkels β .
- b) Im zweiten Verschleißabschnitt ist der Auftreffwinkel β größer als der Strahlwinkel α , aber noch kleiner als 90° . Die Muldenoberfläche wird in zunehmendem Maße ungleichmäßiger bestrahlt. In der Verschleißmulde beginnen sich Gleit- und Prallebene auszubilden. Der Verschleiß ist an der sich ausbildenden Prallebene stärker als an der Gleitebene. Die Muldenöffnung wird dabei erheblich größer als der Strahlquerschnitt. Die Verschleißgeschwindigkeit hängt von dem zeitlich veränderlichen Auftreffwinkel β ab.
- c) Im dritten Verschleißabschnitt ist der Auftreffwinkel β 90° und unabhängig vom Strahlwinkel α . Die Verschleißmulde hat ihre endgültige Form erreicht. Gleit- und Prallebene schließen einen rechten Winkel ein. Die Gleitebene liegt in der Strahlrichtung und die Prallebene senkrecht dazu. Der Verschleiß findet im wesentlichen nur noch an der Prallebene statt. Die Verschleißmulde wächst mit der Richtung des Strahles in den Werkstoff hinein. Da sich der Winkel β zeitlich nicht mehr ändert, ist die Verschleißgeschwindigkeit konstant und insbesondere unabhängig vom Strahlwinkel α .

Von besonderer Bedeutung ist der erste Verschleißabschnitt, in dem Strahlwinkel und Auftreffwinkel übereinstimmen. Nur in diesem Abschnitt läßt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen Verschleißgeschwindigkeit v , die als Verhältnis von Muldentiefe Δs und Verschleißzeit t definiert wird, und dem Auftreffwinkel β angeben. Für die anderen Bereiche ist v noch eine zusätzliche Funktion des Strahlwinkels α . Um diese sehr verwickelten Zusammenhänge zu vermeiden, gibt man im allgemeinen für die Verschleißgeschwindigkeit v nur die im ersten Verschleißbereich zutreffenden Werte an.

10.822 Verschleißgeschwindigkeit

Zu Beginn eines Verschleißvorganges, wenn Strahlwinkel α und Auftreffwinkel β noch übereinstimmen, ist der Verschleiß eine lineare Funktion der Zeit t und die Verschleißgeschwindigkeit $v_0 = \Delta s/t$ konstant. Für diese Bedingung gelten die in *Bild 10.35* angegebenen Versuchsergebnisse [10.25]. Aufgetragen sind die nach einer Verschleißzeit von einer Stunde gemessenen Muldentiefen Δs , abhängig vom Strahlwinkel α , für Acrylglas, Polyvinylchlorid (PVC), Polyamid, Stahl St 34

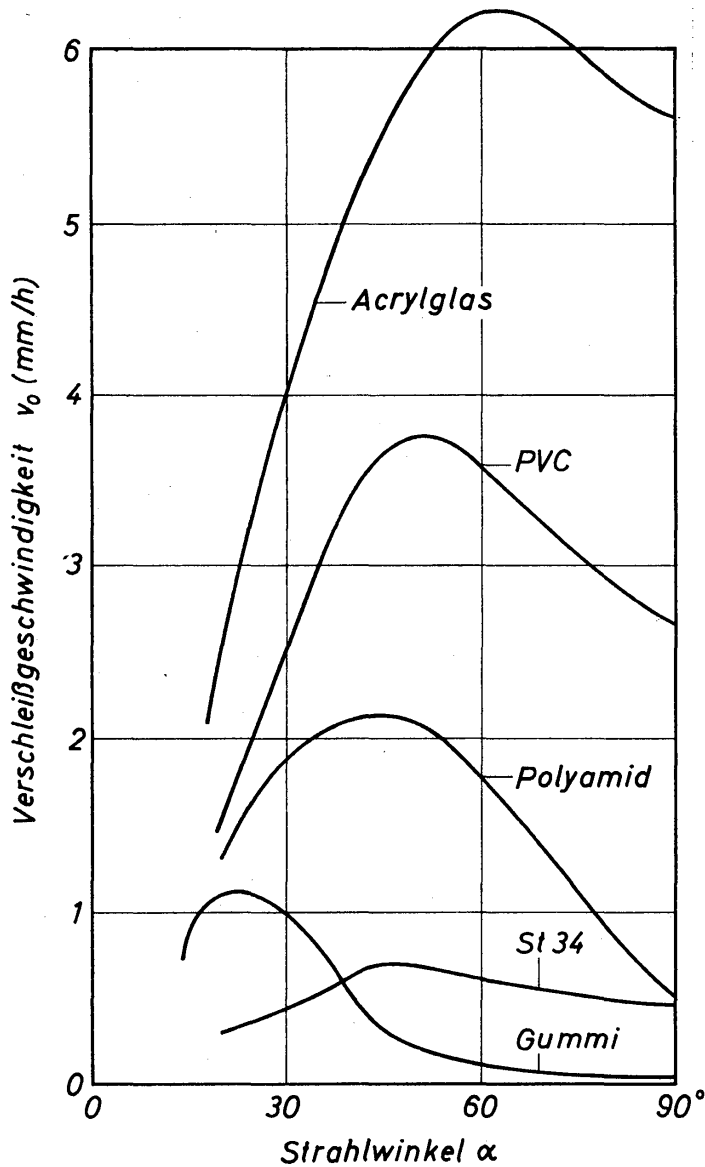


Bild 10.35. Abhängigkeit der Verschleißgeschwindigkeit v_0 vom Strahlwinkel α für verschiedene Plattenwerkstoffe bei einem Stahlsand/Luft-Strahl von 70 m/s

und Gummi. Als Verschleißmittel diente Stahlsand. Die Strahlgeschwindigkeit betrug etwa 70 m/s.

Der Verschleiß aller Werkstoffe zeigt eine sehr ausgeprägte Abhängigkeit vom Strahlwinkel. Mit zunehmendem Strahlwinkel nimmt der Verschleiß zunächst zu, durchläuft ein Maximum und sinkt dann wieder etwas ab. Das Verschleißmaximum liegt für Acrylglas bei $\alpha = 60^\circ$, für PVC bei 50° , für Polyamid bei 45° , für Stahl St 34 bei 45° und für Gummi bei 20° . Bei dem Strahlwinkel von $\alpha = 0^\circ$ müssen sich die Kurven einem endlichen Wert nähern. Obwohl der Strahl

dann parallel zur Oberfläche verläuft, werden die Feststoffkörner durch turbulente Schwankungsbewegungen gegen die Platte gerichtet und verursachen dadurch einen Verschleiß, der von WELLINGER und UETZ [10.24] gemessen wurde.

Für eine größere Zahl von Werkstoffen wurde die Verschleißgeschwindigkeit v_0 von BRAUER und KRIEDEL [10.25] sowie von WELLINGER und UETZ [10.24] gemessen. Bei der Beurteilung dieser Ergebnisse ist aber zu beachten, daß sie nur für den ersten Verschleißabschnitt gelten. Mit zunehmender Verschleißzeit stimmen Strahlwinkel und Auftreffwinkel nicht mehr überein, und die Verschleißgeschwindigkeit ist starken Änderungen unterworfen. Die bisher durchgeführten Versuche bestätigen das aus Bild 10.34 zu entnehmende Ergebnis, wonach bei ausgebildeter Muldenform, also längerer Verschleißzeit, die Verschleißgeschwindigkeit abnimmt. Aus diesem Grunde ist es im praktischen Betrieb auch wesentlich günstiger, ein dickwandiges Rohr zu verwenden als etwa mehrere dünnwandige.

Es hat nicht an Bemühungen gefehlt, die Winkelabhängigkeit des Verschleißes mit Hilfe theoretischer Überlegungen und experimenteller Befunde zu erklären. Besonders erwähnenswert sind die theoretischen Arbeiten von BITTER [10.53].

Dennoch muß man feststellen, daß es bislang zu keiner befriedigenden Klärung dieses Problems gekommen ist. Zum Teil ist das mit Sicherheit darauf zurückzuführen, daß noch nicht alle den Verschleiß bestimmenden Faktoren erkannt worden sind. Man befindet sich also offensichtlich noch in einem Stadium, in dem man Einzelkenntnisse von einem sehr komplexen Vorgang sammelt.

10.83 Hochfrequenter Prallverschleiß

Von der in üblichen Zerkleinerungsapparaten auftretenden Prallzerkleinerung unterscheidet sich der Prallverschleiß durch die hohe Stoßfrequenz und die Stoßdichte. Für diese besondere Art der Prallzerkleinerung soll im folgenden eine Modellvorstellung entwickelt und auf deren Grundlage dann das Ähnlichkeitsgesetz angegeben werden. Ferner soll überprüft werden, inwieweit es durch Meßergebnisse bestätigt wird.

10.831 Modellvorstellung

Um die für die hochfrequente Prallzerkleinerung maßgebenden Einflußgrößen angeben zu können, ist eine Modellvorstellung entwickelt worden, die an Hand von *Bild 10.36* erläutert werden soll. Aus einem Förderstrom, der senkrecht auf die Plattenoberfläche gerichtet ist und in dem die Feststoffkörner gleichmäßig verteilt sind, werden vier Körner herausgegriffen. Bei gleichmäßiger Verteilung ist der Abstand zwischen benachbarten Körnern in allen drei Raumkoordinaten a . Die kinetische Energie eines einzelnen Kornes ist $\rho_p w_p^2 d_p^3 \pi / 12$. Ein Anteil dieser Energie wird beim Aufprall auf die Platte an diese abgegeben. Die Größe dieses Anteiles hängt von den elastischen Eigenschaften des Kornes und der Platte ab, die durch deren Elastizitätsmodul E_p und E gekennzeichnet werden. Von den Stoßstellen 1 und 2 gehen elastische Wellen aus, deren Länge λ eine weitere, den Plattenwerkstoff kennzeichnende Größe ist. Im einfachsten Falle lassen sich die Wellen als Kugelwellen beschreiben. Die dabei auftretenden Überlagerungen sind durch Punkte angedeutet, in denen die Energie je Volumeinheit bzw. die Spannung ein örtliches Maximum erreicht. Die örtliche Anhäufung der Energie regt

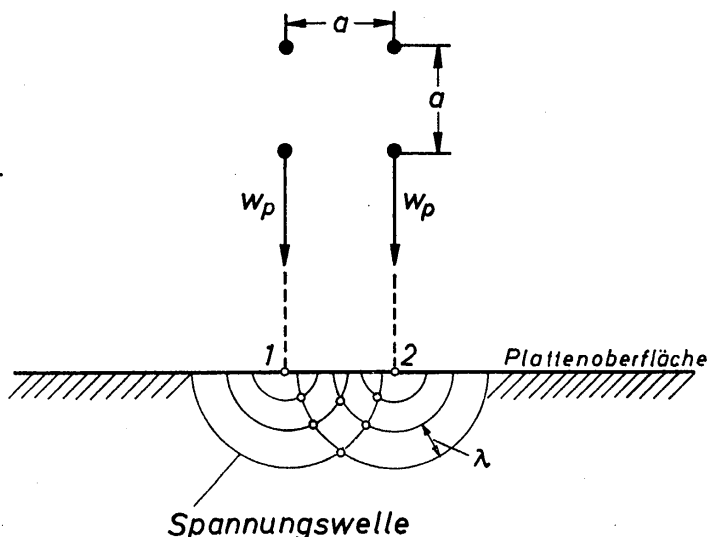


Bild 10.36
Schema zur Erläuterung
des hochfrequenten
Prallverschleißes

die Moleküle zu verstärkten Schwingungen an, wobei es im äußersten Falle zum Bruch kommt. Man darf jedoch erwarten, daß es nur unmittelbar an der Oberfläche zur Ausbildung von Brüchen kommt, also zum Lostrennen kleinster Volumenelemente aus der Platte. Innerhalb einer sehr dünnen, oberflächennahen Schicht der Platte tritt vermutlich aber als Folge der örtlichen Energieanhäufungen eine Zerrüttung des Molekülverbandes auf, durch die ein später erfolgender Bruch erleichtert wird. Der Verschleißfläche ist also eine Zone vorgelagert, in welcher das Werkstoffgefüge bereits mehr oder weniger stark aufgelockert bzw. zerrüttet wird. Die Wellen bewegen sich mit Schallgeschwindigkeit fort. Es kommt also nur während außerordentlich kurzer Zeitspannen zu örtlichen Energieanhäufungen. Die dadurch hervorgerufenen Brüche sind wahrscheinlich reine Trennbrüche, für die allein die elastischen Eigenschaften des Materials maßgebend sind.

Der quer zur Bewegungsrichtung der Körner gemessene Abstand a läßt sich nach Gl. (10.90) berechnen. Mittels a ergibt sich die Flächendichte der Stöße oder die Stoßdichte. Da bei gleichmäßiger Verteilung der Feststoffkörner im Trägermedium a auch der Abstand zwischen hintereinander fliegenden Körnern ist, ergibt sich die Stoßfrequenz zu

$$f_p = \frac{w_p}{a}. \quad (10.91)$$

Setzt man diese Beziehung in Gl. (10.90) ein, so ergibt sich

$$\frac{f_p d_p}{w_p} = \sqrt[3]{\frac{6 c_R}{\pi}}. \quad (10.92)$$

Hierin ist $f_p d_p / w_p$ eine dimensionslose Größe, die Strouhalzahl. Da die Konzentration c_R im äußersten Falle etwa den Wert 0,5 erreichen kann, ist der größte Wert der Strouhalzahl 0,985, also ungefähr 1.

Um einen Eindruck von der Größe der Stoßfrequenz zu erhalten, soll diese für zwei Beispiele berechnet werden. Beim pneumatischen Transport sei die Konzentration $c_R = 0,01$, die Korngeschwindigkeit $w_p = 20$ m/s und der Korndurchmesser $d_p = 0,5 \cdot 10^{-3}$ m. Dann ergibt sich mit der Strouhalzahl 0,267 die Stoßfrequenz zu $f_p = 1,07 \cdot 10^4$ s⁻¹. Für den hydraulischen Transport, mit $c_R = 0,20$, $w_p = 2$ m/s und $d_p = 0,5 \cdot 10^{-3}$ m, ergibt sich die Strouhalzahl zu 0,724 und die Stoßfrequenz zu $f_p = 2,9 \cdot 10^3$ s⁻¹. Sowohl beim pneumatischen als auch beim hydraulischen Transport treten Stoßfrequenzen auf, die mit jenen Frequenzen übereinstimmen, die zur Bearbeitung – d. h. Zerkleinerung – von Werkstücken mittels Ultraschall angewendet werden. Das weist also darauf hin, daß die für die hochfrequente Zerkleinerung entwickelte Modellvorstellung den wahren physikalischen Verhältnissen wahrscheinlich sehr nahe kommt.

10.832 Ähnlichkeitsgesetz für den Prallverschleiß

Da eine theoretische Behandlung des Prallverschleißes noch nicht möglich zu sein scheint, ist es sinnvoll, eine empirische Behandlung unter Verwendung von

Kennzahlen zu versuchen. Das erfordert aber eine genaue Kenntnis der für den Verschleiß maßgebenden Größen. Auf Grund der bisherigen Kenntnisse scheinen folgende Größen von Bedeutung zu sein:

w_p	Geschwindigkeit des Feststoffkornes, mit der es auf den Werkstoff auftrifft,
f_p	Trefferrfrequenz, Frequenz, mit der Feststoffkörner auf den bestrahlten Werkstoff auftreffen,
d_p	Korndurchmesser,
ϱ_p	Dichte des Kornes,
a	Abstand zwischen zwei Stoßzentren,
E_p	Elastizitätsmodul des Kornes,
ϱ	Dichte des bestrahlten Werkstoffes,
E	Elastizitätsmodul des bestrahlten Werkstoffes,
σ	eine für den Bruchvorgang maßgebende Spannung im bestrahlten Werkstoff,
λ	Länge der elastischen Wellen, die durch Stoß im bestrahlten Werkstoff erzeugt werden,
$v = \Delta s/t$	Verschleißgeschwindigkeit als Maß für den Verschleiß.

Die ersten sechs Größen betreffen Eigenschaften des Feststoffkornes, vier weitere Größen Eigenschaften des bestrahlten Werkstoffes. Die gesuchte Größe, nämlich die Verschleißgeschwindigkeit v , läßt sich somit als Funktion von zehn Größen darstellen. Die dimensionsbehafteten Größen lassen sich nach den Regeln der Ähnlichkeitstheorie zu den folgenden Kennzahlen zusammenfassen:

$\frac{w_p^2 \varrho_p}{E}$	$\frac{\text{kinetische Energie eines Kornes}}{E\text{-Modul des bestrahlten Werkstoffes}}$,
$\frac{f_p^2 d_p^2 \varrho_p}{E}$	$\frac{\text{maßgebend für zeitliche Folge der Energiezufuhr}}{E\text{-Modul des bestrahlten Werkstoffes}}$,
$\frac{a}{d_p}$	$\frac{\text{Abstand der Stoßzentren}}{\text{Korndurchmesser}}$,
$\frac{E}{E_p}$	$E\text{-Modul-Verhältnis}$,
$\frac{\varrho}{\varrho_p}$	Dichteverhältnis,
$\frac{\lambda}{d_p}$	$\frac{\text{Länge der elastischen Welle}}{\text{Korndurchmesser}}$,
$\frac{\sigma}{E}$	$\frac{\text{maßgebende Bruchspannung für die Zerkleinerung}}{E\text{-Modul des bestrahlten Werkstoffes}}$,
$\frac{v}{w_p}$	$\frac{\text{Verschleißgeschwindigkeit}}{\text{Korngeschwindigkeit}}$.

Zusätzlich einzuführen ist noch der Auftreffwinkel β , der – wie bereits erläutert wurde – zu Beginn des Verschleißes mit dem Strahlwinkel α übereinstimmt. Somit läßt sich folgende für den Verschleiß maßgebende Beziehung aufstellen:

$$\frac{v}{w_p} = f \left\{ \frac{w_p^2 \varrho_p}{E}; \frac{f_p^2 d_p^2 \varrho_p}{E}; \frac{a}{d_p}; \frac{E}{E_p}; \frac{\sigma}{E}; \frac{\lambda}{d_p}; \frac{\varrho}{\varrho_p}; \alpha \right\}. \quad (10.93)$$

Hiernach ist also v/w_p eine Funktion von acht Kennzahlen. Hiervon sind die ersten drei Kennzahlen von besonderer Bedeutung; die erste kennzeichnet die Energiezufuhr je Einzelkorn, die zweite die zeitliche Folge der Energiezufuhr und die dritte den Abstand zwischen zwei benachbarten Orten der Energiezufuhr. Vier weitere Kennzahlen berücksichtigen die mechanischen Eigenschaften des bestrahlten Werkstoffes. Der funktionelle Zusammenhang zwischen der bezogenen Verschleißgeschwindigkeit v/w_p und den Kennzahlen wird sich nur mit viel Mühe anfinden lassen.

10.833 Einfluß des Elastizitätsmoduls

Aus der Beschreibung der Modellvorstellung ergab sich bereits die große Bedeutung des Elastizitätsmoduls E für das Plattenmaterial. Denn E ist mitbestimmend für die Energiezufuhr und für die Energieausbreitung in der betrachteten Platte. Aus diesem Grunde scheint es sinnvoll zu sein, auf den Einfluß von E gesondert einzugehen [10.25].

Tabelle 10.5:

Werkstoffe der bei den Prallverschleißversuchen verwendeten Platten

Bezeichnung in Bild 10.36	Plattenwerkstoff	Dichte ϱ (kg/m ³)	E -Modul E (kp/cm ²)
1	Hochdruckpolyäthylen	920	$2 \cdot 10^3$
2	Niederdruckpolyäthylen	950	$4,5 \cdot 10^3$
3	Niederdruckpolyäthylen	950	$4,5 \cdot 10^3$
4	Polyamid-6, Ultramid-BM 2900	1130	$1 \cdot 10^4$
5	Polyvinylchlorid	1400	$3 \cdot 10^4$
6	Hartgewebe, Resitex	1250	$6 \cdot 10^4$
7	Polymethacrylsäureester, Plexiglas	1190	$3 \cdot 10^4$
8	Hartpapier, Pertinax	1330	$1 \cdot 10^5$
9	Epoxydharz mit Quarzmehl	1470	$1 \cdot 10^5$
10	Blei	11300	$1,8 \cdot 10^5$
11	Glas	2400	$4,8 \cdot 10^5$
12	Aluminium (für Leitzwecke)	2700	$7 \cdot 10^5$
13	Messing MS 58	8500	$8,3 \cdot 10^5$
14	Kupfer (für Leitzwecke)	8930	$1,3 \cdot 10^6$
15	Stahl St 37	7850	$2 \cdot 10^6$
16	Stahl T 80 H (1/2h 850°C/W)	7850	$2 \cdot 10^6$

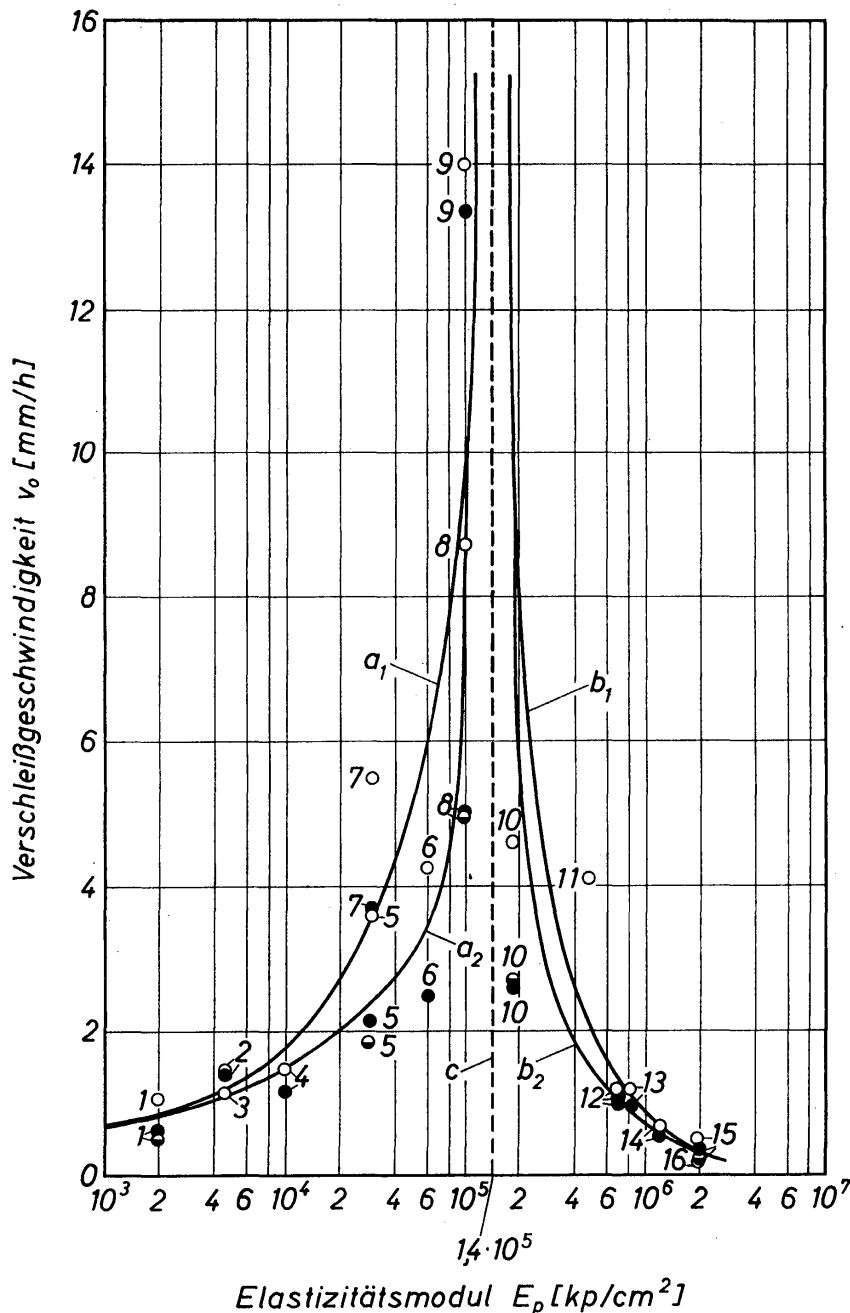


Bild 10.37
Verschleißgeschwindigkeit v_0 , abhängig vom Elastizitätsmodul E der Plattenwerkstoffe 1 bis 16, die in Tabelle 10.5 angegeben sind

Die Versuchsergebnisse sind in *Bild 10.37* dargestellt. Der Strahlwinkel betrug bei allen Versuchen 45° und die Strahlgeschwindigkeit $w_p = 70$ m/s. Die mit Stahlsand ($d_p = 0,4$ mm, $\rho_p = 7600$ kg/m³) durchgeführten Versuche sind durch leere Kreise gekennzeichnet. Volle Kreise kennzeichnen Versuche mit Korund NK 30 ($d_p = 0,65$ mm, $\rho_p = 3960$ kg/m³) und halbvolle Kreise die Versuche mit Korund NK 16 ($d_p = 1,3$ mm, $\rho_p = 3960$ kg/m³). Die Meßwerte für Stahlsand sind durch die Kurven a_1 und b_1 und die Meßwerte für beide Korundsorten durch die Kurven a_2 und b_2 ausgeglichen.

Die Kurven für beide Kornmaterialien zeigen den gleichen charakteristischen Verlauf. Mit zunehmendem Elastizitätsmodul steigen die Kurven a_1 und a_2 , welche die Meßwerte für Kunststoffe (Tabelle 10.5) ausgleichen, sehr stark an und nähern sich offensichtlich der gestrichelt eingezeichneten Grenzlinie c . Jenseits der Grenzlinie fallen die Kurven b_1 und b_2 , welche die Meßwerte für Glas und metallische Werkstoffe ausgleichen, mit zunehmendem Elastizitätsmodul stark

ab. Der geringste Verschleiß tritt also, unter sonst gleichen Bedingungen, bei Werkstoffen mit sehr niedrigem Elastizitätsmodul (Polyäthylen, Gummi) und bei Werkstoffen mit sehr hohem Elastizitätsmodul (Stahl) auf. Der größte Verschleiß ergibt sich offensichtlich bei jenen Werkstoffen, deren Elastizitätsmodul in der Nähe des Grenzwertes $E = 1,4 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$ liegt.

Bei den Versuchen mit Strahlsand stimmten die Stoßfrequenzen nicht überein. Es ist daher auch noch nicht möglich, die Meßwerte mit Hilfe des Ähnlichkeitsgesetzes in einer allgemein gültigen Weise darzustellen. Somit muß auch die Frage offen bleiben, welche Bedeutung dem Grenzwert des Elastizitätsmoduls zukommt. Trotzdem wird man auf Grund der dargestellten Ergebnisse bereits sagen können, daß es mit Hilfe der Ähnlichkeitstheorie gelingen wird, eine für die hochfrequente Prallzerkleinerung gültige Beziehung aufzustellen, wenn die Untersuchungen in der angedeuteten Weise fortgesetzt werden. Der praktisch tätige Ingenieur gewinnt aus den in *Bild 10.37* dargestellten Versuchsergebnissen eine klare Vorstellung über das Verhalten der Werkstoffe beim Prallverschleiß.

10.834 Näherungsgesetz zur Berechnung des Prallverschleißes

Ein Gesetz, mit dessen Hilfe der Prallverschleiß zumindest näherungsweise berechnet werden kann, hat KRIEDEL [10.54] auf der Grundlage der Formänderungsenergie- oder Beltrami-Hypothese hergeleitet. Diese Hypothese besagt, daß die Formänderungsarbeit eines Werkstoffes bei Erreichen der Elastizitäts- bzw. Proportionalitätsgrenze ihr Maximum erreicht. Bei einer größeren Formänderungsenergie geht der Werkstoff zu Bruch. Somit hängt der Bruch unmittelbar von der zugeführten Verformungsenergie ab, die sich für die aufprallenden Körner des Verschleißmittels leicht berechnen läßt. KRIEDEL leitet für die Verschleißgeschwindigkeit v_0 die Beziehung

$$v_0 = K_1 \frac{\rho_p \dot{V}_p w_p^2}{d_p^2 \sigma} \quad (10.94)$$

her, woraus unter Berücksichtigung von $\dot{V}_p = \dot{n} d_p^3 \pi/6$ und Umformung

$$\frac{v_0}{w_p} = K_2 \left(\frac{w_p^2 \rho_p}{E} \right) \left(\frac{\dot{n} d_p}{w_p} \right) \left(\frac{E}{\sigma} \right) \quad (10.95)$$

folgt. Hierin bedeuten \dot{V}_p den Volumstrom der Partikeln und \dot{n} die in der Zeiteinheit auf die Platte auftreffenden Partikeln. Auf der rechten Seite von Gl. (10.95) bedeuten der erste dimensionslose Ausdruck ein Maß für die Energiezufuhr je Einzelkorn, der zweite ein Maß für die Frequenz, mit welcher die Energie zugeführt wird, und der dritte ein Maß für die Festigkeit des Plattenmaterials. Es ergibt sich somit eine überraschend weitgehende Übereinstimmung mit Gl. (10.93). Durch diesen Vergleich erkennt man aber auch, daß Gl. (10.95) noch nicht alle für den Prallverschleiß maßgebenden Einflußgrößen enthält.

Für die Verschleißspannung σ macht KRIEGEL den folgenden Ansatz:

$$\sigma = \sigma_B \frac{\sigma_B - \sigma_{0,1}}{\sigma_{0,1}}. \quad (10.96)$$

Mit σ_B wird die Bruchspannung beim einachsigen Zugversuch und mit $\sigma_{0,1}$ die Spannung an der Elastizitätsgrenze bei einer bleibenden Verformung von 0,1% bezeichnet. Mit $\sigma_{0,1} = 0,001 E_p$ folgt dann:

$$\sigma = 10^3 \frac{\sigma_B}{E} (\sigma_B - \sigma_{0,1}). \quad (10.97)$$

Nach Einsetzen in Gl.(10.94) erhält man in dimensionsloser Schreibweise:

$$\frac{v_0}{w_p} = K \frac{\rho_p \dot{V}_p w_p}{d_p^2 (\sigma_B - \sigma_{0,1})} \frac{E}{\sigma_B}. \quad (10.98)$$

Die Konstante K enthält alle in der Herleitung auftretenden Zahlenwerte. Ihren genauen Wert ermittelte KRIEGEL durch Vergleich von Gl.(10.98) mit den in *Bild 10.37* enthaltenen Meßwerten. Für den Verschleiß mit Stahlsand ergab sich $K = 3,75 \cdot 10^{-17}$, und für den Verschleiß mit den beiden Korundkorngrößen ergab sich $K = 1,12 \cdot 10^{-16}$.

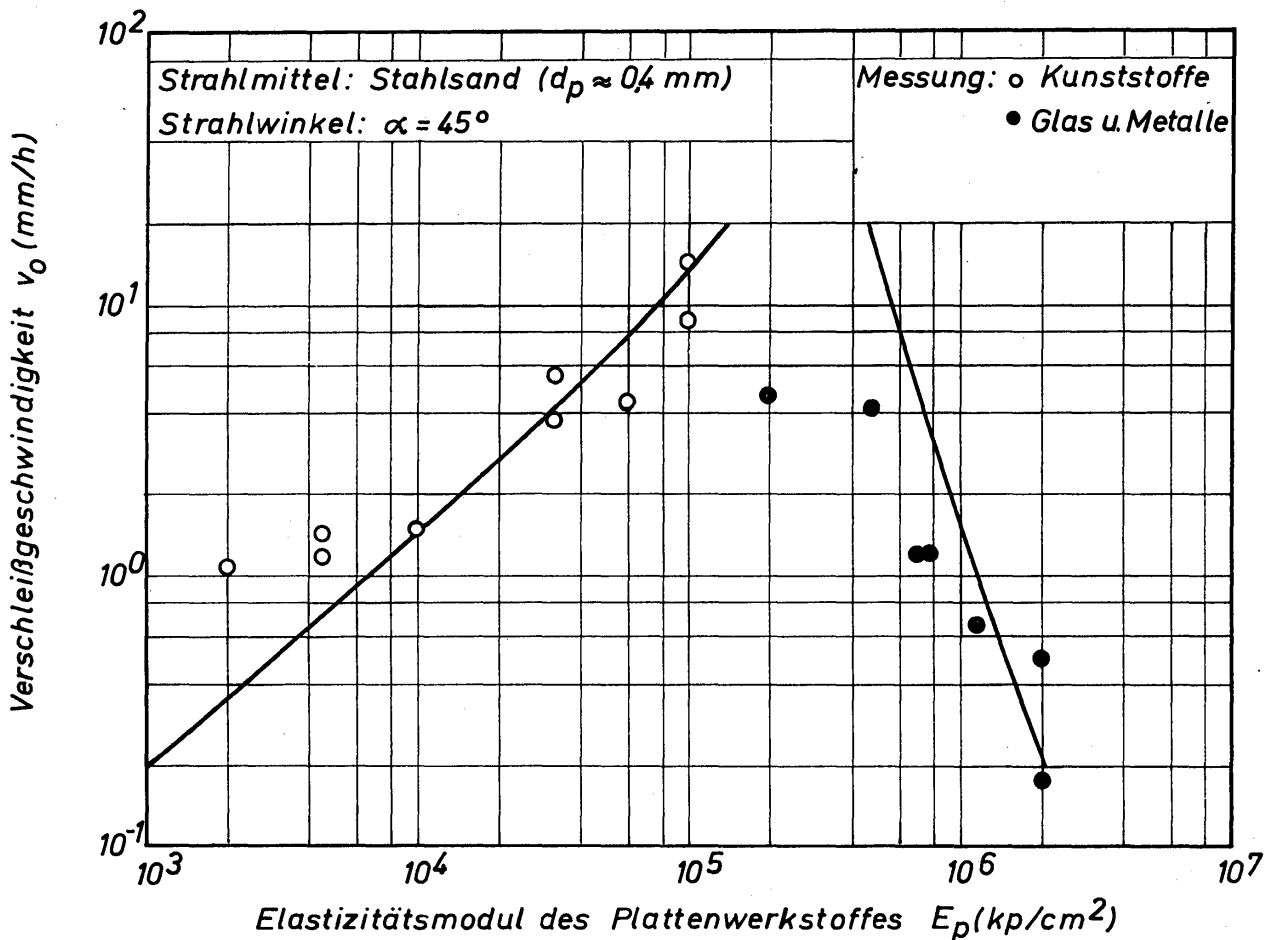


Bild 10.38. Vergleich zwischen der berechneten und der gemessenen Verschleißgeschwindigkeit v_0 , abhängig vom Elastizitätsmodul; die Kurven wurden nach Gl.(10.98) berechnet

Für den Vergleich zwischen Theorie und Experiment ist in *Bild 10.38* ein Beispiel angegeben, das für den Verschleiß mittels Stahlkörnern mit $d_p = 0,4$ mm gilt. Die eingezeichneten Kurven wurden nach Gl.(10.98) berechnet. Eine bemerkenswert starke Abweichung von der theoretischen Gleichung ergibt sich nur für den Verschleiß von Blei, dessen Elastizitätsmodul $1,8 \cdot 10^5$ kp/cm² beträgt. Ganz ähnliche Verhältnisse ergeben sich auch für den Strahlverschleiß mit den beiden Korundsorten.

10.84 Verschleiß von Rohrkrümmern

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten der Einfluß der Stoffwerte auf den Prallverschleiß behandelt wurde, soll in diesem Abschnitt allein der Einfluß der geometrischen Form der Krümmern untersucht werden. Diese Untersuchungen lassen sich aber nur dann durchführen, wenn die Bahnkurven der Feststoffpartikeln bekannt sind. Die Bahnkurven und der Auftreffwinkel der Partikeln wurden in Abschnitt 5.53 berechnet. Besonders einfache Verhältnisse haben sich für den pneumatischen Transport ergeben, da die Partikeln hierbei auch nach Eintritt in den Krümmer ihren geraden Flugweg fortsetzen. Für diesen Fall sollen die folgenden Ausführungen gelten [10.27]. Für den Rohrkrümmerverschleiß beim hydraulischen Transport ergeben sich jedoch sehr ähnliche Bedingungen, worauf in einer anderen Arbeit von BRAUER und KRIEDEL [10.26] eingegangen wurde.

10.841 Auftreffwinkel in 90°-Krümmern

Der Winkel β , unter dem die Feststoffkörner auf die Außenwand des Krümmers treffen, wird unter der Bedingung berechnet, daß sich die Körner auch nach Eintritt in den Krümmer auf geradliniger Bahn fortbewegen. Für einen Krümmer mit dem Krümmerwinkel $\gamma = 90^\circ$ berechnet man den Auftreffwinkel β für die in der Schnittebene sich bewegenden Körner nach folgender Beziehung:

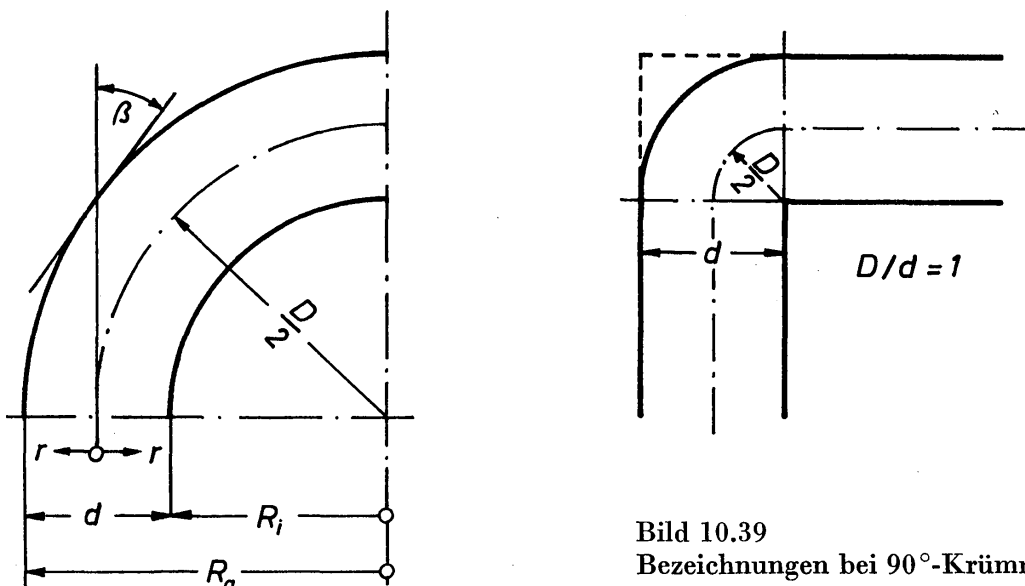


Bild 10.39
Bezeichnungen bei 90°-Krümmern

$$\cos \beta = \frac{\frac{D}{d} + x}{\frac{D}{d} + 1} \tag{10.99}$$

Hierin sind, mit den Bezeichnungen von *Bild 10.39*, D/d das Durchmesser Verhältnis und $x = 2 r/d$ die von der Rohrachse ausgehende dimensionslose Ortskoordinate. Zu beachten ist die Form des Krümmers mit $D/d = 1$, die allein theoretische Bedeutung hat. Praktisch wird jedoch ein solcher Krümmer nicht hergestellt, sondern durch ein Kniestück ersetzt.

Die nach Gl.(10.99) berechneten Werte des Auftreffwinkels β sind für verschiedene Werte des Durchmesser Verhältnisses D/d in *Bild 10.40* dargestellt. Bei $x = +1$, d. h. für ein Teilchen, welches bei R_a in den Krümmer eintritt, ist für alle Durchmesser Verhältnisse $\beta = 0$. Ein Teilchen, welches bei R_i in den Krümmer eintritt, also bei $x = -1$, trifft mit einem Winkel β auf die Außenwand auf, der mit zunehmendem Durchmesser Verhältnis kleiner wird.

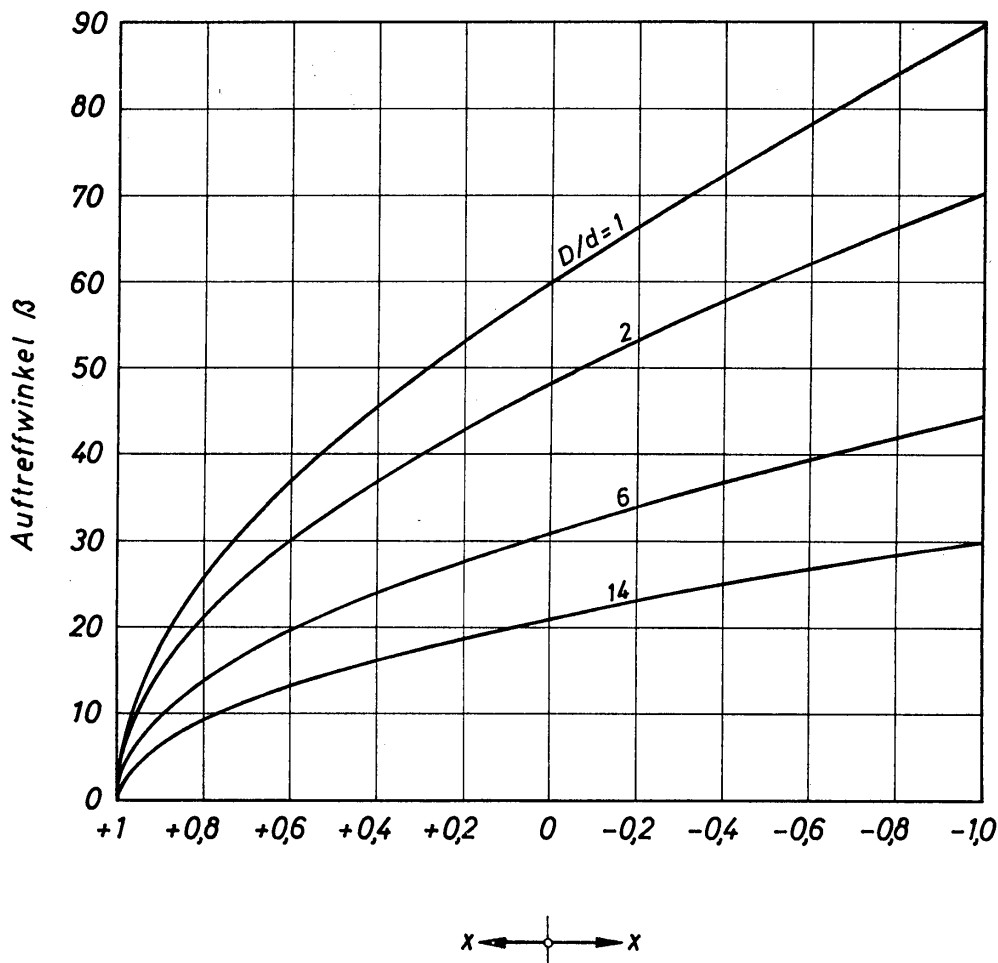


Bild 10.40. Auftreffwinkel β , abhängig vom bezogenen Achsabstand $x = 2r/d$ und dem Durchmesser Verhältnis D/d

Nimmt man einen Stahlkrümmer an, so ergibt sich gemäß *Bild 10.35* der größte Verschleiß bei einem Auftreffwinkel von etwa 45° . Mit kleiner oder größer werdendem Winkel nimmt der Verschleiß wieder ab. Für einen Stahlkrümmer mit $D/d = 6$ folgt, daß der größte Verschleiß von jenem Korn verursacht wird, wel-

ches bei $\alpha = -1$ in den Krümmer eintritt, da es mit dem größten Winkel auf die Krümmerwand trifft. Jedes andere Korn trifft mit einem kleineren Winkel auf und verursacht einen geringeren Verschleiß. *Bild 10.41* zeigt in schematischer Form die Ausbildung einer Verschleißmulde für diese Bedingungen. Teilt man den eintretenden Feststoffstrahl in mehrere Teilstrahlen auf, dann ergibt sich für den an $\alpha = -1$ angrenzenden Teilstrahl die geringste Auftrefffläche und somit die größte Trefferzahl je Flächeneinheit. Die Abhängigkeit des Verschleißes von der Trefferzahl je Flächeneinheit ist indes bereits in der Winkelabhängigkeit mit enthalten und darf daher nicht gesondert berücksichtigt werden.

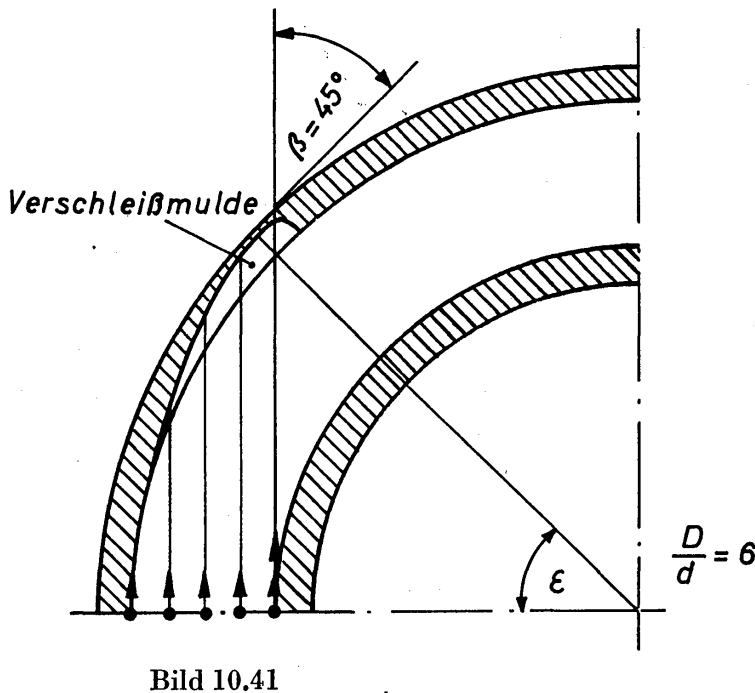


Bild 10.41

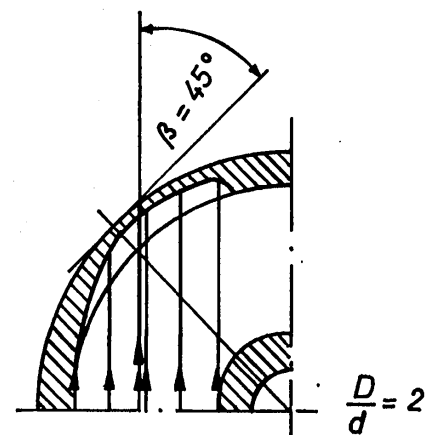


Bild 10.42

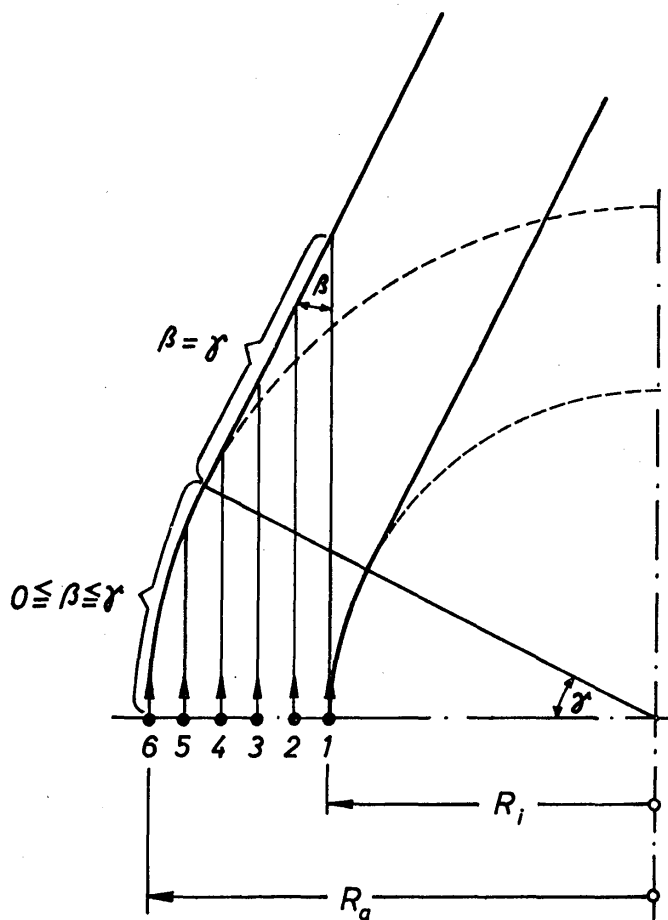
Bilder 10.41 und 10.42
Ausbildung der Verschleiß-
mulde in Stahlkrümmern mit
 $D/d = 6$ und $D/d = 2$

Wählt man einen Stahlkrümmer mit einem Durchmesser Verhältnis $D/d = 2$, dann ergibt sich der zum größten Verschleiß führende Winkel von $\beta = 45^\circ$ für jenes Korn (gekennzeichnet durch einen Doppelpfeil), welches bei $\alpha = 0,12$ in den Krümmer eintritt. Die sich ausbildende Verschleißmulde ist in *Bild 10.42* dargestellt. Im Vergleich zu *Bild 10.41* ist die in *Bild 10.42* dargestellte Mulde sehr stark gestreckt, was durch die Winkelabhängigkeit des Verschleißes bedingt ist. Die mit negativen Werten von α in den Krümmer eintretenden Feststoffkörner treffen, wie man *Bild 10.40* entnimmt, mit einem größeren Winkel als 45° auf die Krümmerwand und verursachen, was aus *Bild 10.35* hervorgeht, einen etwas geringeren Verschleiß als das mit 45° auftreffende Korn. In diesem Bereich ist die Mulde daher nur etwas flacher als an der Stelle des größten Verschleißes. Vergleicht man die *Bilder 10.41* und *10.42*, so stellt man fest, daß, bei gleichem Rohrdurchmesser d , der Verschleiß auf eine um so kleinere Fläche beschränkt ist, je kleiner das Durchmesser Verhältnis D/d ist. Man darf also erwarten, daß Krümmer mit kleinem Durchmesser Verhältnis schneller verschleifen als solche mit großem Durchmesser Verhältnis. Es wird sich später aber noch zeigen, daß dieses keine allgemein gültige Aussage ist.

Ähnlich wie Stahlkrümmer verhalten sich auch die meisten Kunststoffkrümmer. Ein merklicher Unterschied ergibt sich erst bei gummierten Krümmern, da Gummi bereits bei einem Auftreffwinkel von nur 20° den stärksten Verschleiß erfährt.

10.842 Auftreffwinkel in Krümmern mit beliebigem Umlenkwinkel

Die bisherigen Überlegungen galten für 90° -Krümmer. Im folgenden sollen nun Krümmer mit beliebigen Werten des Krümmerwinkels γ betrachtet werden. Die grundsätzlichen Verhältnisse werden zunächst an einem Krümmer mit dem Durchmesser Verhältnis $D/d = 6$ erläutert. *Bild 10.43* zeigt die geometrischen Bedingungen für diesen Krümmer.



Bedingungen für diesen Krümmer. Die Körner 6 und 5 treffen noch auf die gekrümmte Außenwand, wobei sich der Auftreffwinkel β von 0° auf γ° ändert. Die Körner 1 bis 4 hingegen treffen bereits auf die Wand des geraden Anschlußrohres, wobei in erster Näherung der Auftreffwinkel β unverändert bleibt und mit dem Krümmerwinkel γ übereinstimmt. Der letzte Abschnitt der Bewegungsbahn der Körner ist tatsächlich aber schon etwas gekrümmt, so daß der Auftreffwinkel etwas kleiner wird als der Krümmerwinkel.

Bild 10.43
Geometrische Bedingungen bei einem Krümmer mit beliebigem Umlenkwinkel γ

Die Abhängigkeit des Auftreffwinkels β von der Ortskoordinate x und dem Krümmerwinkel γ für $D/d = 6$ ist in *Bild 10.44* dargestellt. Wird der Krümmerwinkel kleiner als $\gamma = 45^\circ$, dann treffen immer weniger Feststoffkörner auf die gekrümmte Außenwand und immer mehr auf die Wand des geraden Anschlußrohres, in dem der Auftreffwinkel näherungsweise konstant ist. Macht man bei dem Krümmer mit $D/d = 6$ den Krümmerwinkel größer als 45° , dann ergibt sich im Hinblick auf den Verschleiß keine Änderung. Für die Praxis führt das zu folgender Konstruktionsanweisung: Läßt sich für den Krümmer mit $D/d = 6$ der Krümmerwinkel nicht kleiner als 45° machen, dann darf er auch mit einem Winkel von 90° ausgeführt werden, ohne daß der Verschleiß erhöht wird. Man hat also die Freiheit, den Krümmerwinkel zwischen 45° und 90° festzulegen, ohne auf den Verschleiß Rücksicht nehmen zu müssen, da in diesem Bereich theoretisch

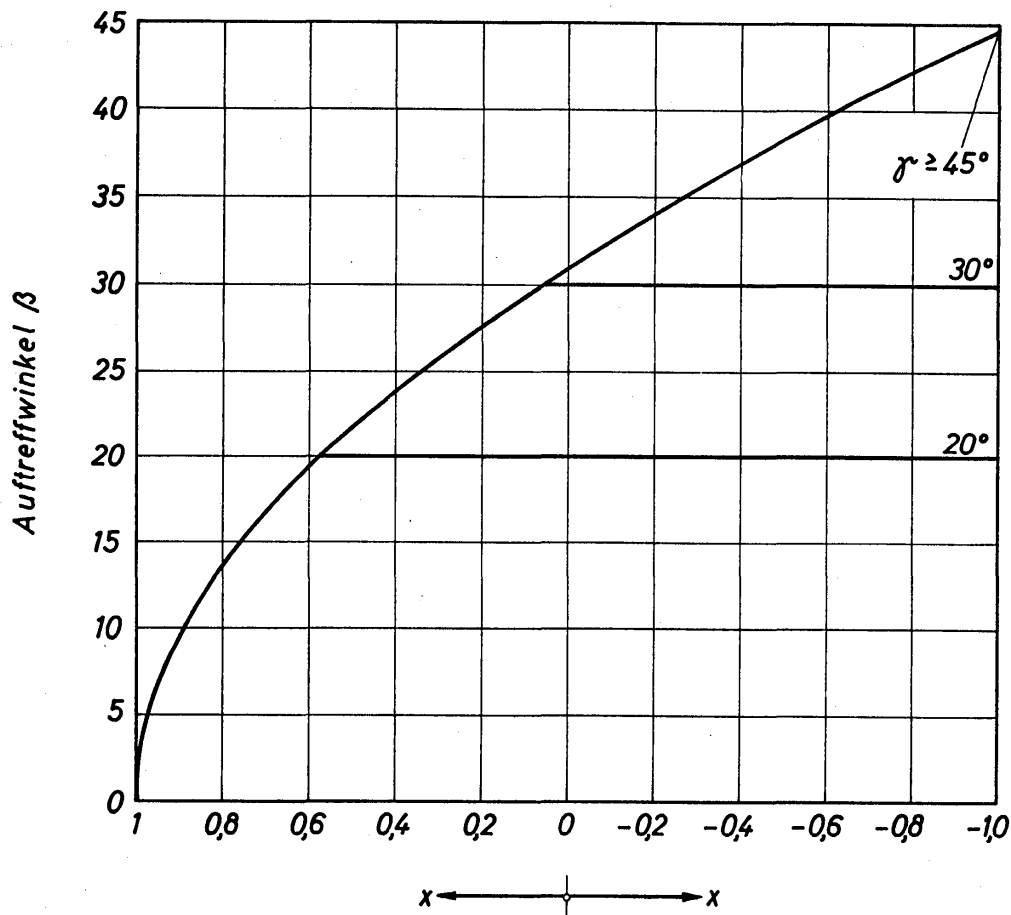


Bild 10.44. Auftreffwinkel β , abhängig vom bezogenen Achsabstand $x = 2r/d$, für einige Werte des Umlenkwinkels γ

kein, in der Praxis nur ein sehr geringer Verschleiß auftritt. Dieser verschleißarme Winkelbereich vergrößert sich mit zunehmendem Durchmesser Verhältnis. Ist beispielsweise $D/d = 14$, dann wird der Auftreffwinkel gemäß *Bild 10.40* im äußersten Falle zu 30° . Hierbei läßt sich der Verschleiß also nur noch vermindern, wenn der Krümmwinkel kleiner als 30° gemacht wird. Für Krümmwinkel zwischen 30° und 90° bleibt der Verschleiß unverändert. Entsprechende Bedingungen ergeben sich für beliebige Werte des Durchmesser Verhältnisses D/d . Der verschleißarme Winkelbereich gibt an, in welchem Bereich der Krümmwinkel verändert werden kann, ohne daß die Winkeländerung den Verschleiß beeinflußt. Einen sehr einfachen Überblick über den verschleißarmen Winkelbereich erhält man, wenn die Überlegungen für ein bestimmtes Grenzkorn durchgeführt werden. Nach *Bild 10.40* trifft das bei $x = -1$, also das an der Innenwand in den Krümmer eintretende Feststoffkorn mit dem größten Winkel β auf die Außenwand und bestimmt die Grenze zwischen der nahezu verschleißfreien und der verschlissenen Krümmerwand. Für dieses Grenzkorn ist in *Bild 10.45* der Auftreffwinkel β_g , abhängig vom Krümmwinkel γ und Durchmesser Verhältnis D/d , dargestellt. Für das Durchmesser Verhältnis $D/d = 3$ ändert sich der Winkel β_g mit zunehmenden Werten von γ zunächst gemäß der Diagramm diagonalen, so daß also $\beta_g = \gamma$; für $\gamma > 60^\circ$ bleibt $\beta_g = 60^\circ$ unverändert erhalten. Die jeweils horizontalen Linien geben für die angegebenen Werte von D/d den theoretisch verschleißfreien, den praktisch verschleißarmen Winkelbereich

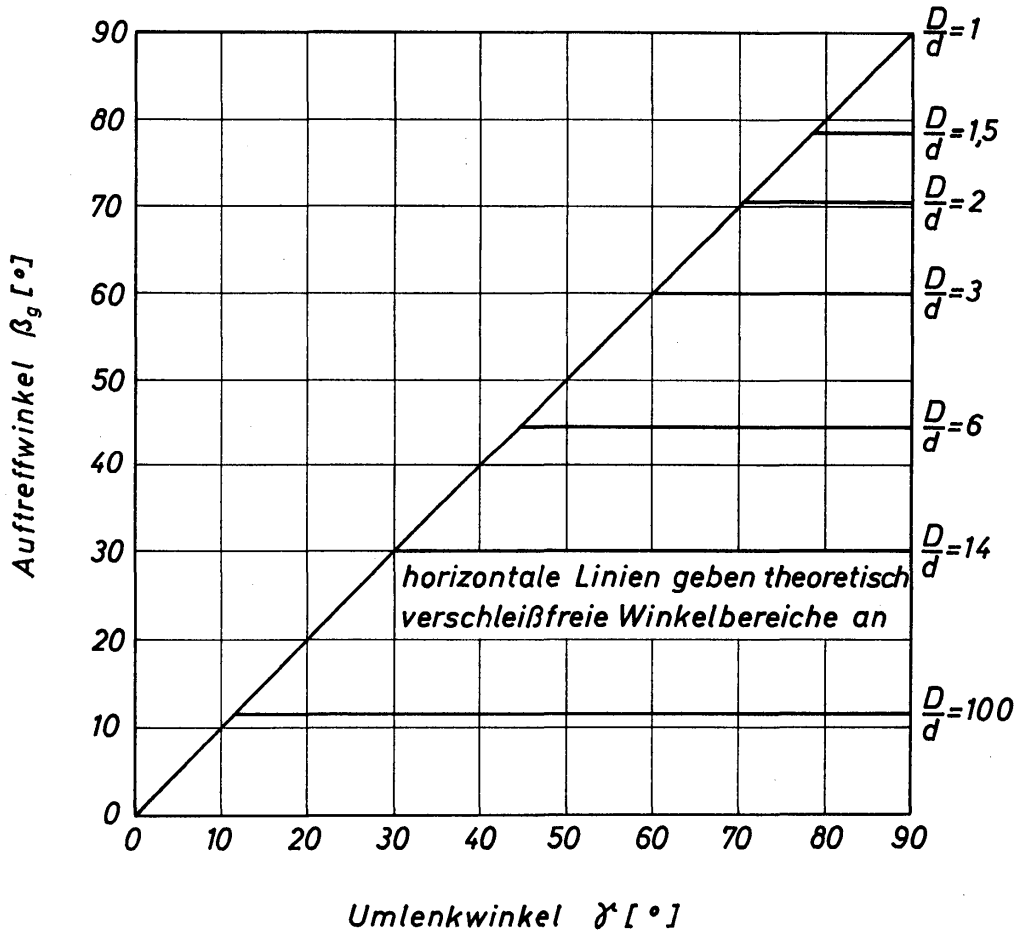


Bild 10.45. Auftreffwinkel β_g des Grenzkorns, abhängig vom Umlenkwinkel γ und dem Durchmesser Verhältnis D/d

an. In diesem läßt sich also γ ändern, ohne daß ein Einfluß auf den Verschleiß ausgeübt wird.

10.843 Lage der Verschleißmulde

Die Verschleißmulde erstreckt sich über den gesamten Bereich der vom Verschleiß betroffenen äußeren Krümmerwand. Um die Lage der Mulde kennzeichnen zu können, wird der Winkel ε angegeben, bei dem die Muldentiefe ihren größten Wert hat. Im einfachsten Falle hat die Verschleißmulde die in *Bild 10.41* angegebene Form, wobei ein sehr flacher Einlauf und ein sehr steiler Auslauf auftreten. Diese Muldenform ist immer dann zu erwarten, wenn das Grenzkorn den stärksten Verschleiß verursacht. Für das Grenzkorn und $\gamma = 90^\circ$ berechnet man den Winkel ε_g , abhängig vom Durchmesser Verhältnis D/d , nach der Beziehung:

$$\cos \varepsilon_g = \frac{\frac{D}{d} - 1}{\frac{D}{d} + 1} \tag{10.100}$$

In *Bild 10.46* ist ε_g abhängig von D/d dargestellt. Diese Kurve wird innerhalb des für die Praxis interessierenden Bereiches durch Versuche sehr gut bestätigt. Geringe Abweichungen können sich nur im Bereich großer Werte von D/d er-

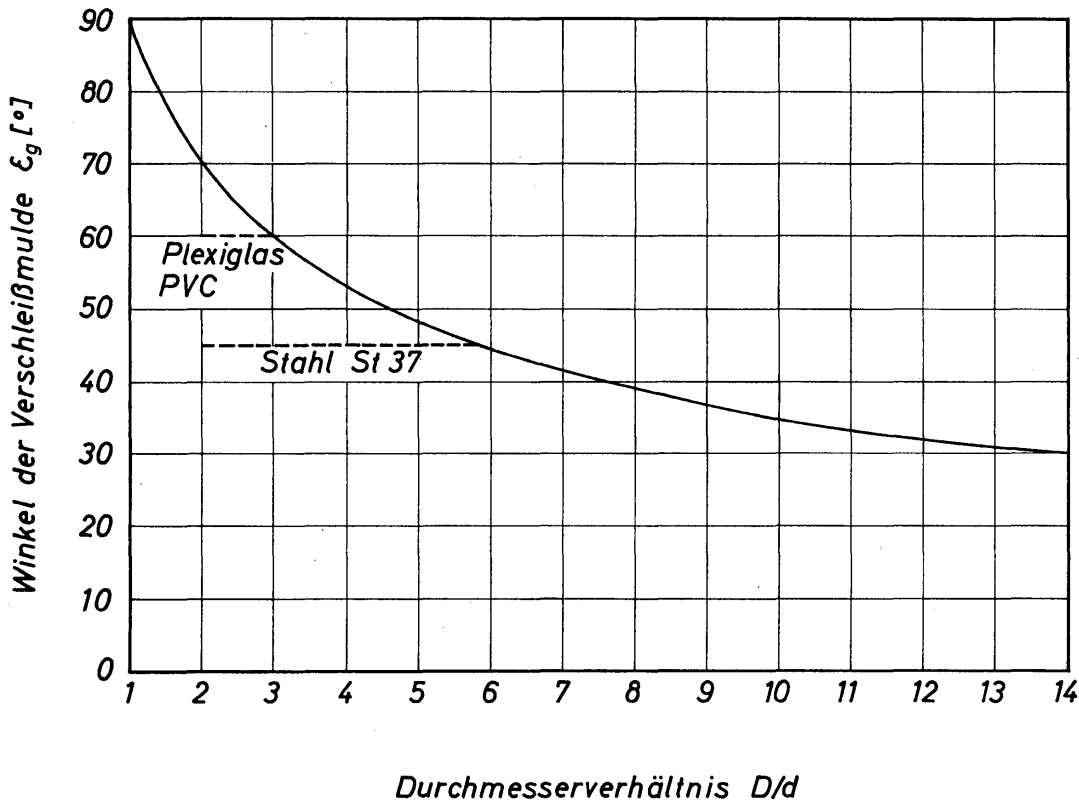


Bild 10.46. Lage der Verschleißmulde, gekennzeichnet durch den Winkel ε_g , abhängig vom Durchmesser Verhältnis D/d

geben, und zwar wird der Winkel ε_g etwas größer als berechnet. Das ist darauf zurückzuführen, daß bei zunehmenden Werten von D/d bei konstantem Rohrdurchmesser d der Krümmerdurchmesser D zunimmt und somit die Zentrifugalkraft abnimmt. Hierdurch wird dann eine größere Umlenkung der Feststoffteilchen hervorgerufen, die folglich bei größerem Winkel ε_g die Verschleißmulde ausbilden. Die theoretische Kurve gilt daher für sehr große Zentrifugalkräfte. Trifft in Krümmern mit beliebigem Umlenkwinkel das Grenzkorn noch auf die gekrümmte Außenwand, so gilt für die Berechnung des Winkels ε_g ebenfalls Gl.(10.100). Trifft das Grenzkorn dagegen bereits auf die Wand des geraden Anschlußrohres, dann gilt für den Winkel ε_g die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varepsilon_g = \frac{1}{\sin \gamma} \left\{ \frac{D/d + 1}{D/d - 1} - \cos \gamma \right\}. \quad (10.101)$$

Hierin tritt der Krümmwinkel γ als zusätzliche Veränderliche auf. Für $\varepsilon_g = \gamma$ geht Gl.(10.101) in Gl.(10.100) über. Die nach Gl.(10.101) berechneten Winkel ε_g sind durch die in *Bild 10.47* dargestellten Kurvenäste links der Diagrammdiagonalen a wiedergegeben. Mit zunehmendem Krümmwinkel nimmt ε_g bis auf den Wert von γ ab. Rechts der Diagrammdiagonalen bleibt ε_g dann konstant und ist somit unabhängig von γ und nur noch eine Funktion des Durchmesser Verhältnisses. Da der Winkel ε_g für das Grenzkorn berechnet ist, weist die Bedingung $\varepsilon_g = \text{const}$ also darauf hin, daß in dem hierdurch festgelegten Winkelbereich für γ theoretisch kein Verschleiß mehr auftritt.

Muldentiefe bei $\varepsilon_0 = \gamma$ und nach sehr langer Zeit bei ε_g . Die sich zu verschiedenen Zeiten einstellenden Winkel sind in *Bild 10.47* eingezeichnet worden. Somit erkennt man also, daß im Diagrammbereich links der Diagonalen die größte Muldentiefe zwischen den Kurven für ε_g und ε_0 liegt. Die genaue Lage ist eine Funktion der Zeit. Die dargestellten Kurven für ε_g und ε_0 sind als Grenzkurven aufzufassen.

10.844 Verschleiß, abhängig vom Durchmesser Verhältnis

Die bisherigen Ergebnisse zeigten, daß der Verschleiß um so geringer ist, je größer das Durchmesser Verhältnis D/d des Krümmers ist. Der absolut geringste Verschleiß tritt also, was auch sofort einleuchtet, im geraden Rohr auf. Bei dem Entwurf von Rohrleitungsnetzen ist man indes gezwungen, endliche Werte des Durchmesser Verhältnisses anzuwenden. Man hat daher zu fragen, ob es besonders günstige oder ungünstige Werte des Durchmesser Verhältnisses für den Verschleiß gibt.

Um diese Frage beantworten zu können, soll der Verschleiß eines 90° -Krümmers abhängig vom Durchmesser Verhältnis D/d untersucht werden. Es wird angenommen, daß der größte Verschleiß durch das Grenzkorn verursacht wird. Hierfür ist der Auftreffwinkel und gemäß *Bild 10.35* auch die als Maß für den Verschleiß gewählte Muldentiefe bekannt. Für einen PVC-Krümmers ergibt sich dann die in *Bild 10.49* durch die ausgezogene Kurve dargestellte Abhängigkeit der Muldentiefe vom Durchmesser Verhältnis. Zwischen $D/d = 4$ bis 5 liegt ein Maximum des Verschleißes. Dieses Maximum wird noch ausgeprägter, wenn man die bei

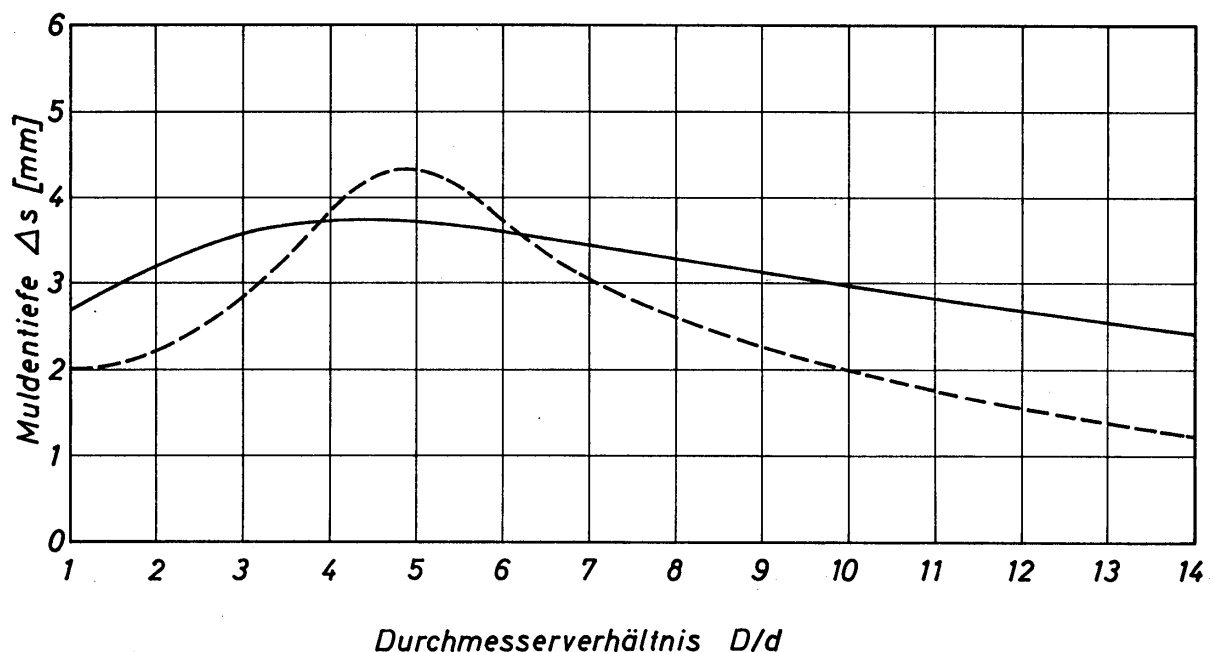


Bild 10.49. Abhängigkeit der Muldentiefe Δs nach einer Stunde Verschleißzeit, abhängig vom Durchmesser Verhältnis D/d , bei einem 90° -Krümmers aus PVC. Ausgezogene Kurve berechnet mit den Angaben in Bild 10.34 und mit der Annahme, daß der größte Verschleiß durch das Grenzkorn verursacht wird. Die gestrichelte Kurve gibt die tatsächlich zu erwartende Abhängigkeit an

großen und kleinen Werten des Durchmesser Verhältnisses auftretenden Einflüsse berücksichtigt, die zu der gestrichelt eingezeichneten Kurve führen. Mit zunehmenden Werten von D/d wird der Einfluß der Zentrifugalkraft geringer, so daß die Feststoffkörner etwas stärker umgelenkt werden und folglich mit einem kleineren Winkel auf die Krümmerwand treffen. Mit größer werdendem Durchmesser Verhältnis muß der Verschleiß daher stärker abnehmen, als berechnet wurde. Mit abnehmendem Durchmesser Verhältnis wird der Verschleiß als Folge des an der inneren Krümmerwand auftretenden Wirbelgebietes über die berechneten Werte hinaus vergrößert. Das Wirbelgebiet engt den Strömungsquerschnitt ein und führt daher zu einer Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit im Krümmer. Wie WELLINGER und UETZ [10.24] nachgewiesen haben, steigt der Verschleiß mit zunehmender Geschwindigkeit sehr stark an. Bei sehr kleinen Werten des Durchmesser Verhältnisses wird der Verschleiß dann aber wieder sehr stark erniedrigt. Wie bereits ausgeführt wurde, wird die Verschleißfläche mit abnehmenden Werten von D/d kleiner. Das führt in zunehmendem Maße dazu, daß die von der Krümmerwand zurückprallenden Körner die ankommenden in ihrer Bewegung stören und das Auftreffen auf die Wand teilweise verhindern. Gleichzeitig bildet sich dabei aber auch, was insbesondere bei Kniestücken beobachtet werden kann, ein Feststoffpolster aus, welches die Kraft, mit der die Teilchen auf die Wand treffen, erheblich vermindert. Diese Einflüsse lassen sich nicht theoretisch, sondern nur experimentell ermitteln. Die in *Bild 10.49* gestrichelt eingezeichnete Kurve hat daher zunächst nur eine qualitative Bedeutung. Das für den praktisch arbeitenden Ingenieur wesentliche Ergebnis folgt aber in gleicher Weise aus dem berechneten und dem qualitativ eingezeichneten Kurvenverlauf. Bei einem Durchmesser Verhältnis von $D/d = 5$ liegt ein Verschleißmaximum. Für $D/d = 1$ ergibt sich ein örtliches Minimum. Für sehr große Durchmesser Verhältnisse nimmt der Verschleiß sehr stark ab und nähert sich dem für das gerade Rohr. Gleiche Verschleißwerte ergeben sich etwa bei $D/d = 1$ und $D/d = 10$. Wenn das Durchmesser Verhältnis daher nicht größer als etwa 10 gemacht werden kann, dann ist es zweckmäßig, ein Kniestück zu verwenden. Die gleiche Abhängigkeit des Verschleißes vom Durchmesser Verhältnis mit ausgeprägtem Maximum hat sich auf Grund experimenteller Untersuchungen beim hydraulischen Transport ergeben [10.26].

10.9 Hinweise auf den hydraulischen Kapseltransport

Die technische Anwendung des hydraulischen Transportes körniger Feststoffe setzt voraus, daß die Eigenschaften der Partikeln durch die Berührung mit der Flüssigkeit nicht nachteilig verändert werden. Damit ist der Anwendung dieser Transportform eine Grenze gesetzt. Zu ihrer Überwindung wurde vorgeschlagen, die körnigen Güter in zylindrische und kugelförmige Gefäße – Kapseln – zu füllen und diese im Flüssigkeitsstrom durch die Rohrleitung zu transportieren. Die bei der Kapselförderung auftretenden Strömungsprobleme sind in mehreren Arbeiten untersucht worden [10.55 bis 10.61].

Schrifttum

- [10.1] J. GASTERSTÄDT, Die experimentelle Untersuchung des pneumatischen Fördervorganges, *Forsch.-Arb. Ingenieurwes.* 265, VDI-Verlag, Berlin 1924
- [10.2] W. BARTH, Strömungsvorgänge beim Transport von Festteilchen und Flüssigkeitsteilchen in Gasen mit besonderer Berücksichtigung der Vorgänge bei pneumatischer Förderung, *Chem.-Ing.-Techn.* 30 (1958) 3, 171–80
- [10.3] W. BARTH, Physikalische und wirtschaftliche Probleme des Transportes von Festteilchen in Flüssigkeiten und Gasen, *Chem.-Ing.-Techn.* 32 (1960) 3, 164–71
- [10.4] G. WEIDNER, Grundsätzliche Untersuchung über den pneumatischen Fördervorgang, insbesondere über die Verhältnisse bei Beschleunigung und Umlenkung, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 21 (1955) 5, 145–53
- [10.5] R. JUNG, Der Druckabfall im Einlaufgebiet pneumatischer Förderanlagen, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 24 (1958) 2, 50–8
- [10.6] E. MUSCHELKNAUTZ, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Druckverluste pneumatischer Förderleitungen unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses von Gutreibung und Gutgewicht, *VDI-Forschungsh.* 476, VDI-Verlag, Düsseldorf 1959
- [10.7] F. SCHULTZ-GRUNOW, Zur Rheologie der Suspensionen, *Chem.-Ing.-Techn.* 34 (1962) 3, 223–30
- [10.8] H. MEYER, *Allgemeine Gesetzmäßigkeiten bei der pneumatischen Förderung*, Dissertation, Technische Hochschule Aachen 1959
- [10.9] O. ADAM, Untersuchung über die Vorgänge in feststoffbeladenen Gasströmen, *Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 904*, Westdeutscher Verlag, Köln/Opladen 1960
- [10.10] G. WELSCHOF, Pneumatische Förderung bei großen Fördergutkonzentrationen, *VDI-Forschungsh.* 492, VDI-Verlag, Düsseldorf 1962
- [10.11] D. M. NEWITT, J. F. RICHARDSON, M. ABBOTT und R. B. TURTLE, Hydraulic conveying of solids in horizontal pipes, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 33 (1955) 2, 93–113
- [10.12] A. FÜHRBÖTER, Über die Förderung von Sand-Wasser-Gemischen in Rohrleitungen, *Mitteilungen des Franzius-Instituts für Grund- und Wasserbau der Technischen Hochschule Hannover, Nr. 19*, Hannover 1961
- [10.13] R. DURAND, Basic relationships of the transportation of solids in pipes—Experimental research, *Proceedings of the Minnesota International Hydraulic Convention, 1. bis 4. September 1953, Minneapolis*, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Minnesota 1953
- [10.14] R. C. WORSTER und D. F. DENNY, Hydraulic transport of solid material in pipes, *Proc. Inst. Mech. Eng.* 169 (1955) 32, 563–88
- [10.15] G. W. HOWARD, Transportation of sand and gravel in a four-inch pipe, *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.* 104 (1939) 2039, 1334–48
- [10.16] E. KRIEGEL und H. BRAUER, Hydraulischer Transport körniger Feststoffe durch waagerechte Rohrleitungen, *VDI-Forschungsh.* 515, VDI-Verlag, Düsseldorf 1966
- [10.17] H. BRAUER und E. KRIEGEL, Hydraulischer Feststofftransport durch waagerechte Rohrleitungen, *Bänder-Bleche-Rohre* 6 (1965) 6, 315–24
- [10.18] C. G. SINCLAIR, The limit deposit-velocity of heterogeneous suspensions, *Third Congress of the European Federation of Chemical Engineering, London, 20. Juni 1962, Abh. A 68*, Inst. Chem. Eng. London 1962
- [10.19] K. E. SPELLS, Correlations for use in transport of aqueous suspensions of fine solids through pipes, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 33 (1955) 2, 79–84
- [10.20] R. A. SMITH, Experiments of the flow of sand-water slurries in horizontal pipes, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 33 (1955) 2, 85–92
- [10.21] ● E. MAIER, *Untersuchungen über den Verschleiß von Blasversatzrohren und Krümmern*, Essen 1952

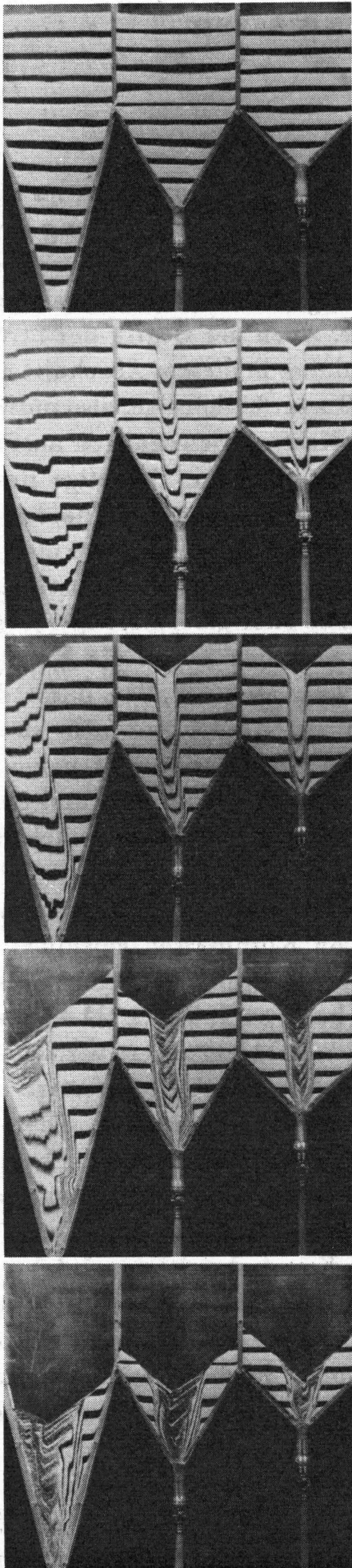
- [10.22] E. MAIER, Theorie des muldenförmigen Verschleißes im Blasversatzrohr, *Ing.-Arch.* 21 (1953) 382–95
- [10.23] K. WELLINGER und H. C. BROCKSTEDT, Verschleiß von Spülversatzrohren und Versuche zur Ermittlung des Verschleißwiderstandes verschiedener Werkstoffe für Spülversatzrohre, *Glückauf* 81 (1945) 45–51
- [10.24] K. WELLINGER und H. UETZ, Gleitverschleiß, Spülverschleiß, Strahlverschleiß unter Wirkung von körnigen Stoffen, *VDI-Forschungsh.* 449, VDI-Verlag, Düsseldorf 1955
- [10.25] H. BRAUER und E. KRIEGEL, Untersuchungen über den Verschleiß von Kunststoffen und Metallen, *Chem.-Ing.-Techn.* 35 (1963) 10, 697–707
- [10.26] H. BRAUER und E. KRIEGEL, Verschleiß an Rohrleitungen bei hydraulischer Förderung von Feststoffen, *Stahl u. Eisen* 84 (1964) 21, 1313–22
- [10.27] H. BRAUER und E. KRIEGEL, Verschleiß von Rohrkrümmern beim pneumatischen und hydraulischen Feststofftransport, *Chem.-Ing.-Techn.* 37 (1965) 3, 265–76
- [10.28] H. BRAUER und E. KRIEGEL, Die Probleme des Verschleißes von Rohrleitungen beim pneumatischen und hydraulischen Feststofftransport, *Maschinenmarkt* 71 (1965) 20–31
- [10.29] ● L. PRANDTL, *Führer durch die Strömungslehre*, 6. Auflage, Vieweg, Braunschweig 1965
- [10.30] G. BOEHME, H. KRUPP, H. RABENHORST und G. SANDSTEDT, Adhesion measurements involving small particles, *Third Congress of the European Federation of Chemical Engineering, London, 20. bis 29. Juni 1962, Abh. D18–D25*, Inst. Chem. Eng. London 1962
- [10.31] H. KRUPP, Particle adhesion. Theory and experiment, *Advances Colloid Interface Sci.* 1 (1967) 2, 111–239
- [10.32] P. SCHUCHART, *Widerstandsgesetze beim pneumatischen Transport durch gerade Rohre und Rohrkrümmer*, Dissertation, Technische Universität Berlin 1968, und *Chem.-Ing.-Techn.* 40 (1968) 21/22, 1060–7
- [10.33] M. WEBER, Kompressible Rohrströmung von Gas-Feststoff-Gemischen bei hohen Materialbelastungen, *Aufbereitungs-Techn.* 7 (1966) 10, 603–13
- [10.34] R. H. CLARK, D. E. CHARLES, J. F. RICHARDSON und D. M. NEWITT, Pneumatic conveying, Part I: The pressure drop during horizontal conveyance, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 30 (1952) 209–24
- [10.35] T. UEMATU, Y. MORIKAWA, K. CHO, I. MORIKUNI, Y. ASADA und H. YAMAMOTO, Pneumatische Förderung in lotrechter Rohrleitung, *Bull. JSME* 8 (1965) 13, 367–75
- [10.36] J. A. HITCHCOCK und C. JONES, The pneumatic conveying of spheres through straight pipes, *Mining Research Establishment, National Coal Board, England, Report No. 2053* (1956)
- [10.37] E. MIKUMO und J. KOKADO, Grundsätzliche Untersuchungen über die Phänomene im Blasversatzrohr, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.* 19 (1957) 50–77
- [10.38] G. SEGLER, Untersuchungen an Körnergebläsen und Grundlagen für ihre Berechnung, *RKTL* 1934, Nr. 55
- [10.39] O. ADAM, Feststoffbeladene Luftströmung hoher Geschwindigkeit, *Chem.-Ing.-Techn.* 29 (1957) 3, 151–9
- [10.40] J. NIKURADSE, Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, *Forsch.-Arb. Ingenieurwes.* 356, VDI-Verlag, Berlin 1932
- [10.41] D. G. THOMAS, Transport characteristics of suspensions, Part VI: Minimum transport velocity for large particle size suspensions in round horizontal pipes, *AIChE J.* 8 (1962) 3, 373–8
- [10.42] E. KRIEGEL, Konzentrationsprofile beim hydraulischen Transport feinkörniger Feststoffe, *Chem.-Ing.-Techn.* 40 (1968) 7, 324–6

- [10.43] D. M. NEWITT, J. M. RICHARDSON und C. A. SHOOK, Hydraulic conveying of solids in horizontal pipes, Part II: Distribution of particles and slip velocities, *Third Congress of the European Federation of Chemical Engineering, London, 20. Juni 1962, Abh. A77*, Inst. Chem. Eng. London 1962
- [10.44] J. H. JONES, W. G. BRAUN, TH. E. DAUBERT und H. D. ALLENDORF, Estimation of pressure drop for vertical pneumatic transport of solids, *AIChE J.* 13 (1967) 3, 608–11
- [10.45] J. D. DOIG und G. H. ROPER, Air velocity in the presence of cocurrently transported particles, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 6 (1967) 2, 247–56
- [10.46] J. F. RICHARDSON und W. N. ZAKI, Sedimentation and fluidization, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 32 (1954) 35–53
- [10.47] T. UEMATU und Y. MORIKAWA, Druckverluste in Krümmern einer waagerechten Förderung von körnigen Gütern, *Bull. Jap. Soc. Mech. Eng.* 4 (1961) 15, 531–8
- [10.48] ● T. P. PADMURAJAIAH, *Strömungswiderstand in gekrümmten Rohren*, Dissertation, Technische Universität Berlin 1960
- [10.49] R. JUNG, Probleme der Staub- und Luftverteilung in Kohlenstaubbrennern, *Mitteilungen der Vereinigung der Großkesselbesitzer, Heft 62* (1959) 371–82
- [10.50] R. JUNG, Staubverteilung beim Betrieb mit Einblasmühlen, *Mitteilungen der Vereinigung der Großkesselbesitzer, Heft 62* (1960) 155–8
- [10.51] M. LEMPP, Die Strömungsverhältnisse von Gas-Feststoff-Gemischen in Verzweigungen pneumatischer Förderanlagen, *Aufbereitungs-Techn.* 7 (1966) 2, 81–91
- [10.52] E. H. K. MÜLLER und K. POLTHIER, Rohrverschleiß bei pneumatischer Förderung körniger Güter, *Stahl u. Eisen* 84 (1964) 21, 1322–8
- [10.53] J. G. A. BITTER, A study of erosion phenomena, *Wear* 6 (1963) 5–21 und 169–90
- [10.54] E. KRIEGEL, Der Strahlverschleiß von Werkstoffen, *Chem.-Ing.-Techn.* 40 (1968) 1/2, 31–6
- [10.55] G. W. HODGSON und M. E. CHARLES, The pipeline flow of capsules, Part I: The concept of capsule pipelining, *Can. J. Chem. Eng.* 41 (1963) 2, 43–5
- [10.56] M. E. CHARLES, The pipeline flow of capsules, Part 2: Theoretical analysis of the concentric flow of cylindrical forms, *Can. J. Chem. Eng.* 41 (1963) 2, 46–51
- [10.57] H. S. ELLIS, The pipeline flow of capsules, Part 3: An experimental investigation of the transport by water of single cylindrical and spherical capsules with density equal to that of the water, *Can. J. Chem. Eng.* 42 (1964) 1, 1–8
- [10.58] H. S. ELLIS, The pipeline flow of capsules, Part 4: An experimental investigation of the transport by water of single cylindrical capsules with density greater than that of the water, *Can. J. Chem. Eng.* 42 (1964) 2, 69–76
- [10.59] H. S. ELLIS, The pipeline flow of capsules, Part 5: An experimental investigation of the transport by water of single spherical capsules with density greater than that of the water, *Can. J. Chem. Eng.* 42 (1964) 4, 155–61
- [10.60] R. NEWTON, P. J. REDBERGER und G. F. ROUND, The pipeline flow of capsules, Part 6: Numerical analysis of some variables determining free flow, *Can. J. Chem. Eng.* 42 (1964) 4, 168–73
- [10.61] H. S. ELLIS und L. H. BOLT, The pipeline flow of capsules, Part 7: An experimental investigation of the transport by two oils of single cylindrical and spherical capsules with density equal to that of the oil, *Can. J. Chem. Eng.* 42 (1964) 5, 201–6

11 Fließbewegung von Kornmassen

Es gibt kaum einen verfahrenstechnischen Prozeß, in dem nicht an irgendeiner Stelle körnige Feststoffmassen auftreten, die zur Weiterverarbeitung bewegt werden müssen. Eine Kornmasse ist stets ein inhomogenes und mehrphasiges Gebilde. Der bei einphasigen Gebilden angewendete Begriff des Kontinuums ist auf Kornmassen streng genommen nicht übertragbar. Auch der Begriff der Strömung ist bei Kornmassen nicht sehr sinnvoll und soll daher in diesem Abschnitt auch nicht verwendet werden. Es ist indes bekannt, daß sehr feinkörnige, also pulverförmige Feststoffmassen unter der Einwirkung von Kräften Bewegungen ausführen, die an die strömende Bewegung fluider Kontinua erinnern. Derartige Bewegungen von Kornmassen sollen zur Unterscheidung von der Strömung fluider Kontinua als Fließbewegungen bezeichnet werden. Diese Bezeichnungsweise macht es auch verständlich, daß man die Kornmassenbewegung mittels der Plastizitätstheorie theoretisch zu erfassen versucht. Das ist um so eher gerechtfertigt, je größer die Bindekräfte zwischen den Partikeln sind, aus welchen sich die Kornmasse zusammensetzt. Die Schwierigkeiten bestehen dann aber vor allem darin, die Bindekräfte unter Berücksichtigung der Vielzahl von Einflußgrößen in zuverlässiger Weise zu beschreiben. Von streng physikalischem Standpunkt haben sich insbesondere KRUPP [11.1] sowie BOEHME, KRUPP, RABENHORST und SANDSTEDT [11.2] mit den Bindekräften zwischen Partikeln befaßt. In diesen Arbeiten findet man Hinweise auf das gesamte in diesem Zusammenhang interessierende Schrifttum. Weiterhin ist in dem Buch von ZENZ und OTHMER [11.3] ein umfangreiches Kapitel den rheologischen Eigenschaften von Kornmassen gewidmet. Die Anwendung der Plastizitätstheorie auf die Fließbewegung von Kornmassen unter Einwirkung der Gravitation wird in einer Arbeit von JENICKE [11.4] beschrieben, in der ebenfalls weiteres Schrifttum zu diesem Problem zitiert wird.

Je feinkörniger die Feststoffmasse ist, desto eher ist es gerechtfertigt, sie als ein quasi-Kontinuum oder als eine rheologische Substanz anzusehen. Diese Betrachtungsweise versagt jedoch, zumindest nach dem heutigen Stand der Erkenntnisse, wenn die Partikeln eine bestimmte Größe überschreiten. In anderem Zusammenhang wurde bereits darauf hingewiesen, daß mit zunehmender Größe der Partikeln deren Form immer mehr von der der Kugel abweicht und daher auch die Partikelform für die Bewegung der Kornmassen von maßgebender Bedeutung wird. Die Behandlung der Fließbewegung von Kornmassen wurde daher von rein phänomenologischer Seite in Angriff genommen. Erwähnt sei in diesem Zusammenhang das Buch von KVAPIL [11.5] sowie eine zusammenfassende Übersichtsarbeit von WÖHLBIER und REISNER [11.6]. Dieser Betrachtungsweise sind zur Zeit die größten Erfolge beschieden; sie wird in den weiteren Ausführungen bevorzugt. Das scheint auch dadurch gerechtfertigt zu sein, daß in den folgenden Abschnitten lediglich auf das Ausfließen von Kornmassen aus Bunkern und auf



die Bewegung durch Rohre eingegangen wird. Zur Einführung in die Probleme wird die Fließbewegung zunächst in qualitativer Form beschrieben.

11.1 Qualitative Beschreibung der Fließbewegung

Die Fließbewegung von Kornmassen soll an Hand der *Bilder 11.1* und *11.2* beschrieben werden, in denen photographische Aufnahmen vom Bewegungszustand der Kornmassen in Bunkern zu verschiedenen Zeiten wiedergegeben sind. *Bild 11.1 a* bis *e* zeigt die Bewegung in Bunkern mit symmetrischem Ausflußtrichter und *Bild 11.2 a* bis *e* diejenige in einem Bunker mit unsymmetrischem Ausflußtrichter. Als Kornmasse diente in allen Fällen getrockneter, feinkörniger Quarzsand. Zur Sichtbarmachung der Fließbewegung sind abwechselnd mit normalem Quarzsand Schichten aus angefärbtem Quarzsand in die Anlagen eingefüllt worden.

In den *Bildern 11.1 a* bis *e* ist der Bewegungszustand zu verschiedenen Zeiten für jeweils drei Bunker mit verschieden großem Öffnungswinkel θ des Ausflußtrichters zu erkennen. Die im folgenden verwendeten Bezeichnungen gehen aus *Bild 11.3* hervor. Es bedeuten D den Durchmesser des Bunkers, d den Durchmesser der Ausflußöffnung und h die Höhe des Schüttgutes im Bunker. Der Ausflußvorgang ist bereits im Rahmen zahlreicher Arbeiten näher beschrieben worden, von denen insbesondere die von KVAPIL [11.7] sowie BROWN und RICHARDS [11.8] erwähnt seien.

Bild 11.1. Photographische Aufnahmen von der Fließbewegung feinkörnigen Quarzsandes zu verschiedenen Zeiten in Bunkern mit drei verschiedenen, symmetrischen Ausflußrichtern

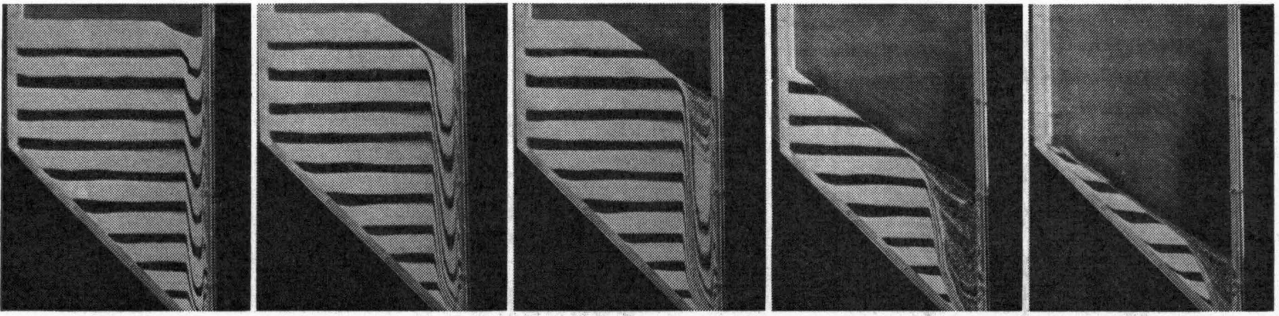


Bild 11.2. Photographische Aufnahmen von der Fließbewegung feinkörnigen Quarzsandes zu verschiedenen Zeiten in einem Bunker mit unsymmetrischem Ausflußtrichter

Wird der Bunkerverschluß geöffnet, so vergeht zunächst eine gewisse Zeit, bevor sich die Schüttgutoberfläche bewegt und trichterförmig einfällt, obgleich der Schüttgutstrom schon längere Zeit fließt. Der Übergang vom Zustand der Ruhe zu dem der Bewegung setzt sich nur langsam von der Ausflußöffnung bis zur Schüttgutoberfläche fort. Der Übergang in die Fließbewegung setzt eine Auflockerung der Kornmasse voraus, d. h. die Fließbewegung erfordert einen Mindestwert des Lückengrades ε_f , der in jedem Falle größer ist als der Lückengrad ε_0 der ruhenden Schüttgutschicht. Der Lückengrad ist in Abschnitt 8.12 näher erläutert worden. Er ist das Verhältnis aus dem freien Volumen und dem Schüttvolumen. Die Erhöhung des Lückengrades erfaßt während des Ausfließens nur ein jeweils begrenztes Teilvolumen des im Bunker befindlichen Schüttgutes. Somit ist es auch allein auf die örtlich begrenzte Änderung des Lückengrades zurückzuführen, daß sich, wie man aus *Bild 11.1* auch deutlich erkennt, die Fließbewegung auf eine enge Fließzone begrenzt.

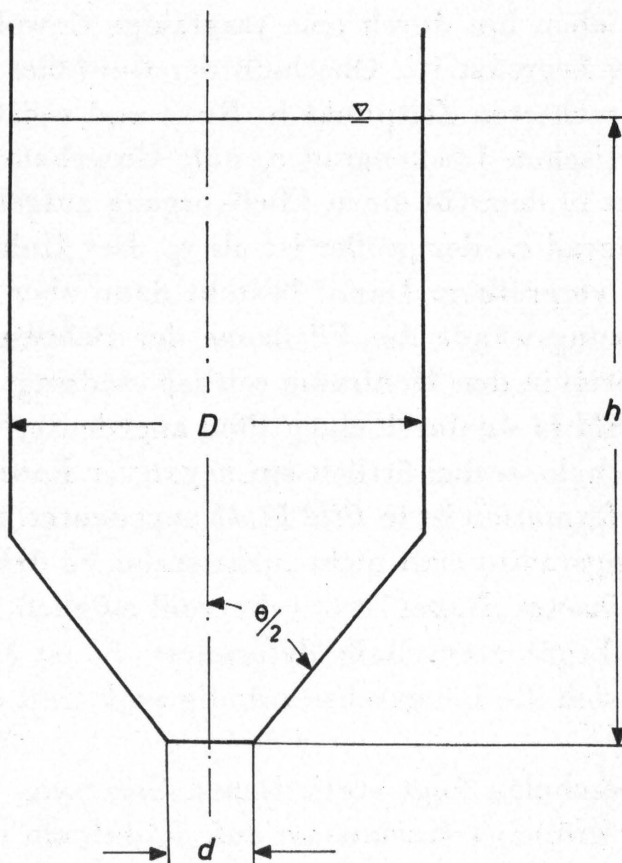


Bild 11.3
Zur Erläuterung der Bezeichnungen bei Bunkern

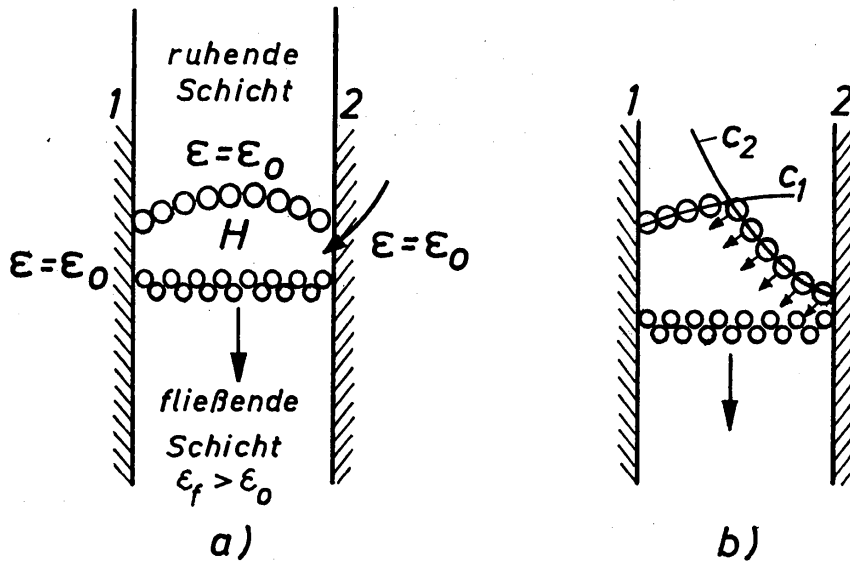


Bild 11.4. Zur Erläuterung der Bildung und Auflösung von Gewölben innerhalb der Fließzone

Bei sorgfältiger Beobachtung stellt man fest, daß sich die örtlich begrenzte Auflockerung der Schüttschicht keineswegs stetig, sondern vielmehr unstetig vollzieht. Es kommt in mehr oder weniger kurzen zeitlichen Abständen zu einer Unterbrechung des Auflockerungsvorganges, da sich Gewölbe in der Schüttschicht bilden, die steif genug sind, ein Nachfließen der Kornmasse zu verhindern. DUBACH [11.9] hat sich mit der Gewölbebildung in den Auslauftrichtern von Bunkern näher befaßt und stützt sich dabei auf Grundgedanken, die auf PLATONOW und BANIT [11.10] zurückgehen. Überträgt man seine Erkenntnisse auf den Übergang der ruhenden Kornmasse in den Bewegungszustand, wie er in der erwähnten engen Fließzone auftritt, so kommt man zu der an Hand von *Bild 11.4* zu erläuternden Vorstellung. In stark schematisierter Weise ist eine Fließzone dargestellt, die von den Linien 1 und 2 begrenzt wird. In *Bild 11.4a* hat sich ein Hohlraum H gebildet, der nach oben hin durch eine tragfähige Gewölbeschale mit positivem Krümmungsradius begrenzt ist. Oberhalb der Gewölbeschale befindet sich das Schüttgut im betrachteten Zeitpunkt in Ruhe und weist den für die ruhende Schicht charakteristischen Lückengrad ϵ_0 auf. Unterhalb der Gewölbeschale befindet sich das Gut in dem für einen Fließvorgang aufgelockerten Zustand und besitzt den Lückengrad ϵ_f , der größer ist als ϵ_0 . Der Hohlraum H wird sich mit zunehmender Zeit vergrößern. Damit besteht dann aber die Aussicht, daß die seitlichen Begrenzungswände der Fließzone der Belastung nicht mehr standhalten und Kornmaterial in den Hohlraum seitlich eindringt. Die dadurch ausgelöste Bewegung, in *Bild 11.4a* durch einen Pfeil angedeutet, führt zu einer Deformation der Gewölbeschale, wobei örtlich ein negativer Krümmungsradius entsteht. Diese Gewölbedeformation ist in *Bild 11.4b* angedeutet. Gewölbeschalen mit negativem Krümmungsradius sind nicht mehr stabil, so daß die Bewegung des Schüttgutes wieder einsetzt. Dabei ist es sehr wohl möglich, daß sich die Längsachse der Fließzone in begrenztem Maße deformiert. Es ist also nicht in jedem Falle zu erwarten, daß sich die Längsachse ständig senkrecht oberhalb der Ausflußöffnung befindet.

Die Entstehung stabiler Gewölbeschalen folgt statistischen Gesetzen. Tritt die Gewölbebildung im Innern einer größeren Kornmasse auf, so daß ein seitlicher

Zufluß in den entstehenden Hohlraum möglich ist, dann lösen sich die Gewölbe im allgemeinen bereits nach sehr kurzen Zeiten auf, und der Ausfluß wird nur in geringfügiger Weise gestört. Voraussetzung ist dafür aber, daß die Körner über eine gute Beweglichkeit verfügen. Diese ist am besten gewährleistet, wenn es sich um kugelförmige Partikeln handelt und hierbei keine elektrostatischen und van der Waalsschen Kräfte auftreten. Von besonderem Nachteil für die Beweglichkeit der einzelnen Partikeln erweist sich ihr Feuchtigkeitsgehalt, der zusätzliche Kapillarkräfte verursacht. Hiermit ist insbesondere dann zu rechnen, wenn die Partikeln porös sind.

Besonders nachteilig können Gewölbeschalen dann werden, wenn sie innerhalb der Ausflußtrichter entstehen und unmittelbar an die Trichterwände angrenzen. Dann kann die Auflösung nicht mehr durch seitliche Zufuhr von Partikeln erfolgen. Eine Gewölbeauflösung ist nur dadurch möglich, daß der Reibungskoeffizient zwischen Gut und Rohrwand nicht an allen Stellen gleich ist. Angenähert kann man sich den Auflösungs Vorgang an Hand von *Bild 11.4b* dann so vorstellen, daß an der Begrenzungswand 2 der Reibungskoeffizient geringer ist als an Wand 1 und das Gut an Wand 2 leichter in Bewegung gerät und somit zur Umbildung einer instabilen Gewölbeschale mit negativem Krümmungsradius führt. Aus diesen physikalischen Bedingungen leitet sich die Vorschrift ab, den Trichter so zu gestalten, daß sich an seinen Wänden unterschiedliche Reibungsverhältnisse ergeben. Das läßt sich nicht nur durch Formgebung, sondern auch durch günstige Wahl der Wandwerkstoffe erreichen. Über den Einfluß solcher Maßnahmen auf den Ausflußvorgang macht DUBACH [11.9] zahlreiche Angaben. Hat der Bunkerausfluß einen stationären Zustand erreicht, dann lassen sich im Bunker verschiedene Bewegungszustände der Partikelmasse feststellen, die nach Angaben von BROWN und RICHARDS [11.8] am Beispiel eines Bunkers mit horizontaler Grundplatte in *Bild 11.5* angegeben sind. Danach hat man zwischen Zonen bewegter und ruhender Kornmassen zu unterscheiden, die mit den großen Buchstaben *A* bis *E* bezeichnet sind. Die Grenzlinien zwischen den Zonen sind mit den kleinen Buchstaben *a* bis *e* bezeichnet.

Auf der geneigten Schüttgutoberfläche *a* rollen die Partikeln auf der Hanglage *A* hinab. Diese Lage gleitet wiederum über die tieferliegende Schicht *B*. Die zwischen den Schichten *A* und *B* liegende Trennfläche *b* ist in den meisten Fällen nur schlecht zu erkennen. Je nach Art der Kornmasse fallen die Zonen *A* und *B* auch zusammen. Das ist auch bei den Ausflußvorgängen der Fall, von denen in den *Bildern 11.1* und *11.2* photographische Aufnahmen wiedergegeben sind. Durch die Trennfläche *e* werden die Zonen bewegter Kornmassen (aktive Zonen) von der Zone *E* der ruhenden Kornmasse (passive Zone) getrennt. Die Kontur der passiven Zone *E* ändert sich während des Ausflußvorganges nur dann, wenn die Schüttguthöhe abnimmt. Während des gesamten Ausflußvorganges bleibt der dynamische Böschungswinkel β an der Schüttgutoberfläche erhalten, was auch die photographischen Aufnahmen zeigen. Die Größe des dynamischen Böschungswinkels hängt von den Fließeigenschaften, also von der inneren Reibung des Schüttgutes, ab.

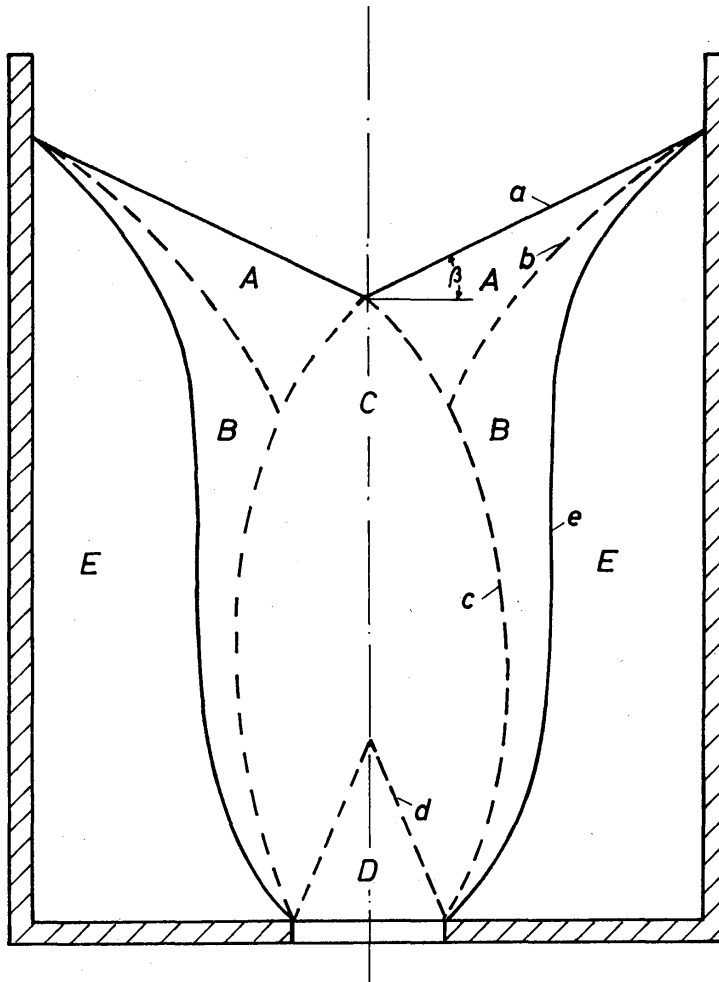


Bild 11.5
Zur Erläuterung der
Zustandszonen einer
Kornmasse im Bunker

Die Bunkermitte wird nahezu völlig durch Zone C erfüllt, in welcher die Bewegung der Kornmasse im wesentlichen stattfindet. Die Zone C hat im unteren Bereich näherungsweise die Form eines mehr oder weniger gestreckten Rotationsellipsoids. Unmittelbar oberhalb der Ausflußöffnung befindet sich die Zone D, in welcher der Lückengrad seinen größten Wert erreicht und die Partikelgeschwindigkeit somit am größten ist. BROWN und RICHARDS [11.8] geben an, daß die Partikelgeschwindigkeit in diesem Bereich einen Wert von etwa $1/100$ ihrer freien Fallgeschwindigkeit in Luft erreicht. Ähnliche Bewegungszonen, wie sie an Hand von Bild 11.5 geschildert wurden, treten in allen Bunkerformen auf, was auch aus den Bildern 11.1 und 11.2 hervorgeht.

Von besonderer Bedeutung für den praktischen Betrieb von Bunkern ist das Verhältnis von aktivem zu passivem Inhalt bzw. von bewegtem zu ruhendem Inhalt. Wird der Bunker stetig beschickt und wird ihm gleichzeitig Kornmasse stetig entnommen, dann lassen die Bilder und die Erläuterungen eindeutig erkennen, daß nur ein begrenztes Volumen des Bunkerinhalts am Durchfluß teilnimmt. Alle praktischen Maßnahmen müssen also darauf gerichtet sein, die aktive Zone zu vergrößern und die passive Zone zu verkleinern.

Die Größe der aktiven Zone hängt von der Beweglichkeit der einzelnen Partikeln innerhalb der Kornmasse ab, die insbesondere durch die Partikelform bestimmt wird. Einflüsse, die insbesondere von der Wirksamkeit elektrostatischer und von der Waalsscher Kräfte herrühren, sollen bei dieser Betrachtung außer acht gelassen werden. SCHULZE [11.11] unterscheidet zwischen drei Kornformen, die in

Bild 11.6 angegeben sind. Form 1 kennzeichnet rundliche Körner, Form 2 eckige Körner von unregelmäßiger Form und Form 3 scharfkantige Körner mit sehr unregelmäßiger Form. Je stärker die Form von der rundlichen abweicht, desto schlechter ist die Beweglichkeit der Körner. Die Beweglichkeit der Körner wird weiterhin auch noch von der Rauhgigkeit der Kornoberfläche maßgeblich bestimmt.

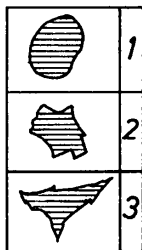


Bild 11.6
Charakteristische Kornformen

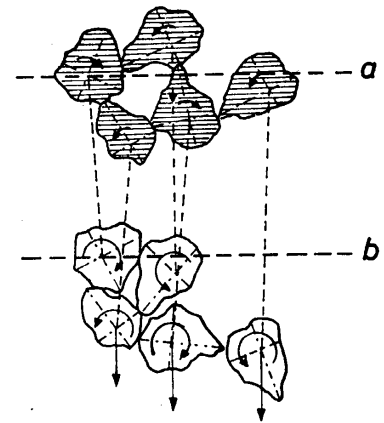


Bild 11.7. Zur Erläuterung der Primär- und der Sekundärbewegung eines Schüttgutes

Wenn bisher von Beweglichkeit der Körner gesprochen wurde, dann wird, der Einteilung von KVAPIL [11.5, 11.12] folgend, darunter die Sekundärbewegung verstanden, die neben der Primärbewegung auftritt. In *Bild 11.7* stellt die zwischen den Ebenen *a* und *b* zurückgelegte Bewegung die Primärbewegung der Körner dar. Die Sekundärbewegung führt zu einer Umorientierung der Körner innerhalb der Kornmasse. Man erkennt unmittelbar, daß die Sekundärbewegung eine um so stärkere Auflockerung der Kornmasse, also eine um so stärkere Vergrößerung des Lückengrades, verlangt, je unregelmäßiger und scharfkantiger die Form und je rauher die Oberfläche der Körner ist. Aus dieser Bewegungsanalyse geht der Unterschied zwischen der Bewegung einer Kornmasse und eines Fluids hervor.

Primär- und Sekundärbewegung der Partikeln bestimmen die Fließbewegungsfähigkeit der Kornmassen. KVAPIL unterteilt die Kornmassen in vier Gruppen:

- A* Schüttgut (Zement, Sand, Getreide, Schotter),
- B* Teilschüttgut (feuchter Sand),
- C* grobstückiges Schüttgut (Gestein, Erz, Kohle),
- D* nicht schüttbares Gut (keramische Tone).

Die unterschiedliche Fähigkeit dieser Schüttgutgruppen, eine Primärbewegung *P* und eine Sekundärbewegung *S* auszuführen, ist in *Bild 11.8* in stark schematisierter Weise angegeben. Je rundlicher die Körner und je glatter ihre Oberfläche ist, desto leichter führen die Partikeln die Sekundärbewegung durch und desto leichter geht die Kornmasse in die Fließbewegung über. Sind die Körner indes sehr unregelmäßig und scharfkantig geformt und weisen darüber hinaus eine rauhe Oberfläche auf, dann sind die Voraussetzungen für die Sekundärbewegung außerordentlich schlecht.

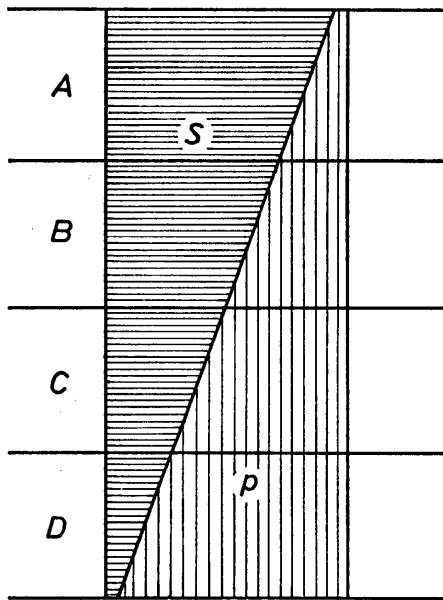


Bild 11.8. Einteilung der Kornmassen nach der Beweglichkeit

Der Ausfluß von Kornmassen aus Bunkern hängt vor allem davon ab, wie gut die Fähigkeit der Partikeln zur Ausführung von Sekundärbewegungen entwickelt ist. Sie bestimmt die Ausbildung der Bunker mit Auslauftrichter und Auslauföffnung. Obwohl noch keine allgemein verbindlichen Vorschriften für die Bunkergestaltung gemacht werden können, gibt KVAPIL [11.5 und 11.13] jedoch viele wertvolle Hinweise.

Da zur Durchführung der für die Fließbewegung besonders wichtigen Sekundärbewegung der Lückengrad einen Mindestwert aufweisen muß, der um so größer ist, je scharfkantiger die Körner und rauher ihre Oberflächen sind, kann man selbstverständlich Maßnahmen treffen, den Lückengrad zu erhöhen. Die einfachste und technisch leicht zu verwirklichende Maßnahme besteht darin, einen Luftstrom von unten her durch die Partikelschicht zu leiten. Hiervon wird heute bereits vielfach Gebrauch gemacht [11.14]. Diese Maßnahme führt dann gemäß den früheren Ausführungen zu einer wesentlichen Verbreiterung der aktiven Zone.

Eine Verbreiterung der aktiven Zone und somit eine verhältnismäßig gleichförmige Fließbewegung über den gesamten Bunkerquerschnitt läßt sich nach KVAPIL und TANAKA [11.15] auch durch Schildeinbauten oberhalb der Auslauföffnung gemäß *Bild 11.9* oder auch durch Einbau eines Siebbodens gemäß *Bild*

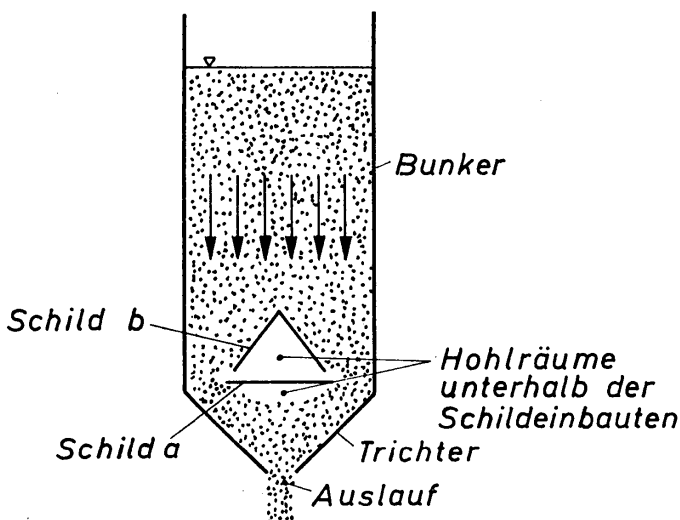


Bild 11.9. Einbau von zwei verschiedenen Schildformen a und b in einem Bunker zur Erzielung einer gleichförmigen Fließbewegung

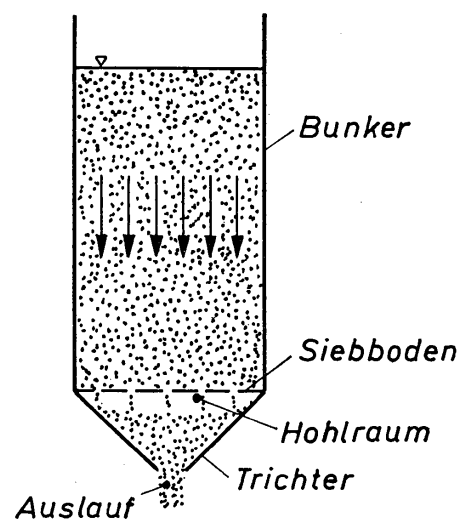


Bild 11.10. Einbau eines Siebbodens zur Erzielung einer gleichförmigen Fließbewegung im Bunker

11.10 erreichen. Voraussetzung ist dafür aber, daß es sich um ein Schüttgut mit guten Fließeigenschaften handelt. Bei Verwendung von Siebböden muß die günstigste Wahl der Lochdurchmesser und der Lochabstände durch Versuche ermittelt werden.

11.2 Ausfluß aus Bunkern

In diesem Abschnitt sollen Gleichungen für den aus einem Bunker austretenden Massenstrom mitgeteilt werden. Da es noch keine befriedigende Theorie für den Bunkerausfluß gibt, ist man also vornehmlich auf experimentelle Untersuchungen angewiesen, deren Ergebnisse mit Hilfe von Kennzahlen durch empirische Gleichungen dargestellt werden.

11.21 Einige experimentell gewonnene Erkenntnisse

Die Ausführungen im vorausgegangenen Abschnitt haben bereits erkennen lassen, daß der Ausfluß aus Bunkern von einer sehr großen Zahl von Einflußgrößen abhängt. Die Bedeutung der für den Ausfluß besonders wichtigen Einflußgrößen läßt sich auf Grund zahlreicher experimenteller Untersuchungen aufzeigen, von denen hier diejenigen von HAMPEL [11.16], ROSE und TANAKA [11.17], TANAKA und KAWAI [11.18] sowie die von FRANKLIN und JOHANSON [11.19] genannt seien. In diesen Arbeiten findet man das wesentliche Schrifttum zu diesem Problemkreis zitiert.

Bezeichnet man den Massenstrom des aus einer Öffnung austretenden Schüttgutes mit \dot{M} , dann lassen die experimentellen Untersuchungen folgende Abhängigkeiten erkennen:

$$\begin{aligned} \dot{M} &\sim d^{2,5} \text{ bis } d^{2,96}, \\ \dot{M} &\sim h^{0,5} \text{ bis } h^0, \\ \dot{M} &\sim (\operatorname{tg} \theta/2)^{0,32}, \\ \dot{M} &\sim \rho_p, \\ \dot{M} &\sim d_p^{-0,18} \text{ bis } d_p^{-1}, \\ \dot{M} &\sim g^{1/2}. \end{aligned}$$

Die hierin auftretenden Größen sind teilweise bereits in den vorausgegangenen Bildern erläutert. Es bedeuten d den Durchmesser der Ausflußöffnung, h die Höhe der Schüttschicht, θ den Öffnungswinkel des Trichters gemäß *Bild 11.3*, ρ_p die Dichte der Partikel, d_p den Durchmesser der Partikel und g die Erdbeschleunigung. Über den Einfluß des inneren Reibungsbeiwertes μ des Schüttgutes, der dem Tangens des in *Bild 11.5* eingezeichneten Böschungswinkels β gleichgesetzt wird, lassen sich noch keine eindeutigen Aussagen machen. Nach der obigen Aufstellung besteht offensichtlich noch die größte Unsicherheit über die Abhängigkeit des Massenstromes \dot{M} von der Schütthöhe h und vom Partikeldurchmesser d_p .

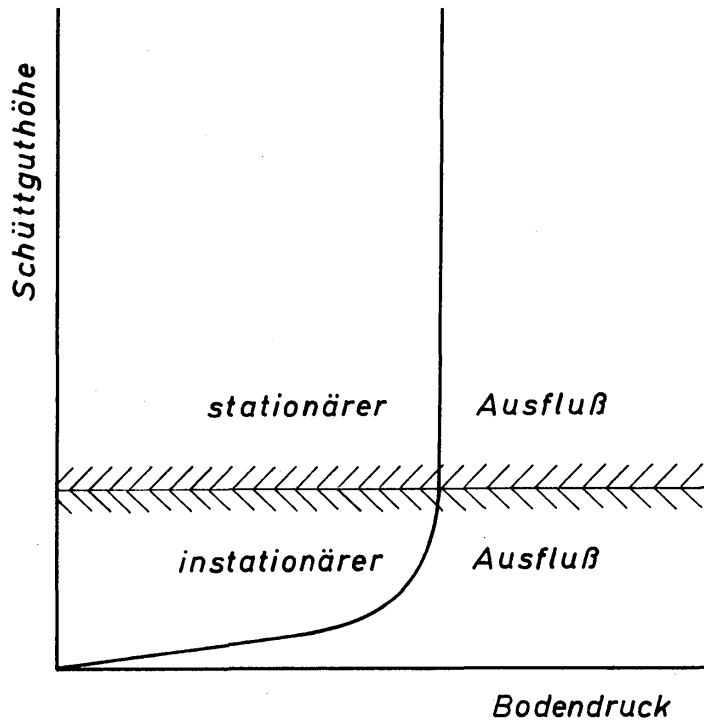


Bild 11.11

Zusammenhang zwischen Bodendruck und Schütthöhe

Ein Einfluß der Schütthöhe h auf den Massenstrom \dot{M} setzt voraus, daß sich der vom Feststoff auf den Bunkerboden ausgeübte Druck mit der Höhe h ändert. Nach Angaben von HAMPEL [11.16] ist der Zusammenhang zwischen Bodendruck und Schütthöhe h in *Bild 11.11* dargestellt. Ganz ähnliche Angaben machen zahlreiche andere Experimentatoren. Hiernach bleibt der Bodendruck nahezu bis zur vollständigen Entleerung konstant. Erst bei sehr geringen Schütthöhen ändert sich der Bodendruck. Der Einfluß der Schütthöhe ist daher nur dann interessant, wenn die Schütthöhe sehr klein ist. Dann ist aber auch, was besonders zu beachten ist, der Ausfluß instationär. Beschränkt man sich auf den stationären Ausflußzustand, dann darf man also den Einfluß von h vernachlässigen.

Über den Einfluß des Partikeldurchmessers d_p auf den Massenstrom \dot{M} lassen sich keine eindeutigen Aussagen machen. Form der Partikel, Rauigkeit der Oberflächen und Bindekräfte vermögen den Einfluß des Partikeldurchmessers mitzubestimmen. In einer der bislang vollständigsten Gleichungen, die von ROSE und TANAKA [11.17] aufgestellt wurde, treten daher auch neben dem Partikeldurchmesser d_p zusätzlich ein Formfaktor z und eine die zwischen den Partikeln wirksame Kohäsionskraft K enthaltene Größe auf. Es ist aber noch keineswegs geklärt, wie man die Kohäsionskraft K eindeutig bestimmen soll und von welchen physikalischen und chemischen Einflüssen sie mitbestimmt wird. Aus diesem Grunde scheint es offensichtlich noch nicht sinnvoll zu sein, Formfaktor und Kohäsionskraft in einer Gleichung zur Berechnung des Massenstromes \dot{M} zu berücksichtigen. Einen sehr guten Einblick in die Abhängigkeit des Massenstromes \dot{M} vom Partikeldurchmesser d_p erhält man aus *Bild 11.12*. Hierin sind Meßwerte von FRANKLIN und JOHANSON [11.19] eingetragen, die für Sandkörner und Glaskugeln gelten. Nähere Angaben zu den Versuchsbedingungen sind in *Tabelle 11.1* zusammengestellt. Aus *Bild 11.12* geht hervor, daß der Massenstrom mit zunehmendem Partikeldurchmesser abnimmt und für alle Versuchsbedingungen die Proportionalität $\dot{M} \sim d_p^{-0,25}$ besteht.

Tabelle 11.1:

Angaben zu den Versuchen von FRANKLIN und JOHANSON (11.19)

Zeichen in Bild 11.12	Material	Ausflußdurch- messer d (mm)	Öffnungs- winkel θ	Böschungswinkel
×	Glas	15,6	180°	25°
●	Sand	11,74	60°	38°
○	Sand	9,0	60°	38°
+	Sand	6,6	60°	38°

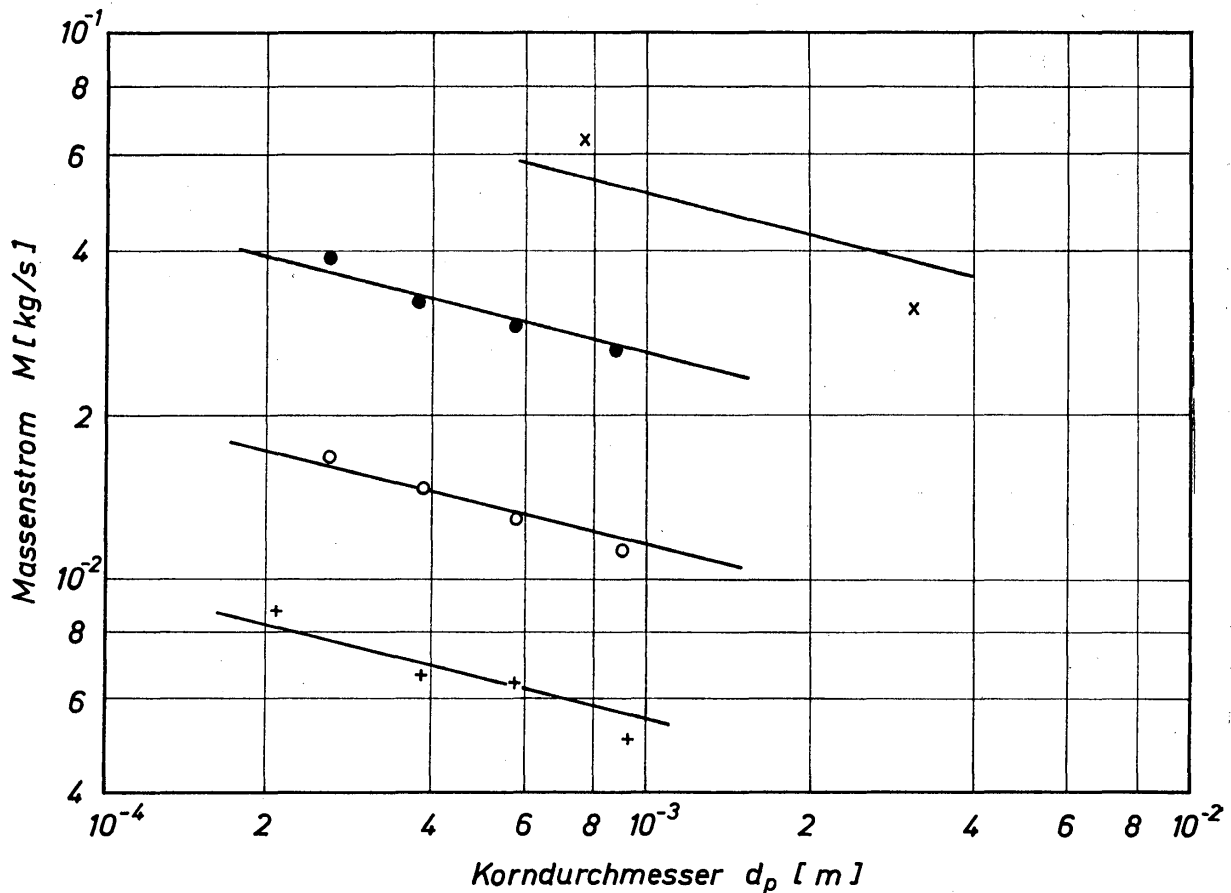


Bild 11.12. Abhängigkeit des Massenstroms \dot{M} vom Partikeldurchmesser d_p ; Angaben zu den Meßwerten sind in Tabelle 11.1 zusammengestellt

Von den gleichen Experimentatoren wurde auch der Einfluß des Ausflußdurchmessers auf den Massenstrom untersucht und die Proportionalität $\dot{M} \sim d^{2,8}$ gefunden. Bei den Versuchen wurde d zwischen 9 mm und 58 mm und der Partikeldurchmesser d_p zwischen 0,62 mm und 4,7 mm geändert. Die hier mitgeteilten Einflüsse auf den Massenstrom werden bei der Aufstellung einer empirischen Gleichung berücksichtigt.

11.22 Ähnlichkeitskennzahlen des Ausflußvorganges

Eine Analyse des Ausfließens von Schüttgütern aus Bunkern ergibt die folgenden Einflußgrößen:

$$\dot{M}; D; d; h; \theta; d_p; \rho_p; \mu = \operatorname{tg} \beta; g; z; K.$$

Nach den Regeln der Dimensionsanalyse lassen sich hieraus acht Kennzahlen bilden:

$\frac{\dot{M}}{d^{2,5} g^{0,5} \rho_p}$	bezogener Massenstrom,
h/d	Höhenverhältnis,
D/d	Durchmesser Verhältnis,
d_p/d	Durchmesser Verhältnis,
$\mu = \operatorname{tg} \beta$	Reibungsbeiwert,
θ	Öffnungswinkel des Auslauftrichters,
z	Formfaktor,
$\frac{K}{d_p^3 g \rho_p}$	bezogene Kohäsionskraft.

Wie bereits früher festgestellt, entfällt das Höhenverhältnis h/d bei stationärem Ausfluß. Ferner entfällt aber auch das Durchmesser Verhältnis D/d , wenn es sehr groß im Vergleich zu 1 ist. Schließlich muß auf die Berücksichtigung des Formfaktors z und der bezogenen Kohäsionskraft verzichtet werden, da über diese beiden Größen noch keine ausreichenden Kenntnisse vorliegen. Somit läßt sich also nur folgendes Ähnlichkeitsgesetz aufstellen:

$$\frac{\dot{M}}{d^{2,5} g^{0,5} \rho_p} = f\left(\frac{d_p}{d}; \mu; \theta\right). \quad (11.1)$$

Erst weitere experimentelle und theoretische Versuche können dazu beitragen, dieses in seiner Gültigkeit stark eingengte Gesetz auszubauen. Es wird im folgenden dazu verwendet, Ausflußgleichungen für Bunker mit symmetrischen und unsymmetrischen Trichtern aufzustellen.

11.23 Ausflußgleichung für Bunker mit symmetrischem Trichter

Für den Ausfluß aus Bunkern mit symmetrischem Trichter gemäß *Bild 11.3* und kreisförmiger Ausflußöffnung hat RIEDEL [11.20] die folgende empirische Gleichung aufgestellt:

$$\frac{\dot{M}}{d^{2,5} g^{0,5} \rho_p} = 0,137 \left[\frac{d}{d_p} - 3 \right]^{-0,25} \mu^{-0,65} \theta^{-0,36}. \quad (11.2)$$

Der Öffnungswinkel θ des Auslauftrichters ist im Bogenmaß einzuführen; ferner ist der Reibungsbeiwert $\mu = \operatorname{tg} \beta$, wobei β den Böschungswinkel gemäß *Bild 11.5* bedeutet. Der Ausdruck $(d/d_p) - 3$ bringt das Beobachtungsergebnis zum Ausdruck, wonach der Ausfluß zum Erliegen kommt, wenn das Durchmesser Verhältnis d/d_p gleich oder kleiner als 3 wird.

In *Bild 11.13* ist Gl. (11.2) durch Kurve *a* wiedergegeben. Nähere Angaben zu den in diesem Bild dargestellten Meßwerten sind in Tabelle 11.2 zu finden. Die Tabelle läßt erkennen, daß die für den Ausflußvorgang wesentlichen Größen in weiten

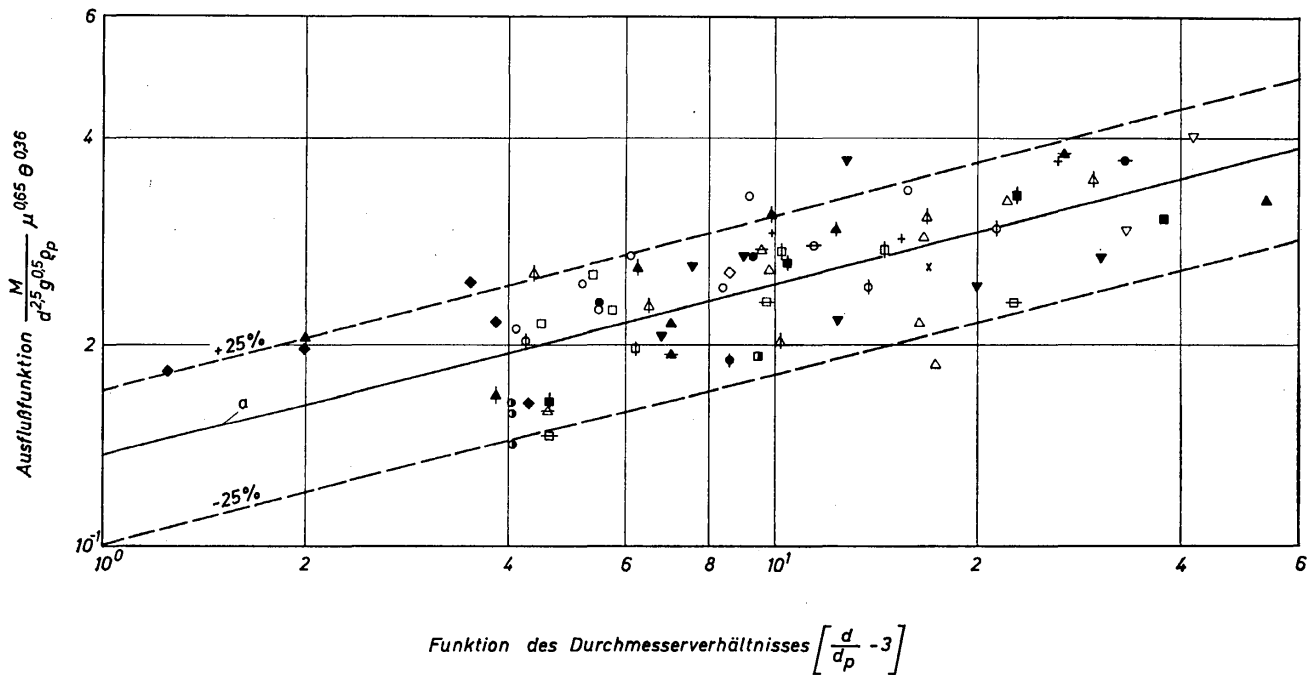


Bild 11.13. Abhängigkeit der Ausflußfunktion von der Durchmesserfunktion für den freien Ausfluß von Kornmassen aus Bunkern mit symmetrischen Trichtern und kreisförmigen Ausflußöffnungen

Tabelle 11.2: Angaben zu den in Bild 11.13 dargestellten Meßwerten

Zeichen in Bild 11.13	Zitat	Material	Korndurchmesser d_p (mm)	Korndichte ρ_p (kg/m ³)	Ausflußdurchmesser d (mm)	Öffnungswinkel des Trichters θ°	Böschungswinkel β°
▽	[11.8]	Glaskugeln	1,1	2900	50,0	180	25
▽		Sand	0,55	2640	20,0	180	34
▲		Sand	2,54	2500	25,4	180	36
▲		Sand	2,54	2500	76,2	180	36
▲		Sand	2,54	2500	76,2	180	36
●		Sand	0,55	2640	10,0	180	34
●		Sand	0,55	2640	20,0	180	34
■	[11.17]	Sand	0,16	2700	6,7	180	35
○		Sand	0,95	2800	6,7	60	38
○		Sand	0,95	2800	6,7	90	38
○		Sand	0,95	2800	6,7	120	38
□		Sand	0,95	2800	11,9	30	38
□		Sand	0,95	2800	11,9	60	38
□		Sand	0,95	2800	11,9	90	38
□		Sand	0,95	2800	11,9	120	38
□		Sand	0,95	2800	11,9	180	38
▲		Sand	0,204	2700	11,74	60	35
▲		Sand	0,576	2700	11,74	60	40
▲		Sand	0,910	2700	11,74	60	42
▽		Sand	0,268	2700	9,0	60	35
▽		Sand	0,390	2700	9,0	60	37
▽		Sand	0,576	2700	9,0	60	41
▽		Sand	0,910	2700	9,0	60	42
⊕		Sand	0,268	2700	6,6	60	35
⊕		Sand	0,390	2700	6,6	60	37

Fortsetzung der Tabelle 11.2 siehe S. 600

Zeichen in Bild 11.13	Zitat	Material	Korndurch- messer d_p (mm)	Korndichte ρ_p (kg/m ³)	Ausfluß- durchmesser d (mm)	Öffnungs- winkel des Trichters θ°	Böschung- winkel β°
○	[11.17]	Sand	0,576	2 700	6,6	60	40
○		Sand	0,910	2 700	6,6	60	42
□		Sand	0,204	2 700	3,6	60	35
□		Sand	0,268	2 700	3,6	60	35
□		Sand	0,390	2 700	3,6	60	37
●	[11.19]	Bleikugeln	1,27	10 650	10,8	180	24
●		Bleikugeln	1,27	10 650	15,6	180	24
○		Tonzylinder	2,87	1 280	20,3	180	32
○		Tonzylinder	2,87	1 280	23,5	180	32
○		Tonzylinder	2,87	1 280	26,1	180	32
○		Tonzylinder	2,87	1 280	35,0	180	32
+		Sand	0,62	2 640	8,0	180	38
+		Sand	0,62	2 640	11,5	180	38
+		Sand	0,62	2 640	18,2	180	38
+		Sand	0,62	2 640	27,0	180	38
×		Sand	0,15	4 680	3,0	180	32
×		Sand	0,15	4 680	23,4	180	32
×		Sand	0,15	4 680	38,0	180	32
□		Samen	1,72	1 100	15,0	180	24
□		Samen	2,0	1 200	15,0	180	27
□		Bleikugeln	1,8	10 650	15,0	180	23
◇		Glaskugeln	5,0	2 560	34,3	180	25
◇		Glaskugeln	5,0	2 560	58,0	180	25
◆		Tonzylinder	4,7	1 520	34,4	180	28
◆		Glaskugeln	3,52	2 560	15,0	180	25
◆		Bleikugeln	2,0	10 650	10,0	180	23
◆		Reis	5,2	117	34,5	180	34
▼		Bleikugeln	1,27	10 650	15,6	180	24
▼		Katalysator	3,3	1 280	35,0	180	29
▼		Sand	3,3	2 640	49,0	180	29
▽		Sand	0,16	3 200	3,0	180	34
▲		Bleikugeln	2,0	10 650	10,0	180	24
▲		Glaskugeln	0,79	2 800	6,0	180	28
▲		Glaskugeln	0,79	2 800	7,55	180	28
▲		Glaskugeln	0,79	2 800	10,8	180	28
▲		Glaskugeln	0,79	2 800	15,6	180	28
▲		Glaskugeln	0,79	2 800	26,0	180	28
●		Glaskugeln	5,0	2 560	34,5	180	25
●		Glaskugeln	5,0	2 560	58,0	180	25
■		Resinkugeln	0,79	1 470	6,0	180	24
■		Resinkugeln	0,79	1 470	10,7	180	24
■		Resinkugeln	0,79	1 470	20,3	180	24
▲		Tonzylinder	3,8	1 320	35,0	180	38
▲		Tonzylinder	3,8	1 320	49,0	180	38
▲		Tonzylinder	3,8	1 320	58,0	180	38
□		Sand	0,79	3 320	6,0	180	37
□		Sand	0,79	3 320	10,7	180	37
□		Sand	0,79	3 320	20,3	180	37
⊖		Sand	4,0	3 320	34,2	180	39
⊖		Sand	4,0	3 320	58,0	180	39
△		Kohle	0,79		6,0	180	34
△		Kohle	0,79		10,7	180	34
△		Kohle	0,79		15,6	180	34
△		Kohle	0,79		20,3	180	34

Grenzen geändert wurden. Die Kornmaterialien waren Glas, verschiedene Sandsorten, Ton, Blei, Kohle, Kunststoffe und Erntegüter, wobei sich die Dichte ρ_p der Partikeln zwischen 10650 kg/m^3 bis 117 kg/m^3 änderte. Die Partikeldurchmesser d_p lagen zwischen $0,15 \text{ mm}$ und $5,0 \text{ mm}$ und die Durchmesser d der Auslauföffnungen zwischen 3 mm und $76,2 \text{ mm}$. Die Öffnungswinkel θ der Auslauftrichter wurden bei den Versuchen zwischen 30° und 180° geändert. Die in Bild 11.13 gestrichelt eingezeichneten Kurven geben die von Kurve *a* aus gerechneten Abweichungen von $\pm 25\%$ an. Es zeigt sich, daß nur eine sehr kleine Zahl von Meßwerten außerhalb dieser Kurven liegen. Das heißt also, daß Gl. (11.2) für die praktische Berechnung des Ausflusses eine für viele technische Zwecke ausreichende Genauigkeit besitzt. Die noch vorhandene Ungenauigkeit ist vornehmlich darauf zurückzuführen, daß der Reibungsbeiwert μ nicht alle für die Beweglichkeit der Partikeln maßgebenden Einflüsse zu erfassen vermag.

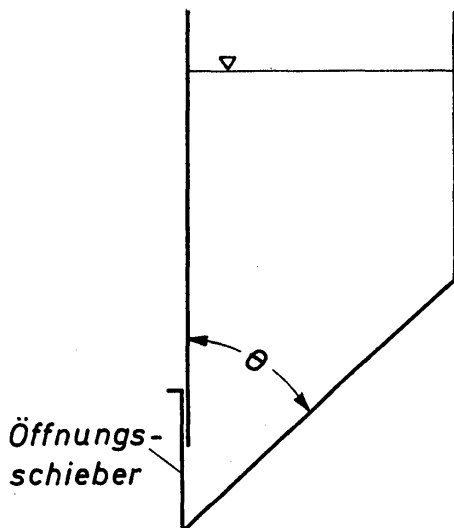
Eine weitere Gleichung zur Berechnung des Massenausflusses hat TANAKA [11.21] mitgeteilt, die in der hier verwendeten Schreibweise folgendermaßen lautet:

$$\frac{\dot{M}}{d^{2,5} g^{0,5} \rho_p} = 0,18 \left(\frac{d}{d_p} \right)^{0,2} \left[\mu \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right]^{-0,32}. \quad (11.3)$$

Diese Beziehung verfügt über einen nicht ganz so großen Anwendungsbereich wie Gl. (11.2). Es ist zu beachten, daß $\dot{M} = 0$ erst dann auftritt, wenn $d = d_p$ wird, was mit experimentellen Befunden nicht übereinstimmt. Ferner würde \dot{M} unendlich groß werden bei $\theta = 180^\circ$, was ebenfalls den experimentellen Ergebnissen widerspricht. Die Gl. (11.3) darf also nur angewendet werden für $d > 3 d_p$ und $\theta < 180^\circ$. Zu ähnlichen Ergebnissen, wie sie durch die Gleichungen (11.2) und (11.3) zum Ausdruck kommen, ist auch RAUSCH [zitiert in 11.3] auf Grund umfangreicher Untersuchungen gekommen.

11.24 Ausflußgleichung für Bunker mit unsymmetrischem Trichter

TANAKA und KAWAI [11.18] haben den Ausfluß aus Bunkern mit unsymmetrischem Trichter experimentell untersucht. Bild 11.14 zeigt eine schematische Darstellung der verwendeten Versuchsbunker. Der Öffnungswinkel θ des Trichters kann sich



äußerstenfalls zwischen 0° und 90° ändern. Bei den Versuchen von TANAKA und KAWAI betrug der Öffnungswinkel 30° , 45° und 60° . Im Gegensatz zu KVAPIL, der bei seinen Versuchen Trichter mit $\theta = 45^\circ$ und $\theta = 60^\circ$ verwendete und keinen Einfluß von θ feststellte, fanden TANAKA und KAWAI einen geringen Einfluß des Öffnungswinkels auf den ausfließenden Massenstrom \dot{M} .

Bild 11.14

Schema von einem Bunker mit unsymmetrischem Trichter und rechteckförmiger Ausflußöffnung

Den größten Einfluß auf \dot{M} übt jedoch die Form der Ausflußöffnung aus. Ist a die Höhe und b die Breite der rechteckigen Ausflußöffnung, dann ergibt sich der maximale Massenstrom \dot{M} bei Verhältniswerten, die etwa zwischen $a/b = 1,1$ bis $1,7$ liegen. Im Bereich kleinerer und größerer Werte von a/b nimmt \dot{M} sehr stark ab. Die von TANAKA und KAWAI [11.18] mitgeteilte Ausflußformel lautet:

$$\frac{\dot{M}}{d^{2,5} g^{0,5} \rho_p} = 0,055 \left(\frac{b}{d_p}\right)^{1,7} \cdot \left(\frac{a}{d_p} - \mu^{-10}\right)^{1,06} \cdot (\operatorname{tg} \theta)^{-0,27}, \quad (11.4)$$

Etwa 400 Meßwerte aus Versuchen mit Quarzsand werden durch diese Gleichung in befriedigender Weise wiedergegeben. Die Abweichung der Meßwerte von Gl.(11.4) beträgt nur in Ausnahmefällen mehr als 20%. Der Reibungsbeiwert $\mu = \operatorname{tg} \beta$ änderte sich bei den Versuchen nur innerhalb des Bereiches von etwa 0,8 bis 0,9, so daß der Ausdruck μ^{-10} in der Größenordnung von 9 bis 3 liegt. Ob Gl.(11.4) für andere Werte von μ noch zuverlässige Angaben über den Massenstrom \dot{M} liefert, wird man durch weitere Versuche prüfen müssen.

Durch Vergleich ihrer Versuche an Bunkern mit symmetrischen und unsymmetrischen Auslauftrichtern stellten TANAKA und KAWAI fest, daß der Ausflußwiderstand beim Bunker mit unsymmetrischem Trichter etwa zwei- bis dreimal größer ist als beim Bunker mit symmetrischem Trichter. Trotz dieses erheblichen Vorteiles des symmetrischen Trichters zwingen praktische Forderungen häufig zur Anwendung des unsymmetrischen Trichters. Die dabei auftretenden Probleme in Zusammenhang mit Gewölbebildungen hat KVAPIL [11.22] eingehend studiert. Auch aus der Arbeit von HAMPEL [11.16] geht eindeutig hervor, daß jede Ausflußöffnung, die von der Kreisform abweicht, zu einem geringeren Ausfluß führt.

11.3 Fließen von Kornmassen durch geneigte Rohre

Um Kornmassen von einem Behälter in einen anderen zu bewegen, kann man sich des Gravitationsflusses bedienen. In den Behältern können sich beispielsweise dichte Wirbelschichten befinden, in denen nacheinander bestimmte Prozesse durchgeführt werden. TREES [11.23] hat in einigen Versuchen die Durchflußmöglichkeit durch Rohre mittels einer Einrichtung untersucht, die in schematisierter Form in *Bild 11.15* dargestellt ist. Ein Rohr von der Länge L und dem Durchmesser d ragt in einen größeren Vorratsbehälter, von dem die Kornmasse in das Rohr eintritt. Die verwendeten Rohre hatten Durchmesser von $d = 26,2$ mm, 51,6 mm, 79,4 mm, 104 mm und 105 mm; die Rohrlängen betragen 915 mm, 1830 mm und 2745 mm. Ferner wurden bei den Versuchen die Neigungswinkel α zu 45° , 60° und 75° eingestellt. Über den Lückengrad der Kornmasse, d. h. über die Füllung des Rohres während der Fließbewegung, werden vom Experimentator keine Aussagen gemacht. Das verwendete Kornmaterial waren zwei Eisenerze mit unterschiedlichem Schüttgewicht, ohne daß hierüber und über die Kornanalyse an dieser Stelle nähere Angaben gemacht werden sollen.

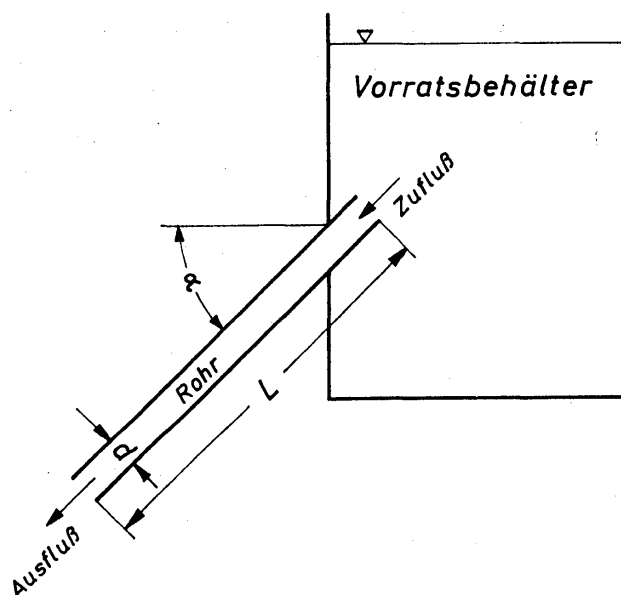


Bild 11.15. Versuchsanordnung zur Untersuchung der Fließbewegung von Kornmassen durch geneigte Rohre

TREES stellt seine Versuchsergebnisse durch die grobempirische Gleichung

$$\dot{M} = \text{const } d^{2,5} \alpha^{2,5} \quad (11.5)$$

dar. Unter Berücksichtigung der im vorangegangenen Abschnitt erörterten Ausflußgleichungen liegt es nahe, Gl.(11.5) in die folgende Form zu bringen:

$$\frac{\dot{M}}{d^{2,5} (g \sin \alpha)^{0,5} \rho_p} = \text{const } (\sin \alpha)^n. \quad (11.6)$$

In dieser dimensionslosen Schreibweise bietet die Ausflußgleichung einen sinnvollen Ansatzpunkt für weitere Versuche. Dabei sollte jedoch unbedingt näherer Aufschluß über den Füllungsgrad des Rohres erhalten werden. Erwähnt sei schließlich, daß TREES weitere Versuche unter Berücksichtigung verschiedener Druckgradienten in den Rohren durchgeführt hat.

Die Förderung von Feststoffmassen in aufgewirbelter Form durch Kanäle wurde eingehend von SIEMES [11.24], HELLMER [11.25] und KEUNEKE [11.26] untersucht. In den zitierten Arbeiten ist das gesamte moderne Schrifttum zu diesem Problem aufgeführt.

Schrifttum

- [11.1] H. KRUPP, Particle adhesion, Theory and experiment, *Advances Colloid. Interface Sci.* 1 (1967) 2, 111–239
- [11.2] G. BOEHME, H. KRUPP, H. RABENHORST und G. SANDSTEDT, Adhesion measurements involving small particles, *Third Congress of the European Federation of Chemical Engineering, London, 20. bis 29. Juni 1962, Abh. D 18–D 25.* Inst. Chem. Eng. London 1962
- [11.3] ● F. A. ZENZ und D. F. OTHMER, *Fluidization and Fluid-Particle Systems*, Reinhold, New York 1960

- [11.4] A. W. JENICKE, Gravity flow of solids, *Third Congress of the European Federation of Chemical Engineering, London, 20. bis 29. Juni 1962, Abh. D26–D33*, Inst. Chem. Eng. London 1962
- [11.5] ● R. KVAPIL, *Schüttgutbewegungen in Bunkern*, VEB-Verlag Technik, Berlin 1959
- [11.6] H. WÖHLBIER und W. REISNER, Fragen der Bunkerung von mittel- und feinkörnigem Schüttgut, *Chem.-Ing.-Techn.* 34 (1962) 9, 603–9
- [11.7] R. KVAPIL, Probleme des Gravitationsflusses von Schüttgütern, *Aufbereitungs-Techn.* 5 (1964) 3, 139–44, und 4, 183–9
- [11.8] R. L. BROWN und J. C. RICHARDS, Exploratory study of the flow of granules through apertures, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 37 (1959) 2, 108–19
- [11.9] P. DUBACH, Neue Erkenntnisse zum Problem der Brückenbildung in Bunker- ausläufen, *Aufbereitungs-Techn.* 6 (1965) 2, 50–6
- [11.10] P. PLATONOW und E. BANIT, Die Durchlaßfähigkeit von Auslauföffnungen von Silozellen und Bunkern, *Mühle* 96 (1959) 8, 99
- [11.11] F. SCHULZE, Das Druckverhalten von Abraumböden bei Druckbelastung, *Braunkohle* 9 (1957) 19/20, 389–401
- [11.12] R. KVAPIL, Entladetrichter und Rolllöcher für grobstückiges Schüttgut und ihre Verschlüsse, *Bergbautechn.* 12 (1962) 4, 187–96
- [11.13] R. KVAPIL, Problematik der Konstruktion von Bunkern für Schütt- und Teilschüttgüter, *Bergbautechn.* 10 (1960) 9, 466–71
- [11.14] H. MÖLLER, Siloabzug und lose Verladung von staubförmigem und feinkörnigem Schüttgut, *Aufbereitungs-Techn.* 6 (1965) 2, 65–72
- [11.15] R. KVAPIL und T. TANAKA, Bunker und Silos mit Schild, *Aufbereitungs-Techn.* 6 (1965) 2, 45–9
- [11.16] H. R. HAMPEL, Experimentelle Untersuchung einiger Einflußgrößen beim Ausfließen von Schüttgütern aus Bunkern, *Bergbauwiss.* 5 (1958) 10, 313–27
- [11.17] H. E. ROSE und T. TANAKA, Rate of discharge of granular materials from bins and hoppers, *Engineer* 208 (1959) 465–9
- [11.18] T. TANAKA und S. KAWAI, Ausfluß von Schüttgütern aus Bunkern mit einer vertikalen Wand und rechteckiger Auslauföffnung, *Aufbereitungs-Techn.* 4 (1963) 7, 282–6
- [11.19] F. C. FRANKLIN und L. N. JOHANSON, Flow of granular materials through a circular orifice, *Chem. Eng. Sci.* 4 (1955) 3, 119–29
- [11.20] K. RIEDEL, *Der Ausfluß von Schüttgütern aus Bunkern*, Studienarbeit am Lehrstuhl für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin 1965
- [11.21] T. TANAKA, What do you know about design, *Rock Products* 64 (1961, Februar) 115–20
- [11.22] R. KVAPIL, Besondere Probleme der Gravitationsbewegung von Schüttgütern, *Aufbereitungs-Techn.* 5 (1964) 10, 544–9, und 12, 642–54
- [11.23] J. TREES, A practical investigation of the flow of particulate solids through sloping pipes, *Third Congress of the European Federation of Chemical Engineering, London, 20. bis 29. Juni 1962, Abh. D43–D53*, Inst. Chem. Eng. London 1962
- [11.24] W. SIEMES, Förderung von körnigem Gut in geneigten Fließbetten, *Chem.-Ing.-Techn.* 31 (1959) 3, 212–3
- [11.25] L. HELLMER, *Das Fließen von körnigem Gut in pneumatischen Rinnen*, Dissertation, Technische Universität Berlin 1960
- [11.26] K. KEUNIKE, Fluidisierung und Fließbettförderung von Schüttgütern kleiner Teilchengröße, *VDI-Forschungsh.* 509, VDI-Verlag, Düsseldorf 1965

Teil IV

Abscheidung von Partikeln aus einer fluiden Phase

12	Filtration von Partikeln aus einer fluiden Phase	606
13	Gas- und Hydrozyklone	631

In diesem Kapitel soll in zwei Abschnitten auf einige technisch sehr bedeutsame Verfahren zur Abscheidung von Partikeln aus Flüssigkeiten und Gasen eingegangen werden. Um den Rahmen dieses Buches nicht zu sprengen, werden nur einige wenige Verfahren betrachtet. Bei der Auswahl wurden folgende Gesichtspunkte berücksichtigt. Die physikalischen Grundlagen sollten weitgehend geklärt und in den vorausgegangenen Abschnitten dieses Buches behandelt sein. Das trifft in weitem Maße für die Filtration und die Sedimentation zu. In wesentlich geringerem Maße ist das jedoch für die in Gas- und Hydrozyklonen ablaufenden Abscheidevorgänge der Fall. Trotzdem wird die Behandlung dieser beiden Apparate wegen ihrer großen technischen Bedeutung für notwendig erachtet. Einen Überblick über die technisch insgesamt angewendeten Abscheideverfahren liefern das Buch *Mechanische Verfahrenstechnik* von ULLRICH [12.1] und ein Bericht von TRAWINSKI [12.2]. Aus ihnen kann man entnehmen, daß die Mehrzahl der heute angewendeten Abscheideverfahren noch nicht in ausreichender Weise wissenschaftlich untersucht sind. Darüber hinaus erweist sich das Problem der Partikelabscheidung nach wie vor als die konstruktiv-schöpferische Tätigkeit des Ingenieurs in besonders hohem Maße herausfordernd. Für diese dem Ingenieur ureigenste Aufgabe sind die wissenschaftlichen Grundlagen der Partikelbewegung im 2. und 3. Teil des Buches bereits behandelt. Die Weiterentwicklung der Abscheideverfahren ist zwingend, wenn die im Zusammenhang mit der Reinhaltung der Luft und der Gewässer auftretenden Probleme gelöst werden sollen.

12 Filtration und Sedimentation

Die Filtration und die Sedimentation sind Verfahren zur Abscheidung fester Partikeln aus Flüssigkeiten. Für beide Abscheideverfahren sind verschiedene Anlagentypen mit absatzweisem und kontinuierlichem Betrieb entwickelt worden. Der Unterschied zwischen der Filtration und der Sedimentation besteht darin, daß für die Filtration die Druckkraft und für die Sedimentation die Schwerkraft die maßgebenden Kräfte sind. Die Druckkraft sorgt bei der Filtration dafür, daß die Flüssigkeit durch den Filterkuchen, der sich aus den abgeschiedenen Partikeln aufbaut, hindurchströmen kann. Die Schwerkraft hingegen sorgt bei der Sedimentation dafür, daß sich die Partikeln durch Sinkbewegung aus der ruhenden oder nur schwach bewegten Suspension ausscheiden. Bei der Filtration ist also eine Strömung der Suspension notwendig, bei der Sedimentation hingegen nachteilig. Für beide Abscheideverfahren werden im folgenden die Grundlagen behandelt.

12.1 Filtration

Bei der Filtration werden die in einer strömenden Suspension befindlichen festen Partikeln ausgeschieden. Den hierfür verwendeten Apparat nennt man Filter. Die in das Filter eintretende Suspension nennt man üblicherweise Trübe und die das Filter verlassende geklärte Flüssigkeit Filtrat.

12.11 Unterscheidung zwischen Bettfilter und Oberflächenfilter

Nach dem Abscheidemechanismus unterscheidet man zwei Filtertypen: das Bettfilter und das Oberflächenfilter. Das Bettfilter besteht im allgemeinen aus einer mehr oder weniger dicken Schicht von verhältnismäßig großen Partikeln, wie Sand oder Kies. Die in der so aufgebauten Schicht befindlichen Strömungskanäle weisen Durchmesser auf, die um Größenordnungen größer sind als die Durchmesser der aus der Trübe abzuschheidenden Teilchen. Die Abscheidung erfolgt entlang des gesamten Weges, den die Trübe durch das Bettfilter zurücklegt. Die Partikeln lagern sich an der Oberfläche des Sandes oder des Kieses ab. Als Haftkräfte kommen alle diejenigen Kräfte in Frage, die man unter dem Begriff Oberflächenkräfte zusammenfaßt. Von großer technischer Bedeutung sind dabei die elektrokinetischen Anziehungskräfte. Um eine große Abscheideleistung der Bettfilter zu erzielen, sorgt man für eine möglichst große Oberfläche je Volumeneinheit. Aus diesem Grunde verwendet man aus Partikeln aufgebaute Schichten. Da die Bindekräfte zwischen den abzuschheidenden Partikeln und den das Bettfilter bildenden Schüttgütern, für die vornehmlich natürliche wie Sand oder Kies verwendet werden, nur verhältnismäßig klein sind, muß man also dafür sorgen,

daß die abgeschiedenen Partikeln durch Strömungskräfte nicht wieder von der Haftfläche abgerissen werden. Diese Forderung läßt sich am ehesten dadurch erfüllen, daß man für eine sehr geringe Strömungsgeschwindigkeit sorgt. Bei gegebenem Trübedurchsatz heißt das, daß man für große Strömungskanäle, also für große Durchmesser der Sand- und Kiespartikeln sorgen muß. Selbstverständlich könnten sich stärkere Bindekräfte ergeben, wenn man die «natürlichen» Partikeln durch «künstliche» ersetzt.

Die Gesetze der Strömung durch Partikelschichten sind in Kapitel 8 behandelt worden. Zur Berechnung der Abscheideleistung müssen jedoch die elektrokinetischen Eigenschaften der Oberfläche bekannt sein, damit man Aufschluß über die mögliche Belegungsdichte mit Fremdpartikeln unter Berücksichtigung der Strömungskräfte erhält. Die hierbei zu überwindenden Schwierigkeiten sind dadurch bedingt, daß die Eigenschaften der Oberflächen örtlich sehr stark veränderlich sind. Die Eigenschaften sind durch die örtlichen Gitterstrukturen (Fehlstellen, abgebrochene und zerstörte Gitter) und die davon abhängigen Energieverteilungen festgelegt. Diese Probleme müssen aber noch als weitgehend ungeklärt angesehen werden. Man ist nach wie vor auf experimentelle Untersuchungsergebnisse angewiesen, die fast nur in pauschaler Weise Aufschluß über die Abscheideleistung unter bestimmten Bedingungen geben. Einen sehr guten Einblick in die moderne Methode zur Untersuchung der Eigenschaften von Bettfiltern vermitteln die Arbeiten von MAROUDAS und EISENKLAM [12.3], von HEERTJES und LERK [12.4] sowie von ZAKHAVAeva und LAPOTINA [12.5]. Hinweisen sei an dieser Stelle auf einen Überblick über die Beiträge russischer Forscher zur Klärung der Probleme bei Bett- und Oberflächenfiltern, den COOPER [12.6] lieferte.

Im Hinblick auf die weiteren Ausführungen sollen die charakteristischen Eigenschaften des Bettfilters nochmals zusammengefaßt werden. Im Bettfilter erfolgt die Partikelabscheidung innerhalb des gesamten Bettes. Läßt man gewisse Vereinfachungen zu, so darf man sagen, daß die Partikeln an Oberflächen abgeschieden werden, die parallel zur Strömung der Suspension angeordnet sind. Die Bindung der Partikeln an diese Oberflächen erfolgt vornehmlich durch elektrokinetische Kräfte.

Beim Oberflächenfilter erfolgt die Partikelabscheidung an einer Oberfläche, die quer zur Strömungsrichtung liegt. Diese Oberfläche hat die Wirksamkeit eines Siebes, das durch seine Öffnungen die in der Trübe befindlichen Partikeln nicht durchläßt. Das heißt also, daß beim Oberflächenfilter der Durchmesser der Strömungskanäle kleiner ist als der Durchmesser der abzuschheidenden Partikeln. Das Oberflächenfilter ist somit allein für die reine Flüssigkeit durchlässig. Aus diesen Eigenschaften folgt sofort, daß beim Betrieb eines Oberflächenfilters im allgemeinen ein sehr hoher Druckverlust auftritt. Dieser läßt sich nur durch Herabsetzen der Strömungsgeschwindigkeit in erträglichen Grenzen halten. Die weiteren Ausführungen beziehen sich allein auf das Oberflächenfilter.

12.12 Arbeitsweise des Oberflächenfilters

Um die Eigenschaften des Oberflächenfilters erläutern zu können, sei an Hand von *Bild 12.1* zunächst das Prinzip der Filtration beschrieben. Die Trübe durchströmt das Filter, wobei der in der Trübe enthaltene Feststoff ausgeschieden wird und den Filterkuchen bildet. Die Ausscheidung des Feststoffes aus der Flüssigkeit beruht darauf, daß das Filtersieb für die Flüssigkeit vollkommen durchlässig, für den Feststoff jedoch, zumindest oberhalb einer bestimmten Korngröße, undurchlässig ist. Mit zunehmender Filterzeit t wächst die Schichtdicke h des Filterkuchens. Nach Erreichen einer bestimmten Schichtdicke übernimmt der Filterkuchen die Aufgaben des Filtersiebes. Insofern dient das Filtersieb also nur dazu, den Aufbau des Filterkuchens in Gang zu setzen. Die Auswahl des Filtersiebes hängt daher weitgehend von den Eigenschaften des abzuscheidenden Feststoffes ab.

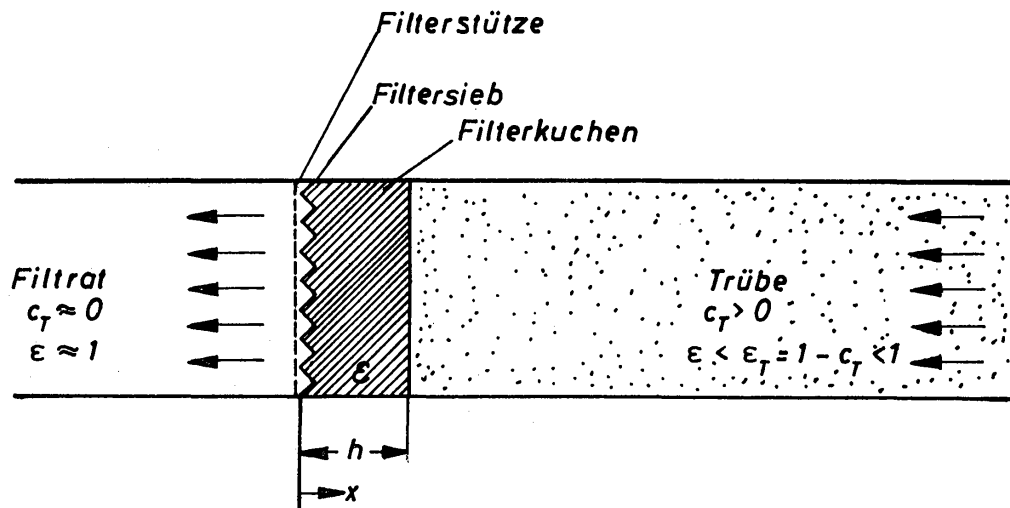


Bild 12.1. Zur Erläuterung der Arbeitsweise des Oberflächenfilters

Das Filtersieb ist im allgemeinen ein maschenförmiges Gewebe. Ist die Maschenweite kleiner als der Durchmesser der kleinsten Feststoffteilchen, so erfolgt zwar ab Beginn der Filtration, also auch ohne Vorhandensein eines Filterkuchens, bereits eine vollständige Abscheidung der Feststoffe; der dabei auftretende Druckverlust ist aber außerordentlich groß. Man wählt daher im allgemeinen ein Filtersieb, dessen Maschenweite größer ist als die kleinste Korngröße des Feststoffes, die noch abgeschieden werden soll. Das führt dazu, daß das Filtrat während einer Anlaufzeit trüb läuft, d.h. noch eine Feststoffkonzentration aufweist, die größer als die zulässige ist. Mit zunehmender Filterzeit sinkt die Konzentration des Filtrates jedoch auf den zulässigen Wert ab. Das ist sowohl auf die Ausbildung des Filterkuchens als auch auf die Anlagerung kleinster Feststoffteilchen an die Gewebefäden des Filtersiebes zurückzuführen, wodurch in jedem Falle die effektive Maschenweite verkleinert wird. Welcher Art die Anziehungskräfte zwischen dem Material des Filtersiebes und dem abzuscheidenden Feststoff sind, läßt sich jedoch, wie bereits betont, heute noch nicht endgültig sagen.

Die Auswahl des Filtermaterials hat unter Berücksichtigung der physikochemischen Eigenschaften des abzuscheidenden Feststoffes und der Flüssigkeit zu

erfolgen. Vielfach bestehen die Filtersiebe aus pflanzlichen Fasern, wie Leinen oder Jute, aus tierischen Fasern, wie Wolle oder Roßhaar, aus Mineralfasern, wie Asbest, sowie aus Glasfasern, Kunstfasern und Metallfasern. Die Größe der zu wählenden Maschenweite hängt vornehmlich davon ab, wie groß die Anlaufzeit, während derer sich ein wirksamer Filterkuchen ausbildet, im Verhältnis zur gesamten Filterzeit sein darf.

Die Konzentration c_T des Feststoffes in der Trübe ist durch

$$c_T = \frac{V_p}{V_p + V_f} \quad (12.1)$$

gegeben. Dabei bedeuten V_p das Feststoffvolumen und V_f das Flüssigkeitsvolumen der Trübe. Für die späteren Rechnungen ist es zweckmäßig, das relative Flüssigkeitsvolumen ε_T einzuführen. Hierfür gilt

$$\varepsilon_T = \frac{V_f}{V_p + V_f}, \quad (12.2)$$

so daß man folgenden Zusammenhang mit der Konzentration erhält:

$$c_T = 1 - \varepsilon_T. \quad (12.3)$$

Im allgemeinen ist die Konzentration der Trübe sehr klein. Nimmt man c_T mit 0,05 an, so ist das relative Flüssigkeitsvolumen $\varepsilon_T = 0,95$. Das relative Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen ist wie folgt definiert:

$$\varepsilon = \frac{V'_f}{V'_p + V'_f}. \quad (12.4)$$

Dabei bedeuten V'_f das Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen, V'_p das Feststoffvolumen und $V'_p + V'_f = V'_{fp}$ das Volumen des Filterkuchens. Ist F die Anströmfläche und h die Dicke des Filterkuchens, dann ist also

$$V'_{fp} = V'_p + V'_f = F \cdot h. \quad (12.5)$$

Das mit den Gleichungen (12.2) und (12.4) gebildete Verhältnis

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T} = \frac{1 + V_p/V_f}{1 + V'_p/V'_f} \quad (12.6)$$

gibt an, in welchem Maße das Feststoff-Flüssigkeits-Gemisch «entwässert» wird. Nimmt man für Filterkuchen aus Feststoffen mit gleicher Korngröße ε zu 0,5 und ε_T der Trübe zu 0,95 an, so wird also $\varepsilon/\varepsilon_T = 0,526$. Die Grenzwerte sind $\varepsilon/\varepsilon_T = 1$ und $\varepsilon/\varepsilon_T = 0$. Beide Grenzwerte sind praktisch unerreichbar. Denn $\varepsilon/\varepsilon_T = 1$ würde bedeuten, daß die Trübe vor Eintritt in das Filter bereits soweit eingedickt ist, daß das kleinstmögliche relative Flüssigkeitsvolumen erreicht und somit eine weitere Entwässerung unmöglich ist. In diesem Falle käme für eine weitergehende Entwässerung das Zentrifugieren in Frage. Ein Filter mit $\varepsilon/\varepsilon_T = 1$ wäre also unwirksam, während ein Filter mit $\varepsilon/\varepsilon_T = 0$ als ideales Filter angesehen werden könnte, da in ihm eine vollkommene Entwässerung erreicht wird. Dem

unteren Grenzwert kann man sich durch Filtration nur dann nähern, wenn der Feststoff ein Korngemisch darstellt, da ε in diesem Falle, wie im Abschnitt 8.123 gezeigt wurde, sehr kleine Werte annehmen kann.

Das relative Flüssigkeitsvolumen ε des Filterkuchens ist im allgemeinen nicht konstant, was auf mehrere Ursachen zurückzuführen ist. Von der strömenden Flüssigkeit werden Reibungskräfte auf den Feststoff übertragen, die dazu führen, daß die Packungsdichte von der Oberfläche des Filterkuchens ausgehend stetig ansteigt und am Filter selbst den größten Wert erreicht. Das relative Flüssigkeitsvolumen nimmt demgemäß in Richtung zum Filter ab. Je größer die Differenz des Druckes zwischen Trübe und Filtrat ist, desto stärker wird der Kuchen zusammengedrückt und desto größer ist auch die Änderung des relativen Flüssigkeitsvolumens über der Schichtdicke. Da der Filterkuchen im allgemeinen nicht elastisch, sondern nur plastisch verformbar ist, können plötzlich auftretende Druckstöße den Kuchen in bleibender Weise stark zusammendrücken. Dadurch wird der Flüssigkeitsgehalt des Kuchens zwar merklich herabgesetzt, andererseits aber auch der Strömungswiderstand sehr stark erhöht. Beim praktischen Betrieb ist also darauf zu achten, daß keine unnötigen Druckschwankungen auftreten. Die Änderung des relativen Flüssigkeitsvolumens ε in Filterkuchen, abhängig von der bezogenen Schichtdicke x/h , mit x als Abstand vom Filtersieb, ist in *Bild 12.2* als Kurve *a* in qualitativer Form dargestellt. Für kristalline Feststoffe mit einheitlicher Korngröße wird sich ε etwa von 0,5 auf äußerstenfalls 0,4 ändern, d. h. also um 20%. Für kristalline Korngemische wird die prozentuale Änderung des Flüssigkeitsvolumens etwa gleich groß sein; die Änderung des absoluten Wertes von ε ist natürlich nicht so groß wie bei einheitlicher Korngröße.

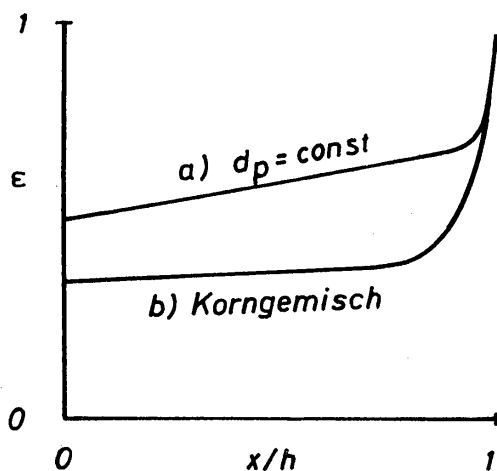


Bild 12.2
Örtliche Werte des relativen Flüssigkeitsvolumens ε im Filterkuchen

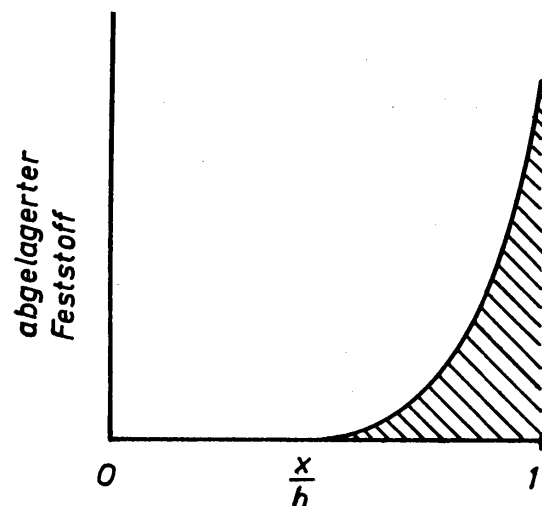


Bild 12.3
Verteilung des im Zeitabschnitt Δt abgelagerten Feststoffes im Filterkuchen

Als weitere Ursache für ein veränderliches relatives Flüssigkeitsvolumen ist der Ablagerungsvorgang der Feststoffkörner selbst zu nennen. *Bild 12.3* zeigt die während eines Zeitabschnittes Δt im Filterkuchen abgelagerte Menge eines Korngemisches, abhängig von x/h . Der größte Anteil des Feststoffes, und zwar der grob-

körnige, lagert sich an der freien Oberfläche ab und trägt zum Anwachsen der Schichtdicke bei. Ein kleinerer Anteil, im wesentlichen das feinkörnige Gut, lagert sich jedoch innerhalb des Filterkuchens ab und führt zur Verkleinerung des relativen Flüssigkeitsvolumens. Das sich hierbei einstellende relative Flüssigkeitsvolumen ε für das Korngemisch zeigt Kurve *b* in *Bild 12.2*. An der Oberfläche des Filterkuchens ergeben sich für beide Fälle die gleichen Werte für ε . Annähernd ist das Flüssigkeitsvolumen ε an der Oberfläche gleich 1. Es fällt jedoch in einem Bereich von wenigen Korndurchmessern sehr steil ab.

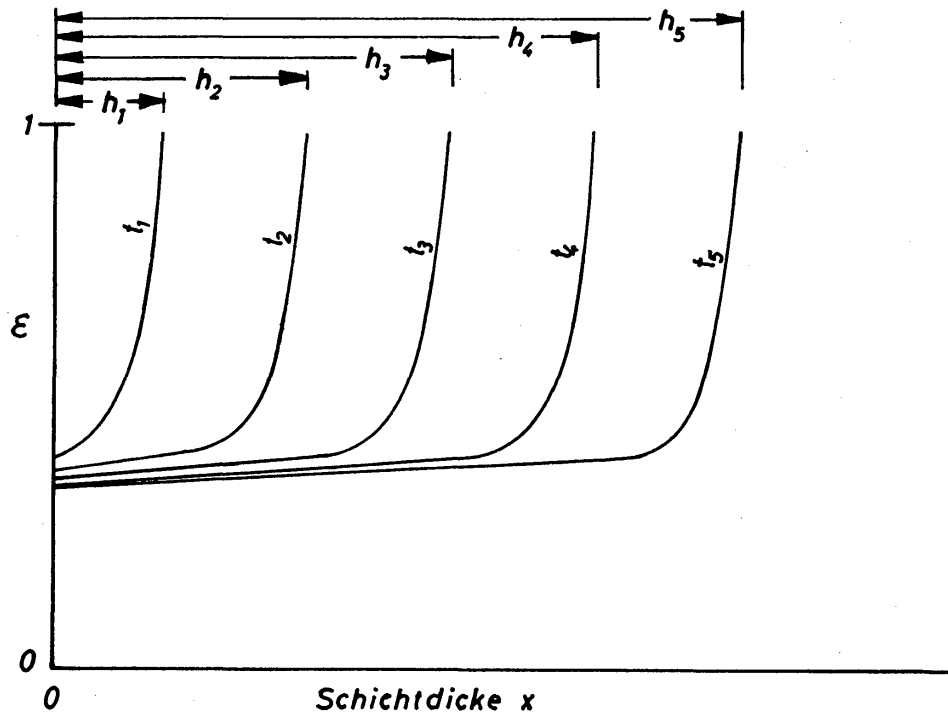


Bild 12.4. Örtliche Werte des relativen Flüssigkeitsvolumens ε im Filterkuchen zu verschiedenen Zeiten t_1 bis t_5 ; die zugehörigen Schichtdicken sind h_1 bis h_5

Verfolgt man das Anwachsen des Filterkuchens zu den Zeiten t_1 bis t_5 , wobei sich die Schichtdicken h_1 bis h_5 ergeben, und mißt man das relative Flüssigkeitsvolumen ε , so erhält man die in *Bild 12.4* dargestellten Kurven. Für Zeiten kleiner als t_1 hat der Filterkuchen noch nicht seine volle Filterwirkung erreicht. Sehr kleine Feststoffteilchen gelangen noch durch das Filter hindurch. Erst nach Überschreiten der Anlaufzeit t_1 erreicht die Anlage die gewünschte Wirksamkeit. Aus dem Verlauf der eingetragenen Kurven geht aber hervor, daß sich das relative Flüssigkeitsvolumen ε des Filterkuchens auch noch innerhalb des Bereiches des ausgebildeten Filterkuchens mit der Zeit ändert, wenn auch nur sehr wenig.

Auf der Grundlage der erläuterten physikalischen Vorgänge sowie einiger vereinfachender Annahmen soll anschließend die Stoffabscheidung durch Filtration theoretisch behandelt werden. Dabei werden allein die für die Durchströmung von Partikelschichten geltenden Gesetze herangezogen, die bereits im Kapitel 8 ausführlich erörtert wurden. Die Zulässigkeit dieser Methode wurde von M. E. AEROV [12.7] experimentell überprüft und bestätigt gefunden. Eine andere Berechnungsmethode stützt sich auf den «spezifischen Filterwiderstand», der offenbar von

RUTH [12.8] in die Berechnung von Filtern eingeführt wurde, und auch in neueren Arbeiten, z. B. in denen von KOTTWITZ und BOYLAN [12.9] sowie von STRAUMANN [12.10] verwendet wird. Der «spezifische Filterwiderstand» ist eine dimensionsbehaftete Größe, in der mehrere für den Widerstand maßgebende Eigenschaften des Fluids und des Filterkuchens zusammengefaßt sind. Somit besteht also leicht die Gefahr, daß die für den Abscheidvorgang maßgebenden physikalischen Größen und ihr Einfluß nicht mehr die erforderliche Beachtung finden. Das trifft insbesondere dann zu, wenn man sich um eine experimentelle Bestimmung des «spezifischen Filterwiderstandes» bemüht. Um diese Gefahr auszuschalten, wird bei der im folgenden Abschnitt entwickelten Theorie vom «spezifischen Widerstand» kein Gebrauch gemacht.

12.13 Theorie der Filtration im Oberflächenfilter

Die Theorie der Filtration wird auf der Grundlage der Strömung der Flüssigkeit durch den Filterkuchen unter Berücksichtigung der Ausscheidung des Feststoffes, der zum Aufbau des Filterkuchens dient, entwickelt. Die Theorie stützt sich auf folgende Voraussetzungen:

1. Der Feststoff ist von kristalliner Natur, so daß ein einzelnes Feststoffkorn als inkompressibel angesehen werden darf.
2. Es bestehen keinerlei Bindekräfte irgendwelcher Art zwischen den Feststoffkörnern, so daß sich keine Mehrfachkörner bilden können.
3. Der Feststoff besteht aus Körnern einheitlichen Durchmessers. Diese Voraussetzung wird nur vorübergehend aufrechterhalten. Die Erweiterung der Theorie auf Korngemische läßt sich ohne Schwierigkeiten vornehmen.
4. Das relative Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen ist konstant. Somit ist der Filterkuchen inkompressibel, und die Ablagerung des Feststoffes erfolgt allein an der freien Oberfläche des Kuchens.
5. Die Strömung der Flüssigkeit im Filterkuchen ist laminar. Diese Voraussetzung wird im allgemeinen erfüllt sein. Die Ausweitung der Theorie auf turbulente Strömung ist grundsätzlich möglich, wenn sich dadurch auch sehr verwickelte Gleichungen ergeben.

Unter diesen Voraussetzungen gilt folgendes Widerstandsgesetz, das im Zusammenhang mit der Füllkörperschüttung bereits erläutert wurde, hier aber wiederholt sei:

$$\psi = \frac{150}{Re} \quad (12.7)$$

Dabei bedeuten ψ Widerstandszahl und Re Reynoldszahl:

$$\psi \equiv \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)} \frac{d_p}{\rho \bar{w}^2} \frac{\Delta P}{h}, \quad (12.8)$$

$$Re \equiv \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\bar{w} d_p \rho}{\eta}. \quad (12.9)$$

Hierin sind ε relatives Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen, d_p Korndurchmesser, ρ Dichte und η dynamische Viskosität der Flüssigkeit, ΔP Druckverlust, h Schichtdicke des Filterkuchens und \bar{w} die mittlere Geschwindigkeit des Filtrates. Die mittlere Geschwindigkeit läßt sich wie folgt ausdrücken:

$$\bar{w} = \frac{dV}{dt} \frac{1}{F}. \quad (12.10)$$

Mit V wird das Volumen des Filtrates, mit t die Zeit und mit F der Querschnitt des Filterkuchens, senkrecht zur Durchströmrichtung, bezeichnet; damit ist dV/dt die zeitliche Änderung des Filtratvolumens bzw. der Volumstrom. Mit den Gleichungen (12.8) bis (12.10) ergibt sich aus der Gl. (12.7) folgende Beziehung für die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} :

$$\frac{1}{F} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{150} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \frac{d_p^2}{\eta} \frac{\Delta P}{h}. \quad (12.11)$$

Hierin ist die Schichtdicke h des Filterkuchens eine Funktion des Filtratvolumens. Die Schichtdicke h muß noch bestimmt werden. Zu dem Zweck betrachten wir das Volumen V_T der Trübe, welches sich aus dem Flüssigkeitsvolumen V_f und dem Feststoffvolumen V_p zusammensetzt:

$$V_T = V_f + V_p. \quad (12.12)$$

Nach der Filtration hat sich das Feststoffvolumen im Filterkuchen von der Dicke h abgesetzt, und man erhält hierfür:

$$V_p = (1-\varepsilon) F \cdot h. \quad (12.13)$$

Das Flüssigkeitsvolumen V_f setzt sich aus dem Filtratvolumen V und dem im Filterkuchen enthaltenen Volumen $V_f' = \varepsilon F h$ zusammen:

$$V_f = V + \varepsilon F h. \quad (12.14)$$

Für das Trübevolumen folgt somit

$$V_T = V_f + V_p = V + \varepsilon F h + (1-\varepsilon) F h. \quad (12.15)$$

Bezieht man das Trübevolumen auf das Flüssigkeitsvolumen V_f , so ergibt sich

$$\frac{V_f + V_p}{V_f} = 1 + \frac{(1-\varepsilon) F h}{V + \varepsilon F h}. \quad (12.16)$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der Kuchendicke h als Funktion des Filtratvolumens V . Führt man das relative Flüssigkeitsvolumen ε_T der Trübe gemäß Gl. (12.2) ein, so erhält man

$$\frac{1}{\varepsilon_T} = 1 + \frac{(1-\varepsilon) F h}{V + \varepsilon F h} \quad (12.17)$$

und hieraus nach Umformung den gesuchten Zusammenhang zwischen h und V :

$$h = \frac{1 - \varepsilon_T}{\varepsilon_T - \varepsilon} \cdot \frac{V}{F}. \quad (12.18)$$

Setzt man diesen Ausdruck für h in Gl. (12.11) ein, so folgt:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F^2}{150} \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{\varepsilon_T - \varepsilon}{1 - \varepsilon_T} \frac{d_p^2}{\eta} \frac{\Delta P}{V}. \quad (12.19)$$

Dieses ist die Grundgleichung der Filtration im Oberflächenfilter. Sie liefert einen Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung des Filtratvolumens dV/dt und den Größen F , V , d_p , η , ΔP sowie dem relativen Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen ε und in der Trübe ε_T .

Die Integration der Grundgleichung (12.19) setzt eine Annahme über dV/dt oder ΔP voraus. Die Annahme

$$\frac{dV}{dt} = \text{const} = \frac{V}{t}$$

bedeutet, daß das in der Zeiteinheit erzeugte Filtrat unabhängig von der Dicke des Filterkuchens, also auch unabhängig vom Druckverlust, konstant bleibt. Die zweite Annahme,

$$\Delta P = \text{const},$$

besagt, daß das anfallende Filtratvolumen V mit zunehmender Schichtdicke und somit auch mit zunehmender Filterzeit t kleiner wird. In der Praxis wird die Filtration vornehmlich bei konstantem Druckverlust ΔP durchgeführt.

Für den Fall $\Delta P = \text{const}$ liefert die Integration von Gl. (12.19)

$$V = \left[\frac{F^2}{75} \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{\varepsilon_T - \varepsilon}{1 - \varepsilon_T} \frac{d_p^2 \Delta P}{\eta} t \right]^{1/2}. \quad (12.20)$$

Demnach ist das gefilterte Volumen proportional der Wurzel aus der Zeit und ist um so geringer, je größer die Viskosität η ist. Da die Viskosität mit steigender Temperatur kleiner wird, führt man die Filtration häufig auch bei erhöhten Temperaturen durch.

Bildet man mittels Gl. (12.19) die durch Gl. (12.10) definierte Filtratgeschwindigkeit \bar{w} , wobei für V die Gl. (12.20) eingeführt wird, so erhält man

$$\bar{w} = \left[\frac{1}{300} \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{\varepsilon_T - \varepsilon}{1 - \varepsilon_T} \frac{d_p^2}{\eta} \frac{\Delta P}{t} \right]^{1/2}. \quad (12.21)$$

Diese Beziehung läßt sich in die folgende dimensionslose Form bringen:

$$\frac{\rho \bar{w}^2 / 2}{\Delta P} = \frac{1}{600} \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{\varepsilon_T - \varepsilon}{1 - \varepsilon_T} \frac{d_p^2}{\nu t}. \quad (12.22)$$

Sie setzt sich aus drei dimensionslosen Kennzahlen zusammen, nämlich der dimensionslosen Filtratgeschwindigkeit

$$\frac{\rho \bar{w}^2/2}{\Delta P} \equiv \bar{w}^*, \tag{12.23}$$

gebildet mit dem Staudruck $\rho \bar{w}^2/2$ und dem als konstant angenommenen Druckverlust ΔP , der dimensionslosen Filtrationszeit

$$\frac{v t}{d_p^2} \equiv t^* \tag{12.24}$$

und der Porositätsfunktion

$$\frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \frac{\varepsilon_T - \varepsilon}{1 - \varepsilon_T} \equiv e_w, \tag{12.25}$$

die sowohl das relative Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen ε als auch das der Trübe ε_T enthält.

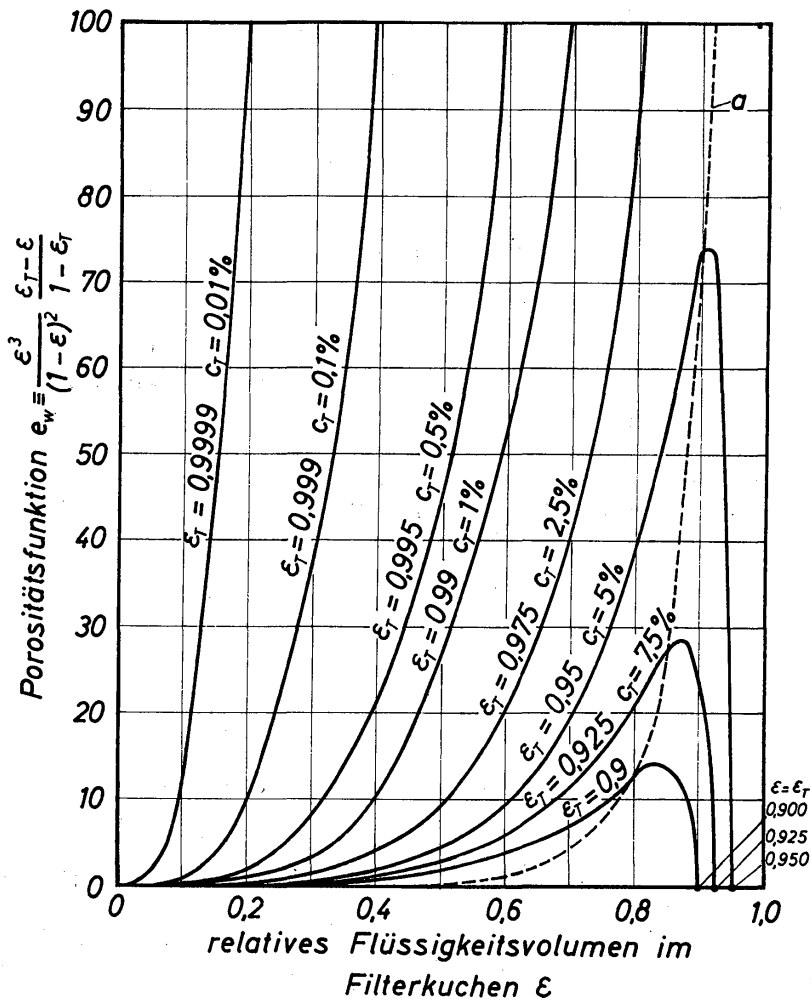


Bild 12.5. Abhängigkeit der in Gl. (12.22) auftretenden Porositätsfunktion e_w vom relativen Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen ε und in der Trübe ε_T

Die Porositätsfunktion e_w ist in *Bild 12.5* abhängig von ε und für verschiedene, praktisch interessierende Werte von ε_T dargestellt. Zum Vergleich ist als gestrichelte Kurve *a* die Funktion $\varepsilon^3/(1 - \varepsilon)^2$ angegeben. Die ausgezogenen Kurven für e_w haben zwei Nullstellen, und zwar bei $\varepsilon = 0$ und bei $\varepsilon = \varepsilon_T$. Das zwischen den Nullstellen auftretende Maximum liegt rechts der gestrichelten Kurve. Für drei Werte von ε_T ist der vollständige Kurvenverlauf angegeben. Der Schnittpunkt mit der gestrichelten Kurve liegt, mit der Bedingung

$$\varepsilon_T - \varepsilon = 1 - \varepsilon_T \quad (12.26)$$

somit bei

$$\varepsilon = 2 \varepsilon_T - 1. \quad (12.27)$$

Für $\varepsilon_T < 0,5$ treten keine Schnittpunkte mehr auf, d. h. die ausgezogenen Kurven liegen dann unterhalb der getrichelten.

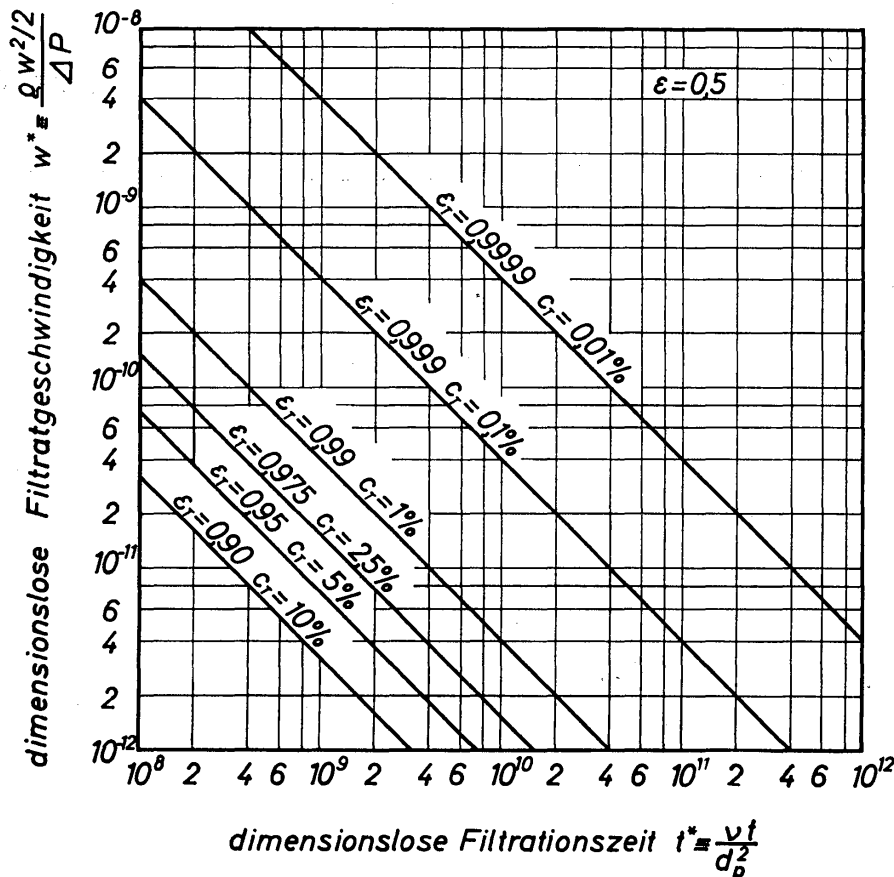


Bild 12.6
Abhängigkeit der
Filtratgeschwindigkeit \bar{w}^*
von der Filtrationszeit t^*
für $\varepsilon = 0,5$ und
verschiedene Werte von ε_T

Für die Filtration von Feststoffen mit gleichem Korndurchmesser kommen nur Werte von ε oberhalb von 0,4 in Frage. Um die dimensionslose Filtratgeschwindigkeit \bar{w}^* , abhängig von der Filtrationszeit t^* , darstellen zu können, wurde zur Berechnung der Porositätsfunktion e_w für das relative Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen als mittlerer Wert $\varepsilon = 0,5$ und für ε_T die in *Bild 12.5* bereits angenommenen Werte verwendet. *Bild 12.6* zeigt \bar{w}^* abhängig von t^* im logarithmischen Koordinatennetz. Die Filtratgeschwindigkeit \bar{w}^* nimmt mit der Filtrationszeit t^* ab; sie ist um so größer, je kleiner die Konzentration c_T der Trübe ist. Ist eine bestimmte Filtratgeschwindigkeit vorgeschrieben, so wird die Filtrationszeit mit abnehmender Konzentration der Trübe größer, was für den Betrieb einer Filteranlage von Vorteil ist. In praktischen Fällen ist indes die Konzentration c_T gegeben. Dann lassen sich lange Filtrationszeiten erreichen, wenn man bei gegebenem Volumstrom dV/dt die Filterfläche F groß macht und somit die Filtratgeschwindigkeit \bar{w} verkleinert. Eine weitere wichtige Größe zur Beeinflussung von \bar{w}^* ist der Druckverlust ΔP .

Für die Beurteilung des Verhaltens einer Filteranlage ist weiterhin die Schichtdicke des Filterkuchens von Bedeutung. Führt man Gl.(12.20) in Gl.(12.18) ein, so erhält man für die Kuchendicke die folgende Beziehung:

$$h = \left[\frac{1}{75} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \frac{1-\varepsilon_T}{\varepsilon_T-\varepsilon} \frac{d_p^2 \Delta P}{\eta} t \right]^{1/2}. \quad (12.28)$$

Die Schichtdicke h wächst also mit der Wurzel aus der Zeit t . In dimensionsloser Schreibweise ergibt sich:

$$\frac{h^2}{\nu \cdot t} = \frac{1}{75} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \frac{1-\varepsilon_T}{\varepsilon_T-\varepsilon} \frac{d_p^2 \Delta P}{\nu^2 \rho}. \quad (12.29)$$

Diese Gleichung hat die einfachste Form und weist dabei drei dimensionslose Gruppen auf. Der Nachteil besteht aber darin, daß die Filtrationszeit t und die Schichtdicke h in der gleichen Kennzahl enthalten sind und nicht die für die Filtratgeschwindigkeit \bar{w}^* maßgebende Filtrationszeit t^* auftritt. Es scheint daher von Vorteil zu sein, Gl.(12.29) so umzuformen, daß t^* auftritt. Dann erhält man:

$$\left(\frac{h}{d_p} \right)^2 \frac{\nu^2 \rho}{d_p^2 \Delta P} = \frac{1}{75} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \frac{1-\varepsilon_T}{\varepsilon_T-\varepsilon} \frac{\nu t}{d_p^2}. \quad (12.30)$$

Im Vergleich zu Gl.(12.29) treten jetzt vier dimensionslose Kennzahlen auf, und zwar die dimensionslose Schichtdicke

$$\left(\frac{h}{d_p} \right)^2 \equiv h^*, \quad (12.31)$$

der dimensionslose Druck

$$\frac{d_p^2 \Delta P}{\nu^2 \rho} \equiv P^*, \quad (12.32)$$

die Porositätsfunktion

$$\frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \frac{1-\varepsilon_T}{\varepsilon_T-\varepsilon} \equiv e_h \quad (12.33)$$

und die bereits bekannte dimensionslose Filtrationszeit t^* gemäß Gl.(12.24).

Die Porositätsfunktion e_h ist in *Bild 12.7* abhängig von ε und ε_T dargestellt. Im Gegensatz zur Porositätsfunktion e_w (siehe *Bild 12.5*), die zwei Nullstellen aufweist, hat e_h nur eine Nullstelle bei $\varepsilon = 0$. Berechnet man für $\varepsilon = 0,5$ und verschiedene Werte von ε_T die Funktion h^*/P^* , so erhält man die im logarithmischen Koordinatennetz von *Bild 12.8* dargestellten Kurven. Die Schichtdickenfunktion steigt mit der Filtrationszeit. Bei konstantem Wert der Filtrationszeit t^* ist h^*/P^* um so größer, je größer die Konzentration der Trübe c_T ist. Bei konstantem Wert h^*/P^* ist die Filtrationszeit um so größer, je kleiner die Trübe-konzentration c_T ist.

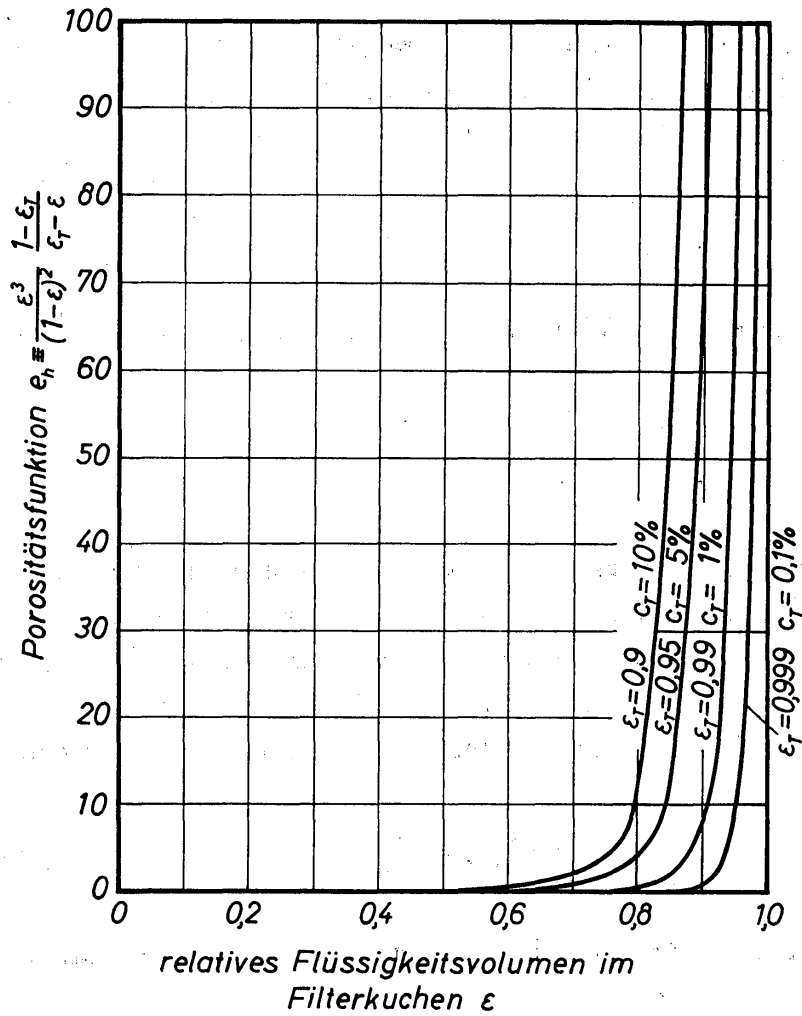


Bild 12.7
Abhängigkeit der in Gl. (12.30) auftretenden Porositätsfunktion e_h vom relativen Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen ϵ und in der Trübe ϵ_T

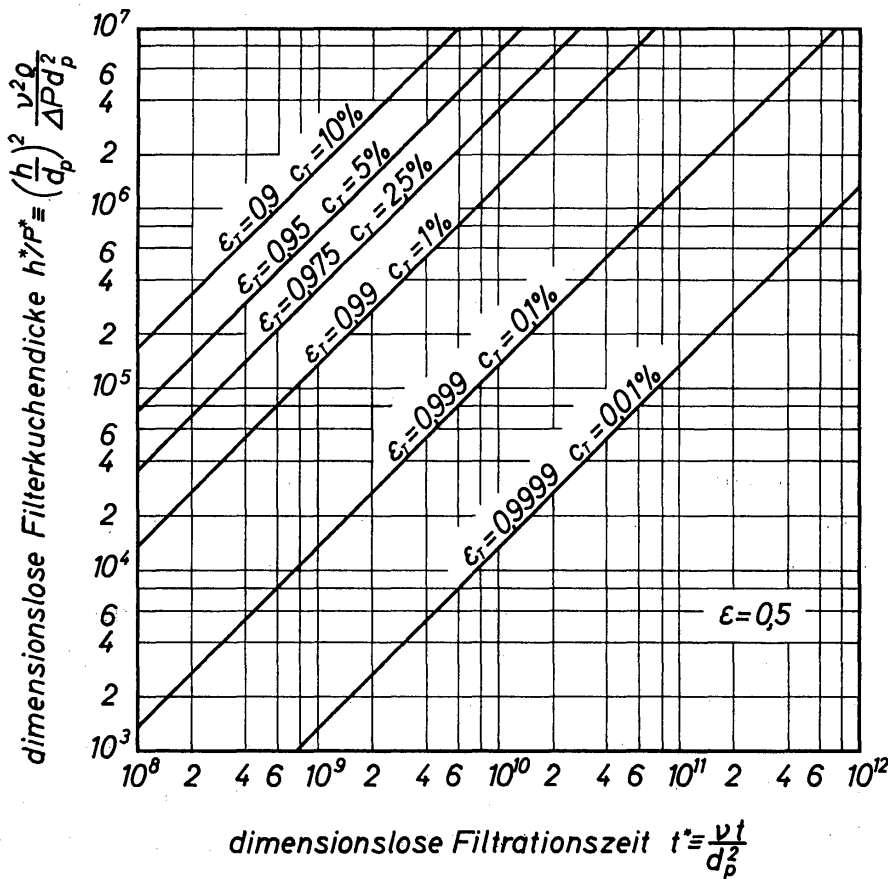


Bild 12.8
Abhängigkeit der Filterkuchendicke von der Filtrationszeit für $\epsilon = 0,5$ und verschiedene Werte von ϵ_T

Um sich die Größenordnung der dimensionslosen Filtrationszeit t^* besser einprägen zu können, soll für den Wert $t^* = 10^9$ die absolute Filtrationszeit t abhängig vom Korndurchmesser d_p berechnet werden. Wählt man die kinematische Viskosität ν der Flüssigkeits zu $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, so ergeben sich gemäß $t = 10^{15} d_p^2$ folgende Werte für t , abhängig von d_p :

d_p (m)	t (s)
10^{-7}	10^1
10^{-6}	10^3
10^{-5}	10^5 (27,8 Stunden)
10^{-4}	10^7 (2780 Stunden \approx 116 Tage)

12.14 Filtergleichungen für Korngemische

Für Filterkuchen, die aus Korngemischen bestehen, gilt bei laminarer Durchströmung gemäß Gl. (8.64) das folgende Widerstandsgesetz:

$$\psi_m = \frac{150}{Re_m} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75} \quad (12.34)$$

Hierin bedeuten neben den bereits bekannten Größen ε das relative Flüssigkeitsvolumen bei einer Einkornschicht, also einem Filterkuchen, bestehend aus Feststoffkörnern einheitlichen Durchmessers, und ε_m das relative Flüssigkeitsvolumen in dem aus einem Korngemisch bestehenden Filterkuchen. Unter Verwendung der Definitionsgleichungen (12.8) und (12.9), die auch für ψ_m und Re_m gelten, folgt aus Gl. (12.34) die Geschwindigkeit des Filtrates zu

$$\bar{w} = \frac{1}{150} \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75} \frac{d_{pm}^2}{\eta} \frac{\Delta P}{h} \quad (12.35)$$

Mit d_{pm} wird hierbei der mittlere Korndurchmesser des Gemisches bezeichnet, für den bereits früher die folgende Beziehung mitgeteilt wurde:

$$d_{pm} = \frac{1}{\frac{V_{p_1}}{V_p} \frac{1}{d_{p_1}} + \frac{V_{p_2}}{V_p} \frac{1}{d_{p_2}} + \dots + \frac{V_{p_n}}{V_p} \frac{1}{d_{p_n}}} \quad (12.36)$$

Dabei sind $V_{p_1}, V_{p_2} \dots V_{p_n}$ die Volumina der 1., 2. bis n -ten Kornfraktion und

$$V_p = V_{p_1} + V_{p_2} + \dots + V_{p_n} \quad (12.37)$$

das gesamte Volumen aller Kornfraktionen; ferner sind d_{p_1} usw. die mittleren Durchmesser der einzelnen Fraktionen.

Durch Vergleich der für Filterkuchen mit einheitlicher Korngröße geltenden Gl.(12.11) und der für Filterkuchen, bestehend aus Korngemischen, geltenden Gl.(12.35) stellt man fest, daß letztere sich allein durch den Ausdruck $(\varepsilon/\varepsilon_m)^{0,75}$ von der ersteren unterscheidet. Dieser Unterschied besteht auch zwischen allen weiteren für die Filtration maßgebenden Gleichungen. Somit ist es also nicht erforderlich, die für Korngemische geltenden Gleichungen herzuleiten, sie lassen sich vielmehr durch Multiplikation der für Einkornschichten bereits mitgeteilten Beziehungen mit $(\varepsilon/\varepsilon_m)^{0,75}$ angeben.

Man erhält nun für Filterkuchen aus Korngemischen bei der Filtration unter konstantem Druck folgende Beziehung für das Filtratvolumen

$$V = \left[\frac{F^2}{75} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75} \frac{\varepsilon_T - \varepsilon}{1 - \varepsilon_T} \frac{d_{pm}^2}{\eta} \Delta P t \right]^{1/2} \quad (12.38)$$

und für die Filtratgeschwindigkeit:

$$\bar{w} = \left[\frac{1}{300} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75} \frac{\varepsilon_T - \varepsilon}{1 - \varepsilon_T} \frac{d_{pm}^2}{\eta} \frac{\Delta P}{t} \right]^{1/2}. \quad (12.39)$$

In dimensionsloser Schreibweise erhält man hierfür

$$\frac{\varrho \bar{w}^2/2}{\Delta P} = \frac{1}{600} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75} \frac{\varepsilon_T - \varepsilon}{1 - \varepsilon_T} \frac{d_{pm}^2}{\nu t}. \quad (12.40)$$

Für die Schichtdicke folgt die Beziehung

$$h = \left[\frac{1}{75} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75} \frac{1 - \varepsilon_T}{\varepsilon_T - \varepsilon} \frac{d_{pm}^2}{\eta} \Delta P t \right]^{1/2} \quad (12.41)$$

und in dimensionsloser Schreibweise

$$\left(\frac{h}{d_{pm}} \right)^2 \frac{\nu^2 \varrho}{d_{pm}^2 \Delta P} = \frac{1}{75} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^{0,75} \frac{1 - \varepsilon_T}{\varepsilon_T - \varepsilon} \frac{\nu t}{d_{pm}^2}. \quad (12.42)$$

Zur Auswertung der Gleichungen für die dimensionslose Filtratgeschwindigkeit und die dimensionslose Schichtdicke wird angenommen, daß $\varepsilon = 0,5$ und $\varepsilon_m = 0,25$ ist. Die mittels der Gleichungen (12.40) und (12.42) berechneten Größen sind in den *Bildern 12.9* und *12.10*, abhängig von der dimensionslosen Filtrationszeit $\nu t/d_{pm}^2$, als ausgezogene Kurven dargestellt. Zum Vergleich sind die für gleiche Werte von ε_T gültigen Größen für Gleichkornschichten als gestrichelte Kurven eingezeichnet. Bei Mehrkornschichten ergeben sich Werte für die dimensionslose Filtratgeschwindigkeit \bar{w}^* , die etwa um eine Zehnerpotenz niedriger sind als bei Gleichkornschichten. Entsprechende Änderungen ergeben sich auch für die Filterkuchenfunktion h^*/P^* . Diese Unterschiede sind allein darauf zurückzuführen, daß das relative Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen aus Korngemischen erheblich kleiner ist als in solchen, die aus Körnern gleichen Durchmessers bestehen.

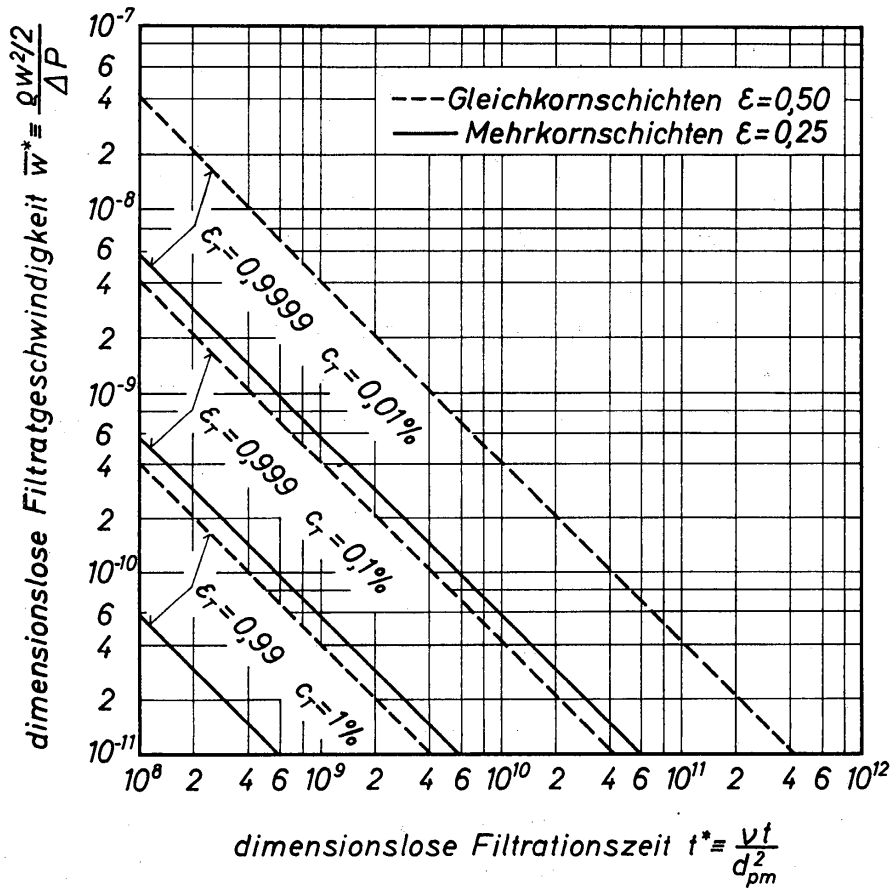


Bild 12.9. Abhängigkeit der Filtratgeschwindigkeit von der Filtrationszeit für verschiedene Werte von ϵ_T und $\epsilon = 0,5$ bei Mehrkornschichten. Zum Vergleich sind die entsprechenden Kurven für Gleichkornschichten eingezeichnet

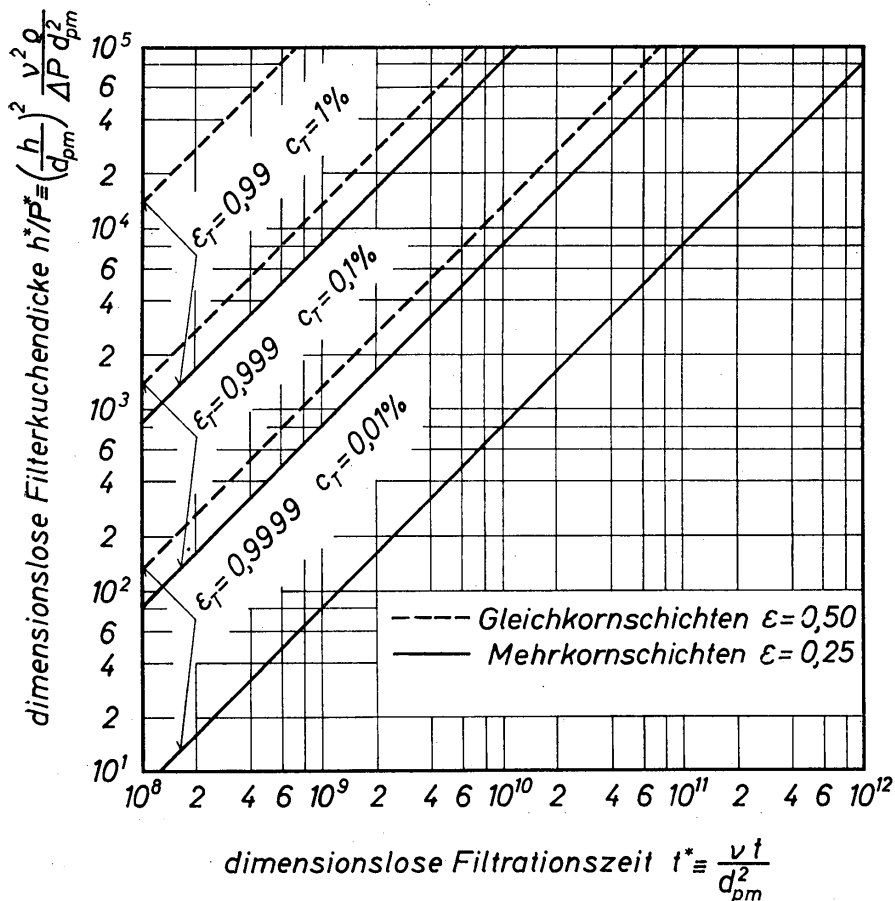


Bild 12.10. Abhängigkeit der Filterkuchendicke von der Filtrationszeit für verschiedene Werte von ϵ_T und $\epsilon = 0,5$ bei Mehrkornschichten. Zum Vergleich sind die entsprechenden Kurven für Gleichkornschichten eingezeichnet

12.15 Berücksichtigung des Filtersiebes und der Kompressibilität des Filterkuchens

Die bisher abgeleiteten Gleichungen für die Filtration bedürfen bei strenger Behandlung noch einiger Korrekturen. Es wurde angenommen, daß der Druckverlust ΔP allein durch den Filterkuchen bedingt ist. Tatsächlich aber verursacht auch das Filtersieb selbst einen Druckverlust ΔP_s , der insbesondere zu Beginn der Filtration für den gesamten Druckverlust bestimmend ist. Mit zunehmender Ausbildung des Filterkuchens wird ΔP_s aber als Anteil zum gesamten Druckverlust immer bedeutungsloser. Nach der Anlaufzeit ist ΔP_s dann vernachlässigbar, und der Druckverlust ΔP des Filterkuchens ist gleich dem Gesamtverlust. Die mitgeteilten Gleichungen gelten also für die Filtration nach der Anlaufzeit. Grundsätzlich bereitet es keine Schwierigkeiten, ΔP_s in den Filtergleichungen zu berücksichtigen. Indes ist ΔP_s aber im allgemeinen unbekannt, da sich unmittelbar zu Beginn der Filtration der feinkörnige Anteil des Feststoffes im Filter selbst absetzt und somit den freien Durchströmungsquerschnitt verengt und den Druckverlust erhöht.

Gemäß den hergeleiteten Beziehungen wird die Filtratgeschwindigkeit \bar{w} bei vorgegebenem Druckverlust ΔP zu Beginn der Filtrationszeit $t = 0$ unendlich groß, da noch kein Druckverlust wegen des vernachlässigten Filtersiebes vorhanden ist. Beim wirklichen Filter ergibt sich aber, da ΔP_s auch zur Zeit $t = 0$ bereits auftritt, ein endlicher Wert für die Filtratgeschwindigkeit. Die Größe des Siebverlustes ΔP_s muß im allgemeinen experimentell bestimmt werden, wobei Verhältnisse eingestellt werden müssen, wie sie im praktischen Betrieb zu erwarten sind.

Von wesentlich größerer Bedeutung als der Druckverlust des Filtersiebes ist für die Filtration die Kompressibilität des Filterkuchens. Wird der Feststoff zusammengedrückt, so wird das relative Flüssigkeitsvolumen ε und daher der Durchströmquerschnitt verkleinert. Das hat bei vorgegebenem Druckverlust eine Verringerung der Filtratgeschwindigkeit und somit auch der Abscheideleistung zur Folge.

Die ersten wesentlichen Beiträge zum Studium des Einflusses der Kompressibilität des Filterkuchens wurden durch eine Untersuchung von RUTH [12.11] ausgelöst. Von den weiteren Arbeiten sind in diesem Zusammenhang insbesondere die von GRACE [12.12], KOTWITZ und BOYLAN [12.9], RATCLIFF, BLACKADDER und SUTHERLAND [12.13] sowie eine Reihe von Arbeiten von SHIRATO und OKAMURA [12.14 bis 12.16] zu erwähnen. Mit einem Sonderproblem, nämlich der Filtration eines Gemisches aus zwei Suspensionen mit unterschiedlichen Eigenschaften, befaßten sich SHIRATO, SAMBUICHI und OKAMURA [12.17]. Eine zufriedenstellende Deutung der Strömungsvorgänge durch kompressible Filterkuchen konnte mit diesen Arbeiten aber noch nicht erreicht werden. Das scheint erst mit einer Serie von neuen Untersuchungen zu gelingen, die von TILLER [12.18 und 12.19] eröffnet und zusammen mit mehreren Mitarbeitern fortgesetzt wurde [12.20 bis 12.22]. In diesen Untersuchungen wird der «spezifische Filterwider-

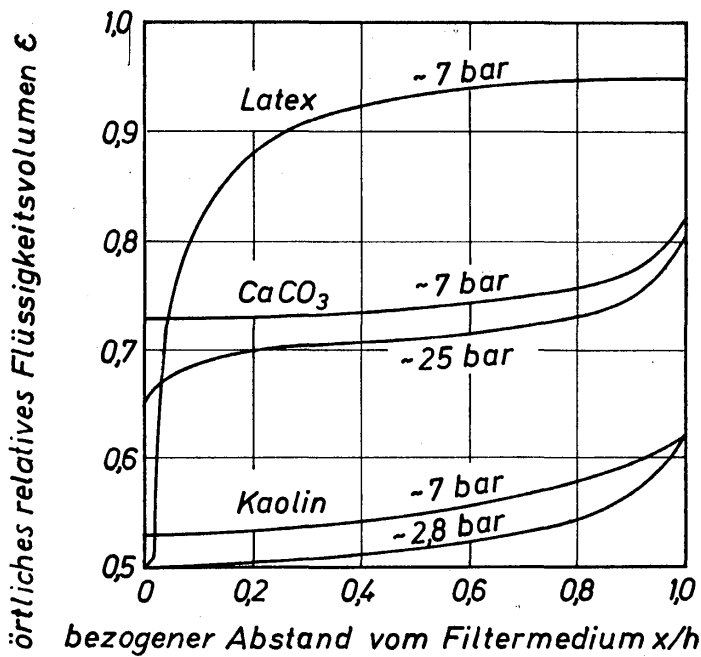


Bild 12.11. Änderung des örtlichen relativen Flüssigkeitsvolumens ϵ im Filterkuchen für verschiedene Stoffe und Drücke

stand» als eine örtlich veränderliche Größe angesehen. Experimentelle Befunde hatten gezeigt, daß das relative Flüssigkeitsvolumen im Filterkuchen ortsabhängig ist. Es gelang dieser Forschergruppe, die Ortsabhängigkeit des relativen Flüssigkeitsvolumens theoretisch zu begründen und damit auch die Ortsabhängigkeit des «spezifischen Widerstandes» nachzuweisen.

In Bild 12.11 ist das relative Flüssigkeitsvolumen ϵ , abhängig von x/h , für einige Stoffe bei verschiedenen Drücken dargestellt. Bemerkenswert ist, daß sich für das örtliche relative Flüssigkeitsvolumen je nach Feststoffeigenschaften ein sehr unterschiedlicher Verlauf ergeben kann. Für Latex ist ϵ , ausgehend von der freien Oberfläche des Kuchens bei $x/h = 1$, zunächst nahezu konstant. Erst in unmittelbarer Nähe des Filtersiebes bei $x/h = 0$ fällt ϵ sehr steil ab. Im Gegensatz dazu fällt ϵ bei CaCO_3 und Kaolin in unmittelbarer Nähe der freien Oberfläche ab und nähert sich dann einem festen Wert. Daß dieser Verlauf aber noch stark druckabhängig ist, zeigen die beiden Kurven für CaCO_3 .

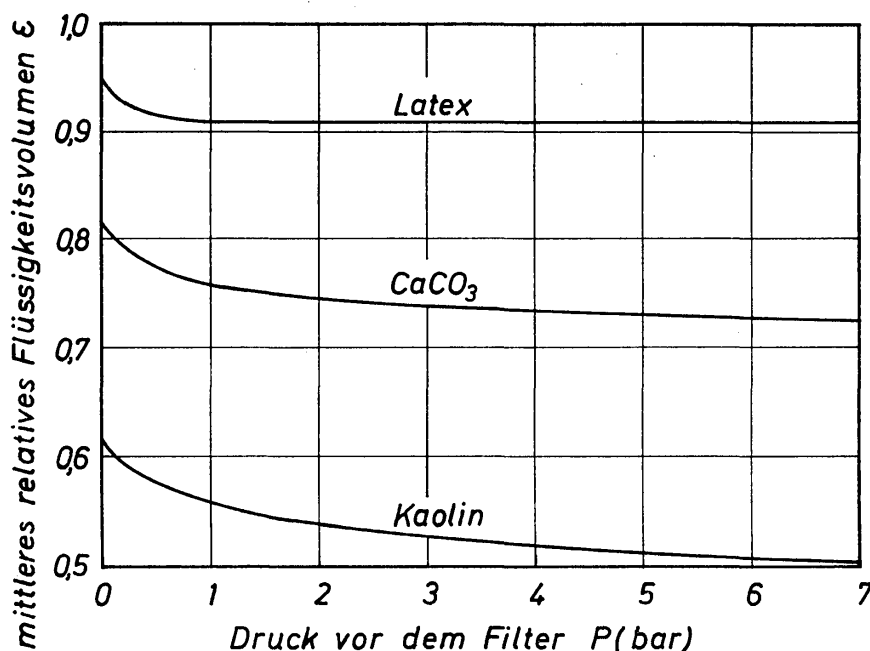


Bild 12.12
Abhängigkeit des mittleren relativen Flüssigkeitsvolumens ϵ im Filterkuchen vom Druck für verschiedene Stoffe

Für die Filterberechnung ist das mittlere relative Flüssigkeitsvolumen von größerer Bedeutung als das örtliche. In *Bild 12.12* sind nach Angaben von TILLER und COOPER die mittleren Werte für ε , abhängig vom Druck P , dargestellt. Hiernach nimmt ε mit zunehmendem Druck zunächst ab und nähert sich dann aber sehr bald einem Wert, der über größere Druckbereiche nahezu unverändert bleibt. Ähnliche Untersuchungsergebnisse wie TILLER und Mitarbeiter erhielt auch LE LEC [12.23]. Von Bedeutung ist in diesem Zusammenhang auch eine Arbeit von DOHNAL [12.24], in welcher die mechanischen Eigenschaften des Filterkuchens sehr gründlich untersucht werden.

12.2 Sedimentation

Die Sedimentation dient zur Abscheidung körniger Feststoffe aus Flüssigkeiten und Gasen, wobei in den meisten Fällen die Schwerkraft der Körner die für den Trennvorgang maßgebende Kraft ist. Zur Beschleunigung des Trennvorganges wird das natürliche Kraftfeld der Erde häufig durch ein wesentlich größeres Kraftfeld, nämlich durch das Zentrifugalfeld, ersetzt. In diesem Fall findet die «Sedimentation» in einer Zentrifuge statt. Wirkt als maßgebende Trennkraft die Schwerkraft auf die Feststoffkörner ein, so verläuft die Trennung in einem Klär- oder Absetzbecken. Unter den gleichen Bedingungen fallen auch die sogenannten Sinkstoffe aus den natürlichen Gewässern aus und bilden das Sediment. Für die Verfahrenstechnik ist die Sedimentation für die Reinigung von Abwässern, für die Ausscheidung der Feststoffe im Anschluß an einen hydraulischen Transport und schließlich für die Korngrößenanalyse von Bedeutung.

12.21 Allgemeine Beschreibung der Sedimentation

An Hand von *Bild 12.13* soll der Ablauf der Sedimentation beschrieben werden, wobei die einzelnen Vorgänge zur Erleichterung des Überblicks stark vereinfacht und schematisiert werden. Ein vertikal angeordnetes Gefäß von der Höhe h ist mit einer Suspension aus Körnern gleichen Durchmessers d_p gefüllt. Die volumetrische Feststoffkonzentration c_T ist gemäß früheren Ausführungen durch Gl. (12.1) gegeben. Es wird angenommen, daß zu Beginn der Sedimentation, also zur Zeit $t = t_0$, der Feststoff gleichmäßig in der Flüssigkeit verteilt ist und folglich die Anfangskonzentration $c_T = c_{T0}$ im Gefäß konstant ist. Zu einem etwas späteren Zeitpunkt t hat sich ein Teil des Feststoffes bereits am Boden angesammelt und bildet dort die Sedimentschicht, deren Höhe durch h_s und deren Konzentration durch c_s gegeben ist. Gleichzeitig hat sich im oberen Teil des Gefäßes eine von Feststoff freie Flüssigkeitsschicht gebildet, in welcher $c = 0$ ist. Zwischen der klaren Flüssigkeitsschicht und der Sedimentschicht befindet sich die Trübe mit der ursprünglichen Konzentration c_{T0} , die sich bis zu einer vom Gefäßboden aus gerechneten Höhe h_T erstreckt. Die Schichthöhe der Trübe ist dann $h_T - h_s$. Die Sedimentation ist im Zeitpunkt $t = t_e$ beendet; der gesamte

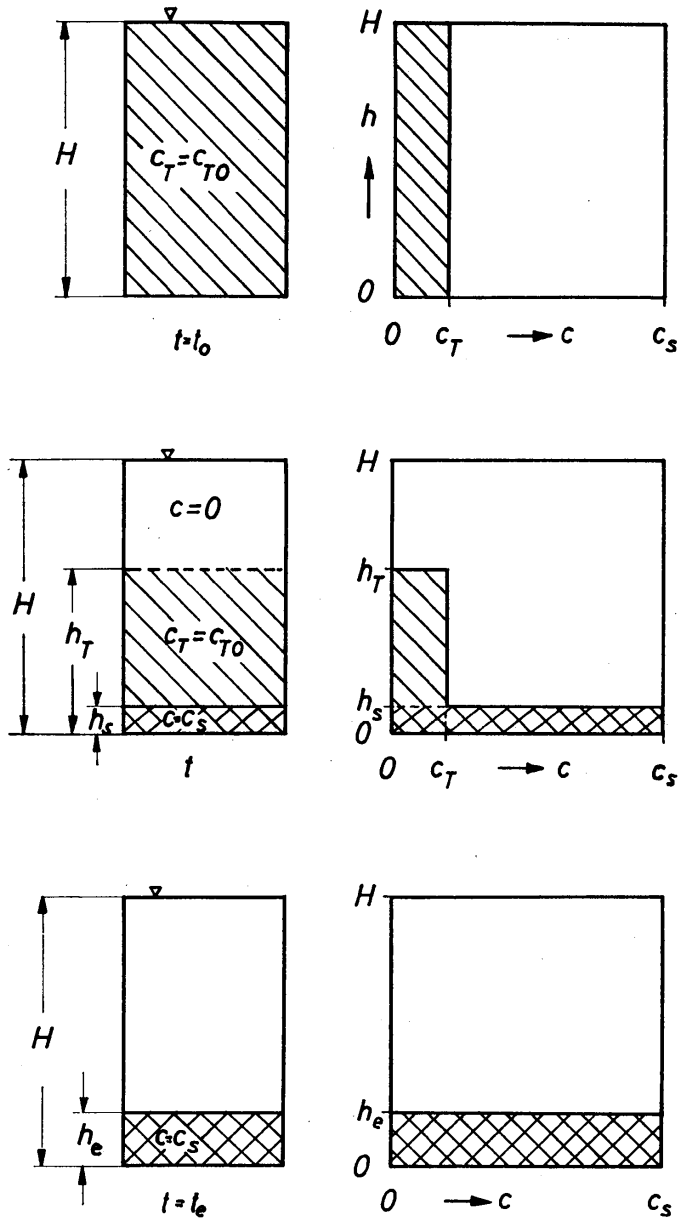


Bild 12.13
Zur Erläuterung der
Sedimentation

in der ursprünglichen Suspension befindliche Feststoff hat sich in der Sedimentschicht angesammelt, deren Höhe den Endwert h_e erreicht hat. Bei der Sedimentation unter den angenommenen Bedingungen nehmen die Feststoffkörner in der Sedimentationsschicht nicht die dichteste, sondern eine meistens recht lockere Packung ein. Die Konzentration c_s der Sedimentschicht ist daher niedriger als die bei dichtester Packung, die mit c_{\max} in der Größenordnung von etwa 0,5 liegt.

Kennzeichnend für die idealisierte Sedimentation, die soeben beschrieben wurde, ist der unstetige Übergang von c_T auf c_s und von der in der Trübe auftretenden konstanten Korngeschwindigkeit w_{ss} auf $w_{ss} = 0$, wenn die Körner die Sedimentschicht erreichen. Die Höhe der Sedimentschicht wächst mit der Geschwindigkeit

$$w_h = \frac{h_s}{t}. \quad (12.43)$$

Das Feststoffvolumen in der Sedimentschicht ist durch die Beziehung

$$V_{ps} = c_s F h_s \quad (12.44)$$

gegeben, wobei F die Querschnittsfläche des Sedimentationsgefäßes ist. Das Volumen V_{ps} muß gleich dem mit der Sedimentationszeit t multiplizierten Volumstrom \dot{V}_p des Feststoffes sein:

$$\dot{V}_p t = \frac{c_T V}{t} t = c_T F (w_{ss} + w_h) t. \quad (12.45)$$

Mit $V_{ps} = \dot{V}_p t$ ergibt sich die Höhe h_s der Sedimentschicht zu

$$h_s = \frac{c_T}{c_s} t (w_{ss} + w_h). \quad (12.46)$$

Führt man hierin noch für w_h Gl. (12.43) ein und bezieht man h_s auf die ursprüngliche Höhe H der Suspension, so erhält man

$$\frac{h_s}{H} = \frac{c_T/c_s}{1 - c_T/c_s} \frac{w_{ss} t}{H}. \quad (12.47)$$

Die Höhe der Klärzone ist

$$H - h_T = w_{ss} t. \quad (12.48)$$

Hieraus erhält man

$$\frac{h_T}{H} = 1 - \frac{w_{ss} t}{H}. \quad (12.49)$$

Die Sedimentation ist beendet, wenn sich zur Zeit $t = t_e$ der gesamte Feststoff V_p in der Sedimentschicht befindet. Dann muß h_T mit $h_s = h_e$ übereinstimmen. Aus den Gleichungen (12.47) und (12.48) folgt dann

$$\frac{h_e}{H} = \frac{c_T}{c_s} \quad (12.50)$$

und für den Endwert der Sedimentationszeit t_e in dimensionsloser Form

$$\frac{t_e w_{ss}}{H} = 1 - \frac{c_T}{c_s}. \quad (12.51)$$

Berechnet man die dimensionslose Sedimenthöhe h_s/H abhängig von der dimensionslosen Zeit $t w_{ss}/H$ mit c_T/c_s als Parameter, so erhält man die Darstellung gemäß *Bild 12.14*. Die nach Gl. (12.47) berechneten Kurven erstrecken sich vom Koordinatennullpunkt bis zu der gestrichelt eingezeichneten Diagrammdiagonalen. Im Schnittpunkt beider Kurven ist $h_s/H = h_e/H$, d.h. also, daß sich der gesamte Feststoff abgelagert hat. Ferner ist im Schnittpunkt $t = t_e$. In *Bild 12.15* ist das Sedimentationsdiagramm für $c_T/c_s = 0,2$ herausgezeichnet. Hierin sind die zeitlichen Änderungen der Klärzone ($1 - h_T/H$), der Höhe der Trübe ($h_T/H - h_s/H$) und der Höhe der Sedimentschicht h_s/H besonders deutlich zu erkennen. In dem mit A bezeichneten Punkt ist die Sedimentation beendet.

Mittels des Sedimentationsdiagramms, wie es in *Bild 12.14* dargestellt ist, ließen sich alle für den Vorgang maßgebenden Größen bestimmen, wenn die Korn-

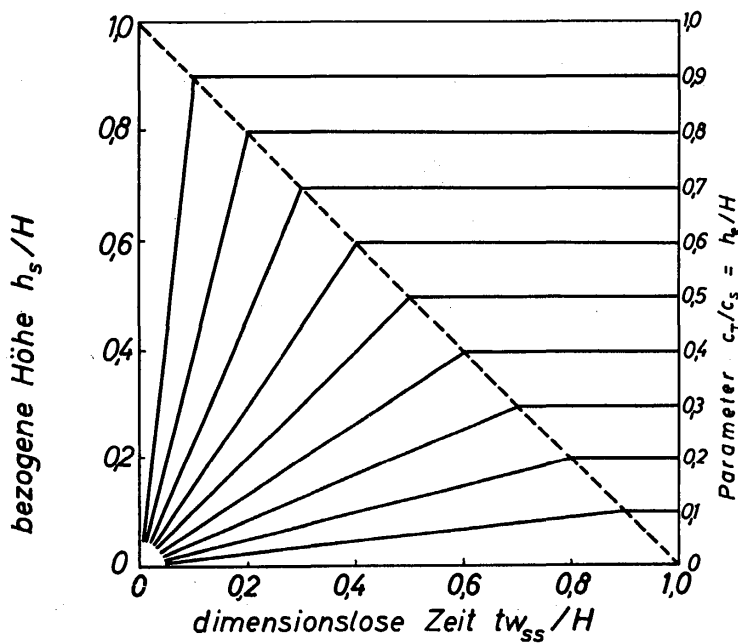


Bild 12.14
Sedimentationsdiagramm zur Bestimmung der bezogenen Höhe h_s/H der Sedimentschicht, abhängig von der Sedimentationszeit

geschwindigkeit w_{ss} bekannt wäre. Bei sehr niedrigen Konzentrationen wäre es zulässig, die Korngeschwindigkeit w_{ss} mit der theoretischen Sinkgeschwindigkeit des Einzelkornes w_s gleichzusetzen. Das erfordert aber, wie schon in Kapitel 7 erörtert wurde, daß sich die Körner in ihrer gegenseitigen Bewegung nicht beeinflussen.

Um eine Vorstellung von dem Zusammenhang zwischen dem Abstand der Körner und der Feststoffkonzentration zu erhalten, soll angenommen werden, daß die Feststoffkörner in den Eckpunkten eines Kubus angeordnet sind. Mit der Kantenlänge a wird das Volumen $V = a^3$. Drückt man a als Vielfaches des Korndurchmessers d_p aus, so gilt also $a = x d_p$, mit x als der Proportionalitätskonstanten. Für dieses Volumelement ist die Konzentration

$$c_T = \frac{\pi}{6 x^3} = \frac{0,524}{x^3} \quad (12.52)$$

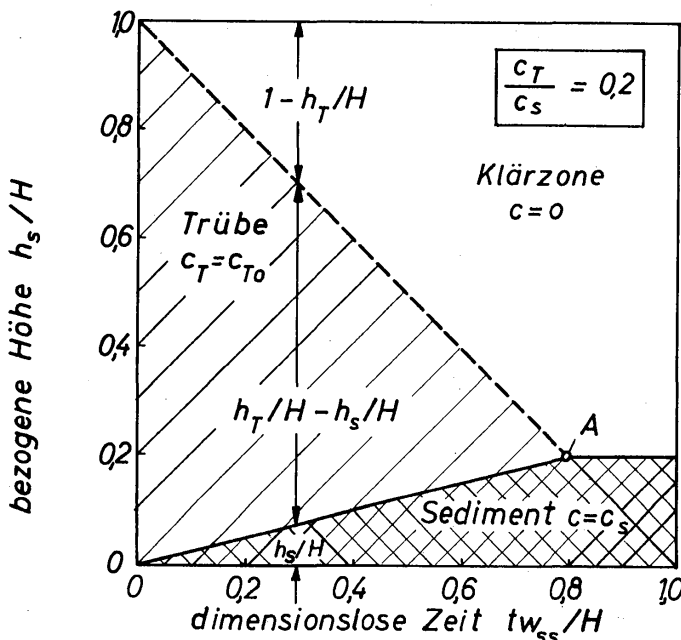


Bild 12.15
Zur Erläuterung des Sedimentationsdiagramms in Bild 12.14

Für $x = 5$ ist $c_T = 0,00419 \approx 0,42\%$ und für $x = 10$ ist $c_T = 0,000524 = 0,05\%$. Im Abschnitt 7.1 hatte sich ergeben, daß der Widerstand von Kugeln auch bei einem Abstand von $10 d_p$ noch merklich herabgesetzt werden kann. Das heißt also, daß Konzentrationen von etwa $0,05\%$ kaum zulässig sind, wenn man bei Rechnungen eine gegenseitige Beeinflussung in der Kugelbewegung außer acht lassen will.

Bei genügend großem Abstand zwischen den Feststoffkörnern ist die Korngeschwindigkeit gleich der Sinkgeschwindigkeit w_s , für die bei Gültigkeit des Stokesschen Widerstandsgesetzes die früher bereits angegebene Beziehung

$$w_s = \frac{1}{18} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \frac{d_p^2 g}{\nu} \quad (12.53)$$

gilt. Nach Einsetzen in Gl.(12.47) folgt für die dimensionslose Höhe h_s/H der Sedimentschicht

$$\frac{h_s}{H} = \frac{1}{18} \frac{c_T/c_s}{1 - c_T/c_s} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \frac{d_p^3 g}{\nu^2} \frac{d_p}{H} \frac{\nu t}{d_p^2} \quad (12.54)$$

und nach Einsetzen in Gl.(12.51) für den Endwert der dimensionslosen Sedimentationszeit

$$\frac{\nu t_e}{d_p^2} = \frac{18 \left(1 - \frac{c_T}{c_s} \right)}{\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \frac{d_p^3 g}{\nu^2} \frac{d_p}{H}} \quad (12.55)$$

In anderer Schreibweise gilt auch

$$\frac{t_e d_p g}{\nu} = 18 \left(1 - \frac{c_T}{c_s} \right) \frac{H/d_p}{\frac{\rho_p}{\rho} - 1} \quad (12.56)$$

Aus dieser Gleichung erkennt man unmittelbar, daß der Endwert der Sedimentationszeit um so größer wird, je kleiner der Korndurchmesser d_p und je größer die Viskosität ist.

Die Annahme, daß die Korngeschwindigkeit gleich der theoretischen Sinkgeschwindigkeit w_s ist, wird in der technischen Praxis nur in Ausnahmefällen erfüllt sein. Im allgemeinen wird sich die Korngeschwindigkeit sehr wesentlich von w_s unterscheiden und eine Funktion der Konzentration sein. Auf die unter den Bedingungen der Sedimentation bei höheren Konzentrationen geltenden Gesetze der Sinkbewegung ist im Kapitel 7 ausführlich eingegangen worden.

Seit langer Zeit ist bekannt, daß die Sedimentation in Gefäßen, die gegen die Horizontale geneigt sind, um ein Vielfaches schneller vor sich geht als in vertikal angeordneten. Der erste Versuch, die Sedimentation in geneigten Gefäßen theoretisch zu behandeln, wurde von NAKUMARA und KURODA [12.25] unternommen. In der Folge zeigte sich jedoch, daß diese Theorie noch unvollkommen ist. Mit

ihrer Verbesserung haben sich insbesondere PEARCE [12.26], GRAHAM und LAMA [12.27] sowie OLIVER und JENSON [12.28] beschäftigt.

Die Sedimentation ist nicht nur ein in der technischen Praxis vielfach angewendetes Verfahren zur Feststoffabscheidung. Es wird ebenfalls als Verfahren zur Bestimmung der Korndurchmesser aus der Messung der Sinkgeschwindigkeit herangezogen. Die Methode der Korngrößenanalyse durch Sedimentation wird in dem Buch von BATEL [12.29] ausführlich beschrieben. Von den neueren Erkenntnissen über die Bewegung von Partikelschwärmen wird dabei aber noch kein Gebrauch gemacht.

Schrifttum

- [12.1] ● H. ULLRICH, *Mechanische Verfahrenstechnik*, Springer, Berlin/Heidelberg/New York 1967
- [12.2] H. TRAWINSKI, *Mechanische Trennverfahren für Suspensionen und Schlämme, Aufbereitungs-Techn.* 7 (1966) 12, 709–19
- [12.3] A. MAROUDAS und P. EISENKLAM, Clarification of suspensions: A study of particle deposition in granular media, *Chem. Eng. Sci.* 20 (1965) 10, 867–73
- [12.4] P. M. HEERTJES und C. F. LERK, The functioning of deep bed bilthers, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 45 (1967) 2, T129–T137 und T138–T145
- [12.5] N. N. ZAKHAVAeva und A. M. LOPATINA, Filtration phenomena in the flow of electrolytes in porous media, *Int. Chem. Eng.* 4 (1964) 3, 437–9
- [12.6] H. R. COOPER, Recent russian contributions to filtration theory, *Int. Chem. Eng.* 3 (1963) 1, 104–8
- [12.7] M. E. AEROV, The hydraulic resistance of a fixed granular bed, *Int. Chem. Eng.* 3 (1963) 2, 272–6
- [12.8] B. F. RUTH, G. H. MONTILLON und R. E. MONTONNA, Studies in filtration: I. Critical analysis of filtration theory. II. Fundamental axiom of constant-pressure filtration, *Ind. Eng. Chem.* 25 (1933) 1, 76–82, und 2, 153–61
- [12.9] F. A. KOTTWITZ und D. R. BOYLAN, Prediction of resistance in constant pressure cake filtration, *AIChE J.* 4 (1958) 2, 175–80
- [12.10] R. STRAUMANN, Einfluß der Sedimentation auf die Filtration, *Chem.-Ing.-Techn.* 35 (1963) 10, 715–20
- [12.11] B. F. RUTH, Correlating filtration theory with industrial practice, *Ind. Eng. Chem.* 38 (1946) 6, 564–71
- [12.12] H. P. GRACE, Resistance and compressibility of filter cakes, *Chem. Eng. Progr.* 49 (1953) 6, 303–18, und 7, 367–77
- [12.13] G. A. RATCLIFF, D. A. BLACKADDER und D. N. SUTHERLAND, The compressibility of sediments, *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 2, 201–8
- [12.14] M. SHIRATO und S. OKAMURA, Comparison between processes of filtration at constant and altered pressures, *Chem. Eng. (Japan)* 18 (1954) 8, 358–63
- [12.15] M. SHIRATO und S. OKAMURA, Liquid pressure distribution within cakes in the constant pressure filtration, *Chem. Eng. (Japan)* 19 (1955) 3, 104–10
- [12.16] M. SHIRATO und S. OKAMURA, p, x -distribution within cakes in the compression-permeability experiments, *Chem. Eng. (Japan)* 19 (1953) 3, 111–8
- [12.17] M. SHIRATO, M. SAMBUICHI und S. OKAMURA, Filtration behavior of a mixture of two slurries, *AIChE J.* 9 (1963) 5, 599–605
- [12.18] F. M. TILLER, The role of porosity in filtration. Numerical methods for constant rate and constant pressure filtration based on Kozeny's law, *Chem. Eng. Progr.* 49 (1953) 9, 467–79

- [12.19] F. M. TILLER, The role of porosity in filtration. Variable-pressure variable-rate filtration, *AICHE J.* 4 (1958) 2, 170–4
- [12.20] F. M. TILLER und H. R. COOPER, The role of porosity in filtration. Constant pressure filtration, *AICHE J.* 6 (1960) 4, 595–601
- [12.21] F. M. TILLER und H. R. COOPER, The role of porosity in filtration. Porosity variation on filter catres, *AICHE J.* 8 (1962) 4, 445–9
- [12.22] F. M. TILLER und M. SHIRATO, The role of porosity in filtration. New definition of filtration resistance, *AICHE J.* 10 (1964) 1, 61–7
- [12.23] P. LE LEC, Die Kompressibilität der Filterkuchen und ihr Einfluß auf die Filtergleichungen, *Chem. Techn.* 20 (1968) 5, 264–73
- [12.24] J. DONAHL, Die mechanischen Eigenschaften des Filterkuchens und ihr Einfluß auf die Form der allgemeinen Filtergleichung, *Chem. Techn.* 20 (1968) 5, 273–6
- [12.25] H. NAKAMURA und K. KURODA, La cause de l'accélération de la vitesse de sédimentation des suspensions dans les récipients inclinés, *Keijo J. Med.* 8 (1937) 3, 256–96
- [12.26] K. W. PEARCE, Settling in the presence of downward-facing surfaces, *3rd Congress of the European Federation of Chemical Engineering, London 1962*, S. A 30–A 39
- [12.27] W. GRAHAM und R. LAMA, Sedimentation in inclined vessels, *Can. J. Chem. Eng.* 41 (1963) 1, 31–2
- [12.28] D. R. OLIVER und V. G. JENSON, The inclined settling of dispersed suspensions of spherical particles in square-section tubes, *Can. J. Chem. Eng.* 42 (1964) 5, 191–5
- [12.29] ● W. BATEL, *Einführung in die Korngrößenmeßtechnik*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1964

13 Gas- und Hydrozyklone

Gas- und Hydrozyklone dienen zur Trennung einer dispersen von einer kontinuierlichen Phase. Bei der dispersen Phase kann es sich grundsätzlich um feste oder fluide Partikeln handeln, während die kontinuierliche Phase stets ein Fluid, Gas oder Flüssigkeit ist. Das Ziel der Trennung kann darin bestehen, ein von festen Partikeln befreites Fluid zu erhalten. Dieses Ziel ist im Rahmen der Reinhaltung von Luft und Wasser von großer Bedeutung für die Gesundheit des Menschen sowie für die Erhaltung der Flora und Fauna, also der Erhaltung wichtiger Gegebenheiten des menschlichen Lebensraumes. Das Ziel der Trennung kann indes auch darin bestehen, die Feststoffteilchen als wertvolle Wirtschaftsgüter zu gewinnen. Die aufgezeigten Ziele lassen erkennen, daß dem Trennvorgang eine sehr große technische Bedeutung zukommt.

Die Trennung der beiden Phasen erfolgt in der Mehrzahl der technisch bedeutsamen Fälle in Zyklonen. Das Prinzip der Trennung besteht darin, daß die Partikeln unter bestimmten Bedingungen nicht den Bewegungsbahnen der Fluidelemente folgen. Es findet eine Entmischung der beiden Phasen statt. Leider ist diese Entmischung niemals vollständig. Einer der wesentlichsten Gründe besteht darin, daß das Strömungsfeld im Zyklon nur in begrenzter Weise vorgeschrieben und nur in höchst mangelhafter Weise berechnet werden kann. Die Strömung in Zyklonen zählt zu den räumlichen Strömungen, die bislang nicht beherrscht und beschrieben werden können. Das heißt aber auch, daß die Abscheidung partikelförmiger Stoffe aus einem Fluid bislang nicht mit der technisch gewünschten Sicherheit vorausgesagt werden kann.

Trotz der damit bereits klar zum Ausdruck gebrachten Mängel in der theoretischen Beschreibung der Trennverfahren soll hierauf in den folgenden Abschnitten eingegangen werden. Dabei erweist es sich als sinnvoll, einige Bemerkungen zur Staubtechnik und zum Begriff «Staub» vorzuschicken.

13.1 Einige Hinweise zur Staubtechnik

Die Staubtechnik beschäftigt sich mit den physikalischen und chemischen Eigenschaften der Stäube, mit den technischen Verfahren, die zu ihrer Herstellung und Weiterverarbeitung dienen, und schließlich mit den Verfahren zur Trennung der Stäube von den gasförmigen und flüssigen Medien, in denen sie als dispers verteilte Phase auftreten. Die disperse Verteilung des Staubes in einer anderen Phase kann entweder beabsichtigt oder unbeabsichtigt sein. Die beabsichtigte Verteilung liegt z.B. beim pneumatischen und hydraulischen Transport vor. Unbeabsichtigt ist die disperse Verteilung beispielsweise beim Schornsteinauswurf. Zur Vermeidung von Gesundheitsschäden und zur Verringerung der Ver-

luste an den häufig sehr wertvollen staubförmigen Produkten ist in jedem Falle eine Trennung des Staubes vom Trägermedium erforderlich.

Ein weiteres Eingehen auf die Staubtechnik erfordert eine Antwort auf die Frage: Was ist Staub? Von der VDI-Fachgruppe Staubtechnik wurde folgende technologische Definition des Begriffs Staub festgelegt: «Stäube sind Dispersionen fester Stoffe in Gasen, die einer technischen Behandlung zugänglich sind.» Damit soll offenbar zum Ausdruck gebracht werden, daß man von einem Staub immer nur dann spricht, wenn sich die festen Stoffe in disperser Verteilung in einem Gas, vornehmlich also in Luft, befinden. In ruhender Luft sinken die Feststoffteilchen, abhängig von ihrer Größe und Dichte, mehr oder weniger schnell ab. Bei einer sehr kleinen Sinkgeschwindigkeit bezeichnet man die festen Stoffe auch als Schwebstoffe. In bewegten Gasen werden die festen Stoffe unterschiedlich weit mitbewegt. Die Beseitigung der festen Stoffe aus der atembaren Luft ist eine bedeutende Forderung der Klimatechnik zur Vermeidung gesundheitlicher Schäden. Zum Verständnis dessen, was man unter Staub verstehen will, ist es erforderlich, die Bewegung fester Stoffe in Gasen, vor allem die Sinkbewegung und die hierfür erforderlichen Gesetze, zu kennen. Hierauf wurde bereits früher im Kapitel 5 eingegangen, und es sollen daher nur einige Gleichungen in geeigneter Form wiederholt werden. Für die stationäre Sinkgeschwindigkeit w_s in ruhenden Fluiden gilt die Beziehung

$$Fr_s = \frac{4/3}{\zeta} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right). \quad (13.1)$$

Hierin sind Fr_s die für den Sinkvorgang maßgebende Froudezahl, definiert durch

$$Fr_s \equiv \frac{w_s^2}{g d_p}. \quad (13.2)$$

Es bedeuten g Erdbeschleunigung, d_p Partikeldurchmesser, ζ Widerstandsbeiwert der Partikel, ρ_p Dichte der Partikel und ρ Dichte des Gases bzw. der Flüssigkeit. Der Widerstandsbeiwert ζ ist eine Funktion der Reynoldszahl Re_s .

Diese Kennzahlen sind folgendermaßen definiert:

$$\zeta \equiv \frac{K_w/F}{\rho w_s^2/2}, \quad (13.3)$$

$$Re_s \equiv \frac{w_s d_p \rho}{\eta}. \quad (13.4)$$

Mit K_w wird die Widerstandskraft der Partikel, mit $F = d_p^2 \pi/4$ deren größte Querschnittsfläche und mit η die dynamische Viskosität des Gases oder der Flüssigkeit bezeichnet. Für Re_s , kleiner als etwa 1, gilt mit guter Genauigkeit das Widerstandsgesetz von STOKES, wenn es sich bei den Partikeln um Kugeln handelt:

$$\zeta = \frac{24}{Re_s}. \quad (13.5)$$

Für andere Bereiche der Reynoldszahl sind in Abschnitt 5.1 Gesetze mitgeteilt worden. Führt man Gl.(13.4) in Gl.(13.1) ein, so erhält man nach Umformung:

$$\frac{Fr_s}{Re_s} \equiv \frac{w_s \eta}{d_p^2 g \varrho} = \frac{1}{18} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right). \quad (13.6)$$

Dieser Gleichung entnimmt man, daß die Sinkgeschwindigkeit in einer dimensionslosen Kennzahl auftritt und in dieser Form eine Funktion der Dichtekennzahl ist. Erweitert man die linke Seite mit d_p/ν , so folgt nach weiterer Umformung:

$$Re_s = \frac{1}{18} \frac{d_p^3 g}{\nu^2} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho} - 1 \right). \quad (13.7)$$

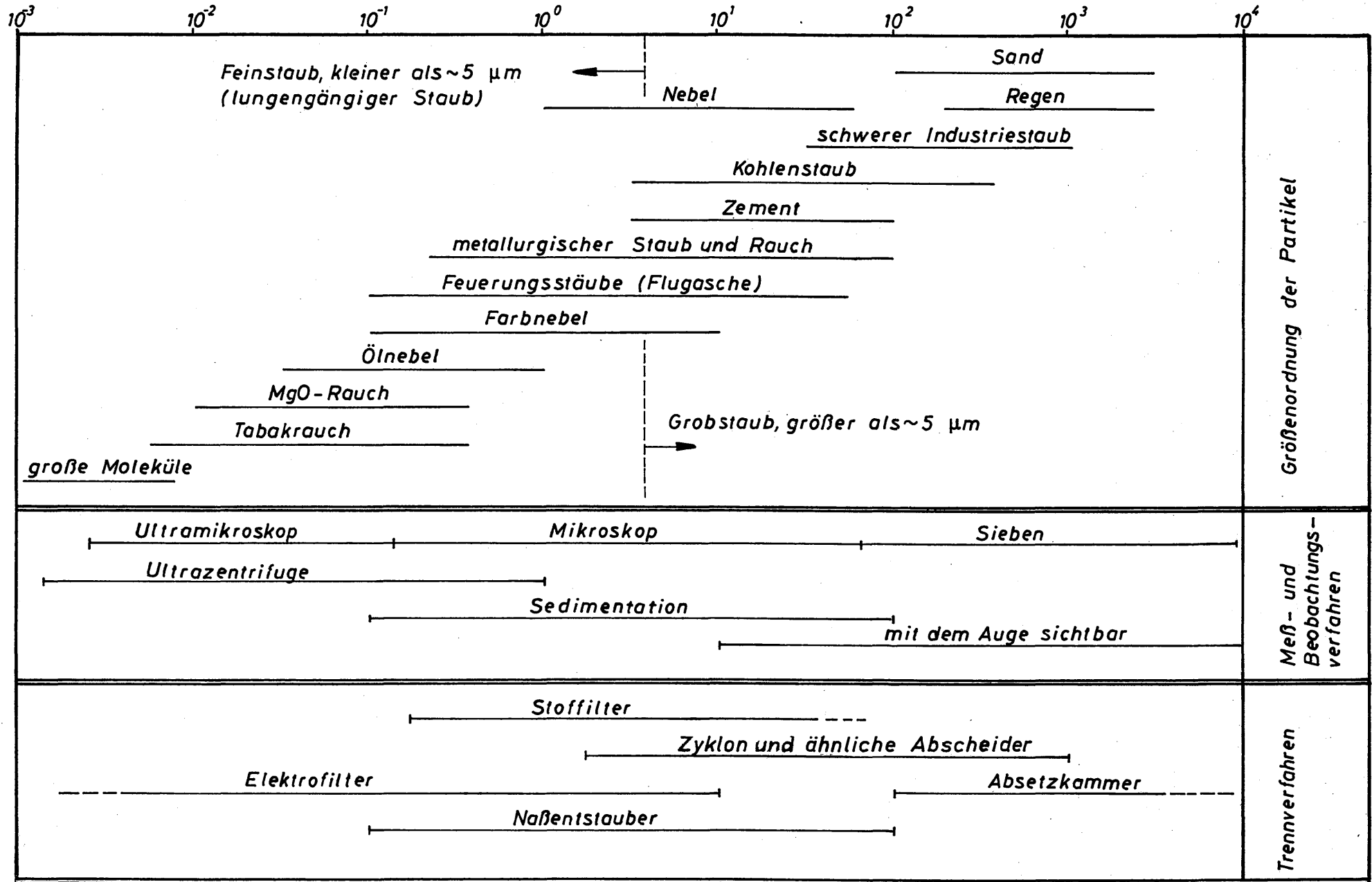
In dieser Form ist die mit der Sinkgeschwindigkeit gebildete Reynoldszahl eine Funktion der Galileischen Kennzahl $Ga \equiv d_p^3 g/\nu^2$ und der Dichtekennzahl $(\varrho_p/\varrho - 1)$.

Die letzten Gleichungen lassen erkennen, daß die Sinkgeschwindigkeit eine Funktion zahlreicher Größen ist und maßgeblich durch die Eigenschaften des Mediums, Gas oder Flüssigkeit, in dem die Feststoffe absinken, bestimmt wird. In einem Gas hat jeder Feststoff eine größere Sinkgeschwindigkeit als in einer Flüssigkeit. Die den Sinkvorgang beschreibenden Gesetze gelten sowohl für die Bewegung in Gasen als auch in Flüssigkeiten. Insofern ist also auch die an Gase gebundene Staubtechnik nur Teil einer umfassenderen Technik, die sich ganz allgemein mit dem Verhalten dispers verteilter fester Stoffe in fluiden Medien befaßt.

Einen Überblick über die verschiedenen Arten der festen Stoffe und ihre Größenordnungen [13.1] vermittelt *Tabelle 13.1*. Der Teilchendurchmesser d_p , angegeben in μm (Mikron), erstreckt sich von 10^{-3} Mikron bis 10^4 Mikron. Damit wird sowohl die Abmessung von Sandkörnern als auch die Abmessung von sehr großen Molekülen erfaßt. Von technischer größter Bedeutung ist der Abmessungsbereich zwischen 10^3 und 10^{-1} Mikron. In diesem Bereich liegen so wichtige Stoffe wie schwere Industriestäube, Kohlenstaub, metallurgischer Staub und Feuerungsstaub als Beispiele für dispers verteilte feste Stoffe. Für dispers verteilte flüssige Stoffe, die in Tropfenform auftreten, sei auf Farbnebel und Ölnebel hingewiesen. Für alle diese Stoffe, ob fest oder flüssig, gelten die gleichen Bewegungsgesetze.

In der zweiten Spalte von *Tabelle 13.1* sind Meß- und Beobachtungsverfahren zur Bestimmung der Teilchengröße angegeben. Das Sieben wird bei Teilchengrößen oberhalb von etwa 10^2 Mikron angewendet. Für Teilchen zwischen etwa 10^{-1} und 10^2 Mikron kommen zur Größenbestimmung die Sedimentation und für Teilchen zwischen 10^{-3} und 10^0 Mikron die Ultrazentrifuge in Frage. In der dritten Spalte sind schließlich einige der bekannteren Verfahren zur Abscheidung der Teilchen aus Gasen oder Flüssigkeiten angegeben. Sehr große Teilchen bzw. Teilchen mit großer Sinkgeschwindigkeit werden in Absetzkammern nach dem Schwerkraftprinzip abgetrennt. Wird die Sinkgeschwindigkeit bei kleineren Teilchen zu klein, dann erfolgt die Abscheidung im Zentrifugalfeld eines Zyklons (Gaszyklon oder Hydrozyklon). Für die Abscheidung kleinster Feststoffteilchen aus Gasen kommt das Elektrofilter in Frage. Teilchen in der Größenordnung von 10^{-1} bis

Tabelle 13.1: Partikeldurchmesser d_p in μm (Mikron)



10^2 Mikron werden vornehmlich durch Stofffilter aus Gasen oder Flüssigkeiten abgetrennt. Um einen Überblick über die technische Bedeutung der Entstauber und insbesondere über die Zyklone zu erhalten, muß auf den Entstaubungsgrad eingegangen werden, durch den die technische Leistungsfähigkeit der Entstauber gekennzeichnet ist.

13.2 Der Entstaubungsgrad

13.21 Definition des Entstaubungsgrades

Der einfachen Theorie der Kornabscheidung zufolge gibt es ein Grenzkorn mit dem Durchmesser d_{pG} und der Sinkgeschwindigkeit w_{sG} , das gerade noch abgeschieden wird. Jedes größere Korn wird ebenfalls abgeschieden, jedes kleinere Korn wird indes nicht abgeschieden. Trägt man den Entstaubungsgrad φ , der das Verhältnis aus abgeschiedener Staubmasse und zugeführter Staubmasse darstellt,

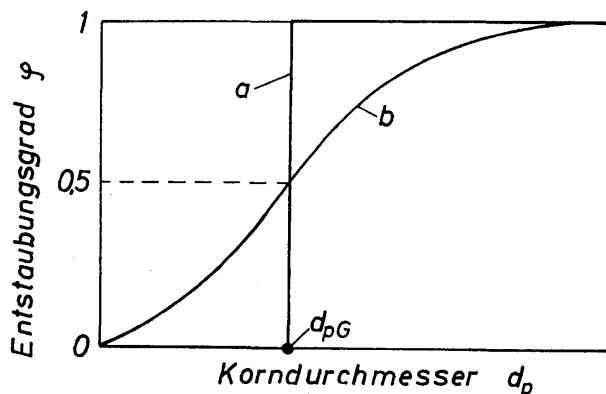


Bild 13.1

Zur Erläuterung des Entstaubungsgrades für einen idealen Entstauber (Kurve *a*) und für einen realen Entstauber (Kurve *b*)

über dem Korndurchmesser d_p auf, so erhält man die in *Bild 13.1* mit *a* bezeichnete Kurve. Beim Grenzkorndurchmesser d_{pG} ändert sich der Entstaubungsgrad von 0 auf 1. Der wirkliche Entstaubungsgrad ändert sich abhängig vom Korndurchmesser jedoch entsprechend Kurve *b*. Danach werden auch Körner, deren Durchmesser kleiner ist als d_{pG} , bereits abgeschieden, weil kleine Teilchen häufig agglomerieren und somit Mehrfachkörner bilden, deren Durchmesser größer als d_{pG} ist. Andererseits werden aber auch nicht alle Körner, deren Durchmesser größer als d_{pG} ist, abgeschieden. Durch turbulente Schwankungsbewegungen werden stets einige größere Teilchen von dem «gereinigten Gasstrom» mitgerissen. Die Übereinstimmung des wirklichen (Kurve *b*) mit dem theoretischen Entstaubungsgrad (Kurve *a*) beim Wert 0,5 ist willkürlich herbeigeführt. Häufig wird der Grenzkorndurchmesser d_{pG} so definiert, daß hierbei der wirkliche Entstaubungsgrad 0,5 beträgt; aber auch andere Werte werden zur Definition von d_{pG} angenommen.

Die Abweichungen des wirklichen vom theoretischen Entstaubungsgrad sind um so größer, je größer der Bereich des Korndurchmessers für das Korngemisch ist. Aus diesem Grunde werden häufig mehrere Abscheider hintereinander geschaltet. Jeder Abscheider wird dann nur für die Abscheidung eines begrenzten Korndurchmesserbereiches ausgelegt. Weiterhin kann die Abweichung aber auch da-

durch bedingt sein, daß der wirkliche Volumstrom \dot{V} des Fluids von dem der Rechnung zugrunde liegenden abweicht. Kann im Betrieb mit keinem konstanten Volumstrom gerechnet werden, dann sind entweder mehrere Abscheider in Parallelschaltung für unterschiedliche Volumströme zu verwenden oder am Eintritt zum Abscheider muß eine regelbare Drosselklappe angebracht werden.

Zur genauen Definition des Entstaubungsgrades muß auf zwei Begriffe der Korngrößenmeßtechnik, nämlich auf die Rückstandskurve und die Durchgangskurve eingegangen werden. Diese Kurven sind Summenkurven. Rückstandskurven zeigen an, wieviel Massenprozent einer Feststoffmasse M_p einen größeren Korndurchmesser als d_p haben. Dieser Anteil würde auf einem Sieb als Rückstand R' verbleiben, während der Durchgang D' hindurchfiele. Die Durchmesser aller Korngrößen des Durchganges sind kleiner als d_p . Ist M_p die gesamte Staubmasse, dann ist der prozentuale Rückstandsanteil R durch

$$R = \frac{R'}{M_p} 100 \quad (13.8)$$

und der prozentuale Durchgangsanteil D durch

$$D = \frac{D'}{M_p} 100 \quad (13.9)$$

definiert. Zwischen R und D besteht wegen

$$R' + D' = M_p \quad (13.10)$$

der Zusammenhang

$$R = 100 - D. \quad (13.11)$$

R' und D' sind die bei einer Siebung als Rückstand und Durchgang gemessenen Feststoffmassen. Im folgenden werden des kürzeren Ausdrucks wegen als «Rückstand» und «Durchgang» die prozentualen Massenanteile R und D bezeichnet. *Bild 13.2* zeigt eine Summenrückstandskurve, d. h. den Summenrückstand R , abhängig vom Korndurchmesser, und *Bild 13.3* zeigt den Summendurchgang D .

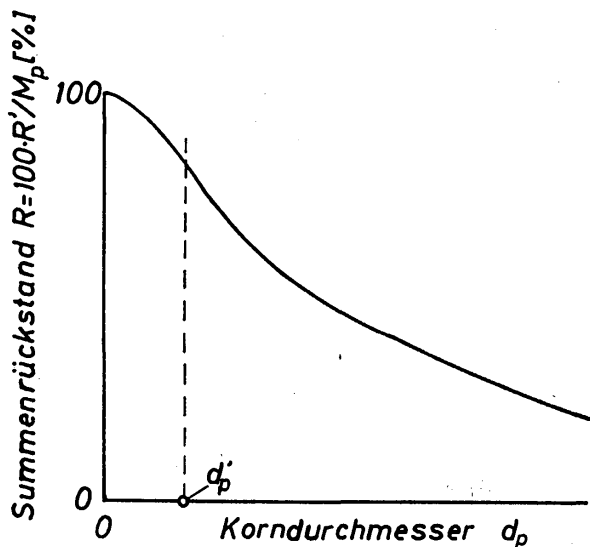


Bild 13.2. Summenrückstandskurve

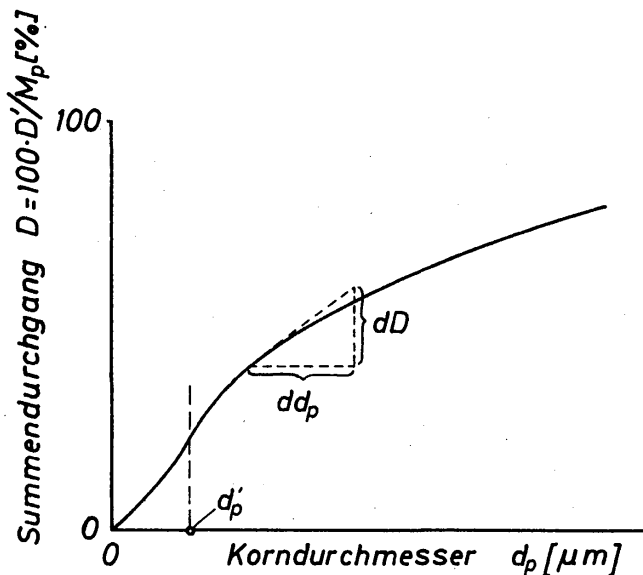
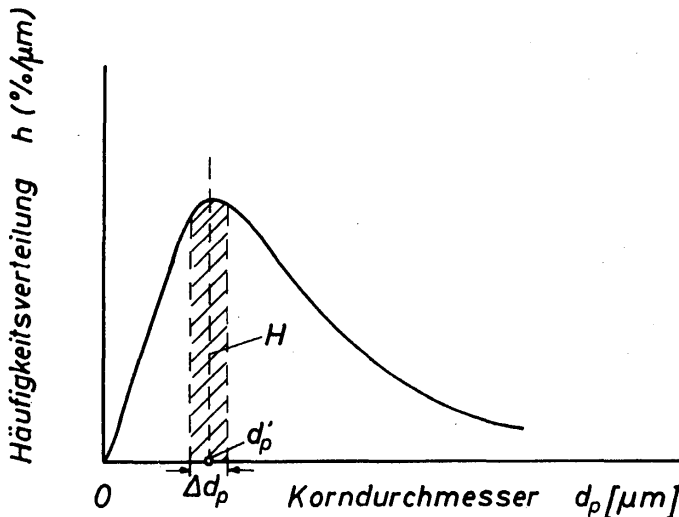


Bild 13.3. Summendurchgangskurve

Bildet man für jeden Punkt der Summendurchgangskurve den Differentialquotienten dD/dd_p , der als Häufigkeitsverteilung h der Korngröße bezeichnet wird,



$$h = \frac{dD}{dd_p}, \quad (13.12)$$

Bild 13.4. Häufigkeitsverteilungskurve

und trägt h über d_p auf, so erhält man die in *Bild 13.4* dargestellte Häufigkeitskurve. Sie gibt Aufschluß darüber, wie häufig ein bestimmter Korndurchmesser im Korngemisch vorhanden ist. Bei einer Breite Δd_p der betrachteten Kornfraktion, *Bild 13.4*, entspricht die Fläche H unter der Verteilungskurve dem Massenanteil dieser Fraktion in dem Gemisch.

Ein Maximum der Häufigkeit tritt bei dem Durchmesser d'_p auf, für den die Summenrückstands- bzw. Summendurchgangskurve eine maximale negative bzw. positive Steigung aufweist. Der Verlauf der Summenkurven kann sehr unterschiedlich sein, er hängt vor allem von den Eigenschaften des Feststoffes und des Zerkleinerungsprozesses ab. Es tritt daher auch gelegentlich der Fall auf, daß die Häufigkeitskurve mehr als ein Maximum aufweist.

Mit diesen Grundlagen der Korngrößenbestimmung ist es möglich, den Entstaubungsgrad genauer zu behandeln. Dabei ist es erforderlich, zwischen dem Gesamtentstaubungsgrad φ und dem Fraktionsentstaubungsgrad φ_d zu unterscheiden. Der Fraktionsentstaubungsgrad φ_d bezieht sich auf einen kleinen Durchmesserbereich. Die Zusammenhänge werden an Hand von *Bild 13.5* erläutert. Es sind die Summendurchgangskurven für das ungereinigte Rohgas D_u und für das entstaubte Reingas D_e , abhängig vom Korndurchmesser d_p , dargestellt. Aus dem Verlauf der Kurve D_u erkennt man, daß nur der Bereich für sehr kleine Korndurchmesser dargestellt ist. In Richtung großer Korndurchmesser müssen sich beide Kurven dem Wert $D = 100\%$ nähern. Man entnimmt den beiden Kurven, daß das im Rohgas enthaltene Korngemisch bei d_{p1} einen Durchgang von 13% und das im Reingas enthaltene Korngemisch einen Durchgang von 76% aufweist. Die Bestandteile an Körnern, die größer als d_{p1} sind, sind also weitgehend ausgeschieden.

Mit diesen Angaben ist man in der Lage, einen Gesamtentstaubungsgrad φ und einen Fraktions- bzw. differentiellen Entstaubungsgrad φ_d zu definieren. Für den Gesamtentstaubungsgrad schreibt man:

$$\varphi = \frac{M_{pu} - M_{pe}}{M_{pu}} 100 = 100 \left(1 - \frac{M_{pe}}{M_{pu}} \right). \quad (13.13)$$

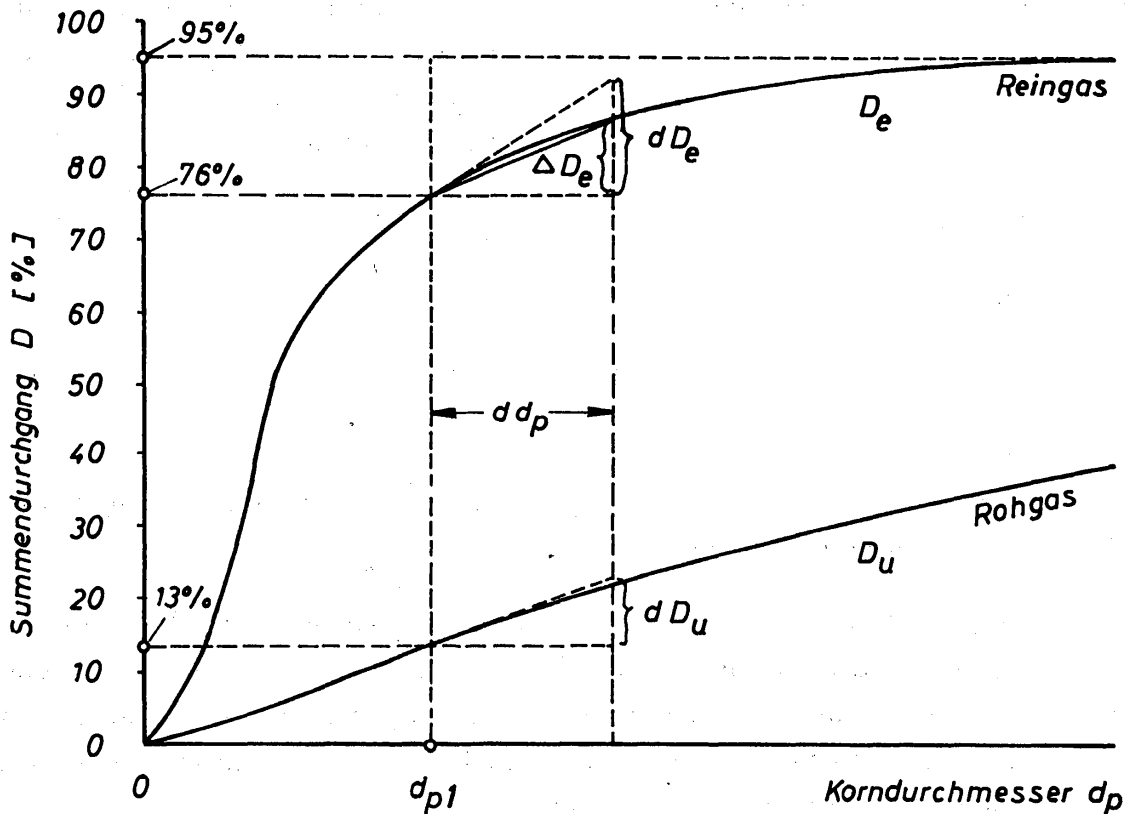


Bild 13.5. Zur Erläuterung des Fraktions- und des Gesamtentstaubungsgrades

Hierin bedeuten M_{pu} die Feststoffmasse je Volumeinheit des ungereinigten und M_{pe} die des entstaubten Gases. Die Differenz $M_{pu} - M_{pe}$ ist die im Entstauber ausgeschiedene Feststoffmasse je Volumeinheit des Gases. Für den Fraktionsentstaubungsgrad gilt in entsprechender Weise

$$\varphi_d = \frac{dD'_u - dD'_e}{dD'_u} 100 = 100 \left(1 - \frac{dD'_e}{dD'_u} \right). \quad (13.14)$$

Wegen

$$D_e = \frac{D'_e}{M_{pe}} 100 \quad (13.15)$$

erhält man

$$dD'_e = \frac{dD_e M_{pe}}{100} \quad (13.16)$$

und in entsprechender Weise

$$dD'_u = \frac{dD_u M_{pu}}{100}. \quad (13.17)$$

Mit den letzten beiden Gleichungen erhält man für den Fraktionsentstaubungsgrad die Schreibweise:

$$\varphi_d = 100 - \frac{dD_e}{dD_u} \cdot \frac{M_{pe}}{M_{pu}} 100 = 100 \left(1 - \frac{dD_e}{dD_u} \frac{M_{pe}}{M_{pu}} \right). \quad (13.18)$$

Hierin ist gemäß Gl. (13.13)

$$\frac{M_{pe}}{M_{pu}} 100 = 100 - \varphi. \quad (13.19)$$

Damit ergibt sich für φ_d die folgende Beziehung:

$$\varphi_d = 100 - \frac{dD_e}{dD_u} (100 - \varphi) = 100 \left[1 - \frac{dD_e}{dD_u} (1 - \varphi/100) \right]. \quad (13.20)$$

Der Fraktionsentstaubungsgrad φ_d ist eine Funktion des Gesamtentstaubungsgrades φ und der in *Bild 13.5* erläuterten Differentiale dD_e und dD_u bei einem bestimmten Korndurchmesser d_{p_1} . Häufig wird das Differential dD durch die Differenz ΔD ersetzt. Wie man *Bild 13.5* jedoch am Beispiel für die Durchgangskurve des Reingases entnehmen kann, können sich dabei Fehler ergeben, die im Bereich großer Änderungen des Differentialquotienten mit dem Korndurchmesser sehr groß werden können. Im allgemeinen ist das aber nur im Bereich kleiner Korndurchmesser der Fall.

Im Bereich großer Korndurchmesser ist annähernd $dD_e = dD_u$ und somit der Fraktionsentstaubungsgrad gleich dem Gesamtentstaubungsgrad. Keiner der beiden Entstaubungsgrade vermag das Verhalten eines Entstaubers vollständig zu beschreiben. Neben dem Entstaubungsgrad muß zumindest noch die Häufigkeitskurve für das im Rohgas enthaltene Korngemisch angegeben werden. Bei Verwendung verschiedener Korngemische hat jeder Entstauber auch verschiedene Entstaubungsgrade. Vergleiche zwischen verschiedenen Entstaubern müssen stets mit dem gleichen Feststoff vorgenommen werden, so daß die Dichte des Materials und die Häufigkeitskurve übereinstimmen. Darüber hinaus muß bei den Vergleichsversuchen natürlich das gleiche Gas beim gleichen Volumstrom verwendet werden.

13.22 Entstaubungsgrade für einige Entstauber

In diesem Abschnitt soll, ohne daß auf Einzelheiten näher eingegangen wird, der Gesamtentstaubungsgrad verschiedener Entstaubertypen in Abhängigkeit vom Korndurchmesser besprochen werden. *Bild 13.6* zeigt die Entstaubungsgrade für sieben Abscheider. Für alle Abscheider nähert sich der Entstaubungsgrad bei großen Korndurchmessern 100%. Interessant sind für einen Vergleich verschiedener Entstauber nur Angaben über den Entstaubungsgrad im Bereich kleiner Korndurchmesser. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Angaben für Korndurchmesser unter etwa 2 Mikron schon aus meßtechnischen Gründen unsicher sind.

Außer dem normalen Gaszyklon ist noch der Naßzyklon angeführt. In diesen Apparat wird an der Behälterwand Wasser eingespritzt, das den an die Wand gelangten Feststoff auffängt und unmittelbar abführt. Beim Naßzyklon wird dadurch ein Rückwandern des Feststoffes in die aufwärts gerichtete Gasströmung durch elastische Stöße an der Wand und durch turbulente Schwankungen in

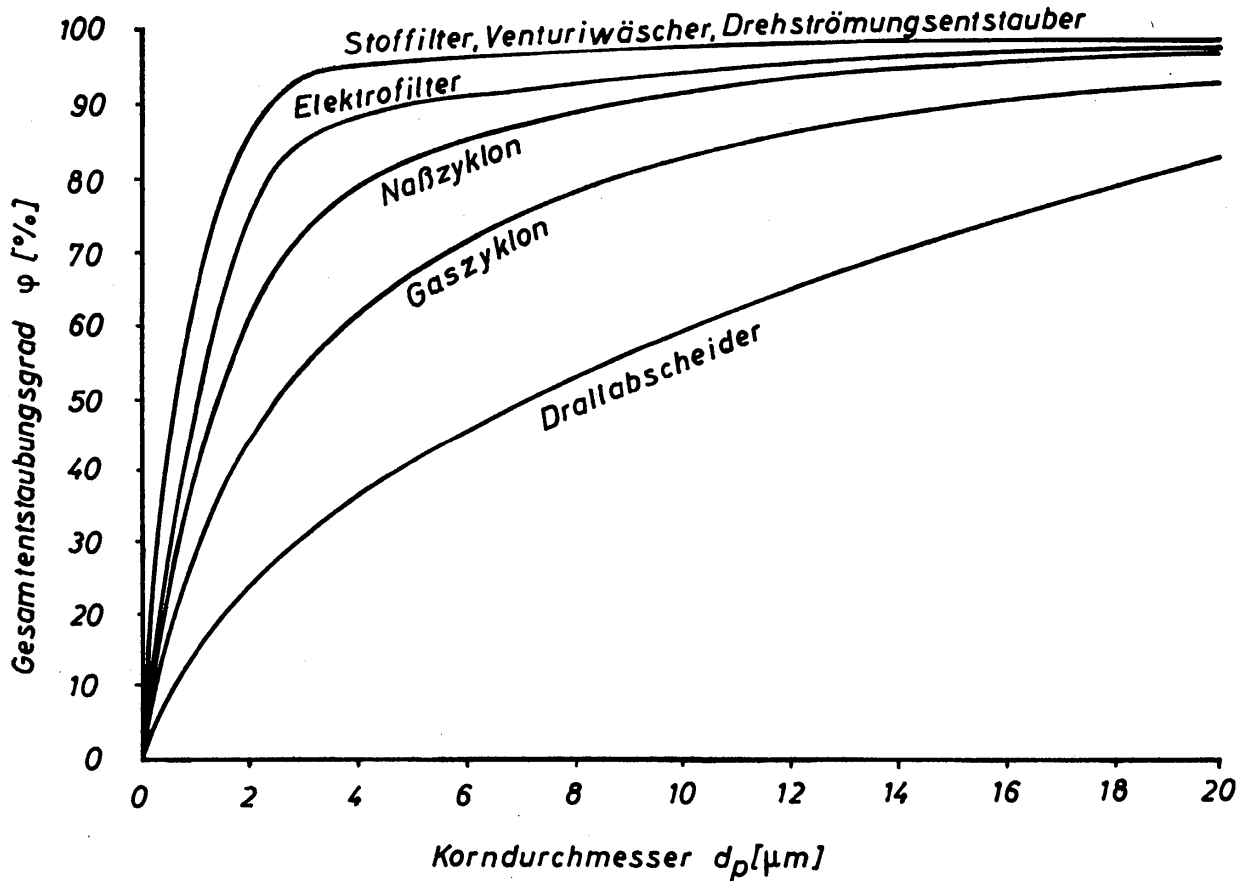


Bild 13.6. Angaben über den Gesamtentstaubungsgrad für einige in Bild 13.7 dargestellte Entstauber

wirkungsvoller Weise verhindert. Der Gesamtentstaubungsgrad des Naßzyklons ist daher auch im Bereich kleiner Korndurchmesser wesentlich höher als beim (Trocken-) Zyklon.

Den niedrigsten Wert für den Gesamtentstaubungsgrad hat der Drallabscheider. Den prinzipiellen Aufbau dieses Apparates zeigt *Bild 13.7 a*. Das Gas-Feststoff-Gemisch durchströmt ein senkrechtes Rohr von oben nach unten, wobei der Feststoff im wandnahen Ringstrom angereichert und seitwärts abgeführt wird. Der geeignete Kernstrom wird durch ein Kernrohr aus dem Apparat herausgeleitet. Am Eintritt des Entstaubers befindet sich ein Leitrad, welches dem Gemisch den erforderlichen Drall erteilt, so daß die Feststoffteilchen unter der Wirkung von Zentrifugalkräften an die Wand geschleudert werden. Beim Drallabscheider ist die Rückwanderung des Feststoffes in den Kernstrom wesentlich größer als beim Zyklon. Ring- und Kernstrom haben die gleiche axiale Strömungsrichtung.

Zu den wirkungsvollsten mechanischen Entstaubern zählen der Drehströmungsentstauber und der Venturiwäscher. Aufbau und Wirkungsweise des Drehströmungsentstaubers gehen aus *Bild 13.7 b* hervor [13.2]. Das Rohgas tritt von unten in den Apparat ein und wird von einem Stromlinienkörper, dem Wirbelhalter, von der Achse abgelenkt. Durch tangentielle Zufuhr von Zweitluft wird an der Außenwand des zylindrischen Behälters eine nach abwärts gerichtete schraubenförmige Bewegung erzwungen, die auch den aufwärts gerichteten Kernstrom zu

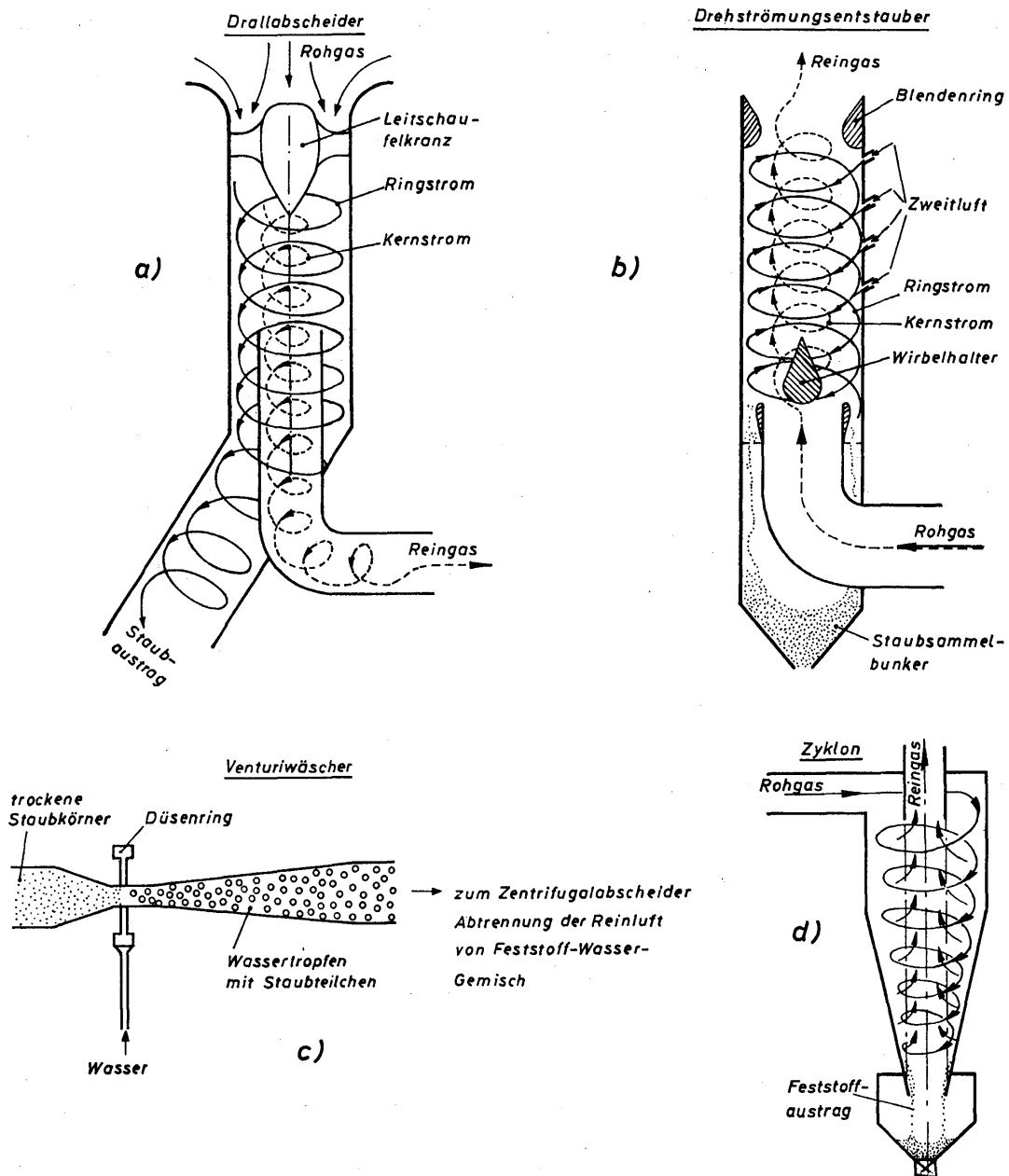


Bild 13.7. Schematisierte Darstellungen von einigen Entstaubertypen

einer schraubenförmigen Bewegung veranlaßt. Ring- und Kernstrom haben entgegengesetzte axiale Strömungsrichtung. Die im Kernstrom befindlichen Feststoffkörner werden der Wirkung der Zentrifugalkraft ausgesetzt, gelangen in den abwärts gerichteten Ringstrom und schließlich in den Staubsammelbunker. Der Ringstrom löst sich nach unten hin auf und tritt in den Kernstrom über.

Von großer Wirksamkeit ist auch der Venturiwäscher [13.3]. Die Reinigung des Gases wird dadurch erzielt, daß die Feststoffteilchen an Wassertropfchen gebunden werden, deren Abscheidung in einem Zentrifugalabscheider mühelos gelingt. Gemäß Bild 13.7c besteht der Venturiwäscher aus einer Düse mit anschließendem Diffusor. Kurz vor oder kurz hinter dem engsten Querschnitt wird durch Düsen Wasser in den Gas-Feststoff-Strom gespritzt. Die zur Zerstäubung des Wassers erforderliche Energie wird bei Verwendung von Druckdüsen in erster Linie vom Wasser selbst geliefert. Strömt das Wasser hingegen drucklos durch die Düsen, so wird die zur Zerstäubung erforderliche Energie dem Gas-

strom entnommen. Damit die Staubteilchen von Wassertröpfchen eingefangen werden, muß zwischen beiden Teilchen eine möglichst große Relativgeschwindigkeit herrschen. Über die günstigste Tropfengröße liegen noch keine genauen Erfahrungen vor.

Der Vergleich der Gesamtabscheidungsgrade zeigt, daß der Venturiwäscher sehr viel wirkungsvoller ist als der Naßzyklon, bei dem nur jene Teilchen eingefangen werden, die durch die Zentrifugalkraft oder durch turbulente Schwankungsbewegungen bis an die berieselte Wand gelangen. Teilchen, die sich im Gleichgewicht von Zentrifugal- und Widerstandskraft auf einem kleineren Radius bewegen, bleiben vom Wasserfilm unbeeinflusst. Beim Venturiwäscher wird das Wasser in feiner Verteilung in den Gasstrom gebracht, so daß für alle Staubteilchen eine nahezu gleich große Wahrscheinlichkeit besteht, von Wassertröpfchen eingefangen zu werden. Im Naßzyklon mit berieselter Innenwand besteht aber für die kleinen Staubteilchen kaum eine Wahrscheinlichkeit, in den Wasserfilm zu gelangen. Geht man also vom Trocken- zum Naßabscheider über, so ist es offensichtlich sinnvoll, das Wasser in disperser Form in den Gasstrom zu bringen.

Der Nachteil aller Naßentstauber im Vergleich zum Trockenentstauber besteht darin, daß hinter dem Naßentstauber ein weiterer Apparat erforderlich ist, in dem der Staub von der Flüssigkeit abgetrennt wird. Insofern kann man also sagen, daß beim Naßentstauber eine Verschiebung der Probleme von der Gasreinigung auf die Flüssigkeitsreinigung vorgenommen wird. Ein Naßabscheider vermag also keineswegs alle Probleme zu beseitigen, und es besteht nach wie vor größtes Interesse an Trockenabscheideverfahren.

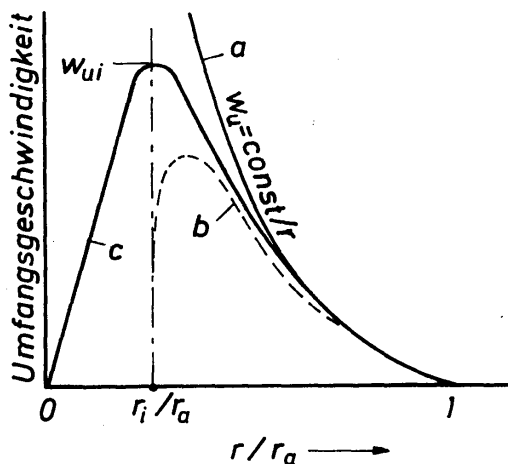
13.3 Der Gaszyklon

Zur Abscheidung fester, partikelförmiger Stoffe aus einem Gas hat der Gaszyklon wegen seines einfachen Aufbaus und wegen seiner guten Abscheideleistung eine sehr weite Verbreitung gefunden [13.4]. Die Abscheidung der Partikeln erfolgt in einer rotierenden Gasströmung durch die auf die Partikel wirkenden Fliehkräfte (*Bild 13.7*). Das im Zyklon auftretende sehr verwickelte räumliche Strömungsfeld hat sich bislang noch nicht theoretisch vollständig behandeln lassen. Aus diesem Grunde lassen sich auch noch keine zuverlässigen Aussagen über die Bewegung der Partikeln und somit über deren Abscheidung aus dem Rohgas machen. BARTH [13.5] hat die historische Entwicklung und die Wirkungsweise der Zyklone geschildert. Die Aufgabe des Ingenieurs, für die jeweiligen Bedingungen eine optimale Zyklonausführung zu finden, ist daher immer noch mit einem Risiko behaftet. Nach wie vor ist die persönliche Erfahrung des Ingenieurs nicht zu entbehren [13.6].

Diese zur Auslegung von Zyklonen erforderliche Erfahrung wird jedoch gestützt durch theoretische Untersuchungen von BARTH [13.7], MUSCHELKNAUTZ [13.8] sowie MUSCHELKNAUTZ und BRUNNER [13.9]. Einen weiteren bedeutsamen Beitrag zur theoretischen Durchdringung der im Zyklon ablaufenden Vorgänge haben

tangential in das zylindrische Element eingeleitet. Der Einlaufstutzen hat im Eintrittsquerschnitt die Fläche F_e ; die dort herrschende Geschwindigkeit ist w_e . Nach Abscheidung der Feststoffe verläßt das gereinigte Gas den Zyklon durch das Tauchrohr; es ragt mit der Strecke h_i in den Zyklon hinein. Seine Querschnittsfläche ist F_i , die Gasgeschwindigkeit im Tauchrohr w_i .

Durch die tangentielle Einführung des Rohgases und die axiale Abführung des gereinigten Gases wird dem Gas eine Umfangsgeschwindigkeit w_u aufgezwungen. Mit zunehmendem Abstand von der Behälterwand ändert sich die Umfangsgeschwindigkeit gemäß der Kurve *a* in *Bild 13.9*. Mit Annäherung an die Behälterachse macht sich eine Wirbelsenke bemerkbar, so daß die Umfangsgeschwindigkeit in qualitativer Form der Kurve *c* folgt. An der Stelle $r = r_i$ erreicht die Umfangsgeschwindigkeit w_u ihren höchsten Wert w_{ui} . Die zusätzlich eingezeichnete Kurve *b* gibt den Geschwindigkeitsverlauf im Bereich des Tauchrohres wieder.



Aufschlußreiche Untersuchungen über das Strömungsfeld in Zyklonen hat TER LINDEN durchgeführt [13.14 und 13.15].

Bild 13.9. Umfangsgeschwindigkeit im Gaszyklon

Der Umfangsgeschwindigkeit ist eine Radialgeschwindigkeit w_r überlagert, die bei $r = r_i$ den Wert w_{ri} erreicht. Mit dieser Geschwindigkeit tritt das Gas durch die in *Bild 13.8* gestrichelt angedeutete Verlängerungslinie der Tauchrohrwand. Dieses ist nur eine stark schematisierte Wiedergabe der sehr verwickelten dreidimensionalen Strömung im Zyklon. Den Hauptströmungen sind Sekundärströmungen überlagert, die noch weitgehend unbekannt sind und in starkem Maße von der Form des Zyklons abhängen.

13.311 Grenzkorndurchmesser und Abscheidegrad

Zur vereinfachten Betrachtung wird angenommen, daß sich alle Partikeln in einer ebenen Wirbelströmung bewegen. Jenes Korn, welches sich auf dem Radius r_i bewegt, wird als Grenzkorn bezeichnet. Jede auf einem Radius $r > r_i$ kreisende Partikel wird abgeschieden. Auf einem Radius $r < r_i$ kreisende Partikeln werden von dem senkrecht aufwärts gerichteten Gasstrom erfaßt, geraten mit dem Gas durch das Tauchrohr und verbleiben somit im gereinigten Gas.

An jedem Korn greifen die Widerstandskraft K_w und die um die Auftriebskraft verminderte Fliehkraft K_z an. Für diese Kräfte gelten auf dem Radius r_i die folgenden Beziehungen:

$$K_w = 3 \pi \eta d_{pG} w_{ri}, \quad (13.21)$$

$$K_z = \frac{d_{pG}^3 \pi}{6} \frac{w_{ui}^2}{r_i} (\varrho_p - \varrho). \quad (13.22)$$

Außer den bereits bekannten Größen bedeuten η die dynamische Viskosität des Gases, ϱ die Gasdichte und ϱ_p die Partikeldichte. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt für den Grenzkorndurchmesser die Beziehung:

$$d_{pG} = \sqrt{\frac{18 \eta w_{ri} r_i}{(\varrho_p - \varrho) w_{ui}^2}}. \quad (13.23)$$

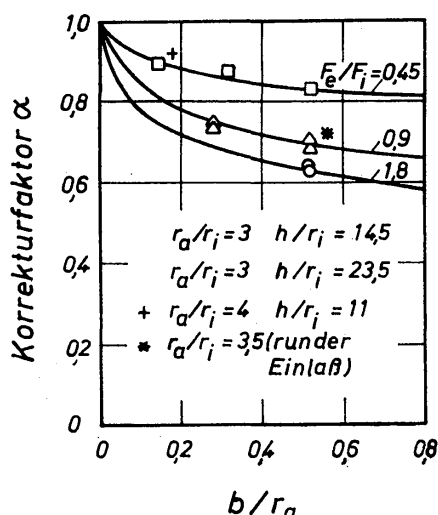
In dieser Beziehung sind die Stoffwerte η , ϱ_p und ϱ sowie der Radius r_i unmittelbar bekannt. Die Radialgeschwindigkeit w_{ri} folgt aus der Kontinuitätsgleichung für den Gasstrom. Ist die Gasdichte unveränderlich, so gilt:

$$w_e F_e = w_i F_i = w_{ri} F_{ri}. \quad (13.24)$$

Mit F_{ri} wird die verlängert gedachte Tauchrohrwand bezeichnet, für die $F_{ri} = 2 r_i \pi h$ gilt. Unbekannt ist in Gl. (13.23) noch die Umfangsgeschwindigkeit w_{ui} . Aus einer Betrachtung der Impulsmomente leitete BARTH (siehe zur ausführlichen Erläuterung [13.9]) folgende Beziehung her:

$$\frac{w_{ui}}{w_i} = \frac{1}{\frac{F_e}{F_i} \frac{r_i}{r_e} \alpha + \frac{h}{r_i} \zeta_w}. \quad (13.35)$$

Die geometrischen Abmessungen F_e , F_i , r_e , r_i und h gehen aus *Bild 13.8* hervor. Ferner bedeuten α einen Korrekturfaktor und ζ_w einen Reibungsbeiwert des Zyklons. Der Korrekturfaktor berücksichtigt die Strahleinschnürung des Rohrgases beim Eintritt in den Zyklon. Nach neueren Messungen von MUSCHELKNAUTZ



und BRUNNER [13.9] hängt α gemäß der Darstellung in *Bild 13.10* zumindest vom Flächenverhältnis F_e/F_i und von der bezogenen Breite b/r_a des Eintrittsstützens ab. Mit zunehmenden Werten von F_e/F_i und b/r_a wird der Korrekturfaktor kleiner.

Bild 13.10. Abhängigkeit des Korrekturfaktors α zur Berücksichtigung der Strahleinschnürung am Zykloneintritt von geometrischen Größen

Für den Wandreibungsbeiwert ζ_w hat BARTH den konstanten Wert 0,02 angegeben. MUSCHELKNAUTZ und BRUNNER haben die Wandreibung näher untersucht und dabei auch die beim praktischen Betrieb von Zyklonen beobachtete Strähnenbildung des Feststoffes und die begrenzte Beladefähigkeit des Gasstromes mit Feststoff berücksichtigt. Sie geben für den Reibungsbeiwert folgende Beziehung an:

$$\zeta_w = \zeta_g + \zeta_s \sqrt{\varphi \mu} \left(\frac{w_i}{2 r_i g} \frac{\rho}{\varepsilon_s \rho_p} \right)^{1/2} \left(\frac{r_i}{r_a} \right)^{5/8} \quad (13.26)$$

Außer den bereits bekannten Größen bedeuten ζ_g den Reibungsbeiwert des reinen Gasstromes, ζ_s den Reibungsbeiwert der Feststoffstrahlen, ε_s den Lückengrad dieser Strahlen, φ den Gesamtentstaubungsgrad und μ die Gutbeladung. Zur Auswertung von Gl.(13.26) muß der Gesamtentstaubungsgrad φ zunächst geschätzt werden. Die Gutbeladung μ ist durch

$$\mu \equiv \frac{\dot{M}_p}{\dot{M}} \quad (13.27)$$

definiert, wobei $\dot{M}_p = \dot{V}_p \rho_p$ und $\dot{M} = \dot{V} \rho$ die eintretenden Massenströme des Feststoffes und des Gases bedeuten. Der Lückengrad ε_s der Staubstrahlen muß praktisch immer geschätzt werden. Er hängt mit Sicherheit von der Art des Feststoffes und der Korngröße ab. Nach Versuchen von MUSCHELKNAUTZ und BRUNNER lag ε_s bei verschiedenen Feststoffen zwischen etwa 0,16 und 0,35. Diese Werte scheinen nach Abschnitt 8.12 sehr niedrig zu sein. Möglicherweise geben die mitgeteilten Werte nicht nur den Lückengrad, sondern auch noch andere Eigenschaften der Strahlen wieder. Für den Reibungsbeiwert der Strahlen geben MUSCHELKNAUTZ und BRUNNER $\zeta_s = 0,25$ und für den Reibungsbeiwert des reinen Gasstromes $\zeta_g = 0,005$ an. Mit diesen Werten muß bis zum Vorliegen umfangreicheren Versuchsmaterials gerechnet werden. Die Anwendung der oben mitgeteilten Gleichungen und Beiwerte zur Bestimmung des Grenzkorndurchmessers d_{pG} gemäß Gl. (13.23) wird von MUSCHELKNAUTZ und BRUNNER [13.9] ausführlich erläutert.

Folgt man dem Gedankengang, der zur Berechnung des Grenzkorndurchmessers d_{pG} führte, dann muß jedes Korn, welches größer ist als d_{pG} , abgeschieden und jedes Korn, welches kleiner ist als d_{pG} , nicht abgeschieden werden. Trägt man daher den Fraktionsabscheidegrad φ_d über dem Durchmesser Verhältnis d_p/d_{pG} auf, so muß sich φ_d bei $d_p/d_{pG} = 1$ sprunghaft von 0 auf 100% ändern. In *Bild 13.11* ist dieses Ergebnis durch eine Doppellinie angedeutet. BARTH hat bereits festgestellt, daß eine sprunghafte Änderung unmöglich ist, und hat den Fraktionsabscheidegrad experimentell ermittelt. Die von ihm mitgeteilte Kurve ist ebenfalls in *Bild 13.11* eingezeichnet. BARTH schrieb dieser Kurve eine allgemeingültige Bedeutung zu. Ihr Verlauf ist insbesondere den rechnerisch nicht erfaßten stochastischen Vorgängen bei der Partikelbewegung im Abscheider zuzuschreiben. Später durchgeführte Versuche haben gezeigt, daß die Fraktionsabscheidegradkurve von BARTH zu hoch liegt. Insbesondere die Versuche von VAN EBBENHORST TENGBERGEN [13.16 und 13.17], STAIRMAND [13.18], KRIEGEL [13.11], CAPLAN [13.19] sowie von PETRALL, QUITTER, SCHADE und ZIMMERMANN [13.20] haben andere Kurven für den Fraktionsentstaubungsgrad ergeben. Diese Ergebnisse, die von KRIEGEL zusammengestellt wurden, zeigen also, daß es auf keinen Fall zulässig ist, für alle Zyklone und Feststoffe die gleiche Kurve für den Abscheidegrad als verbindlich anzusehen. Nähere Angaben über die Zyklone enthält Ta-

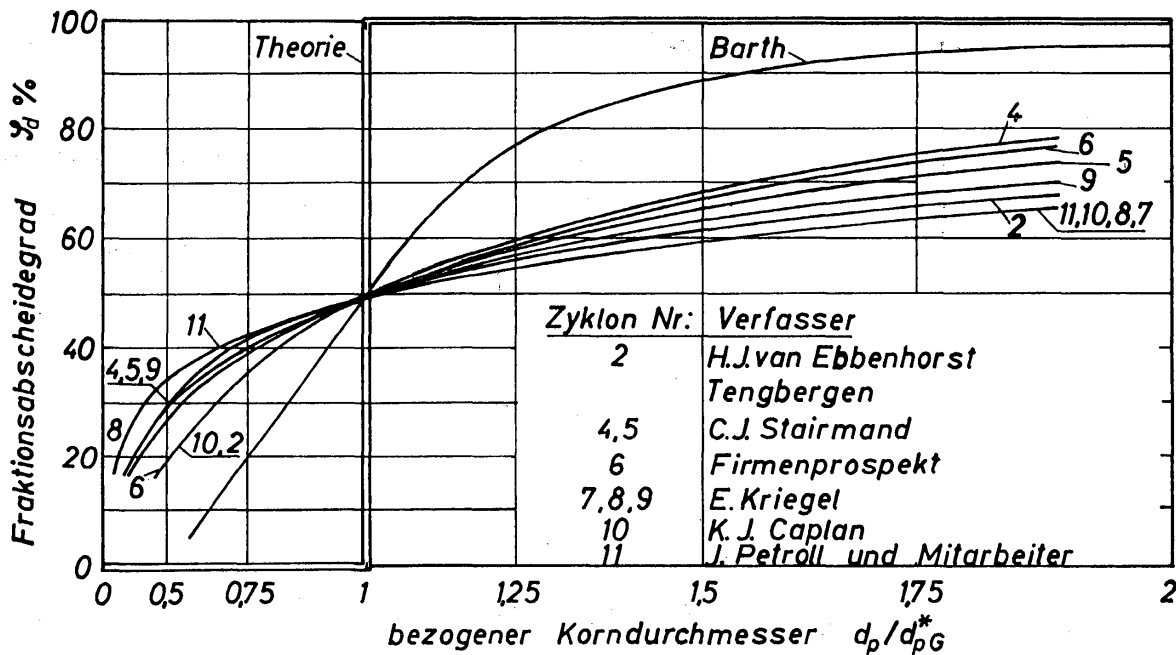


Bild 13.11. Fraktionsabscheidegrad, abhängig vom Durchmesser Verhältnis d_p/d_{pG}^* ; nähere Angaben zu den Zyklonen findet man in Tabelle 13.2

belle 13.2. Zu der gleichen Aussage kommen auch MUSCHELKNAUTZ und BRUNNER [13.9], die für verschiedene geometrische Abmessungen der Zyklone gesonderte Abscheidekurven mitteilen.

Ein für die Berechnung der Abscheideleistung eines Zyklons wichtiger Gedanke betrifft die Grenzbeladung μ_G . MUSCHELKNAUTZ und BRUNNER ermittelten hierfür aus Experimenten die folgende empirische Gleichung:

$$\mu_G = \frac{0,1}{(d_{p_{50}}/d_{pG})^{1,5}} \tag{13.28}$$

Hierin bedeutet $d_{p_{50}}$ den Korndurchmesser jener Staubfraktion, die einen Rückstand von 50% aufweist. Ist die Staubbeladung des eintretenden Rohgases μ größer als die Grenzbeladung μ_G , dann wird bei Eintritt in den Zyklon der Anteil

$$\left(\frac{\mu - \mu_G}{\mu}\right) 100 = \left(1 - \frac{\mu_G}{\mu}\right) 100$$

sofort ausgeschieden. Nur der verbleibende Rest $100 \mu_G/\mu$ unterliegt den oben erläuterten Gesetzen. Unter Berücksichtigung der Grenzbeladung wird die rechnerische Abscheideleistung des Zyklons erhöht.

Mittels des Fraktionsabscheidegrades φ_d erhält man den Gesamtabscheidegrad φ nach der Beziehung

$$\varphi = \sum_{i=1}^n (\varphi_d \Delta R). \tag{13.29}$$

Mit ΔR wird der Rückstand der betrachteten Fraktion des Staubgemisches bezeichnet.

Zyklon-Nr.	Zyklon-durchmesser D [m]	Durchmesser-verhältnis D/d	Längen-verhältnis H/d	Eintritts-geschwindig-keit w_e [m/s]	Staub-beladung [g/m ³]	Staub	Dichte ρ_p [kg/m ³]	Literatur	Bemerkungen
1	0,37–0,62	2,5	5,9	4–15	10	Flugasche Tonpulver	–	VAN EBBEN- HORST TENGBERGEN [13.16]	tangentialem Eintritt Austrittsspirale
2	0,28–0,47	1,9	5,5	6,5–21	10	–	–	–	Ein- und Austrittsspirale
3	0,5	3,3	8,2	3,5–9	10	–	–	–	tangentialem Eintritt, Austrittsspirale
4	0,203	2	8	15,3	–	Sand	2000	STAIRMAND [13.18]	Einlaufspirale, gerades Tauchrohr
5	0,203	1,33	5,3	15,3	–	Sand	–	–	gerades Tauchrohr
6	0,28–0,8	1,8	6,2	12,5	15	–	–	–	Industriezyklon; tangentialem Eintritt, gerades Tauchrohr
7	0,288	4	12,1	1,7	19	Quarzmehl H 100	2620	KRIEGEL [13.11]	Modelluntersuchungen;
8	0,288	3,1	9,3	1,2	26	–	–	–	tangentialem Eintritt,
9	0,288	2,6	7,8	0,63	17	–	–	–	gerades Tauchrohr
10	–	2	8	–	51	Zement- staub	2100	CAPLAN [13.19]	tangentialem Eintritt, gerades Tauchrohr

13.312 Druckverlust im Gaszyklon

Der insgesamt im Gaszyklon auftretende Druckverlust Δp läßt sich nach BARTH [13.7] mittels der Beziehung

$$\Delta p = \zeta_Z \frac{\rho w_e^2}{2} \quad (13.30)$$

berechnen. Mit w_e wird die mittlere Geschwindigkeit im Eintrittsstutzen des Zyklons bezeichnet. Der Widerstandsbeiwert setzt sich aus zwei Anteilen, die insbesondere die Verluste im Eintrittsstutzen und im Tauchrohr erfassen, zusammen:

$$\zeta_Z = \zeta_e + \zeta_i. \quad (13.31)$$

Für die beiden Widerstandsbeiwerte leitete BARTH die folgenden Beziehungen her:

$$\zeta_e = \frac{r_i}{r_a} \left(\frac{w_{ui}}{w_i} \right)^2 \left(\frac{F_e}{F_i} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{w_{ui}}{w_i} \frac{h}{r_i} \zeta_w \right)^2} \right] - 1, \quad (13.32)$$

$$\zeta_i = \left(\frac{w_{ui}}{w_i} \right)^2 \left(\frac{F_e}{F_i} \right)^2 \left[\frac{K}{(w_{ui}/w_i)^{2/3}} + 1 \right]. \quad (13.33)$$

Für den Faktor K ist nach Messungen bei scharfkantigem, zylindrischem Tauchrohr der Wert 4,4 und bei abgerundetem der Wert 3,41 zu verwenden. Der in Gl. (13.32) auftretende Beiwert ζ_w ist nach Gl. (13.26) zu bestimmen.

Die Zyklontheorie, die insbesondere von BARTH und MUSCHELKNAUTZ entwickelt und stetig verfeinert wurde, hat in ganz entscheidendem Maße das Verständnis für die im Zyklon auftretenden Bewegungsvorgänge gefördert. Für viele Fälle ist es damit auch schon möglich, die Leistung eines Zyklons mit ausreichender Genauigkeit vorauszuberechnen. Man darf aber nicht übersehen, daß noch zahlreiche Vorgänge im Zyklon ungeklärt und die Vorausberechnung noch mit Risiken behaftet ist, die in der technischen Praxis nicht immer vertretbar sind. Es ist daher verständlich, wenn man sich noch um die Entwicklung eines weiteren Verfahrens bemühte, mit dessen Hilfe sich Zyklone berechnen lassen. Dieses Verfahren stützt sich auf Kennfelder und soll im nächsten Abschnitt erörtert werden.

13.32 Auslegung von Gaszyklonen mit Hilfe von Kennfeldern

Von ROMANKOW, zitiert von KASSATKIN [13.11], sowie von KRIEGEL [13.12] wurde vorgeschlagen, den Abscheidegrad und die Widerstandszahl von Zyklonen anhand von Meßergebnissen unmittelbar abhängig von den maßgebenden Kennzahlen darzustellen. Man vermeidet damit Annahmen über den Abscheide-mechanismus. Das sind vor allem Annahmen über die Form des räumlichen Strömungsfeldes sowie über die Bewegung und über die Eigenschaften der Partikeln. Um jedoch zu übersichtlichen Kennfeldern zu gelangen, muß die Anzahl der dimensionslosen Kenngrößen möglichst gering sein. Eine Beschränkung ist in dieser Hinsicht aber auch schon deshalb geboten, weil nur eine begrenzte Zahl von Versuchsergebnissen verfügbar ist.

Auf der Grundlage von Ansätzen aus der Grenzschichttheorie haben RUMPF, BORHO und REICHERT [13.21] gezeigt, daß der Widerstandsbeiwert der Zyklone als Funktion von Kennzahlen darstellbar ist:

$$\zeta_Z = f\left(\frac{r_a}{r_i}; \frac{h+z}{r_a}; \frac{h_r}{r_i}; \frac{h_i}{r_a}; \frac{z}{r_i}; n; Re; B\right). \quad (13.34)$$

Außer den geometrischen Verhältnissen bedeutet n hier eine nicht weiter aufgeführte Zahl von Parametern,

$$Re \equiv \frac{w_e D}{\nu} \quad (13.35)$$

eine geeignete Reynoldszahl und

$$B \equiv \frac{w_{sG} w_{ri}}{D g} \quad (13.36)$$

eine mit der Sinkgeschwindigkeit w_{sG} des Grenzkorns gebildete Kennzahl. Alle anderen in den letzten Gleichungen auftretenden Größen sind in *Bild 13.8* angegeben.

Für die Abhängigkeit des Gesamtabscheidegrades φ hat ROMANKOW folgende vereinfachte Gleichung vorgeschlagen:

$$\varphi = f(Fr; St). \quad (13.37)$$

Hierin sind

$$Fr \equiv \frac{w_e^2}{g D} \quad (13.38)$$

eine Froudezahl und

$$St \equiv d_p \sqrt{\frac{\rho_p w_e}{\eta D}} \quad (13.39)$$

die Stokesche Kennzahl.

Die Auswertung der verfügbaren Meßergebnisse hat gezeigt, daß von den geometrischen Parametern das Verhältnis $D/d = 2r_a/2r_i$ den bedeutsamsten Einfluß auf den Widerstandsbeiwert ausübt und auch auf den Abscheidegrad einen wesentlichen Einfluß hat. Die Auswertung der bisher verfügbaren Meßwerte, vorgenommen von VAN EBBENHORST TENGBERGEN [13.16] und KRIEGEL [13.12] ergab, daß man für den Abscheidegrad und den Widerstandsbeiwert folgende Gleichungen verwenden kann:

$$\varphi = f(D/d; St), \quad (13.40)$$

$$\zeta_Z = f(D/d; Re). \quad (13.41)$$

Sollten in Zukunft weitere Untersuchungsergebnisse bekanntwerden, dann besteht die Möglichkeit, diese beiden Gleichungen zu erweitern.

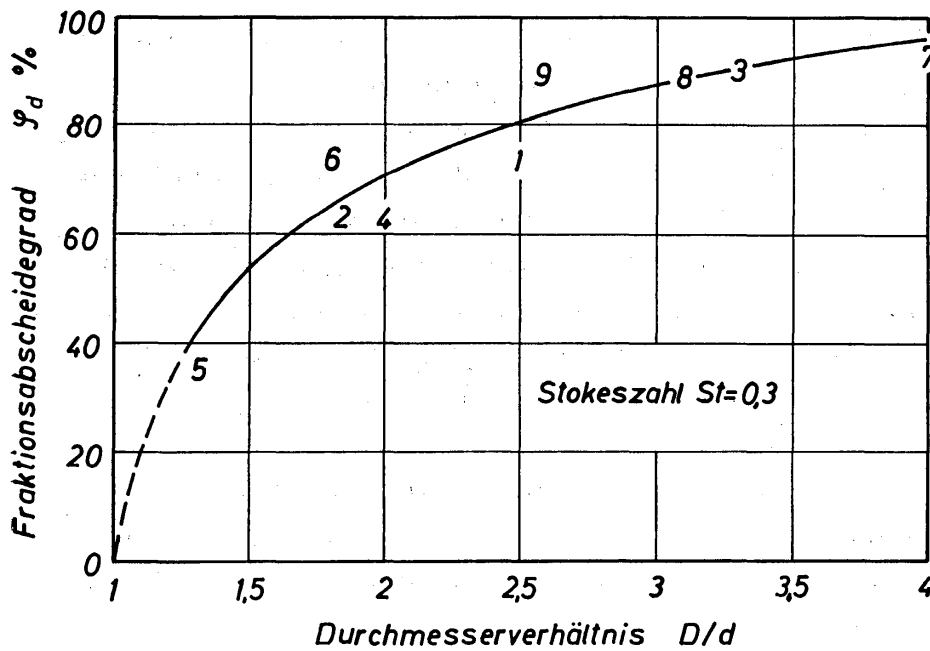


Bild 13.12. Abhängigkeit des Fraktionsabscheidegrades φ_d vom Durchmesser Verhältnis D/d bei einem Wert der Stokeschen Kennzahl $St = 0,3$ für einige in Tabelle 13.2 angegebene Entstauber

Für einen einfachen Zyklontyp mit tangentialen Einlauf und scharfkantigem zylindrischen Tauchrohr wurden von KRIEDEL [13.12] eigene Meßergebnisse und in der Literatur verfügbare Angaben nach Gleichungen (13.40) und (13.41) für mehrere verschiedene Stäube ausgewertet. Die Daten der untersuchten Zyklo- ne sind in Tabelle 13.2 enthalten. In Bild 13.12 wird als Beispiel die Abhängigkeit des Fraktionsentstaubungsgrades mehrerer vergleichbarer, durch Zahlen gekennzeichneten Zyklo- ne mit verschiedenem Verhältnis D/d und für verschiedene Stäube mit einer Kennzahl $St = 0,3$ als Parameter gezeigt. Erstellt man für

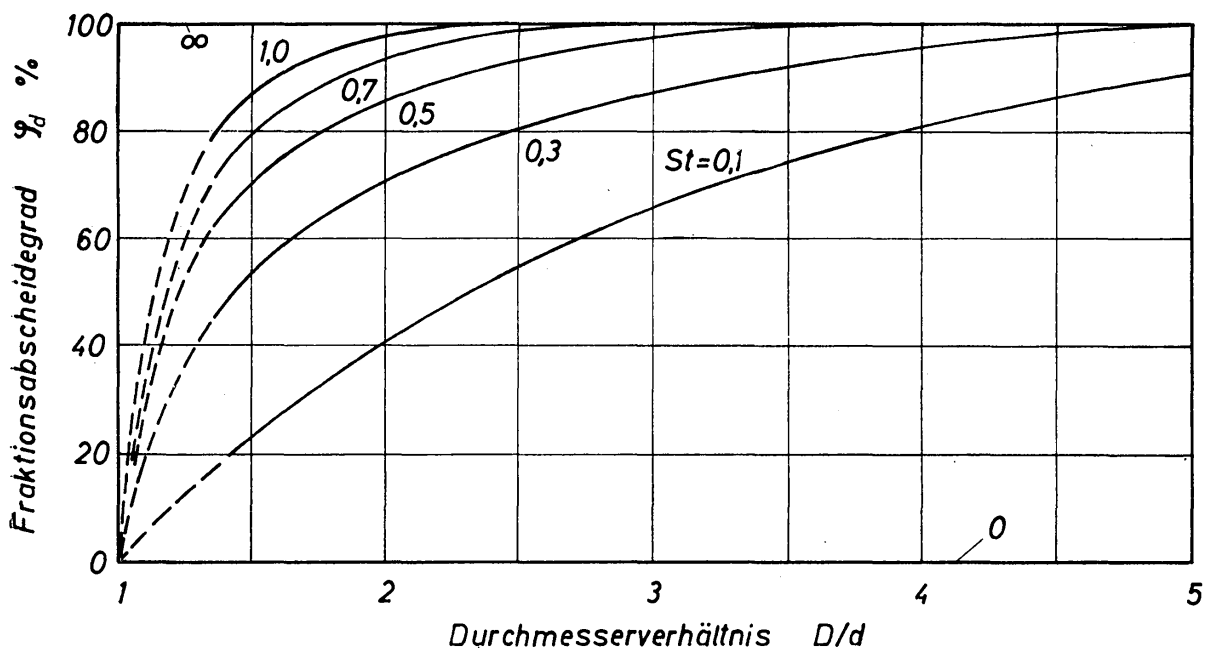


Bild 13.13. Zyklonkennfeld: Abscheidegrad, abhängig vom Durchmesser Verhältnis und von der Stokeszahl

weitere Stokessche Kennzahlen derartige Diagramme und zeichnet diese gemeinsam in *Bild 13.13* ein, so erhält man das Kennfeld des Abscheidegrades der untersuchten Zyklone. Der Übersichtlichkeit wegen wurden die Zahlen der Zyklone weggelassen. Nach *Bild 13.13* steigt der Fraktionsabscheidegrad mit zunehmendem Durchmesser Verhältnis D/d und wachsender Stokesscher Kennzahl an. Mit Hilfe des Kennfeldes lassen sich die Fraktionsabscheidegrade der verschiedenen Kornfraktionen sowie der Durchmesser des Grenzkornes für jeden durch das Durchmesser Verhältnis D/d gekennzeichneten Zyklons bestimmen. Zu beachten ist allerdings, daß das Kennfeld nur für einen bestimmten Zyklontyp und für Stäube mit gleichen Eigenschaften gilt.

Die Ermittlung der Fraktionsabscheidegrade aus *Bild 13.13* erfolgt in der Weise, daß man eine senkrechte Gerade durch den Abszissenpunkt D/d legt und mit der Kurve für die mit dem Korndurchmesser der betrachteten Fraktion berechnete Stokessche Kennzahl schneidet. Für diesen Schnittpunkt liest man unmittelbar an der Ordinate den Fraktionsabscheidegrad ab. Ist hingegen der Durchmesser des Grenzkornes gesucht, so ist die Stokessche Kennzahl als Schnittpunkt der beiden Achsenparallelen durch $\varphi_d = 50\%$ und D/d zu bestimmen. Der Durchmesser des Grenzkornes folgt aus der Definitionsgleichung der Stokesschen Kennzahl, gemäß Gl. (13.39), wenn d_p durch d_{pG} ersetzt wird.

Zur Berechnung der Widerstandsbeiwerte von Zyklonen wurde das von KRIEDEL angefertigte Diagramm in *Bild 13.14* wiedergegeben. Das Diagramm gilt für

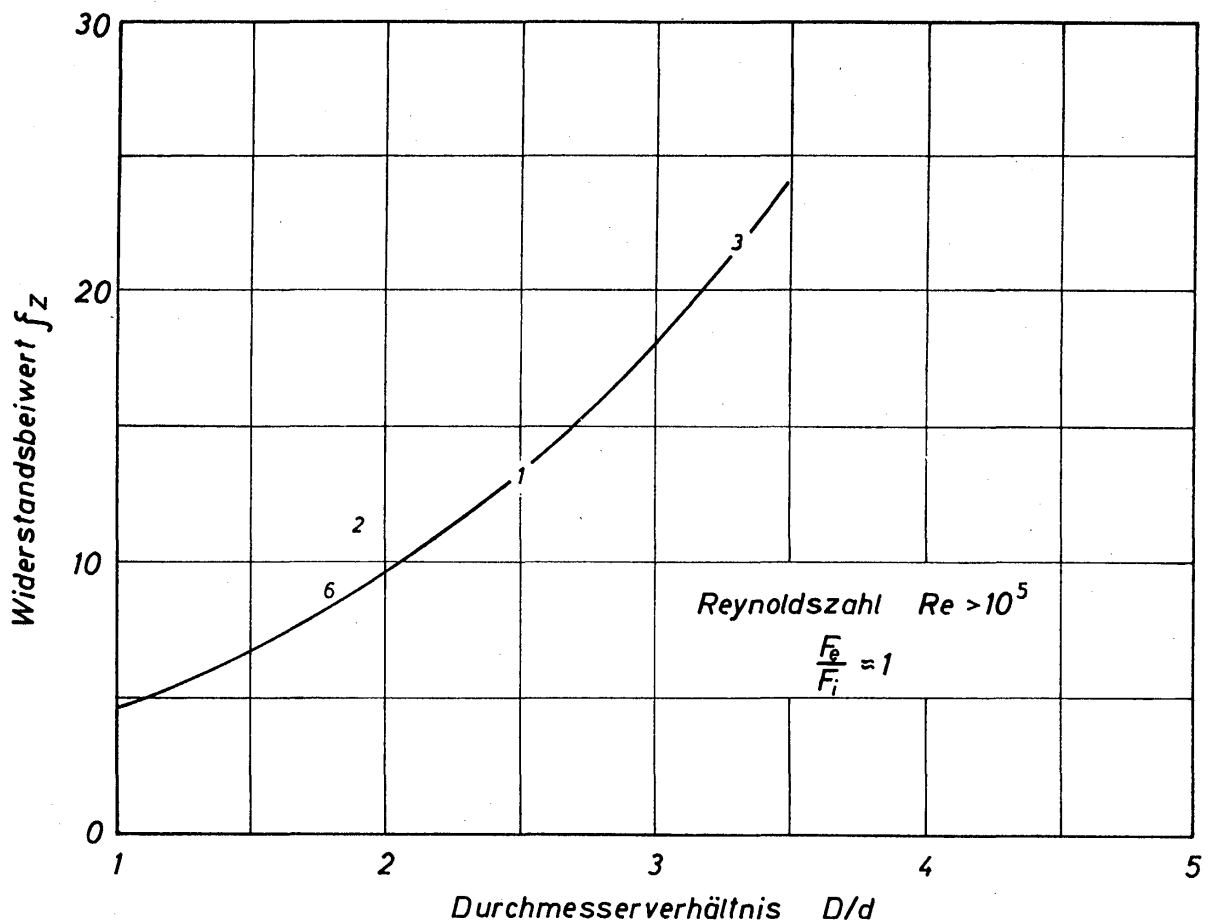


Bild 13.14. Widerstandsbeiwert für einige in Tabelle 13.2 angegebene Zyklone, abhängig vom Durchmesser Verhältnis D/d

Reynoldszahlen $Re > 10^5$. Bei kleineren Reynoldszahlen nimmt der Widerstandsbeiwert wie bei sehr rauhen Rohren ab. Das Diagramm gilt ferner nur für Zyklone mit einem Querschnittsverhältnis $F_e/F_i \approx 1$; bei Verhältnissen $F_e/F_i > 1$ ist nach Literaturangaben eine Erhöhung und bei $F_e/F_i < 1$ eine Erniedrigung der auf die Einströmgeschwindigkeit bezogenen Widerstandszahlen festzustellen. Diese Abweichungen sind auf die Umwandlung von kinetischer Energie in Druckenergie zurückzuführen.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Diagramme in *Bild 13.13* und *13.14* bislang nur für einen einfachen Zyklontyp und für Sand, Quarzmehl, Zementstaub, Tonpulver und Putzstaub als Fördergut aufgestellt werden konnten. Diese Methode gestattet aber, das besondere Verhalten der Stäube in verschiedenen Zyklontypen genauer als durch theoretische Modellrechnungen zu erfassen.

13.33 Berechnungsbeispiele

Die Rechnungen werden für ein von MUSCHELKNAUTZ und BRUNNER [13.9] angegebenes Beispiel nach den verschiedenen Methoden durchgeführt und die Ergebnisse miteinander verglichen*. Für einen Zyklon sei gegeben:

Tauchrohrdurchmesser	$2 r_i = d = 250 \text{ mm}$	
Zyklondurchmesser	$2 r_a = D = 750 \text{ mm}$	
Querschnittsverhältnis	$F_e/F_i = 0,9$	
Bezogene Zyklonlänge	$h/r_i = 14,5$	
Radienverhältnis	$r'_e/r_i = 2,6$	
Volumstrom der Luft	$\dot{V} = 2000 \text{ m}^3/\text{h}$	
Staubbeladung	$\mu = 0,25$	
Dichte der Luft	$\rho = 1,22 \text{ kg/m}^3$	
Dichte des Staubes	$\rho_p = 1700 \text{ kg/m}^3$	
Dichte der Staubstrahlen	$\rho_p \varepsilon_s = 600 \text{ kg/m}^3$	
Kornanteile im Staub	$\Delta R = 1\%$	$d_{pm} = 1 \mu\text{m}$
	2%	3 μm
	7%	6 μm
	27%	12 μm
	53%	24 μm
	10%	32 μm
Mittlerer Korndurchmesser	$d_{p50} = 20 \mu\text{m}$	

Ferner wird $\varphi = 0,99$; $\alpha = 0,75$; $\zeta_g = 0,005$ und $\zeta_s = 0,25$ angenommen.

Aus der Kontinuitätsbeziehung erhält man mit dem Durchsatz und der Querschnittsfläche des Tauchrohres die mittlere Gasgeschwindigkeit $w_i = 11,4 \text{ m/s}$ im Tauchrohr. Mit Hilfe von $F_e/F_i = 0,9$ ergibt sich daraus die Eintrittsgeschwindigkeit

* Die folgenden Beispiele nach den Verfahren von BARTH und mittels Kennfeldern wurden dem Verfasser von E. KRIEGLER privat mitgeteilt.

keit in den Zyklon zu $w_e = 12,7$ m/s. Aus dem Durchsatz und den geometrischen Abmessungen folgt die Radialgeschwindigkeit durch die gedachte Zylinderfläche vom Radius r_i und der Höhe h zu $w_{ri} = 0,57$ m/s.

13.331 Berechnung nach Muschelknautz

Aus Gl. (13.25) erhält man mit den Zahlenangaben das Geschwindigkeitsverhältnis $w_{ui}/w_i = 2,25$. Damit berechnet man aus Gl. (13.23) den Durchmesser des Grenzkorns zu $d_{pG} = 4,5 \mu\text{m}$ und die Grenzbeladung nach Gl. (13.28) zu $\mu_G = 0,0106$. Somit werden $\left(\frac{\mu - \mu_G}{\mu}\right) \cdot 100 = 96\%$ des zugeführten Staubes sofort beim Eintritt in den Zyklon ausgeschieden. Die restlichen 4% werden entsprechend der Fraktionsabscheidegradkurve von BARTH nach *Bild 13.11* abgeschieden. Man erhält die folgenden Angaben:

d_{pm} [μm]	$\frac{d_{pm}}{d_{pG}}$	$\varphi_d \Delta R$
1	0,22	$0,01 \cdot 0,01 = 0,000$
3	0,67	$0,12 \cdot 0,02 = 0,002$
6	1,33	$0,85 \cdot 0,07 = 0,059$
12	2,66	$0,98 \cdot 0,27 = 0,265$
24	5,24	$0,99 \cdot 0,53 = 0,525$
32	7,1	$1,0 \cdot 0,10 = 0,100$
		$\varphi_{4\%} = \sum \varphi_d \Delta R = 0,951$

Damit beträgt der Gesamtabseidegrad $\varphi = 96 + 4 \cdot 0,95 \approx 99,8\%$. Der Widerstandsbeiwert ζ_Z wird nach den Gleichungen (13.31) bis (13.33) und Gl. (13.26) berechnet. Mit $\zeta_e = 2,55$ und $\zeta_i = 9,4$ folgt $\zeta_Z = 11,94$.

13.332 Berechnung nach Barth

Für die gleichen Daten, aber $\zeta_w = 0,02$ erhält man nach den Gleichungen von BARTH, die nicht mitgeteilt wurden, da sie wegen der Verfeinerung der Theorie durch MUSCHELKNAUTZ als überholt angesehen werden können, folgende Ergebnisse: $w_{ui}/w_i = 1,82$ und $d_{pG} = 5,6 \mu\text{m}$. Hiermit erhält man einen Gesamtabseidegrad von 93,3% auf Grund folgender Fraktionsabscheidungen:

d_{pm} [μm]	$\frac{d_{pm}}{d_{pG}}$	$\varphi_d \Delta R$
1	0,18	$0,01 \cdot 0,01 = 0,000$
3	0,535	$0,08 \cdot 0,02 = 0,002$
6	1,07	$0,6 \cdot 0,07 = 0,042$
12	2,14	$0,98 \cdot 0,27 = 0,264$
24	4,28	$0,99 \cdot 0,53 = 0,525$
32	5,71	$1,0 \cdot 0,10 = 0,100$
		$\varphi = \sum \varphi_d \Delta R = 0,933$

Für den Widerstandsbeiwert ζ_Z erhält man nach den Gleichungen (13.31) bis (13.33) mit $K = 4,4$ $\zeta_Z = 3,1 + 10,6 = 13,7$.

13.333 Berechnung mit Hilfe von Kennfeldern

Aus *Bild 13.13* erhält man für $\varphi_d = 50\%$ und $D/d = 3$ durch Extrapolation die mit dem Durchmesser des Grenzkornes gebildete Stokesche Kennzahl $St_G \approx 0,05$. Daraus folgt der Grenzkorndurchmesser mittels Gl.(13.39) zu $d_{pG} = 1,26 \mu\text{m}$. Zur Ermittlung der Fraktionsabscheidegrade sind zunächst für den mittleren Korndurchmesser jeder Fraktion die Stokeschen Kennzahlen zu berechnen. Der Schnittpunkt der Kurve für die berechnete Stokesche Kennzahl mit der Senkrechten durch $D/d = 3$ liefert an der Ordinate φ_d .

d_{pm} [μm]	Stokesche Kennzahl St	$\varphi_d \Delta R$
1	0,04	$0,45 \cdot 0,01 = 0,004$
3	0,12	$0,7 \cdot 0,02 = 0,014$
6	0,24	$0,84 \cdot 0,07 = 0,059$
12	0,48	$0,96 \cdot 0,27 = 0,259$
24	0,96	$1,0 \cdot 0,53 = 0,530$
32	1,28	$1,0 \cdot 0,10 = 0,100$
		$\varphi = \sum \varphi_d \Delta R = 0,966$

Man erhält einen Gesamtabscheidegrad von $\varphi = 96,6\%$. Ferner ergibt sich aus *Bild 13.14* für $D/d = 3$ der Widerstandsbeiwert zu $\zeta_Z = 18$.

13.334 Bemerkungen zu den Berechnungsverfahren

Die nach den drei Verfahren berechneten Werte für den Gesamtabscheidegrad φ , den Grenzkorndurchmesser d_{pG} und den Widerstandsbeiwert ζ_Z sind in Tabelle 13.3 zusammengestellt.

Tabelle 13.3: Berechnete Werte für φ , d_{pG} [μm] und ζ_Z

	φ [%]	ζ_Z [-]	d_{pG} [μm]
1. Verfahren von MUSCHELKNAUTZ	99,8	11,94	4,5
2. Verfahren von BARTH	93,3	13,7	5,6
3. Verfahren mittels Kennfelder	96,6	18,0	1,26

Den größten Wert für den Gesamtabscheidegrad liefert das Berechnungsverfahren von MUSCHELKNAUTZ. Er ist im wesentlichen dadurch bedingt, daß bereits 96% der insgesamt abgeschiedenen Feststoffmasse unmittelbar nach Eintritt in den Zyklon ausfallen. Nur für die verbleibenden 4% werden die Zyklongesetze an-

gewendet. Dabei stellt sich dann heraus, daß nur sehr geringe Anteile der kleinen Körner abgetrennt werden.

Die Rechnungen nach dem Verfahren von BARTH führen zu einem verhältnismäßig niedrigen Gesamtabseidegrad. Bemerkenswert ist jedoch, daß diesem Verfahren zufolge ein wesentlich größerer Anteil der feineren Kornfraktionen abgeschieden werden soll als nach dem Verfahren von MUSCHELKNAUTZ.

Der nach dem Verfahren von BARTH berechnete Gesamtabseidegrad dürfte praktischen Erfahrungen zufolge etwas zu niedrig sein. Diese Erkenntnis war Anlaß für MUSCHELKNAUTZ, das Berechnungsverfahren zu verfeinern.

Einen mittleren Wert für den Gesamtabseidegrad liefert das Verfahren mittels Kennfelder. Bemerkenswert ist dabei insbesondere der sehr niedrige Wert für den Grenzkorndurchmesser d_{pG} . Die Folge ist, daß nach diesem Berechnungsverfahren wesentlich größere Anteile der feineren Kornfraktionen abgeschieden werden sollen als nach dem von MUSCHELKNAUTZ. Dieses Ergebnis läßt einen Mangel in den theoretischen Betrachtungen von MUSCHELKNAUTZ deutlich werden. Aufschluß über die abgeschiedenen Anteile der Kornfraktionen liefert ein Anteil von nur wenigen Prozenten der insgesamt abgeschiedenen Kornmasse. Es liegt nahe, anzunehmen, daß dann andere Kurven als die verwendeten für den Fraktionsentstaubungsgrad gelten müssen. Für jeden Wert $100 (\mu - \mu_G)/\mu$ sollte man eine gesonderte Kurve für den Fraktionsentstaubungsgrad erhalten.

Die Widerstandsbeiwerte, berechnet nach den Verfahren von MUSCHELKNAUTZ und BARTH, zeigen nur geringe Abweichungen. Auffallend ist der sehr hohe Wert, der sich nach dem Kennfeldverfahren ergibt. KRIEDEL hat bereits darauf hingewiesen, daß das zunächst natürlich dadurch bedingt ist, daß die in *Bild 13.14* angegebene Kurve für $F_e/F_i \approx 1$ gilt, während im Berechnungsbeispiel $F_e/F_i = 0,9$ ist. Der Einfluß von F_e/F_i bedarf noch genauerer Untersuchungen.

Abschließend darf gesagt werden, daß die bisher entwickelten Verfahren zur Berechnung des Gaszyklons dem Ingenieur schon eine wesentliche Hilfe bei der praktischen Arbeit bieten, ohne jedoch bereits die einwandfreien Angaben zu liefern, die man benötigt. Die Untersuchung der Vorgänge im Zyklon sollte unbedingt fortgesetzt werden.

13.4 Der Hydrozyklon

Der Hydrozyklon zeichnet sich durch geringes Bauvolumen und einfache Bauweise aus, wobei keine bewegten Teile auftreten. Er wird vornehmlich zum Abtrennen fester oder fluider Partikeln aus einem Flüssigkeitsstrom verwendet. Darüber hinaus wird der Hydrozyklon aber bereits für zahlreiche andere Prozesse eingesetzt, bei denen eine gute Durchmischung oder auch Entmischung erzielt werden soll. BEDNARSKI [13.22] hat die Einsatzmöglichkeiten des Hydrozyklons ausführlich beschrieben. Weiterhin vermittelt das Buch von BRADLEY [13.23] einen umfassenden Überblick über alle mit dem Bau und Betrieb von Hydrozyklonen zusammenhängenden Fragen. In den folgenden Abschnitten wird auf die Abscheidung fester und fluider Partikeln aus einer Flüssigkeit näher eingegangen.

13.41 Aufbau und Betrieb

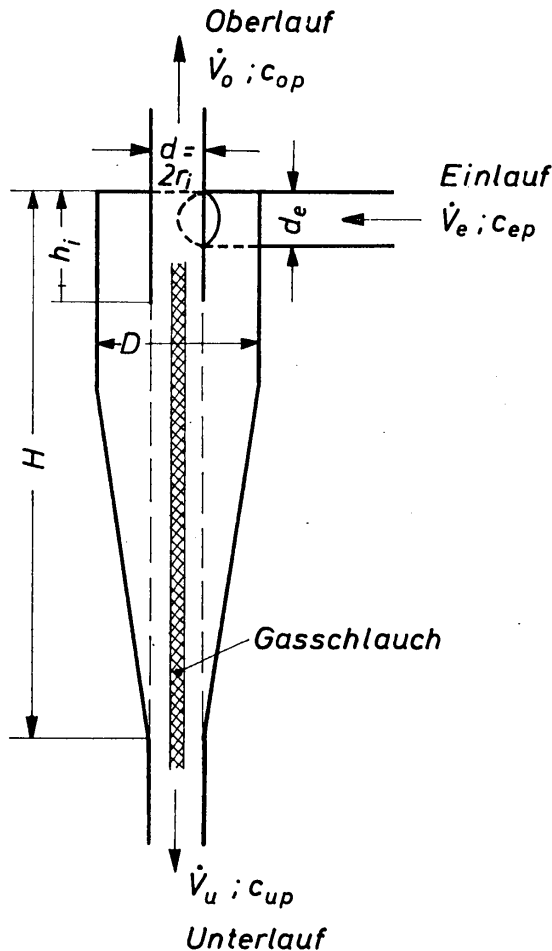


Bild 13.15

Bezeichnungen beim Hydrozyklon

Die äußere Form eines Hydrozyklons stimmt mit der des Gaszyklons (siehe *Bild 13.8*) überein, sie ist im allgemeinen jedoch sehr schlank. Darüber hinaus sind die Abmessungen des Hydrozyklons wesentlich kleiner als die des Gaszyklons. *Bild 13.15* zeigt einen Hydrozyklon in schematisierter Form. Bei normalen Betriebszuständen bildet sich in der Zyklonachse ein Gasschlauch aus. In einer umfangreichen theoretischen und experimentellen Studie ermittelte RIETEMA [13.24] die Abmessungen eines Hydrozyklons für optimale Betriebsbedingungen. Er empfiehlt die Einhaltung der folgenden Verhältniswerte (siehe *Bild 13.15*):

bezogene Höhe	$H/D = 5$
bezogener Einlaufdurchmesser	$d_e/D = 0,28$
bezogener Oberlaufdurchmesser	$d/D = 0,34$
bezogene Tauchrohrhöhe	$h_i/D = 0,4$

Daraus erhält man das bei Zyklonuntersuchungen vielfach verwendete Flächenverhältnis zu $F_e/F_i = 0,68$, wobei F_e und F_i die Querschnittsflächen im Einlauf und im Oberlauf bedeuten.

In den Zyklon tritt der Gemischvolumstrom

$$\dot{V}_e = \dot{V}_{ef} + \dot{V}_{ep} \quad (13.42)$$

ein, der sich aus dem Volumstrom \dot{V}_{ef} der Flüssigkeit und dem Volumstrom \dot{V}_{ep} der Partikeln zusammensetzt. Während beim Gaszyklon die gesamte fluide Phase durch das Tauchrohr den Zyklon verläßt, erfolgt der Austritt aus dem Hydrozyklon in zwei Strömen, nämlich dem Oberlauf \dot{V}_o und dem Unterlauf \dot{V}_u . Diese Gemischströme setzen sich wie folgt aus den Volumströmen \dot{V}_{of} und \dot{V}_{uf} der Flüssigkeit und den Volumströmen \dot{V}_{op} und \dot{V}_{up} der Partikeln zusammen:

$$\dot{V}_o = \dot{V}_{of} + \dot{V}_{op}, \quad (13.43)$$

$$\dot{V}_u = \dot{V}_{uf} + \dot{V}_{up}. \quad (13.44)$$

Die Beladung der drei Gemischströme mit Partikeln wird durch volumetrische Partikelkonzentrationen zum Ausdruck gebracht:

$$c_{ep} \equiv \frac{\dot{V}_{ep}}{\dot{V}_{ef} + \dot{V}_{ep}} = \frac{\dot{V}_{ep}}{\dot{V}_e}, \quad (13.45)$$

$$c_{op} \equiv \frac{\dot{V}_{op}}{\dot{V}_{of} - \dot{V}_{op}} = \frac{\dot{V}_{op}}{\dot{V}_o}, \quad (13.46)$$

$$c_{up} \equiv \frac{\dot{V}_{up}}{\dot{V}_{uf} + \dot{V}_{up}} = \frac{\dot{V}_{up}}{\dot{V}_u}. \quad (13.47)$$

Für die Flüssigkeitsanteile in den drei Gemischströmen ergeben sich dann die Beziehungen:

$$c_{ef} \equiv \frac{\dot{V}_{ef}}{\dot{V}_e} = 1 - c_{ep}, \quad (13.48)$$

$$c_{of} \equiv \frac{\dot{V}_{of}}{\dot{V}_o} = 1 - c_{op}, \quad (13.49)$$

$$c_{uf} \equiv \frac{\dot{V}_{uf}}{\dot{V}_u} = 1 - c_{up}. \quad (13.50)$$

Treten im Verlauf der Strömung durch den Hydrozyklon keine Dichteänderungen auf, dann müssen folgende Zusammenhänge zwischen den Volumströmen gelten:

$$\dot{V}_e = \dot{V}_o + \dot{V}_u, \quad (13.51)$$

$$\dot{V}_{ef} = \dot{V}_{of} + \dot{V}_{uf} \quad \text{oder} \quad c_{ef} \dot{V}_e = c_{of} \dot{V}_o + c_{uf} \dot{V}_u, \quad (13.52)$$

$$\dot{V}_{ep} = \dot{V}_{op} + \dot{V}_{up} \quad \text{oder} \quad c_{ep} \dot{V}_e = c_{op} \dot{V}_o + c_{up} \dot{V}_u. \quad (13.53)$$

Aus der letzten Gleichung erhält man einen Zusammenhang zwischen den Konzentrationen und den bezogenen Gemischströmen:

$$c_{ep} = c_{op} \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_e} + c_{up} \frac{\dot{V}_u}{\dot{V}_e}. \quad (13.54)$$

Bezeichnet man mit F_e , F_o und F_u die Querschnittsflächen von Einlauf, Oberlauf und Unterlauf, dann sind

$$\bar{w}_e = \frac{\dot{V}_e}{F_e}; \quad \bar{w}_o = \frac{\dot{V}_o}{F_o} \quad \text{und} \quad \bar{w}_u = \frac{\dot{V}_u}{F_u} \quad (13.55)$$

die mittleren Gemischgeschwindigkeiten in diesen Querschnitten. Sie werden häufig durch die mittleren Flüssigkeitgeschwindigkeiten ersetzt, wobei man annimmt, daß keine Partikeln vorhanden sind:

$$\bar{w}_{ef} = \frac{\dot{V}_{ef}}{F_e}; \quad \bar{w}_{of} = \frac{\dot{V}_{of}}{F}; \quad \bar{w}_{uf} = \frac{\dot{V}_{uf}}{F}. \quad (13.56)$$

Zwischen den mittleren Gemisch- und mittleren Flüssigkeitsgeschwindigkeiten bestehen die folgenden Zusammenhänge:

$$\bar{w}_e = \frac{\bar{w}_{ef}}{1 - c_{ep}}; \quad \bar{w}_o = \frac{\bar{w}_{of}}{1 - c_{op}}; \quad \bar{w}_u = \frac{\bar{w}_{uf}}{1 - c_{up}}. \quad (13.57)$$

Zur Beschreibung strömungsphysikalischer Vorgänge werden die Gemischgeschwindigkeiten im allgemeinen besser geeignet sein als die Flüssigkeitsgeschwindigkeiten. Läßt sich die Flüssigkeitsgeschwindigkeit jedoch leichter messen als die Gemischgeschwindigkeit, dann wird erstere häufig bei der Wiedergabe von Versuchsergebnissen bevorzugt. Das läßt sich auch rechtfertigen, wenn die Partikelkonzentration im Gemischstrom sehr klein ist.

Das mit dem Hydrozyklon angestrebte Ziel ist die weitgehende Trennung der im eintretenden Gemischstrom enthaltenen Phasen. Eine vollständige Trennung ist niemals möglich. Der günstigste Fall ist der, daß sich die disperse Phase entweder nur im Unterlauf oder nur im Oberlauf befindet. Sie kann aber maximal nur bis zu einer Konzentration von

$$c_{up\max} = c_{op\max} \approx 0,4 \text{ bis } 0,5$$

in dem betreffenden Gemischstrom vorhanden sein. Der Flüssigkeitsanteil im Gemischstrom ist dann $1 - c_{up\max}$ bzw. $1 - c_{op\max}$. Wird die maximale Konzentration überschritten, dann wird der Durchfluß durch den Hydrozyklon gestört. Er kommt zum Erliegen, wenn die disperse Phase ein körniger Feststoff ist, da sich unbewegliche Feststoffpfropfen bilden. Liegt die disperse Phase in Form von Tropfen vor, dann kann sich bei Überschreiten von $c_{up\max}$ bzw. $c_{op\max}$ ein anderer Phasenverteilungszustand einstellen. Die disperse Phase könnte sich beispielsweise in eine kontinuierliche umwandeln. Dabei kann der Fall auftreten, daß die ursprünglich kontinuierliche Phase in den dispersen Zustand übergeht. Es findet also eine Phasenumkehr statt. Wie auch immer die Verteilungszustände der beiden Phasen nach Überschreiten der maximalen Konzentration aussehen, sie sind mit so starken Störungen verbunden, daß die beabsichtigte Trennung der Phasen ernsthaft gefährdet ist.

Die maximale Konzentration wird sich um so leichter einstellen, je höher die Konzentration c_{ep} im Einlauf ist. Ist c_{ep} im Grenzfalle bereits gleich $c_{ep\max}$, dann muß die Konzentration sowohl im Oberlauf als auch im Unterlauf den maximalen Wert annehmen. Nach Gl. (13.54) muß dann $\dot{V}_o/\dot{V}_e = \dot{V}_u/\dot{V}_e = 1/2$ sein, d. h. durch Oberlauf und Unterlauf gehen gleich große Gemischströme, die halb so groß sind wie \dot{V}_e . Aus dieser Überlegung folgen für den Betrieb des Hydrozyklons zwei wichtige Hinweise: Je größer die Konzentration im eintretenden Gemischstrom ist, desto mangelhafter ist auch das Trennergebnis. Nähert sich die Konzentration im Einlauf dem maximalen Wert, dann nähern sich diesem gleichzeitig auch die Konzentrationen im Oberlauf und im Unterlauf. Die Annäherung erfolgt im allgemeinen jedoch in unterschiedlicher Weise. Damit ergibt sich, daß das Trennergebnis stets um so günstiger sein wird, je geringer die

Konzentration im Einlauf ist. Für die Trennung von Suspensionen mit hoher Konzentration ist der Hydrozyklon ungeeignet.

Bei den bisherigen Überlegungen zum Betrieb des Hydrozyklons wurden die Konzentrationen in den austretenden Gemischströmen in Abhängigkeit von der Konzentration im eintretenden Gemischstrom betrachtet. Diese Betrachtungsweise ist von sehr pauschaler Natur, sie kann daher auch nur zu einigen wenigen, in ihrem Gehalt begrenzten Aussagen führen. Wesentlich genauere Informationen erhalte man, wenn man die Konzentrationen in den austretenden Strömen in Abhängigkeit von der Konzentration des im Zyklon befindlichen Gemisches betrachten würde.

Bezeichnet man das Volumen des Zyklons mit V_z , die darin befindlichen Volumina der Flüssigkeit und der Partikeln mit V_{zf} und V_{zp} , dann gilt:

$$V_z = V_{zf} + V_{zp}. \quad (13.58)$$

Definiert man die mittlere Partikelkonzentration durch

$$c_{zp} \equiv \frac{V_{zp}}{V_{zf} + V_{zp}} = \frac{V_{zp}}{V_z}, \quad (13.59)$$

dann ist der mittlere Flüssigkeitsanteil durch

$$c_{zf} \equiv \frac{V_{zf}}{V_{zf} + V_{zp}} = \frac{V_{zf}}{V_z} = 1 - c_{zp} \quad (13.60)$$

gegeben. Damit sind die mittleren Konzentrationen wie folgt verknüpft

$$1 = c_{zp} + c_{zf}. \quad (13.61)$$

Durch die mittlere Konzentration c_{zp} , die verhältnismäßig leicht zu messen ist, läßt sich der Zustand des Gemisches nur in sehr grober Weise beschreiben. Wesentlich genaueren Aufschluß über den Gemischzustand könnte die örtliche Konzentration

$$c'_{zp} = \frac{V'_{zp}}{\Delta V_z} \quad (13.62)$$

liefern. Mit ΔV_z wird ein Volumelement des Zyklons und mit V'_{zp} das darin befindliche Partikelvolumen bezeichnet. Über die örtliche Konzentration lassen sich einige qualitative Aussagen machen. Sind die Partikeln feste Körner, dann werden sie sich in der Nähe der Zyklonwand anreichern. In der Nähe der Zyklonachse wird sich hingegen eine partikelarme Kernzone ausbilden. Der durch den Oberlauf gehende Gemischstrom wird aus der partikelarmen Kernzone und der durch den Unterlauf gehende aus der partikelreichen Wandzone gespeist. Die Konzentrationen in Kern- und Wandzone stimmen im allgemeinen aber nicht mit den Konzentrationen der entsprechenden Austrittsströme überein. Sie können sowohl kleiner als auch größer sein als die in den Austrittsströmen. In dieser Beziehung wäre die genaue Kenntnis der Konzentrationen in Kern- und Wand-

zone nicht sehr bedeutsam. Aufschlußreich wäre sie jedoch wegen der von der Konzentration abhängigen Form der Phasenverteilung. Es wurde bereits erwähnt, daß die disperse Phase bei Überschreiten der maximalen Konzentration in einen kontinuierlichen Zustand übergehen kann. Die Phasenumkehr kann also nicht nur in den Austrittsstutzen auftreten, sondern auch innerhalb des Zyklons. Die Phasenumkehr führt in jedem Falle zu einer erheblichen Störung des Betriebszustandes und muß daher unbedingt vermieden werden.

Die Größe der Gemischvolumenströme \dot{V}_o und \dot{V}_u läßt sich durch Drosselorgane verändern. Ist der eintretende Gemischvolumenstrom \dot{V}_e gegeben, dann ist jedoch nur einer der austretenden Ströme frei einstellbar. Der andere Gemischstrom, beispielsweise \dot{V}_o , ist dann durch \dot{V}_e und \dot{V}_u bereits festgelegt. Unbekannt bleiben dann aber immer noch die Konzentrationen c_{op} und c_{up} in Ober- und Unterlauf. Sie sind Funktionen der in der Kernzone und in der Wandzone herrschenden örtlichen Konzentrationen. Wahrscheinlich könnte man in diesem Falle aber die Konzentrationen in den Austrittsströmen auch als Funktionen der mittleren Konzentration c_z des Zykloninhalts und weiterer Größen darstellen:

$$c_{op} = f_o(c_z; \text{weitere Größen}),$$

$$c_{up} = f_u(c_z; \text{weitere Größen}).$$

Die weiteren Größen dienen zur Kennzeichnung der Gemischströme, der Eigenschaften von disperser und kontinuierlicher Phase sowie der geometrischen Abmessungen des Zyklons. Von den gleichen Größen hängt auch die mittlere Konzentration c_z ab.

Auf Grund der sehr komplizierten räumlichen Strömung im Zyklon scheint eine theoretische Berechnung der Konzentrationen c_{op} und c_{up} aussichtslos zu sein. Man ist daher auf experimentelle Untersuchungen angewiesen. Einige der bisher erzielten Ergebnisse werden in den folgenden Abschnitten erläutert. Dabei werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem ob es sich bei der dispersen Phase um einen körnigen Feststoff oder um ein tropfenförmiges Fluid handelt.

13.42 Abscheidung einer dispersen festen Phase

Zur Auslegung eines Hydrozyklons, der zur Abscheidung einer dispersen festen Phase verwendet werden soll, muß nebst dem Abscheidegrad der Druckverlust bekannt sein. In zahlreichen theoretischen und experimentellen Untersuchungen [13.24] bis [13.29], deren Ergebnisse in dem Buch von BRADLEY [13.23] weitgehend zusammengefaßt sind, hat man sich mit der Bestimmung dieser Größen befaßt. Wegen der großen Zahl der geometrischen und strömungstechnischen Einflußgrößen ließen sich bislang aber noch keine allgemein gültigen Beziehungen für den Abscheidegrad und den Druckverlust angeben [13.30]. Die folgenden Ausführungen stützen sich auf eine Untersuchung von BOHNET [13.31], da in dieser der Zusammenhang mit den Berechnungsverfahren für Gaszyklone gewährleistet ist.

13.421 Abscheidegrad

Die Berechnung des Abscheidegrades φ folgt zunächst dem in Abschnitt 13.311 erörterten Verfahren für Gaszyklone. Mittels Gl. (13.23) erhält man den Grenzkorndurchmesser d_{pG} . Der Gesamtabseidegrad φ ist gemäß Gl. (13.29) eine Funktion des Fraktionsabscheidegrades φ_d . Dieser ist, wie neuere Untersuchungen zeigten, beim Hydrozyklon nicht nur vom Durchmesser Verhältnis d_p/d_{pG} der Partikeln abhängig, sondern zusätzlich noch vom Volumstromverhältnis \dot{V}_u/\dot{V}_e . BOHNET ermittelte den Einfluß von \dot{V}_u/\dot{V}_e experimentell und teilte das in *Bild 13.16* dargestellte Diagramm für den Fraktionsabscheidegrad φ_d mit. Mit zunehmendem Volumstromverhältnis \dot{V}_u/\dot{V}_e wird φ_d kleiner. Zur Erzielung großer Werte für φ_d sollte \dot{V}_u/\dot{V}_e nach Möglichkeit nicht größer als etwa 0,1 sein.

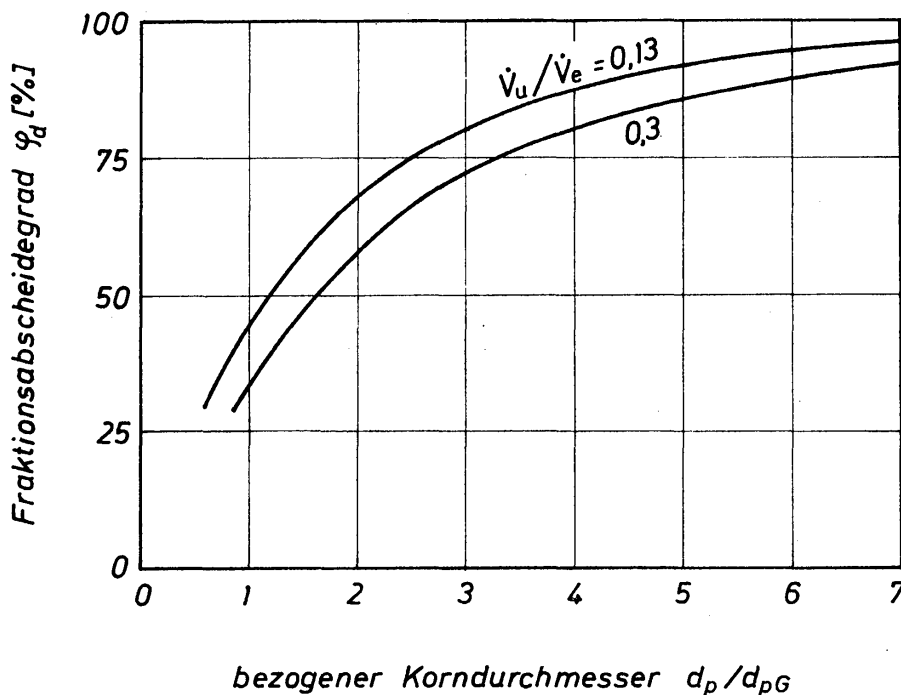


Bild 13.16
Fraktionsabscheidegradkurven für Hydrozyklone nach BOHNET [13.31]

Der Abscheidegrad φ wird mittels Gl. (13.29) unter Verwendung des Fraktionsabscheidegrades φ_d gemäß *Bild 13.16* berechnet. Vergleicht man anschließend den berechneten Wert für φ mit dem experimentell ermittelten wirklichen Wert φ_H , so stellt man fest, daß φ_H häufig wesentlich niedriger ist als φ . Der Unterschied zwischen φ und φ_H wird mit zunehmender Konzentration des Einlaufstromes größer. Der wirkliche Abscheidegrad φ_H eines Hydrozyklons ist somit unter Verwendung von Gl. (13.29):

$$\varphi_H = \eta_z \varphi = \eta_z \sum_{i=1}^n (\varphi_{di} \Delta R). \quad (13.63)$$

Mit η_z wird der von KELSALL [13.29] eingeführte Zyklonwirkungsgrad bezeichnet, der wie folgt definiert ist:

$$\eta_z = \frac{\dot{V}_{up}/\dot{V}_{ep} - \dot{V}_u/\dot{V}_e}{1 - \dot{V}_u/\dot{V}_e}. \quad (13.64)$$

Wird das gesamte Partikelvolumen im Unterlauf abgeführt, dann wird wegen $\dot{V}_{up}/\dot{V}_{ep} = 1$ der Zyklonwirkungsgrad $\eta_z = 1$. Ist entweder der Oberlauf oder der Unterlauf verschlossen, dann durchströmt das eintretende Gemisch den Zyklon, ohne daß eine Abscheidung erfolgt. Der Zyklonwirkungsgrad ist dann $\eta_z = 0$. Für einen Gaszyklon, bei dem $\dot{V}_{up} = \dot{V}_{ep}$ und $\dot{V}_{uf} = 0$ ist, ist der Zyklonwirkungsgrad $\eta_z = 1$. Führt man in Gl. (13.64) die Konzentrationen c_{ep} und c_{up} gemäß den Gleichungen (13.45) und (13.47) ein, so erhält man für η_z die Schreibweise:

$$\eta_z = \frac{\dot{V}_u}{\dot{V}_e} \frac{c_{up}/c_{ep} - 1}{1 - \dot{V}_u/\dot{V}_e}. \quad (13.65)$$

BOHNET stellte fest, daß der Zyklonwirkungsgrad mit zunehmender Konzentration c_{ep} des Einlaufs abnimmt. Er teilte daher η_z in Abhängigkeit von dem Verhältnis c_{ep}/c_{epmax} mit, *Bild 13.17*. Mit c_{epmax} wird die maximale mögliche Konzentration im Einlauf bezeichnet. Sie dürfte im allgemeinen den Wert 0,4 nicht überschreiten, wenn das Gemisch noch einigermaßen fließfähig sein soll. Ist das Konzentrationsverhältnis kleiner als etwa 0,01, dann kann η_z näherungsweise zu 0,9 angenommen werden. Übersteigt das Konzentrationsverhältnis jedoch den Wert von 0,01, dann beginnt η_z sehr stark abzusinken. Ist somit $c_{epmax} = 0,4$, dann lassen sich hohe Zyklonwirkungsgrade nur erzielen, wenn die Konzentration im Einlauf den Wert 0,004 bzw. 0,4% nicht überschreitet. Zur Erzielung eines hohen Abscheidegrades φ_H sollte ferner \dot{V}_u/\dot{V}_e nicht größer als etwa 0,1 sein.

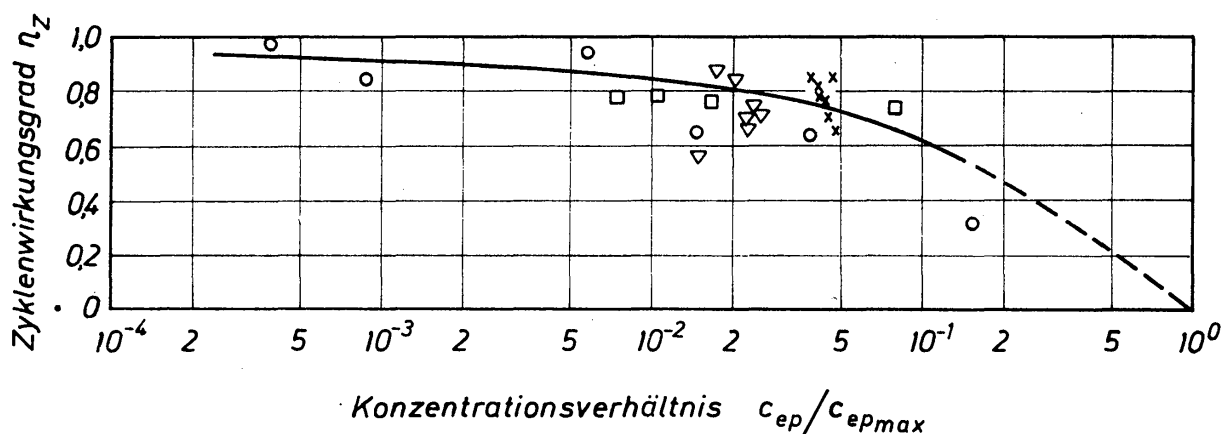


Bild 13.17. Zyklonwirkungsgrad η_z für Hydrozyklone nach BOHNET [13.31]

13.422 Druckverlust

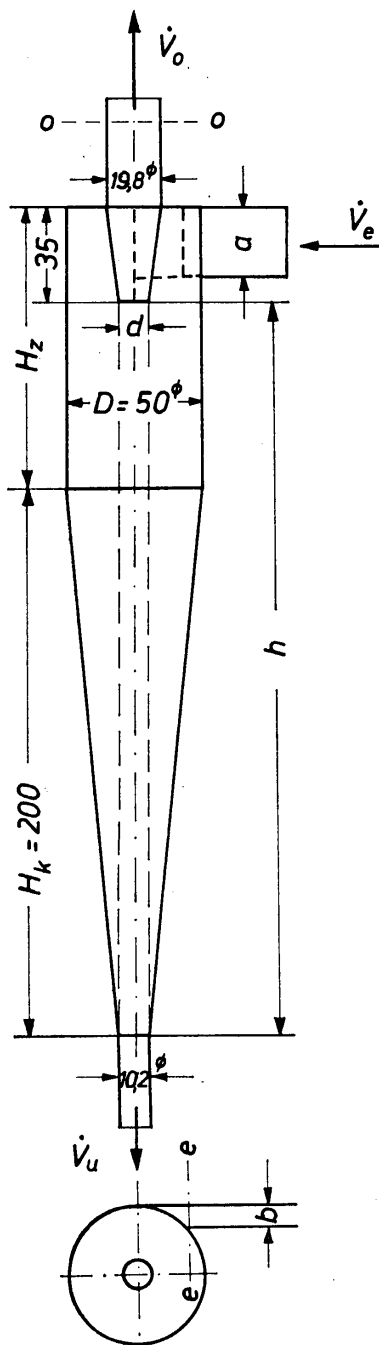
Umfangreiche Druckverlustmessungen an Hydrozyklonen hat BOHNET [13.31] durchgeführt. Die Abmessungen gehen aus *Bild 13.18* und Tabelle 13.4 hervor. Unverändert blieben die Länge des konischen Teiles mit $H_k = 200$ mm, der Konuswinkel mit $\alpha = 11,3^\circ$, der Zyklondurchmesser mit $D = 50$ mm und die Höhe h_i mit 35 mm. Verändert wurden die Höhe H_z des zylindrischen Teilstückes, der Durchmesser d des Tauchrohres und somit dessen Querschnittsfläche F_i , sowie die Querschnittsfläche F_e des Einlaufs.

Als Druckverlust Δp wird die Druckdifferenz zwischen den Meßebenen $e-e$ im Einlauf und $o-o$ im Oberlauf betrachtet. Bezieht man den Druckverlust auf den

Tabelle 13.4:

Angaben zu den untersuchten Hydrozyklonen (Zyklondurchmesser $D = 50 \text{ mm}$)

Nr.	d [mm]	d/D	F_e [mm ²]	F_e/F_i	H_z [mm]	h/r_i	H/D
1	5,1	0,102	$8,0 \cdot 2,6$	1,02	163	128,5	7,26
2			$16,4 \cdot 5,0$	4,02			
3			$22,6 \cdot 8,2$	9,07			
4	10,6	0,213	$8,0 \cdot 2,6$	0,24	163	62	7,26
5				63	43	5,26	
6			$16,4 \cdot 5,0$	0,93	113	52,5	6,26
7				163	62	7,26	
8			$22,6 \cdot 8,2$	2,1	163	62	7,26
9	15,0	0,30	$8,0 \cdot 2,6$	0,12	163	43,7	7,26
10			$16,4 \cdot 5,0$	0,46			
11			$22,6 \cdot 8,2$	1,05			



mit der Geschwindigkeit w_i im Oberlaufeintritt gebildeten Staudruck, dann erhält man den Widerstandsbeiwert

$$\zeta_{z,i} \equiv \frac{\Delta p}{\rho \bar{w}_i^2 / 2} \quad (13.66)$$

Mit dem durch Gl. (13.30) definierten Widerstandsbeiwert ζ_z , gebildet mit der Geschwindigkeit \bar{w}_e im Eintrittsquerschnitt, besteht folgender Zusammenhang:

$$\zeta_z \equiv \frac{\Delta p}{\rho \bar{w}_e^2 / 2} = \zeta_{z,i} \left(\frac{F_e}{F_i} \right)^2 \quad (13.67)$$

Die Widerstandsbeiwerte werden abhängig von der Reynoldszahl

$$Re_i \equiv \frac{\bar{w}_i d}{\nu} \quad (13.68)$$

dargestellt.

Bild 13.18. Abmessungen der von BOHNET [13.31] untersuchten Hydrozyklone

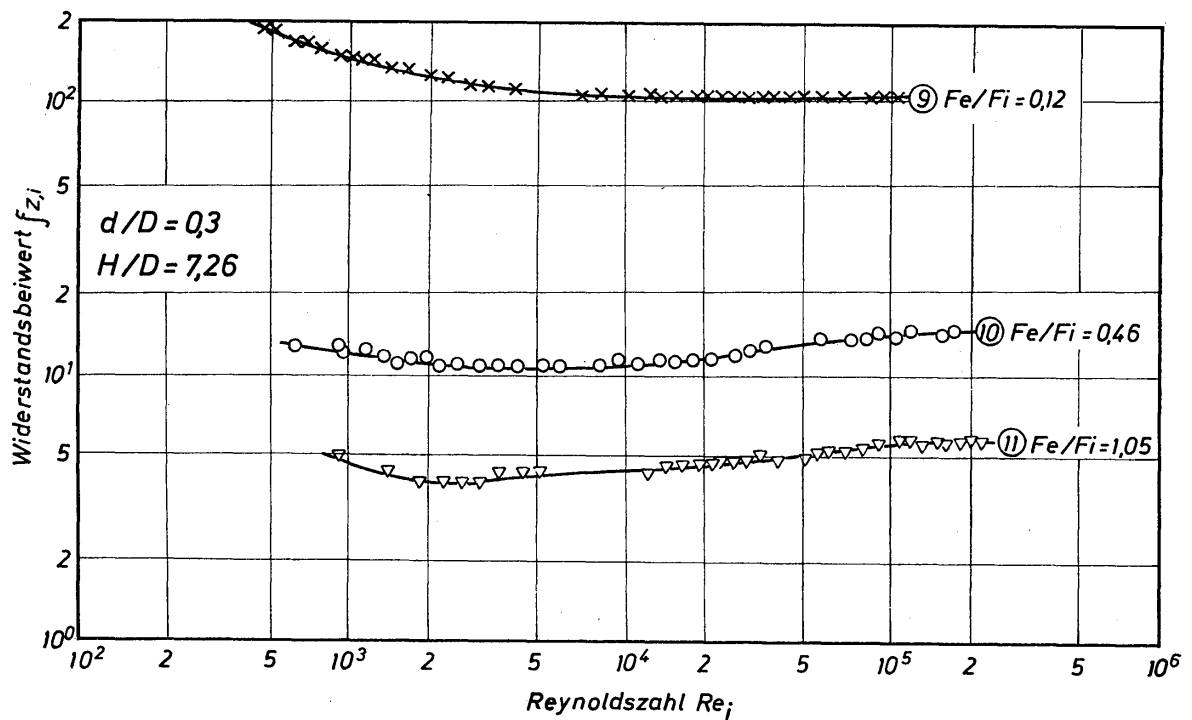
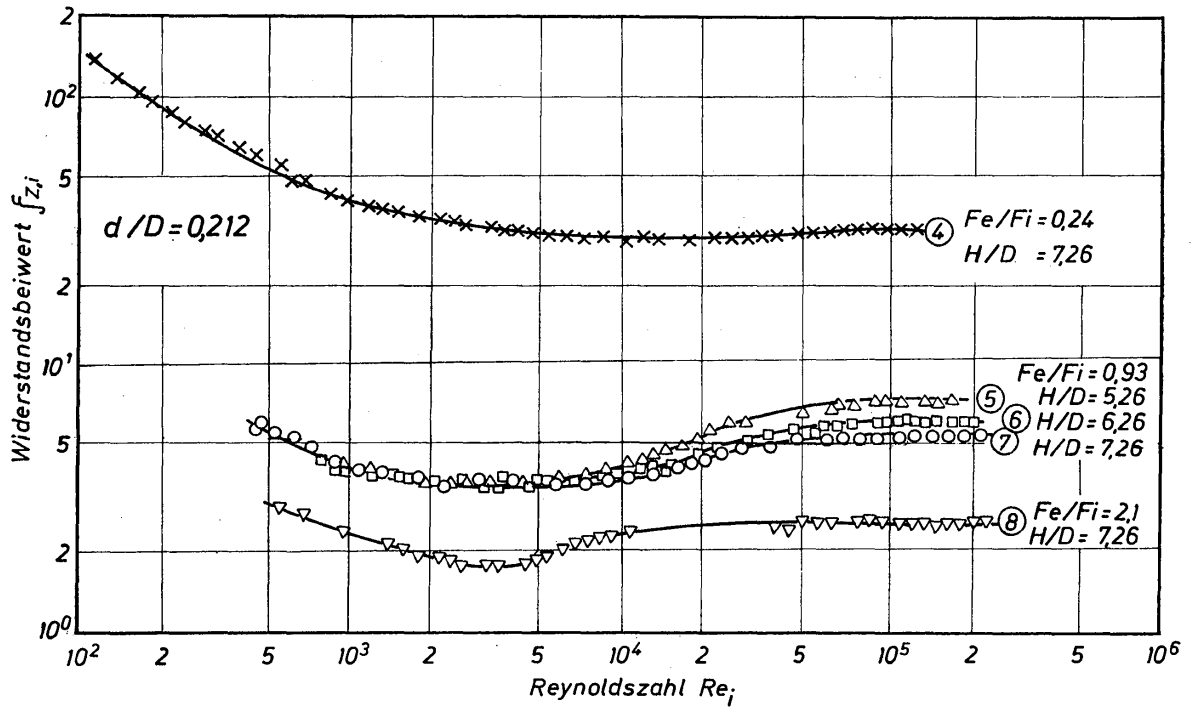
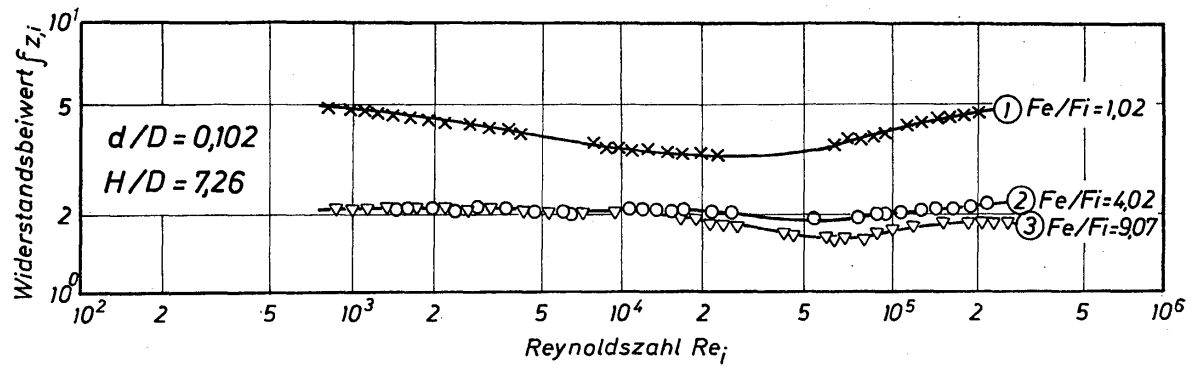


Bild 13.19
Widerstandsbeiwerte für die in Tabelle 13.4 und Bild 13.18
bezeichneten Hydrozyklone

Bei den von BOHNET durchgeführten Versuchen wurden die Zyklone von Wasser oder von Öl durchströmt, wobei keine Feststoffbeladung auftrat. Bei der ersten Gruppe von Versuchen wurde ferner der Unterlauf verschlossen, so daß der Fluidstrom den Zyklon nur durch den Oberlauf verlassen konnte. Die Ergebnisse dieser Versuche sind in *Bild 13.19* dargestellt. Im Gegensatz zum Widerstandsbeiwert des Gaszyklons zeigt der des Hydrozyklons eine teilweise starke Abhängigkeit von der Reynoldszahl. Die von BOHNET untersuchten Hydrozyklone haben die Abmessungen gebräuchlicher Typen, so daß mittels *Bild 13.19* der Widerstandsbeiwert recht genau ermittelt werden kann.

Im praktischen Betrieb verläßt ein Teil der Flüssigkeit den Zyklon stets durch den Unterlauf. Hierdurch wird der Widerstandsbeiwert ζ_Z um $\Delta\zeta_{HZ}$ vermindert. BOHNET teilte hierfür die Näherungsformel

$$\Delta\zeta_Z = \left(\frac{F_e}{F_i}\right)^2 [1 - (\dot{V}_o/\dot{V}_e)^2] \quad (13.69)$$

mit, die aber nur für \dot{V}_o/\dot{V}_e in der Nähe von 1 brauchbare Werte liefert. Zur Berechnung des im Hydrozyklon auftretenden Druckverlustes Δp_{HZ} ist die Beziehung

$$\frac{\Delta p_{HZ}}{\rho \bar{w}_e^2/2} = \zeta_Z - \Delta\zeta_{HZ} \quad (13.70)$$

zu verwenden.

13.43 Abscheidung einer dispersen fluiden Phase

Die Trennung von zwei nicht mischbaren fluiden Phasen ist im Hydrozyklon grundsätzlich möglich. Die disperse Phase liegt in Form von Tropfen vor. Ihre Trennung von der kontinuierlichen Phase bereitet technisch jedoch erhebliche Schwierigkeiten, da der Tropfen im Verlauf seines Weges durch den Hydrozyklon seine Form und seinen Durchmesser ändern kann. Der Tropfen nimmt im Zyklon die Form und den Durchmesser an, die mit den örtlichen Strömungsbedingungen – insbesondere den örtlich auftretenden Scherkräften – verträglich sind. Hierin liegt der entscheidende Unterschied zur Abscheidung von form- und größenbeständigen festen Partikeln, die im vorausgegangenem Abschnitt behandelt wurde. Darüberhinaus muß damit gerechnet werden, daß sich im Hydrozyklon Bedingungen einstellen, unter denen die fluide disperse Phase eine Umwandlung in eine kontinuierliche Phase erfährt. Hierauf war bereits im Abschnitt 13.41 hingewiesen worden.

Unbeständigkeit bezüglich Form und Größe der Tropfen sowie die Möglichkeit der Phasenumkehr begrenzen die technische Nutzung des Hydrozyklons zur Trennung einer dispersen fluiden Phase von einer kontinuierlichen fluiden Phase. Die einfache Bauform des Hydrozyklons und sein geringes Bauvolumen verlocken jedoch immer wieder dazu, das Betriebsverhalten dieses Hydrozyklons zu untersuchen [13.23 und 13.32 bis 13.36]. Man ist aber noch weit davon entfernt, das Betriebsverhalten, insbesondere die Trennwirkung, zu verstehen und mit

ausreichender Genauigkeit vorauszusagen. Man befindet sich offensichtlich noch im Stadium des Sammelns von Beobachtungs- und Meßergebnissen.

Einen bedeutsamen Beitrag zur Frage der Trennwirkung hat BOHNET [13.36] geliefert. Er führte Versuche mit einer Wasser/Öl-Emulsion durch. Der dabei verwendete Hydrozyklon ist in *Bild 13.18* in schematisierter Form angegeben. Dabei waren $H_z = 163$ mm, $a = 16,4$ mm, $b = 5$ mm und d entweder 5,1 mm oder 10,6 mm. Gemessen wurden die Gemischvolumenströme \dot{V}_e , \dot{V}_o und \dot{V}_u sowie die zugehörigen Konzentrationen c_{ep} , c_{op} und c_{up} .

Zur Kennzeichnung der Trennwirkung führte BOHNET die Trennzahl für den Oberlauf,

$$\varepsilon_o = 1 - c_{op}/c_{ep} \tag{13.71}$$

und die Trennzahl für den Unterlauf ein:

$$\varepsilon_u = 1 - \frac{1 - c_{up}}{1 - c_{ep}} \tag{13.72}$$

Findet keine Trennung statt, so daß $c_{ep} = c_{op} = c_{up}$, dann ist $\varepsilon_o = \varepsilon_u = 0$. Die beiden Trennzahlen für Oberlauf und Unterlauf werden gleich 1, wenn im Oberlauf und im Unterlauf eine Komponente rein erhalten wird. Aus dem Oberlauf tritt dann allein die leichte und aus dem Unterlauf allein die schwere Phase aus.

In den *Bildern 13.20* und *13.21* sind Meßergebnisse für ε_o und ε_u abhängig vom Volumstromverhältnis \dot{V}_o/\dot{V}_u mit der Eintrittsgeschwindigkeit \bar{w}_e als Parameter dargestellt. Die Ergebnisse gelten für die Trennung einer Wasser/Öl-Emulsion mit der Eintrittskonzentration $c_{ep} = 36\%$ Wasser (*Bild 13.20*) und $c_{ep} = 10\%$ Wasser (*Bild 13.21*). Das Tauchrohr hatte in beiden Fällen einen Durchmesser von $d = 10,6$ mm. Beide Bilder zeigen, daß die Trennzahlen sehr stark vom Volumstromverhältnis \dot{V}_o/\dot{V}_u und von der Eintrittsgeschwindigkeit abhängen. Einen klaren Oberlauf, d. h. reines Öl, kann man nach *Bild 13.20* nur für $\dot{V}_o/\dot{V}_u < 0,1$ erzielen. Um reines Wasser im Unterlauf zu erhalten, müßte bei $w_e = 4,7$ m/s das Volumstromverhältnis \dot{V}_o/\dot{V}_u größer als 10 sein. Erhöht sich die Konzentration im Einlauf auf 36%, dann erfordert ein klarer Oberlauf $\dot{V}_o/\dot{V}_u < 1$ und ein klarer Unterlauf mindestens $\dot{V}_o/\dot{V}_u > 100$. Die Grenzwerte für \dot{V}_o/\dot{V}_u haben sich also um eine volle Zehnerpotenz erhöht.

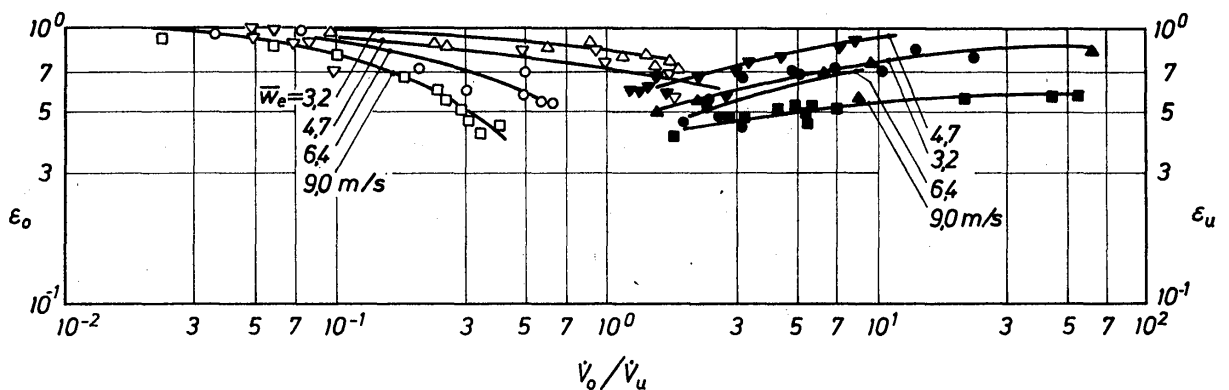


Bild 13.20. Trennzahlen ε_o und ε_u bei einer Wasser/Öl-Emulsion mit $c_{ep} = 36\%$ Wasser im eintretenden Gemisch, abhängig von \dot{V}_o/\dot{V}_u für verschiedene Werte der Eintrittsgeschwindigkeit \bar{w}_e

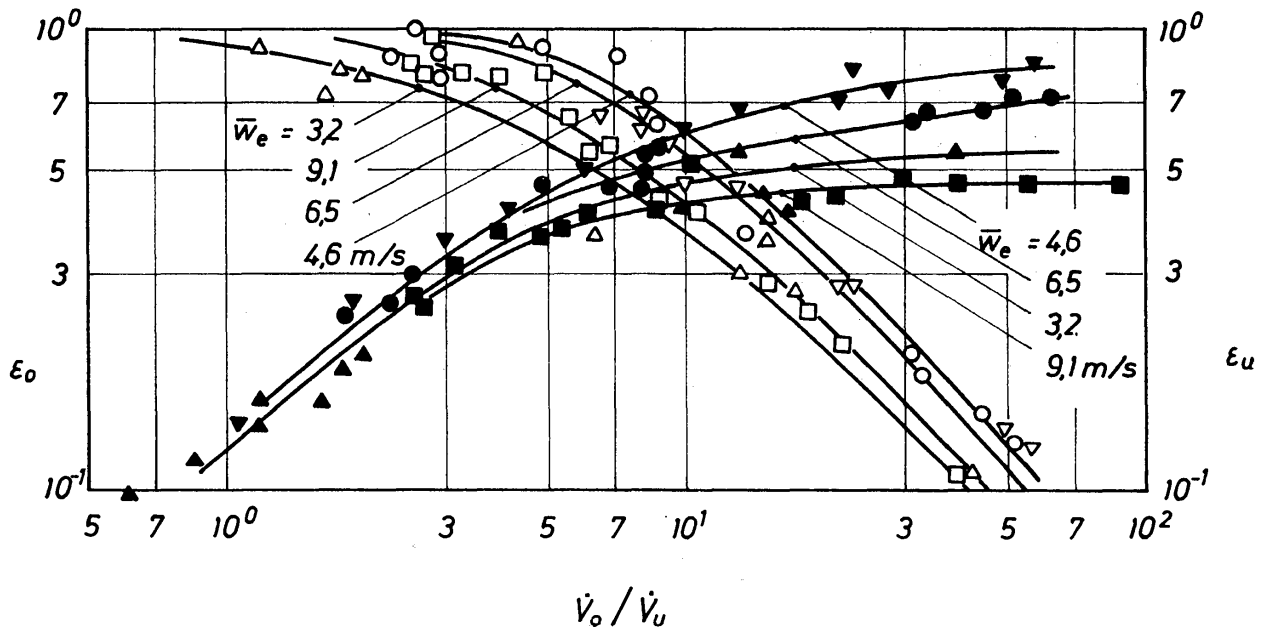


Bild 13.21. Trennzahlen ε_o und ε_u bei einer Wasser/Öl-Emulsion mit $c_{ep} = 10\%$ Wasser im eintretenden Gemisch, abhängig von \dot{V}_o/\dot{V}_u , für verschiedene Werte der Eintrittsgeschwindigkeit \bar{w}_e

Ein klarer Oberlauf ($\varepsilon_o = 1$) führt zwangsläufig dazu, daß der Unterlauf mit $\varepsilon_u = 0$ die gleiche Zusammensetzung aufweist wie der Einlauf. Soll eine vollständige Trennung des Gemisches erreicht werden, dann muß der Unterlauf dem Zyklon wieder zugeführt werden. Da ein klarer Oberlauf nur bei sehr kleinen Werten für \dot{V}_o/\dot{V}_u erreicht wird, muß also eine sehr große Suspensionsmenge im Kreislauf geführt werden.

Weitere wertvolle Informationen über die Trennwirkung von Hydrozyklonen liefern die *Bilder 13.22 bis 13.24*. In *Bild 13.22* sind ε_o und ε_u abhängig von der Konzentration im Einlauf für verschiedene Werte von \dot{V}_o/\dot{V}_e bzw. \dot{V}_u/\dot{V}_e aufgetragen. Von besonderem Interesse sind die *Bilder 13.23 und 13.24*, da sie er-

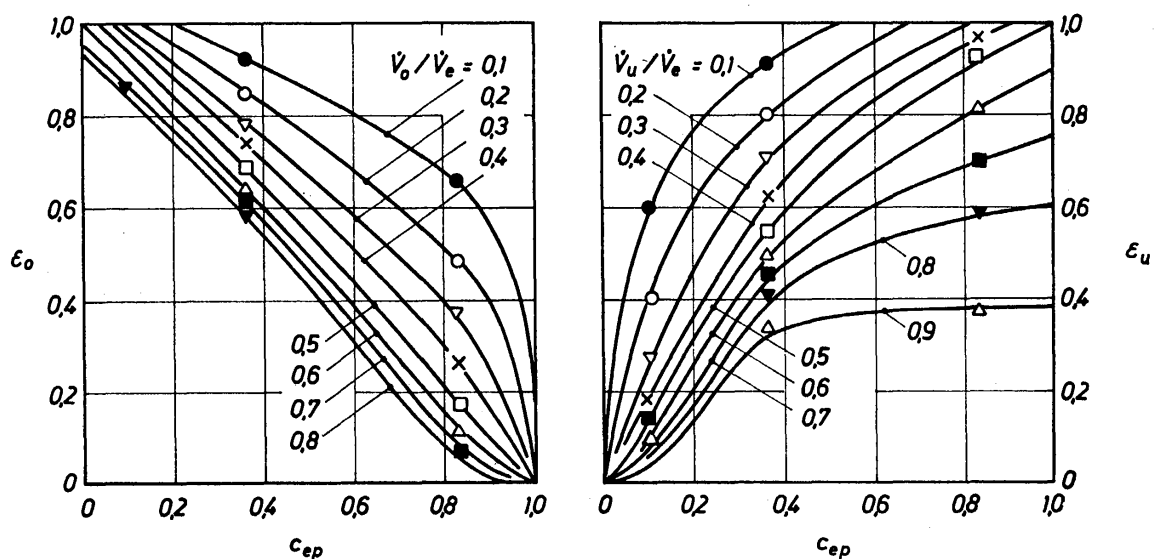


Bild 13.22. Trennzahlen ε_o und ε_u bei einer Wasser/Öl-Emulsion, abhängig von der Konzentration c_{ep} des eintretenden Gemisches, für verschiedene Werte \dot{V}_o/\dot{V}_e bzw. \dot{V}_u/\dot{V}_e bei einer Eintrittsgeschwindigkeit von $\bar{w}_e = 4,6$ m/s

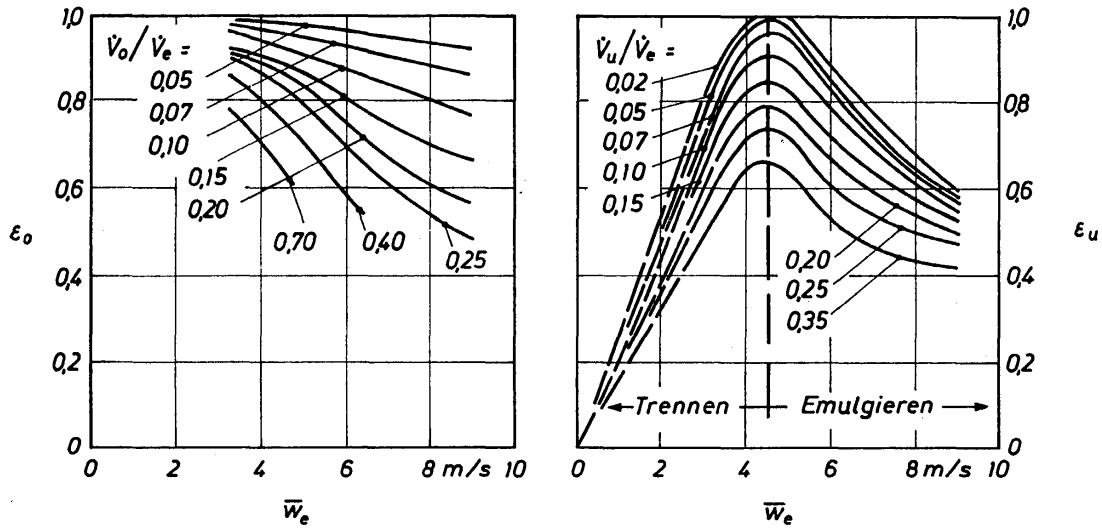


Bild 13.23. Trennzahlen ϵ_0 und ϵ_u einer Wasser/Öl-Emulsion mit $c_{ep} = 36\%$ Wasser im eintretenden Gemisch, abhängig von der Eintrittsgeschwindigkeit \bar{w}_e , für verschiedene Werte \dot{V}_o/\dot{V}_e bzw. \dot{V}_u/\dot{V}_e

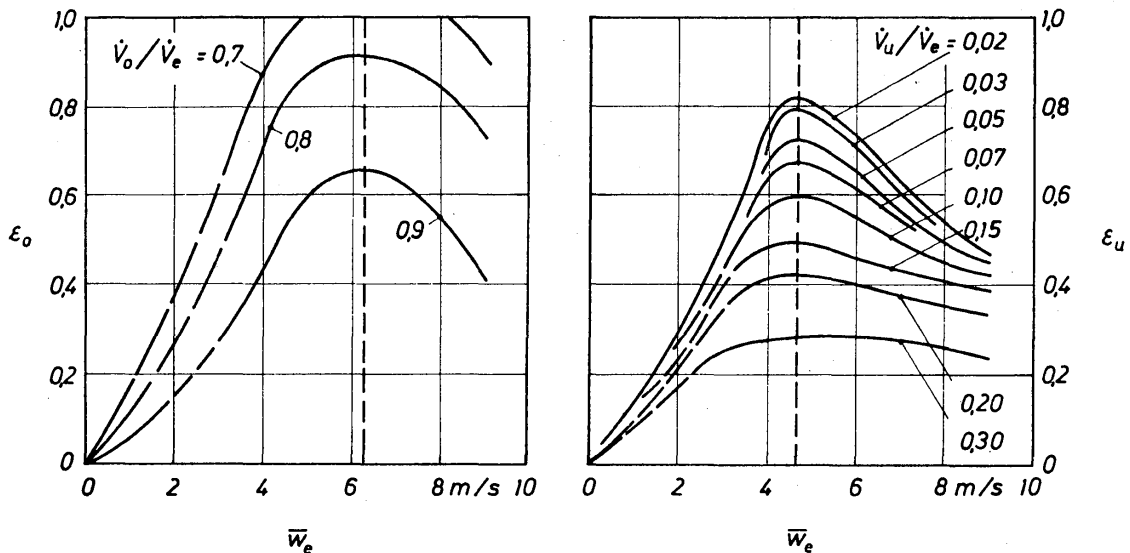


Bild 13.24. Trennzahlen ϵ_0 und ϵ_u einer Wasser/Öl-Emulsion mit $c_{ep} = 10\%$ Wasser im eintretenden Gemisch, abhängig von der Eintrittsgeschwindigkeit \bar{w}_e , für verschiedene Werte \dot{V}_o/\dot{V}_e bzw. \dot{V}_u/\dot{V}_e

kennen lassen, daß zur Erzielung optimaler Trennzahlen bestimmte Eintrittsgeschwindigkeiten eingehalten werden müssen, die unabhängig von den jeweiligen Volumstromverhältnissen \dot{V}_o/\dot{V}_e bzw. \dot{V}_u/\dot{V}_e sind. Wird diese Geschwindigkeit überschritten, dann nimmt die Trennwirkung des Zyklons stetig ab, und es entwickelt sich eine Emulgierwirkung.

Der Übergang vom Trennen zum Emulgieren ist dadurch bedingt, daß mit zunehmender Eintrittsgeschwindigkeit der Tropfendurchmesser, der in der räumlichen Strömung noch stabil ist, abnimmt. Zu große Tropfen werden von den angreifenden Scherkräften in mehrere kleinere Tropfen zerteilt. Das heißt dann aber auch, daß die Eintrittsgeschwindigkeit bei optimaler Trennzahl um so größer sein darf, je kleiner die Tropfen im eintretenden Gemischstrom sind. Hierüber liegen aber noch keine Versuchsergebnisse vor.

Schrifttum

- [13.1] ● E. WICKE und E. RÖMER, *Chemischer Apparatebau und Verfahrenstechnik*, erschienen als 1. Band in *Ullmanns Encyclopädie der technischen Chemie*, Urban & Schwarzenberg, München/Berlin 1951
- [13.2] H. KLEIN, Die Entwicklung des Drehströmungsentstaubers und seine Einführung in die Praxis, *Energie & Techn.* 18 (1966) 6, 228–35
- [13.3] R. NAGEL, Der Venturi-Wäscher; Entwicklung, Wirkungsweise und Energiebedarf, *Staub – Reinhaltung der Luft* 29 (1969) 4, 133–9
- [13.4] R. NAGEL, Klassifizierung der Windsichter, *Staub – Reinhaltung der Luft* 28 (1968) 6, 225–8
- [13.5] W. BARTH, Entwicklungslinien der Entstaubungstechnik, *Staub* 21 (1961) 9, 382–90
- [13.6] W. BARTH, Grenzen und Möglichkeiten der mechanischen Entstaubung, *Staub* 23 (1963) 3, 176–80
- [13.7] W. Barth, Berechnung und Auslegung von Zyklonabscheidern auf Grund neuerer Untersuchungen, *BWK* 8 (1956) 1, 1–9
- [13.8] E. MUSCHELKNAUTZ, Untersuchungen an Fliehkraftabscheidern; *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5/6, 306–10
- [13.9] E. MUSCHELKNAUTZ und K. BRUNNER, Untersuchungen an Zyklonen, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 9/10, 531–8
- [13.10] H. RUMPF und K. LESCHONSKI, Prinzipien und neuere Verfahren der Windsichtung, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 21, 1231–41
- [13.11] ● A. F. KASSATKIN, *Chemische Verfahrenstechnik*, 2. Auflage, Band 1, VEB-Verlag Technik, Berlin 1958
- [13.12] E. KRIEGEL, Modelluntersuchungen an Zyklonabscheidern, *Techn. Mitt. Krupp Forsch. ber.* 25 (1967) 1/2, 21–36
- [13.13] E. KRIEGEL, Einfluß der Staubbelastung auf den Durchsatz und Druckverlust von Zyklonabscheidern, *Aufbereitungs-Techn.* 9 (1958) 1, 1–8
- [13.14] A. J. TER LINDEN, Untersuchungen an Zyklonabscheidern, *TIZ-ZBI (Tonindustrie-Ztg.)* 77 (1953) 3/4, 49–55
- [13.15] A. J. TER LINDEN, Investigation into cyclone dust collectors, *Proc. Inst. Mech. Eng.* 160 (1949) 11–8
- [13.16] H. J. VAN EBBENHORST TENGBERGEN, Vergleichsuntersuchungen an Zyklonen, *Staub* 15 (1965) 11, 486–90
- [13.17] H. J. VAN EBBENHORST TENGBERGEN, Dust cyclones—Law of similarity—Influence of the dust concentration, *De Ingenieur, Werktnig – en Scheepsbouw* 1 (1965) W1–W8
- [13.18] C. J. STAIRMAND, The design and performance of cyclone separators, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 29 (1951) 356–83
- [13.19] K. J. CAPLAN, All about cyclone collectors, *Air Eng.* 1964 (September) 28–38
- [13.20] J. PETROLL, V. QUITTER, G. SCHADE und L. ZIMMERMANN, Untersuchungen an Zyklonabscheidern, *Staub* 27 (1967) 3, 115–23
- [13.21] H. RUMPF, K. BORHO und H. REICHERT, *Optimale Dimensionierung von Zyklonen mit Hilfe vereinfachender Modelluntersuchungen*, Vortrag auf der Institution of Chemical Engineers und VTG/VDI-Tagung in Brighton (England), 24. bis 26. April 1968
- [13.22] S. BEDNARSKI, Anwendung der Hydrozyklone in verschiedenen Verfahren, *Chem.-Techn.* 20 (1968) 11, 673–7
- [13.23] ● D. BRADLEY, *The Hydrocyclone*, Pergamon Press, Oxford 1965
- [13.24] K. RIETEMA, Performance and design of hydrocyclones, *Chem. Eng. Sci.* 15 (1961) 3/4, Part I, S. 298–302; Part II, S. 303–9; Part III, S. 310–9, und Part IV, S. 320–5

- [13.25] C.KRIJGSMAN, Versuchs- und Betriebsergebnisse mit Hydrozyklonen, *Chem.-Ing.-Techn.* 23 (1951) 22, 540-2
- [13.26] H.TRAWINSKI, Der Hydrozyklon als Hilfsgerät zur Grundstoff-Veredelung, *Chem.-Ing.-Techn.* 25 (1953) 6, 331-41
- [13.27] H.TRAWINSKI, Näherungsansätze zur Berechnung wichtiger Betriebsdaten für Hydrozyklone und Zentrifugen, *Chem.-Ing.-Techn.* 30 (1958) 2, 85-95
- [13.28] H.SCHUBERT und D.NOAK, Zur Frage des Einsatzes von Hydrozyklonen in der Kaolinindustrie, *Freiberger Forschungsh. Reihe A* (1965) A 335, S. 122-33
- [13.29] D.F.KELSALL, A further study of the hydraulic cyclone, *Chem.Eng.Sci.* 2 (1953) 254-72
- [13.30] S.BEDNARSKI, Vergleich der Methoden zur Berechnung von Hydrozyklonen, *Chem. Techn.* 20 (1968) 1, 12-8
- [13.31] M.BOHNEN, Neuere Untersuchungen über die Trennwirkung und den Druckverlust von Hydrozyklonen, noch nicht veröffentlicht
- [13.32] J.B.TEPE und K.W.WOODS, Design of an ether-water contacting system, *U. S. Atomic Energy Commission Report, AEC-D 2844*, Januar 1943
- [13.33] J.W.HITCHOU, Cyclones as liquid-liquid contactor-separators, Atomic Energy Research Establishment Harwell, Berkshire 1959, AERE-CE/R 2777
- [13.34] D.J.SIMKIN und R.B.OLNEY, Phase separation and mass transfer in a liquid-liquid cyclone, *AIChE J.* 2 (1956) 4, 545-51
- [13.35] H.U.REGEHR, Untersuchungen über die Entmischung disperser Stoffsysteme im Hydrozyklon, *Forsch.Gebiete Ingenieurwes.* 28 (1962) 1, 11-27
- [13.36] M.BOHNEN, Trennung zweier Flüssigkeiten im Hydrozyklon, *Chem.-Ing.-Techn.* 41 (1969) 4 und 5, 381-7

Teil V

Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Rohren und Kolonnen

14	Strömung von Rieselfilmen	674
15	Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Rohren	713
16	Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Füllkörperschichten	766
17	Gas-Flüssigkeits-Strömungen auf Kolonnenböden	800
18	Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Blasensäulen	848

Die Gas-Flüssigkeits-Strömungen bilden eine Gruppe der mehrphasigen Strömungen, die zu den bedeutsamsten der Verfahrenstechnik zählen. Sie treten z. B. in Rohren, in Füllkörperkolonnen, in Bodenkolonnen und in Blaskolonnen auf. Diese Apparate dienen fast immer verschiedenen Zwecken des Wärme- und Stoffaustausches ohne und mit chemischen Reaktionen. Erwähnt seien als Beispiele Naßgaskühler, Kondensatoren, Verdampfer, Absorber und Rektifizierkolonnen. Man ist heute noch weit davon entfernt, alle Vorgänge bei den Gas-Flüssigkeits-Strömungen in den genannten Apparaten in allen Einzelheiten beschreiben zu können. Die Forschung hat sich daher ganz bewußt zunächst der Klärung der für die Technik besonders wichtigen Fragen angenommen. Diese Beschränkung in der Aufgabenstellung hat jedoch dazu geführt, daß zumindest einige für die technische Praxis wichtige Probleme in befriedigender Form gelöst werden konnten. Das sind der Druckverlust in der Gasphase, die Volumanteile der beiden Phasen und jene Belastungsgrenzen für Gas und Flüssigkeit, die zur Aufrechterhaltung des Betriebes nicht überschritten werden dürfen. Die hiermit zusammenhängenden Probleme wurden sowohl theoretisch als auch experimentell untersucht. Die gleichzeitige Anwendung dieser Untersuchungsmethoden führte dann häufig zu empirischen Gleichungen, die einen guten theoretischen Rückhalt haben.

Eine der bedeutsamsten Formen der Gas-Flüssigkeits-Strömungen ist diejenige, bei der die Flüssigkeit als dünner Film auftritt. Seine Dicke liegt in der Größenordnung von einigen zehntel Millimetern. Mit der Behandlung der Flüssigkeitsfilme wird das Kapitel über Gas-Flüssigkeits-Strömungen eröffnet, wobei zur Vereinfachung auch noch der Einfluß eines angrenzenden Gasstromes ausgeschlossen wird.

14 Strömung von Rieselfilmen

Unter einem Rieselfilm soll ein Flüssigkeitsfilm verstanden werden, dessen Bewegung durch die Schwerkraft ausgelöst wird. Die Einflüsse eines angrenzenden Gases bleiben beim Rieselfilm unberücksichtigt. Rieselfilme können an ruhenden und an bewegten Wänden entlangströmen. Die Wände können sowohl eben als auch gekrümmt sein und jede beliebige Neigung gegen die Horizontale aufweisen. Ruhende Wände ergeben sich z. B. beim Rohr, an dessen äußerer oder innerer Oberfläche der Film herabrieselt; bewegte Wände beispielsweise beim Tauchlackieren, wenn die Werkstücke aus dem Flüssigkeitsbad herausgezogen werden. Die größte Aufmerksamkeit wird im folgenden auf die Strömung von Rieselfilmen an senkrechten Wänden gerichtet, da hierbei die technisch interessantesten Vorgänge auftreten.

14.1 Filmströmung an unbewegten, senkrechten Wänden

Grundsätzlich muß man bei Rieselfilmen zwischen solchen mit glatter und solchen mit welliger Oberfläche unterscheiden. Technisch bedeutsam sind jedoch fast ausschließlich Filme mit welliger Oberfläche. Experimentelle Untersuchungen haben jedoch gezeigt, daß die Dicke der Rieselfilme über einen großen Bereich der Reynoldszahl unabhängig davon ist, ob Wellen vorhanden sind oder nicht. Es ist daher zulässig, die Behandlung der Rieselfilme unter der Voraussetzung zu beginnen, daß die Oberfläche glatt ist. Der Einfluß der Wellen auf die Filmströmung wird sodann gesondert behandelt. Dadurch ist es möglich, zuerst die technisch bedeutsamsten Gesetze ohne Berücksichtigung der Wellen herzuleiten.

14.11 Allgemeine Gesetze der Filmströmung

Die Filmströmung an senkrechten ebenen Wänden wurde erstmalig von NUSSELT [14.1] und die an der Innenwand senkrechter Rohre von JACKSON [14.2] theoretisch untersucht. Auf diese Arbeiten stützen sich auch die folgenden Ausführungen. In *Bild 14.1* ist ein Teil des Querschnittes durch ein innen berieseltes Rohr mit den hier verwendeten Bezeichnungen dargestellt. Es bedeuten R Rohrradius, r laufende Koordinate, δ Filmdicke, $r_\delta = R - \delta$ Wert von r an der Filmoberfläche und $y = R - r$ Wandabstand. Mit der Annahme, daß keine Beschleunigungs- und Druckkräfte im Film auftreten und der Film eine glatte Oberfläche hat, wirken an einem Flüssigkeitselement von der Höhe dh nur die differentielle Schubkraft dS und die Massenkraft dG :

$$dS = \tau 2\pi r dh, \quad (14.1)$$

$$dG = g \rho (r^2 - r_\delta^2) \pi dh. \quad (14.2)$$

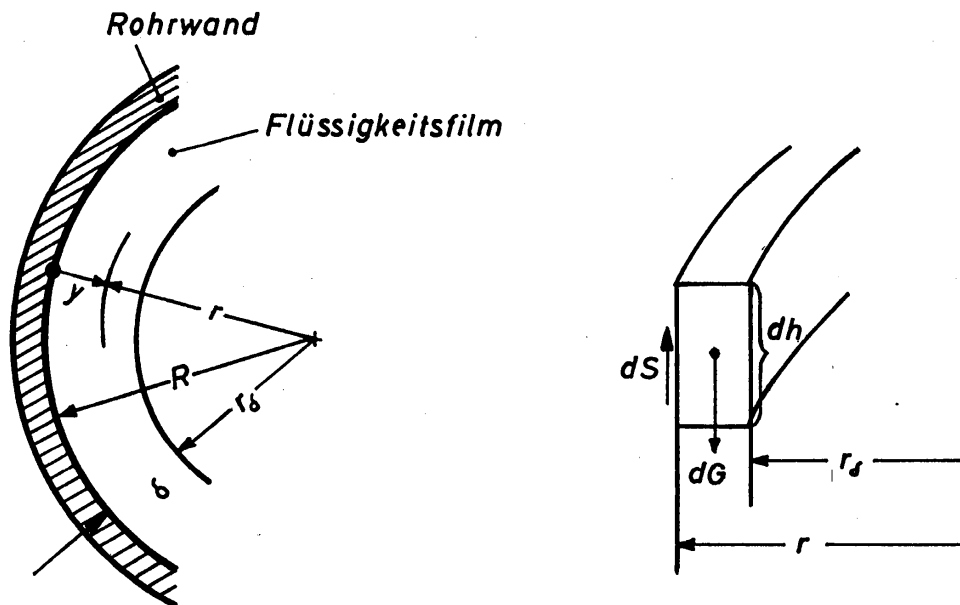


Bild 14.1

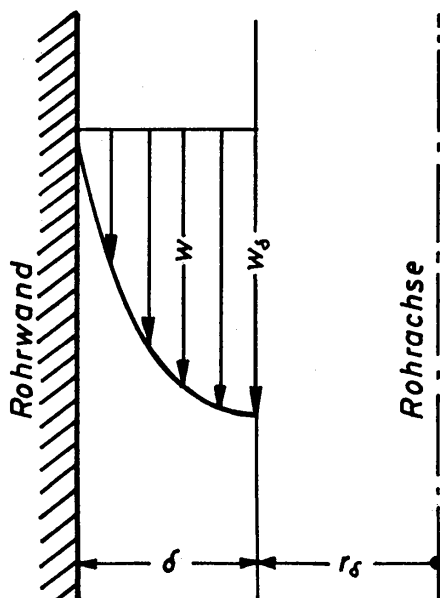
Bezeichnungen bei der Filmströmung an der Innenwand eines senkrechten Rohres

Mit ρ wird die Flüssigkeitsdichte und mit τ die Schubspannung bezeichnet. Führt man für τ den Newtonschen Schubspannungsansatz $\tau = -\eta \, dw/dr$ ein, worin η die dynamische Viskosität bedeutet, dann sind die folgenden Rechnungen auf die laminare Strömung des Flüssigkeitsfilms beschränkt. Aus dem Gleichgewicht von Schub- und Massenkraft folgt die Differentialgleichung für die örtliche Geschwindigkeit:

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{g\rho}{2\eta} \left(r - \frac{r_\delta^2}{r} \right). \quad (14.3)$$

Unter Berücksichtigung der Haftbedingung, $w = 0$ für $r = R$, erhält man nach Integration die folgende Beziehung:

$$w = \frac{g\rho R^2}{4\eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right]. \quad (14.4)$$



Das hiernach berechnete Geschwindigkeitsprofil ist in *Bild 14.2* dargestellt. An der freien Oberfläche bei $r = r_\delta$ weist das Profil eine horizontale Tangente auf, da der Einfluß eines möglicherweise vorhandenen Gasstromes unberücksichtigt blieb.

Bild 14.2. Geschwindigkeitsverteilung im laminar strömenden Rieselfilm mit glatter Oberfläche

Ist das Rohr vollständig mit Flüssigkeit gefüllt – ein durch Gl.(14.4) erfaßter Grenzfall –, dann ergibt sich mit $r_\delta = 0$ die vereinfachte Beziehung:

$$w_{(r_\delta=0)} = \frac{g \varrho R^2}{4 \eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (14.5)$$

Setzt man in Gl.(14.4) $r = r_\delta$, so erhält man die größte Geschwindigkeit, die beim Rieselfilm stets an der Filmoberfläche auftritt:

$$w_\delta = \frac{g \varrho R^2}{4 \eta} \left[1 - \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 \left(1 - 2 \ln \frac{r_\delta}{R} \right) \right]. \quad (14.6)$$

Hieraus erkennt man, daß die im äußersten Falle auftretende Geschwindigkeit w_{\max} erwartungsgemäß bei $r_\delta = 0$, also in Rohrmitte, auftritt. Diese Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$w_{\max} = \frac{g \varrho R^2}{4 \eta}. \quad (14.7)$$

Sie stimmt mit Gl.(1.11) überein, wenn man die von der Druckkraft herrührende Größe $\Delta P/L$ durch die von der Massenkraft herrührende Größe $g \varrho$ ersetzt.

Für praktische Rechnungen erweist sich die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} stets als besonders wichtige Größe. Definiert man

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{\pi (R^2 - r_\delta^2)} \quad (14.8)$$

mit \dot{V} als den Volumstrom gemäß der Beziehung

$$\dot{V} = \int_{r_\delta}^R 2 \pi w r dr, \quad (14.9)$$

so erhält man nach Einsetzen von Gl.(14.4) für w und Integration für die mittlere Geschwindigkeit die folgende Gleichung:

$$\bar{w} = \frac{g \varrho R^2}{8 \eta} \left\{ 1 - 3 \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 - \frac{4 \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^4 \ln \frac{r_\delta}{R}}{1 - \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2} \right\}. \quad (14.10)$$

Der Ausdruck vor der geschweiften Klammer gilt wieder, wie schon in den vorausgegangenen Formeln, für den Fall, daß die Flüssigkeit das gesamte Rohr ausfüllt. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer berücksichtigt also den bei der Filmströmung vorhandenen freien Kernquerschnitt des Rohres, der zwischen $r_\delta/R = 0$ und $r_\delta/R = 1$ liegt.

Berechnet man das Verhältnis aus der Geschwindigkeit an der Filmoberfläche w_δ und der mittleren Geschwindigkeit \bar{w} , so folgt mit den Gleichungen (14.6) und (14.10):

$$\frac{w_\delta}{\bar{w}} = 2 \frac{1 - \left[\left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 \cdot \left(1 - 2 \ln \frac{r_\delta}{R} \right) \right]}{1 - \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 \left[3 + \frac{4 \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 \ln \frac{r_\delta}{R}}{1 - \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2} \right]}. \quad (14.11)$$

Für $r_\delta/R = 0$ wird erwartungsgemäß $w_\delta/\bar{w} = 2$. Für $r_\delta/R = 1$, dem Grenzfall eines unendlich dünnen Films oder der Strömung eines Films an einer ebenen Platte, wird $w_\delta/\bar{w} = 1,5$. Ist $r_\delta/R = 0,8$, dann wird $w_\delta/\bar{w} = 1,555$ und weicht somit nur um weniger als 4% von dem Grenzwert für die Filmströmung an ebenen Platten ab. Da in technischen Anlagen r_δ/R fast immer größer als 0,8 ist, heißt das, daß man Untersuchungen von Flüssigkeitsfilmen auf den Fall der Strömung an ebenen Wänden beschränken darf. Dieses gilt nicht nur, wenn der Film an der Innenwand, sondern auch dann, wenn er an der Außenwand eines Rohres herabrieselt. Denn $r_\delta/R = 0,8$ bedeutet wegen $r_\delta/R = 1 - \delta/R$, daß $\delta/R = 0,2$ ist. Somit kann man also auch sagen, daß sich Flüssigkeitsfilme, die an senkrechten Rohren herabrieseln, mit guter Näherung so verhalten, als ob sie an senkrechten, ebenen Platten herabrieselten. Die weiteren Betrachtungen werden daher für die Strömung des Films an ebenen Platten durchgeführt.

Die Gleichung für die örtliche Filmgeschwindigkeit an ebenen Platten läßt sich aus Gl.(14.4) herleiten. Man führt die Beziehungen $r/R = 1 - y/R$ und $r_\delta/R = 1 - \delta/R$ ein und benützt statt der logarithmischen Funktion die ersten beiden Glieder einer Reihenentwicklung:

$$\ln \left(\frac{r}{R} \right) = \ln \left(1 - \frac{y}{R} \right) \approx - \frac{y}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{R} \right)^2. \quad (14.12)$$

Die Verhältnisse y/R und δ/R sind im Vergleich zu 1 kleine Größen erster Ordnung. Wie schon bei der Reihe für $\ln(r/R)$ werden kleine Größen nur bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt. Dann ergibt sich für die Geschwindigkeitsverteilung im ebenen Film:

$$w = \frac{g \varrho \delta^2}{\eta} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (14.13)$$

Diese Gleichung wurde erstmalig von NUSSELT [14.1] mitgeteilt. Sie ist wesentlich einfacher im Aufbau und daher auch für weitergehende Rechnungen erheblich einfacher zu gebrauchen als Gl.(14.4).

Für die Oberflächengeschwindigkeit w_δ folgt aus Gl.(14.13) mit $y = \delta$

$$w_\delta = \frac{1}{2} \frac{g \varrho \delta^2}{\eta}. \quad (14.14)$$

Die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} ist jetzt wie folgt definiert:

$$\bar{w} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta w \, dy. \quad (14.15)$$

Nach Einsetzen von Gl.(14.13) und Integration ergibt sich

$$\bar{w} = \frac{1}{3} \frac{g \rho \delta^2}{\eta}. \quad (14.16)$$

Zusammen mit Gl.(14.14) erhalten wir unmittelbar einen Ausdruck für das Verhältnis von Oberflächengeschwindigkeit w_δ zu mittlerer Geschwindigkeit \bar{w} :

$$\frac{w_\delta}{\bar{w}} = \frac{3}{2}. \quad (14.17)$$

Dieser Wert ergab sich bereits aus Gl.(14.11) als Grenzwert bei $r_\delta/R = 1$.

Zur weiteren Behandlung der Filmströmung erweist es sich als sinnvoll, eine Reynoldszahl gemäß

$$Re \equiv \frac{\bar{w} \delta}{\nu} = \frac{\dot{V}}{U \nu} \quad (14.18)$$

zu definieren, wobei \bar{w} mittlere Filmgeschwindigkeit, δ Filmdicke, $\nu = \eta/\rho$ kinematische Viskosität, \dot{V} Volumstrom und U Rohrumfang oder Plattenbreite bedeuten. Im amerikanischen Schrifttum ist es häufig üblich, eine Reynoldszahl zu definieren, die um den Faktor 4 größer ist. Verwendet man die oben definierte Reynoldszahl, so lassen sich für w_δ und \bar{w} folgende Gleichungen angeben:

$$w_\delta = \frac{3}{2} \left(\frac{g \nu}{3} \right)^{1/3} Re^{2/3}, \quad (14.19)$$

$$\bar{w} = \left(\frac{g \nu}{3} \right)^{1/3} Re^{2/3}. \quad (14.20)$$

Ferner erhält man durch Gleichsetzen der Gleichungen (14.16) und (14.20) eine bedeutsame Beziehung für die Filmdicke:

$$\delta = \left(\frac{3 \nu^2}{g} \right)^{1/3} Re^{1/3}. \quad (14.21)$$

Da sich die Reynoldszahl aus dem Volumstrom und der Plattenbreite bzw. dem Rohrumfang für eine gegebene Flüssigkeit leicht berechnen läßt, hat man eine einfache Möglichkeit, die für viele Zwecke interessierende Filmdicke zu berechnen. Es war schon gesagt worden, daß die Filmdicke im allgemeinen in der Größenordnung von weniger als 1 mm liegt.

Mittels der Filmdicke läßt sich nun auch die Schubspannung τ berechnen. Mit

$$\tau = \frac{dw}{dy} \quad (14.22)$$

ergibt sich unter Verwendung von Gl.(14.13) die örtliche Schubspannung zu

$$\tau = g \rho \delta \left(1 - \frac{y}{\delta} \right). \quad (14.23)$$

Die Schubspannung ändert sich also geradlinig mit dem Wandabstand. Sie hat ihren größten Wert an der Wand und an der freien Oberfläche den Wert Null. Für $y = 0$ folgt die Wandschubspannung zu

$$\tau_w = g \rho \delta. \quad (14.24)$$

Hierfür läßt sich unter Verwendung von Gl.(14.21) auch schreiben:

$$\tau_w = g \rho \left(\frac{3 \nu^2}{g} \right)^{1/3} Re^{1/3}. \quad (14.25)$$

Die bisherigen Rechnungen wurden unter der Annahme durchgeführt, daß die Strömung laminar ist. Wir wissen aber, daß die Strömung ab einer kritischen Reynoldszahl in den turbulenten Zustand übergeht. Diese kritische Zahl ist bei der Filmströmung durch den Wert

$$Re_{kr} = 400$$

festgelegt. Er wurde durch Messung der Filmdicke und der Wandschubspannung von BRAUER [14.3] ermittelt und durch gleichartige Messungen von FEIND [14.4] bestätigt. Von anderen Experimentatoren werden Werte zwischen 250 und 590 angegeben [14.5 bis 14.16]. Die große Streubreite dieser Angaben ist vor allem darauf zurückzuführen, daß der Wert von Re_{kr} nur aus Meßwerten für die Filmdicke ermittelt wurde, die im allgemeinen jedoch eine verhältnismäßig starke Streuung aufweisen.

Der theoretischen Untersuchung turbulenter Flüssigkeitsfilme stehen erhebliche Schwierigkeiten entgegen, da der turbulente Strömungszustand immer mit dem Vorhandensein von Wellen verbunden ist. Somit wird die Geschwindigkeitsverteilung und die Filmdicke steten Änderungen unterworfen. Man beschränkt sich daher auf die Berechnung eines Mittelwertes für die Filmdicke und setzt, wie es DUKLER und BERGELIN [14.11 und 14.17] für den Film getan haben, die Gültigkeit der Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Rohrströmung voraus (siehe Abschnitt 1.3). Mittels der Schubspannungsgeschwindigkeit $w^* \equiv \sqrt{\tau_w/\rho}$ läßt sich das Geschwindigkeitsprofil in drei Abschnitte unterteilen und durch getrennte Gleichungen ausdrücken.

Für die wandnahe Strömungsschicht zwischen $0 \leq w^* y/\nu \leq 5$ gilt

$$\frac{w}{w^*} = \frac{w^* y}{\nu}, \quad (14.26)$$

für den Übergangsbereich zwischen $5 \leq w^* y/\nu \leq 30$ gilt

$$\frac{w}{w^*} = -3,05 + 5,0 \ln(w^* y/\nu), \quad (14.27)$$

und für die turbulente, oberflächennahe Strömungsschicht zwischen $30 \leq w^* y/\nu \leq w^* \delta/\nu$ gilt schließlich

$$\frac{w}{w^*} = 5,5 + 2,5 \ln(w^* y/\nu). \quad (14.28)$$

Die Wandschubspannung τ_w bei turbulenter Filmströmung ist wie für den glatten, laminaren Film durch Gl.(14.24) gegeben. Zur Berechnung des Volumstroms \dot{V} werden in die Beziehung

$$\dot{V} = U \nu \int_0^{w^* \delta / \nu} \frac{w}{w^*} d(w^* y / \nu) \quad (14.29)$$

die Gleichungen (14.26) bis (14.28) eingesetzt und die Integrationen durchgeführt. Der Volumstrom ergibt sich dann als Summe von drei Anteilen. Hieraus erhält man nach Umformung die Gleichung

$$Re + 64 = \frac{w^* \delta}{\nu} [3,0 + 2,5 \ln(w^* \delta / \nu)], \quad (14.30)$$

die zur Berechnung der mittleren Filmdicke δ , abhängig von der Reynoldszahl Re , dient. Dieses ist, wie PORTALSKI [14.18] feststellte, die brauchbarste theoretische Gleichung für die Filmdicke bei turbulenter Strömung. Eine ähnliche, jedoch mathematisch wesentlich aufwendigere Berechnung der mittleren Filmdicke hat LEE [14.19] durchgeführt.

14.12 Gesetze für die mittlere Filmdicke

Zur Darstellung von Meßwerten für die mittlere Filmdicke δ wird häufig eine bezogene mittlere Filmdicke δ^* , definiert durch

$$\delta^* = \frac{2g \delta^3}{(\dot{V}/U)^2}, \quad (14.31)$$

über der Reynoldszahl Re aufgetragen. Von dieser Darstellungsweise ist auch in *Bild 14.3* Gebrauch gemacht worden, welches Meßwerte von FRIEDMAN und MILLER [14.20] und BRAUER [14.3] zeigt. Für die durch die Meßwerte gelegte Kurve *a* erhält man die Beziehung

$$\delta_t^* = \frac{6}{Re}, \quad (14.32)$$

aus der nach Einsetzen von Gl.(14.31) die für den laminaren Strömungsbereich theoretisch hergeleitete Gl.(14.21) folgt. Das heißt also, daß im laminaren Bereich eine befriedigende Übereinstimmung von Theorie und Experiment besteht. Im turbulenten Bereich wird die Kurve *b* durch die Beziehung

$$\delta_t^* = (90 Re)^{-2/5} \quad (14.33)$$

wiedergegeben, woraus nach Umformung

$$\delta_t = 0,302 \left(\frac{3 \nu^2}{g} \right)^{1/3} Re^{8/15} \quad (14.34)$$

wird. Da sich die Meßwerte im turbulenten Abschnitt nur über einen sehr kleinen Bereich der Reynoldszahl, nämlich von $Re = 400$ bis $Re = 1700$ erstrecken, sind die Gleichungen (14.33) und (14.34) mit einer gewissen Unsicherheit behaftet.

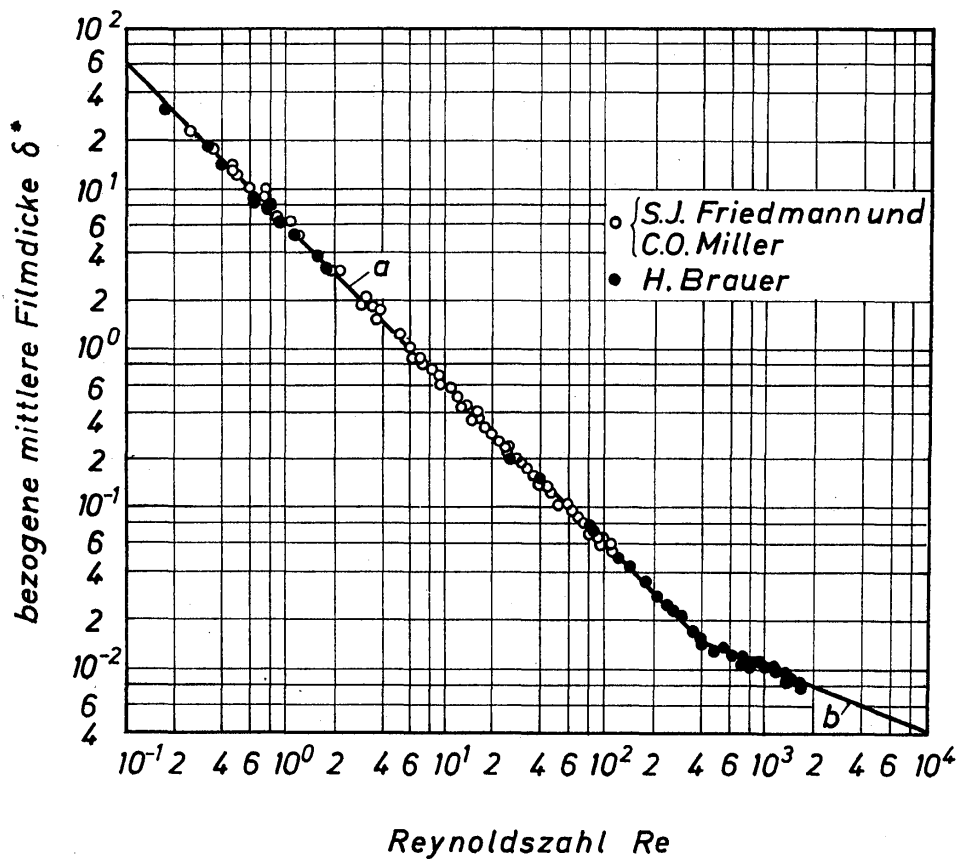


Bild 14.3. Abhängigkeit der bezogenen mittleren Filmdicke δ^* von der Reynoldszahl Re ; a und b Ausgleichskurven durch die Meßwerte nach Gl.(14.32) und Gl.(14.33)

Aus *Bild 14.3* geht hervor, daß der Übergang vom laminaren zum turbulenten Strömungszustand ziemlich plötzlich erfolgt. Ein ausgeprägter Übergangsbereich, wie er bei der Rohr- und Kanalströmung erfolgt, tritt bei der Filmströmung also nicht auf.

In *Bild 14.3* sind nur die Meßwerte von zwei Experimentatoren dargestellt. Die daraus entwickelten Gleichungen für den laminaren Strömungsbereich werden jedoch durch die Untersuchungen vieler anderer Experimentatoren bestätigt. Hingewiesen sei auf die zusammenfassenden Darstellungen von COOPER, DREW und McADAMS [14.9], FALLAH, HUNTER und NASH [14.21], BRAUER [14.3], BELKIN, MACLEOD, MONRAD und ROTHFUS [14.22], FEIND [14.4] und ZHIVAIIKIN [14.14]. Die in diesen Arbeiten mitgeteilten Meßwerte streuen teilweise jedoch erheblich, was insbesondere auf die angewendeten Meßverfahren zurückzuführen ist.

Die Verfeinerung der Meßverfahren, insbesondere durch Entwicklung geeigneter elektrischer und Strahlungsmeßverfahren, hat in beachtlicher Weise dazu beigetragen, die Streuung der Meßwerte zu verringern. Dabei ist es aber auch gelungen, systematische Abweichungen von der theoretischen Gleichung [14.21] aufzudecken, die mittels der früher üblichen Verfahren nicht festgestellt werden konnten. So wiesen beispielsweise FEIND [14.4], JACKSON [14.2], PORTALSKI [14.18] sowie KAMEI und OISHI [14.23] nach, daß die Filmdicke δ_l im laminaren Bereich ($Re \leq 400$) bei Vorhandensein von Wellen etwas kleiner ist, als man nach Gl.(14.21) berechnet. Die Abweichungen sind im allgemeinen gering und ver-

schwinden mit steigender Reynoldszahl wieder, so daß sie für technische Zwecke kaum Bedeutung haben. Eine Vorstellung von diesen Abweichungen vermag eine theoretische Gleichung für die mittlere Filmdicke im laminaren Strömungsbereich bei Vorhandensein sinusförmiger Wellen zu liefern, die KAPITZA [14.24] herleitete:

$$\delta_i = 0,93 \left(\frac{3 \nu^2}{g} \right)^{1/3} Re^{1/3}. \quad (14.35)$$

Im Vergleich zu der für Filme mit glatter Oberfläche geltenden Gl.(14.21) ist die Filmdicke nach Gl.(14.35) um etwa 7% geringer. Die Meßwerte zeigen teilweise eine noch größere Abweichung. Das ist wohl darauf zurückzuführen, daß sinusförmige Wellen – und nur für solche gilt Gl.(14.35) – lediglich in einem sehr kleinen Bereich der Reynoldszahl auftreten. Oberhalb dieses Re -Bereiches bricht die geordnete sinusförmige Wellenströmung zusammen, und es tritt eine schwallartige Flüssigkeitsbewegung auf.

Im turbulenten Strömungsbereich, der oberhalb von $Re_{kr} = 400$ liegt, streuen die älteren Meßwerte noch viel stärker als im laminaren Bereich. ZHIVAIKIN [14.14] ermittelte aus einer großen Zahl von Meßwerten die empirische Gleichung

$$\delta_i = 0,435 \left(\frac{3 \nu^2}{g} \right)^{1/3} Re^{7/12}. \quad (14.36)$$

Hiernach ändert sich die Filmdicke etwas stärker mit der Reynoldszahl als nach Gl.(14.34) und liefert stets etwas größere Werte. Von FEIND [14.4], der bislang vermutlich die genauesten Messungen durchgeführt hat, wurde folgende Beziehung mitgeteilt:

$$\delta_i = 0,369 \left(\frac{3 \nu^2}{g} \right)^{1/3} Re^{1/2}. \quad (14.37)$$

Hierbei ändert sich die Filmdicke weniger stark mit der Reynoldszahl als gemäß Gl.(14.34). Innerhalb des technisch interessierenden Bereiches der Reynoldszahl liefern die Gleichungen (14.34) und (14.37) Werte für die mittlere Filmdicke, die nur wenig voneinander abweichen. Durch die sehr genauen Messungen von FEIND wird auch der Wert der kritischen Reynoldszahl, $Re_{kr} = 400$, erneut bestätigt. Schließlich sei noch erwähnt, daß die von DUKLER und BERGELIN [14.11] mitgeteilte theoretische Gl.(14.30) für die Filmdicke im turbulenten Strömungsbereich Werte liefert, die nur wenig höher liegen als die nach der empirischen Gl.(14.34) berechneten.

Nachdem für den turbulenten Strömungsbereich eine empirische Gleichung der mittleren Filmdicke bekannt ist, kann man für die mittlere Filmgeschwindigkeit ebenfalls eine empirische Gleichung angeben. Mittels der Gleichungen (14.18) und (14.34) ergibt sich

$$\bar{w} = 3,315 \left(\frac{g \nu}{3} \right)^{1/3} Re^{7/15}. \quad (14.38)$$

Diese Gleichung ist mit Gl.(14.20) zu vergleichen, die für den laminaren Strömungszustand gilt. Bei turbulenter Strömung steigt die mittlere Geschwindigkeit

weniger stark mit der Reynoldszahl an als bei laminarer Strömung. Bezüglich der Filmdicke gilt das umgekehrte Verhalten.

14.13 Gesetze für Rieselfilme mit welliger Oberfläche

Unter den in der technischen Praxis am häufigsten auftretenden Bedingungen weisen Rieselfilme stets eine wellige Oberfläche auf. Nur bei Flüssigkeiten mit sehr hoher Viskosität kann die Oberfläche der Rieselfilme glatt bleiben. Es ist daher verständlich, daß die Aufmerksamkeit bereits seit langer Zeit auf die Eigenschaften welliger Rieselfilme gelenkt ist. Einige der bisher erzielten Untersuchungsergebnisse werden im folgenden erörtert.

14.131 Entstehung der Wellen

Die Wellen entstehen auf Grund einer hydrodynamischen Instabilität des Rieselfilms. Die Untersuchung des Rieselfilms auf Instabilität wurde erstmals von YIH [14.25 und 14.26] mittels der von TOLLMIEH [14.27] entwickelten Theorie kleiner fortschreitender Wellen durchgeführt. Den Einfluß der Oberflächenspannung, der von YIH noch vernachlässigt wurde, hat BROOKE BENJAMIN [14.28] als erster berücksichtigt. Weitere wertvolle theoretische Beiträge zum Problem der Instabilität haben KAPITZA [14.24 und 14.29], WHITAKER [14.30] und SHIBUYA [14.31] geliefert. Die erzielten Ergebnisse stellten sich später jedoch als unvollkommen oder auch als falsch heraus. Die bislang zuverlässigsten Rechnungen, in deren Verlauf sich auch die Mängel in den früheren Arbeiten zeigten, hat in einer umfassenden Studie GRAEF [14.32] durchgeführt.

GRAEF bestätigte unter anderem das bereits von BROOKE BENJAMIN gefundene Ergebnis, wonach es keine das erstmalige Auftreten von Wellen kennzeichnende Reynoldszahl im Sinne einer Stabilitätsgrenze gibt. Dieses theoretische Ergebnis scheint den zahlreichen experimentellen Untersuchungen zu widersprechen, bei denen erst oberhalb bestimmter Werte der Reynoldszahl Wellen beobachtet wurden. Der Widerspruch löst sich jedoch dadurch auf, daß die Amplituden der Störgeschwindigkeit senkrecht zur freien Oberfläche im Bereich sehr kleiner Reynoldszahlen den Rechnungen zufolge teilweise verschwinden. In diesem Re -Bereich können also auch keine Wellen beobachtet werden. Die experimentellen Befunde lassen sich jedoch sehr gut durch einen Wert der Reynoldszahl Re_{w_1} kennzeichnen, bei dem der Anfachungsfaktor der Amplitude steil ansteigt. Hierdurch kommt allerdings eine gewisse Willkür in die Rechnungen. Die von GRAEF für Re_{w_1} mitgeteilte Gleichung lautet:

$$Re_{w_1} = 0,261 K_F^{1/8}. \quad (14.39)$$

Hierin ist K_F eine Flüssigkeitskennzahl mit der Definition:

$$K_F = \frac{\rho \sigma^3}{g \eta^4}. \quad (14.40)$$

Es bedeuten ρ Dichte, η dynamische Viskosität, σ Oberflächenspannung und g Erdbeschleunigung. Die ebenfalls theoretisch ermittelte Gleichung von KAPITZA [14.24] lautet:

$$Re_{w_1} = 0,6075 K_F^{1/11}. \quad (14.41)$$

Zum Vergleich mit diesen theoretischen Gleichungen sollen die aus Meßwerten entwickelten empirischen Gleichungen von GRIMLEY [14.15],

$$Re_{w_1} = 0,291 K_F^{1/8} \quad (14.42)$$

und die von BRAUER (14.3),

$$Re_{w_1} = 0,306 K_F^{1/10} \quad (14.43)$$

herangezogen werden. Alle drei Gleichungen liefern nahezu die gleichen Ergebnisse. Zum weiteren Vergleich sind in Tabelle 14.1 die Meßwerte von mehreren Experimentatoren den nach der theoretischen Gl.(14.39) berechneten Werten von Re_{w_1} gegenübergestellt. Die Übereinstimmung ist verhältnismäßig gut.

Tabelle 14.1: Vergleich zwischen gemessenen und nach Gl.(14.39) berechneten Werten für Re_{w_1}

Experimentatoren	K_F	Re_{w_1} gemessen	Re_{w_1} nach Gl. (14.39)
A. M. BINNIE (14.33)	$3,11 \cdot 10^{10}$	4,32	4,35
P. L. KAPITZA (14.29)	$2,12 \cdot 10^{10}$	5,35	4,14
	$1,33 \cdot 10^{10}$	3,40	3,90
H. BRAUER (14.3)	$5,17 \cdot 10^{10}$	3,65	4,26
	$7,70 \cdot 10^9$	3,07	3,65
	$1,96 \cdot 10^9$	2,68	3,08
	$3,2 \cdot 10^8$	2,55	2,45
	$5,1 \cdot 10^7$	1,86	1,95
	$3,6 \cdot 10^6$	1,35	1,40
	$2,6 \cdot 10^5$	1,04	1,01

Diese Ergebnisse zeigen, daß die Wellen bei um so größeren Werten von Re_{w_1} beobachtet werden, je größer die Oberflächenspannung ist. Das bedeutet, daß die Oberflächenspannung den Flüssigkeitsfilm stabilisiert. Das gleiche Ergebnis lassen auch Messungen von JONES und WHITAKER [14.34] erkennen. Im Gegensatz zu diesen Befunden stehen Angaben von TAILBY und PORTALSKI [14.35], denen zufolge Re_{w_1} mit zunehmender Oberflächenspannung kleiner wird. Zur Deutung dieser Angaben muß man beachten, daß die Versuche von TAILBY und PORTALSKI mit Flüssigkeiten durchgeführt wurden, deren Oberflächenspannung durch Zusatz von oberflächenaktiven Substanzen künstlich erniedrigt worden waren. Der Erfolg war dann auch, daß die Wellen erst oberhalb von $Re = 150$

auftraten. Die Ergebnisse der genannten Experimentatoren dürfen also nicht mit den hier besprochenen in Zusammenhang gebracht werden.

Der Einfluß oberflächenaktiver Substanzen auf die Wellenbildung und auf den Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömungsform ist von BRAUER [14.3] ausführlich behandelt worden. Für die Änderung der kritischen Reynoldszahl ergab sich $Re_{kr} = 400 (\sigma_0/\sigma)^3$. Mit σ_0 und σ werden die Oberflächenspannungen der reinen Flüssigkeit und die der entspannten Flüssigkeit bezeichnet. Wird die Oberflächenspannung durch Zusatz von Entspannungsmitteln auf ein Drittel herabgesetzt, was leicht möglich ist, dann wird Re_{kr} also um den Faktor 27 größer. Wenn eine entsprechende Gleichung für Re_{w_1} gelten würde wie für Re_{kr} , was sehr wohl denkbar ist, dann ließen sich hiermit bereits die Ergebnisse von TAILBY und PORTALSKI erklären.

In einer neueren theoretischen Arbeit von ANSHUS und ACRIVOS [14.36] wird die Instabilität für den speziellen Fall behandelt, daß die Oberflächenspannung durch Netzmittel herabgesetzt wird. Die Ergebnisse geben zu erkennen, daß durch Zugabe von Netzmitteln das Anwachsen der Störungsamplituden stark herabgesetzt und die Wellenlänge der am stärksten angefachten Störungswelle stark vergrößert wird. Diese Ergebnisse stimmen qualitativ mit den experimentellen Befunden überein. Ähnliche Rechnungen sind auch von WHITAKER und JONES [14.37] durchgeführt worden.

14.132 Struktur der welligen Filmoberfläche

Im vorausgegangenen Abschnitt wurde erwähnt, daß die ersten Wellen, die an der Filmoberfläche beobachtet werden können, einen sinusförmigen Querschnitt aufweisen. Ihre Wellenfronten verlaufen senkrecht zur Hauptströmungsrichtung.

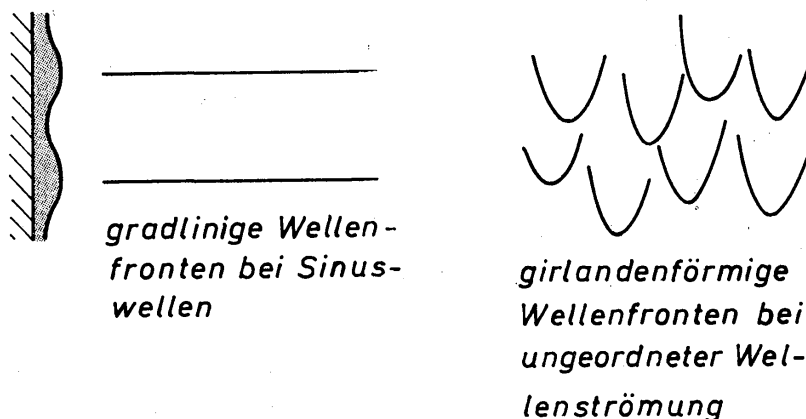


Bild 14.4. Schematische Darstellung der Wellenbewegung bei niedrigen Werten der Reynoldszahl

Bei nur wenig erhöhter Reynoldszahl bricht die geordnete Bewegung von Sinuswellen zusammen. Die Wellenfronten reißen auf, und es entstehen girlandenförmig angeordnete Wellenfragmente. In *Bild 14.4* sind die beiden Wellentypen in schematisierter Form dargestellt. *Bild 14.5* gibt zwei photographische Aufnahmen von der Wellenbewegung einer sehr viskosen Flüssigkeit wieder. Die

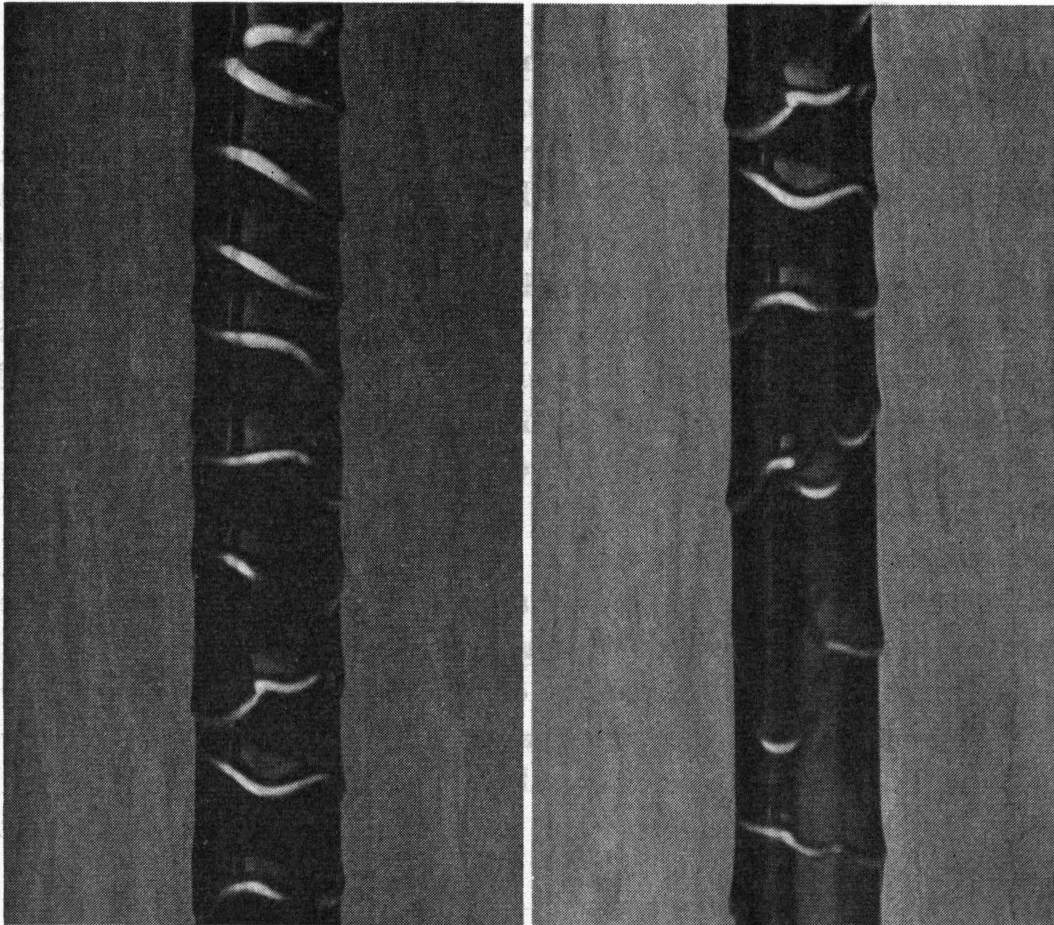


Bild 14.5. Photographische Aufnahmen von der Wellenbewegung bei einer sehr viskosen Flüssigkeit

girlandenförmigen Wellen bewegen sich verschieden schnell, so daß stets einzelne Wellen zusammenfließen oder sich gegenseitig überholen; dabei entstehen auch fortlaufend neue Wellen. Auffallend ist, daß größere Wellen meist kleinere vor sich herschieben. Diese Vorgänge sind selbstverständlich mit einer starken Durchmischung der Flüssigkeit verbunden. Die beschriebene Art der Wellenbewegung hält sich bis zu mittleren *Re*-Werten von etwa 300 bis 400. Oberhalb dieser *Re*-Werte werden die großen Wellen von Kapillarwellen überlagert, deren Wellenlänge außerordentlich klein ist und in der Größenordnung von 1 mm liegt. Die Filmoberfläche macht nach Auftreten der Kapillarwellen einen stark aufgerauhten Eindruck.

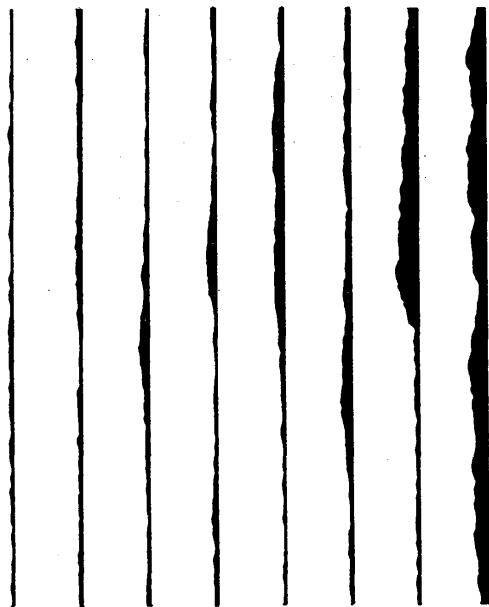
Bei Reynoldszahlen oberhalb von etwa 600 bilden sich nach größerer Lauflänge Wellen aus, die teilweise wieder um den ganzen Rohrumfang geschlossen sind und sich durch eine große Schichtdicke auszeichnen. Sie scheinen am senkrechten Rohr eher herunterzufallen als zu fließen. Es dürfte daher sinnvoll sein, bei derartigen Vorgängen von einem Flüssigkeitsschwall zu sprechen.

Bestreut man die Filmoberfläche mit sehr kleinen Partikeln, so sammeln sich diese nach nur kurzer Laufzeit auf den Wellenbergen. Das deutet darauf hin, daß in den Wellenbergen erhebliche Flüssigkeitsmengen transportiert werden. STAINTHORP und ALLEN [14.38] konnten meßtechnisch nachweisen, daß für Reynoldszahlen ab 20 rund 50% des Flüssigkeitsvolumens in den Wellen transportiert

wird. Somit besteht also ein wesentlicher Unterschied zwischen den Wellen an waagerechten Flüssigkeitsoberflächen und denen an der Oberfläche dünner Flüssigkeitsfilme.

Die beschriebenen Beobachtungen können folgendermaßen zusammengefaßt werden. Wellen im üblichen physikalischen Sinne sind lediglich jene Sinuswellen, die bei sehr kleinen Reynoldszahlen auftreten. Sie sind nur über einen begrenzten *Re*-Bereich stabil. Mit zunehmender Reynoldszahl ändern sich die Wellen in der Weise, daß sie einem Schwall ähnlich sehen. Die örtliche Filmdicke ist dabei sehr starken Änderungen unterworfen. Das wird auch durch *Bild 14.6* bestätigt, in dem für verschiedene Werte der Reynoldszahl Längsschnitte vom Film, die nach photographischen Aufnahmen angefertigt wurden, dargestellt sind.

<i>Re</i>	86	420	740	1670
δ	0,270	0,455	0,620	0,960 mm



Wellenprofile

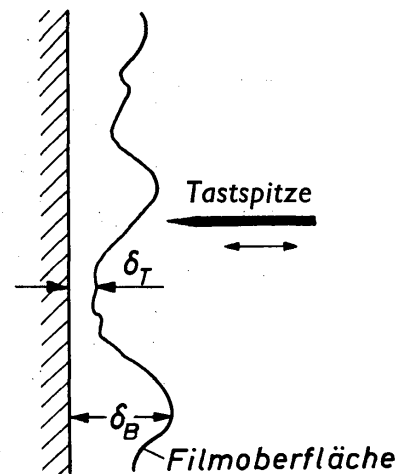


Bild 14.7. Einrichtung zur Messung der maximalen Filmdicke δ_B und der minimalen Filmdicke δ_T

Bild 14.6

Wellenprofile eines Wasserfilms an einem senkrechten Rohr für verschiedene Reynoldszahlen und mittlere Filmdicken δ

Um einen Eindruck von der maximalen und der minimalen Filmdicke zu erhalten, wurden Messungen mittels einer verschiebbaren Tastspitze gemäß *Bild 14.7* durchgeführt [14.3]. Berührte die Tastspitze, die aus Platin-Iridium bestand, die Filmoberfläche, so leuchtete eine Glimmlampe auf. Bei den Untersuchungen wurden verschiedene Flüssigkeiten verwendet. Die Ergebnisse der Messungen an Wasserfilmen sind in *Bild 14.8* dargestellt. Die Kurve für die maximale Filmdicke δ_B verläuft bis $Re = 70$ parallel zu der Kurve für die mittlere Filmdicke δ . In diesem Bereich ist $\delta_B \approx 3 \delta$. Nach den theoretischen Untersuchungen von KAPITZA [14.24] sollte δ_B nur etwa 1,45 δ sein. Die mangelnde Übereinstimmung mit Meßwerten ist darauf zurückzuführen, daß die in diesem Bereich der Reynoldszahl auftretenden Wellen keine Sinusform mehr besitzen. Von $Re = 70$ an nimmt δ_B stärker mit Re zu als δ und erreicht bei $Re = 400$ den Wert $\delta_B \approx 5 \delta$.

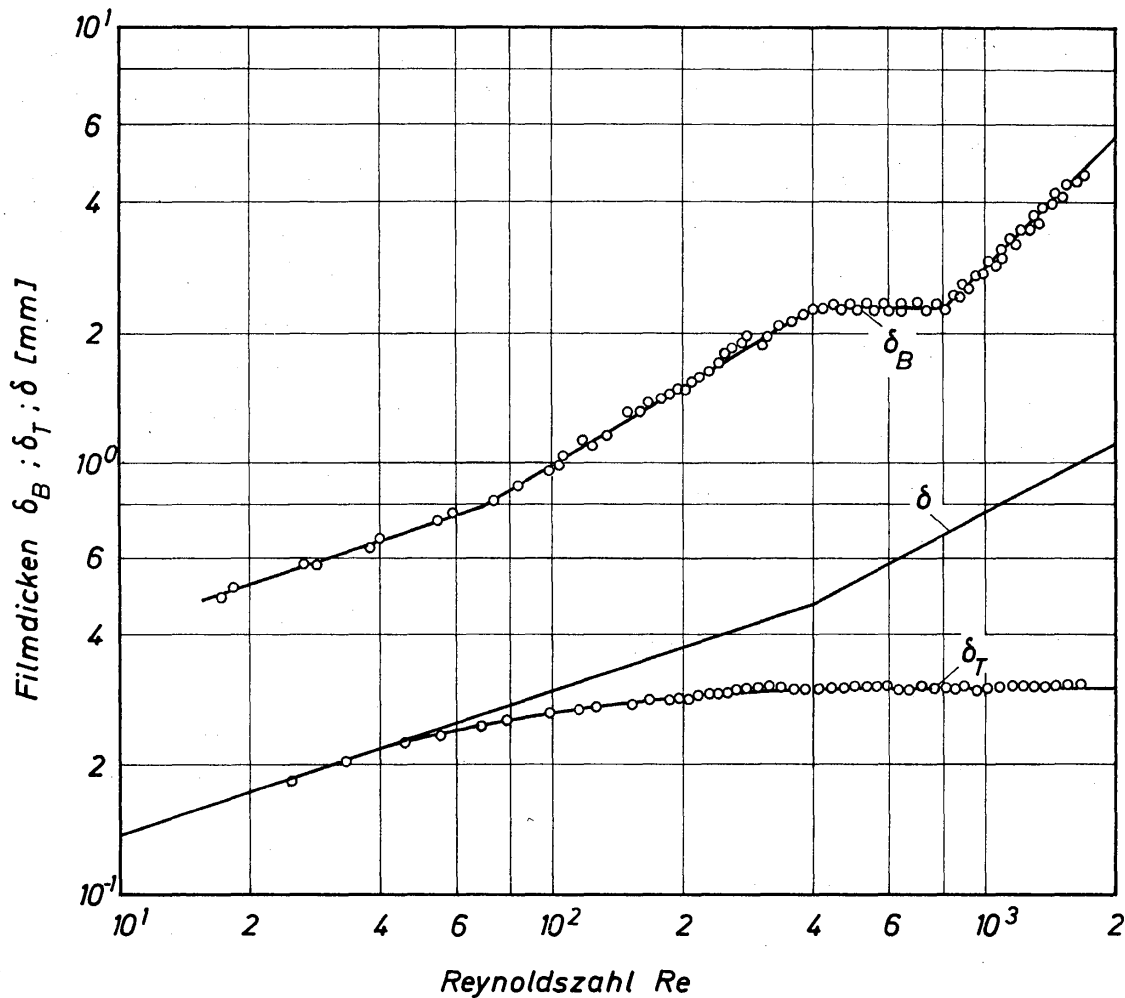


Bild 14.8. Maximale, δ_B , mittlere, δ , und minimale, δ_T , Filmdicke für einen Wasserfilm, abhängig von der Reynoldszahl

Im Bereich von $Re = 400$ bis 800 bleibt δ_B mit $2,3$ mm sodann konstant. Oberhalb von $Re = 800$ steigt δ_B wieder steil an; bei $Re = 1700$ ist $\delta_B \approx 5 \delta$. Der in Bild 14.8 dargestellte Kurvenzug für δ_B besteht aus vier Abschnitten. Er ist aber keineswegs vollständig, wie sich noch zeigen wird. Einen wesentlich einfacheren Verlauf weist die Kurve für die minimale Filmdicke δ_T auf. Mit zunehmender Reynoldszahl entfernt sich δ_T immer stärker von δ und nimmt ab etwa $Re = 300$ mit $0,3$ mm einen konstanten Wert an.

Tabelle 14.2: Flüssigkeiten, die zur Messung von δ_B verwendet wurden

Bezeichnung der Flüssigkeiten		Kinematische Viskosität ν (m ² /s)	Oberflächenspannung σ (N/m)
Wasser	H ₂ O	$0,90 \cdot 10^{-6}$	$7,20 \cdot 10^{-2}$
Gemische aus Wasser und Glykol	G1	$12,75 \cdot 10^{-6}$	$4,67 \cdot 10^{-2}$
	G2	$6,97 \cdot 10^{-6}$	$4,92 \cdot 10^{-2}$
	G3	$3,83 \cdot 10^{-6}$	$5,29 \cdot 10^{-2}$
	G4	$2,55 \cdot 10^{-6}$	$5,60 \cdot 10^{-2}$
	G5	$1,76 \cdot 10^{-6}$	$6,12 \cdot 10^{-2}$
	G6	$1,33 \cdot 10^{-6}$	$6,54 \cdot 10^{-2}$

Die an Hand von *Bild 14.8* beschriebenen Eigenschaften eines welligen Wasserfilms gelten in entsprechender Weise auch für Filme aus anderen Flüssigkeiten. In *Bild 14.9* sind für eine Reihe verschiedener Flüssigkeiten, die in Tabelle 14.2 näher bezeichnet sind, allein die Meßwerte für δ_B angegeben. Aus diesem Bild erkennt man die für die Wellenbewegung charakteristischen Bereiche. Die äußersten linken Teile der Kurven stellen den Verlauf der theoretischen Filmdicke gemäß Gl. (14.21) dar. In diesem Bereich ist $\delta_B = \delta$, d. h. die Filmoberfläche bleibt noch glatt. Die ersten Wellen treten bei Re -Werten auf, die durch die Linie w_1 gekennzeichnet sind. Von hier aus bis zur Linie w_3 steigen die Kurven linear mit Re an und verlaufen anschließend bis $Re = 70$ parallel zu den Kurven für die mittlere Filmdicke. Oberhalb von $Re = 70$ bis zur Linie w_4 verlaufen die Kurven steiler als zuvor. Ab w_4 folgt ein Bereich mit konstanter Filmdicke δ_B . Der sich anschließende erneute Anstieg wird nur mit den Meßwerten der Kurve G6 erreicht.

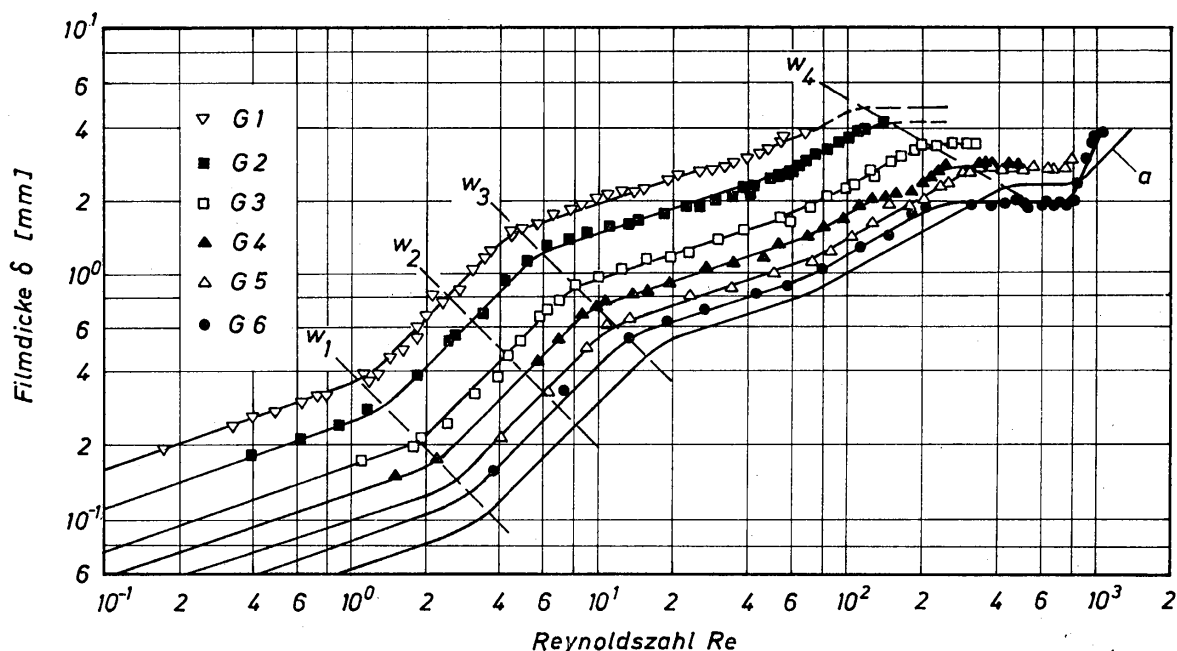


Bild 14.9. Abhängigkeit der maximalen Filmdicke δ_B von der Reynoldszahl für die in Tabelle 14.2 bezeichneten Flüssigkeiten; Kurve a wurde aus Bild 14.8 übernommen

Die Linien w_1 bis w_4 kennzeichnen charakteristische Reynoldszahlen, die mit Re_{w_1} bis Re_{w_4} bezeichnet werden. Bei Re_{w_1} treten die ersten Wellen an der Filmoberfläche auf; sie haben die Form reiner Sinuswellen. Der bereits geschilderte Zusammenbruch der geordneten Bewegung der Sinuswellen erfolgt auf Grund visueller Beobachtungen bei Re_{w_2} . Bei Re_{w_3} ändert sich gemäß *Bild 14.9* die Steigung der δ_B -Kurven. Auf Grund visueller Beobachtungen treten bei Re_{w_4} erstmalig die bereits beschriebenen Kapillarwellen auf.

Wie sich leicht nachprüfen läßt, ergeben sich auf den Linien w_1 bis w_4 jeweils konstante Werte für die mittlere Filmgeschwindigkeit. Man erhält: $\bar{w}_1 = 0,034$ m/s, $\bar{w}_2 = 0,060$ m/s, $\bar{w}_3 = 0,092$ m/s und $\bar{w}_4 = 0,80$ m/s. Aus den Meßwerten für

das erste Auftreten der Wellen bei Re_{w_1} wurde die bereits mitgeteilte Gl. (14.43) aufgestellt. Sie stimmt recht gut mit der theoretischen Gl. (14.39) überein, die GRAEF [14.32] angab. Für die drei anderen charakteristischen Reynoldszahlen wurden die folgenden empirischen Gleichungen ermittelt:

$$Re_{w_2} = 0,720 K_F^{1/10}, \quad (14.44)$$

$$Re_{w_3} = 1,35 K_F^{1/10}, \quad (14.45)$$

$$Re_{w_4} = 35,0 K_F^{1/10}. \quad (14.46)$$

Diese Gleichungen geben die Meßwerte mit einer Streubreite von $\pm 5\%$ wieder. Zu einer noch weitgehenderen Beschreibung der welligen Struktur von Filmoberflächen kann die Wellenfrequenz dienen. Diese wurde ebenfalls mit der in *Bild 14.7* skizzierten Einrichtung gemessen, indem die Tastspitze in sehr kleinen Abständen in Richtung zur Wand verschoben wurde. Wenn die Tastspitze in eine vorbeilaufende Welle eintauchte, wurde ein Signal ausgelöst und von einem Zählgerät registriert. Die in der Zeiteinheit registrierten Signale ergaben die Wellenfrequenz f . Als Beispiel für die erzielten Ergebnisse sind in *Bild 14.10* die Wellenfrequenzen für Wasser angegeben [14.3]. Ausgehend vom Wandabstand $y = \delta_T$, wo $f = 0$ ist, steigt die Wellenfrequenz zunächst sehr steil an, durchläuft ein scharf ausgeprägtes Maximum und fällt dann nahezu ebenso steil wieder ab. Bei $y = \delta_B$ ist wieder $f = 0$. Die höchsten Wellenfrequenzen wurden für $Re = 854$ festgestellt, das Maximum liegt bei 40 s^{-1} . Aus diesen Ergebnissen geht hervor, daß an der Filmoberfläche Wellen sehr unterschiedlicher Höhen und Frequenzen auftreten und daß die Wellenbewegungen sehr verwickelt sind. Es dürfte daher kaum möglich sein, eine analytische Funktion für die wirkliche Gestalt der Filmoberfläche anzugeben. Die Frequenzmessungen wurden zur Definition einer Störgröße, der Störfrequenz, herangezogen, die sich als Maß für die Mischwirkung der Wellen verwenden läßt [14.3].

Die bisherigen Ausführungen über die Struktur der Filmoberfläche lassen die Vermutung aufkommen, daß die Oberfläche eines welligen Rieselfilms erheblich größer ist als die eines glatten. Diese Frage kann insbesondere im Zusammenhang mit der Wärme- und Stoffübertragung an der freien Oberfläche von erheblicher Bedeutung sein. Mittels einer photographischen Methode wurde festgestellt, daß sich die Filmoberfläche bei Vorhandensein von Wellen nur um etwa 0,5 bis 3% vergrößert [14.3]. Mit einer anderen Meßtechnik gelangten JEPSEN, CROSSER und PERRY [14.39] zu den gleichen Angaben über die Oberflächenvergrößerung. Im Gegensatz dazu stehen Meßwerte von TAILBY und PORTALSKI [14.40], wonach die wellige Oberfläche um mehr als 100% größer sein kann als die glatte. Dieses Ergebnis ist möglicherweise jedoch, worauf JEPSEN, CROSSER und PERRY aufmerksam machen, durch die von TAILBY und PORTALSKI verwendete Meßeinrichtung bedingt. Nach den bisher vorliegenden Untersuchungen muß man annehmen, daß für den überraschend hohen Wärme- und Stoffübergang an Rieselfilmen nicht die durch Wellen vergrößerte Oberfläche verantwortlich ist, sondern die durch die Wellen im Rieselfilm hervorgerufene Durchmischung.

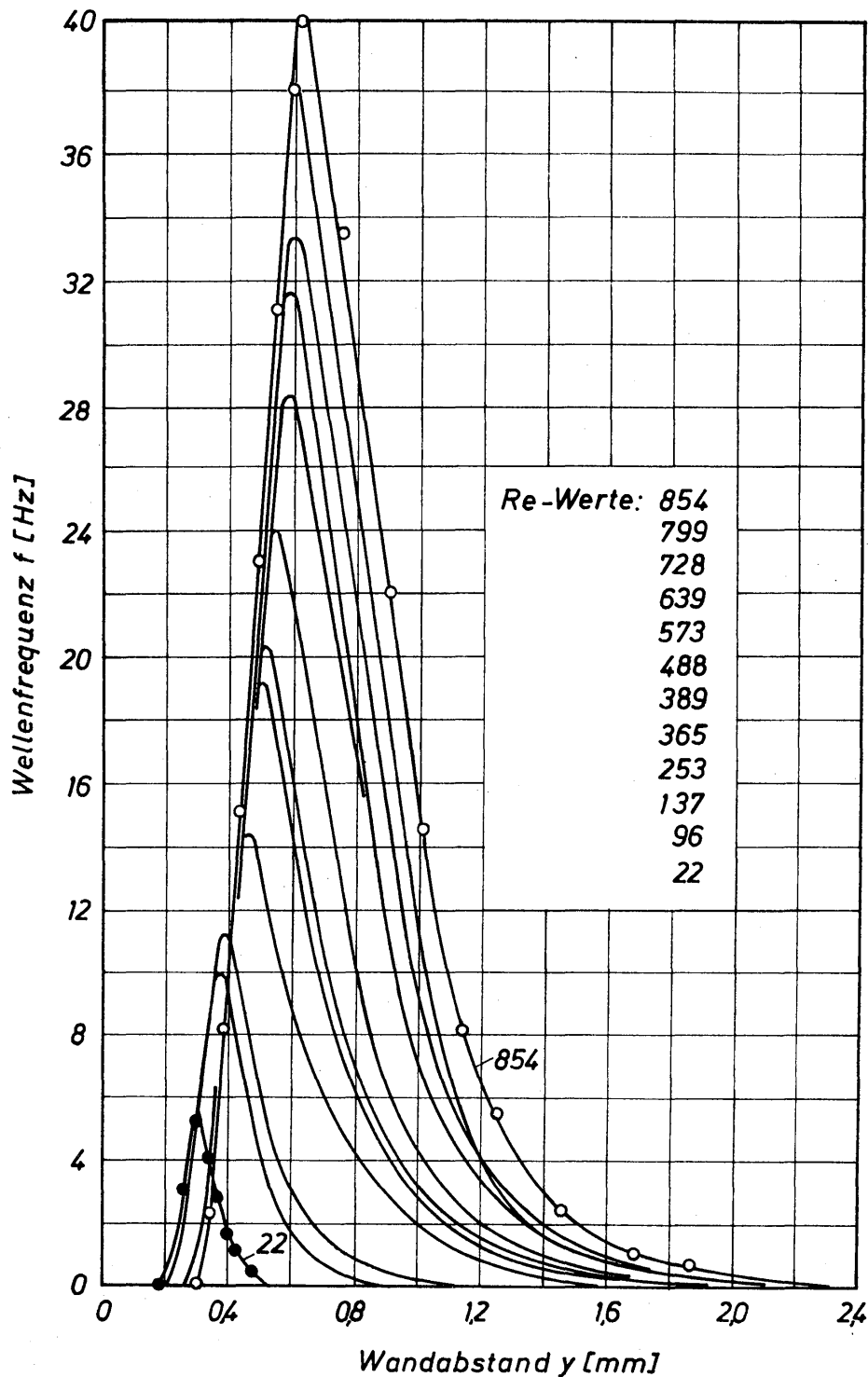


Bild 14.10. Frequenzprofile für Wasserfilme bei verschiedenen Reynoldszahlen

14.133 Flüssigkeitsbewegung im welligen Rieselfilm

Für den glatten Film ist die Oberflächengeschwindigkeit w_δ durch Gl.(14.19) gegeben und 1,5 mal so groß wie die mittlere Filmgeschwindigkeit \bar{w} . Versuche von FRIEDMAN und MILLER [14.20] sowie von GRIMLEY [14.15] zeigten jedoch, daß die experimentell ermittelten Geschwindigkeiten an der Filmoberfläche im Bereich der welligen Strömung etwa 2,2 mal so groß sind wie die zugehörigen mittleren. Dieses Ergebnis wurde durch weitere Messungen bestätigt [14.3]. In Bild 14.11 sind die Meßwerte für w_δ über der Reynoldszahl Re dargestellt. Die die

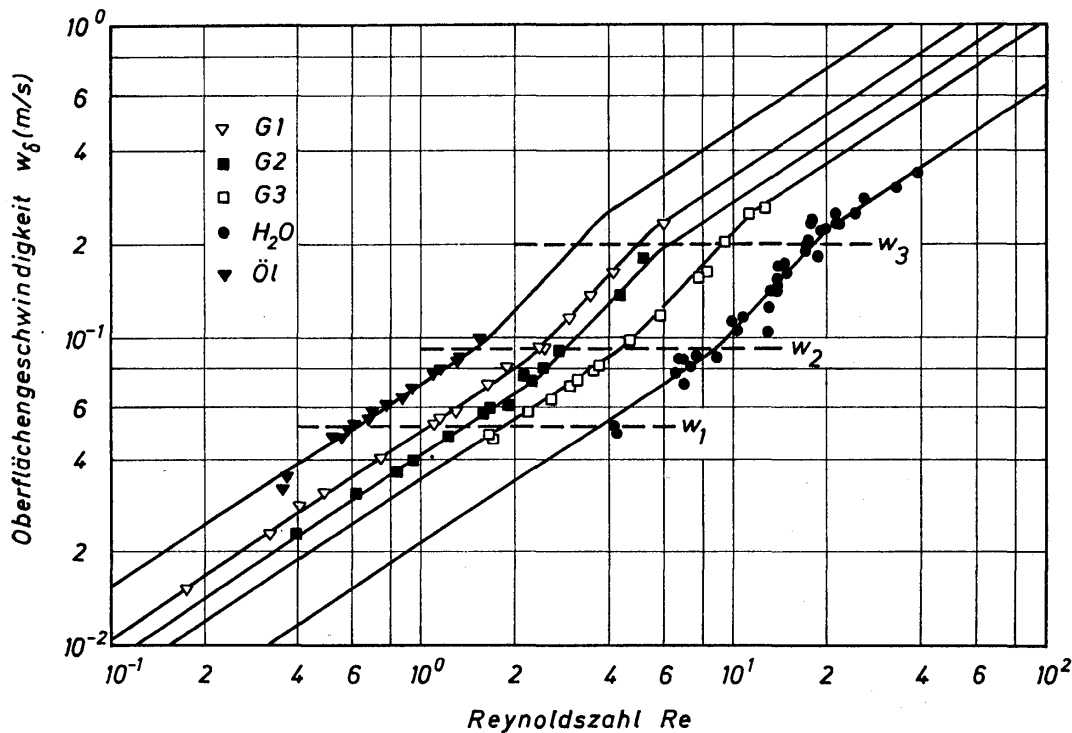


Bild 14.11. Abhängigkeit der gemessenen Oberflächengeschwindigkeit w_δ von der Reynoldszahl Re für die Flüssigkeiten G 1 bis G 3 gemäß Tabelle 14.2 sowie für H_2O und ein Öl nach Angaben von FRIEDMAN und MILLER [14.20]

Meßpunkte ausgleichenden Kurven haben den gleichen charakteristischen Verlauf wie die für die maximale Filmdicke in *Bild 14.9*. Bis zum jeweiligen, durch die Gerade w_2 bestimmten Wert von Re_{w_2} liegen die Meßwerte auf der theoretischen Kurve nach Gl. (14.19). Von Re_{w_2} bis Re_{w_3} (durch die Gerade w_3 gegeben) steigen die Kurven etwas steiler an und verlaufen dann wieder parallel zur theoretischen Kurve. Bemerkenswert ist, daß die Oberflächengeschwindigkeit durch die ersten bei Re_{w_1} auftretenden Wellen nur so wenig beeinflusst wird, daß ab Re_{w_1} mögliche Abweichungen zunächst nicht erkennbar sind. Die Oberflächengeschwindigkeit wird erst dann größer, wenn die geordnete Bewegung der Sinuswellen bei Re_{w_2} zusammenbricht. Im übrigen kann man aus *Bild 14.11* entnehmen, daß den charakteristischen Reynoldszahlen jeweils konstante Oberflächengeschwindigkeiten w_δ und damit auch konstante mittlere Filmgeschwindigkeiten \bar{w} zugeordnet sind.

Nach den in *Bild 14.11* dargestellten Meßwerten ist das Geschwindigkeitsverhältnis w_δ/\bar{w} bis Re_{w_2} gleich dem theoretischen Wert 1,5. Ab Re_{w_2} ist $w_\delta/\bar{w} = 2,15$. Unbekannt ist indes, bis zu welcher Reynoldszahl dieser Wert erhalten bleibt. Nach Messungen an Wasserfilmen ist das Geschwindigkeitsverhältnis w_δ/\bar{w} im turbulenten Bereich, also oberhalb $Re_{kr} = 400$, gleich 1,5. Das deutet darauf hin, daß das Geschwindigkeitsprofil auch beim turbulenten Rieselfilm sehr spitz sein muß. Vergleichbare Profile treten bei der turbulenten Strömung in rauen Rohren auf, wie beispielsweise NUNNER [14.41] nachgewiesen hat.

Beim welligen Rieselfilm müßten sich nach diesen Informationen Geschwindigkeitsprofile wie in *Bild 14.12* einstellen. Dort ist zum Vergleich auch das Parabelprofil für den glatten Film angegeben, das durch Gl. (14.13) beschrieben wird.

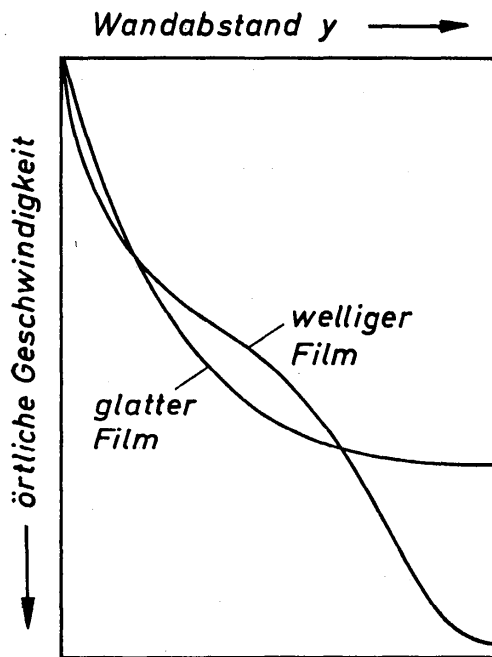


Bild 14.12
Qualitativer Verlauf der
Geschwindigkeitsprofile
in Rieselfilmen mit
glatter und mit welliger
Oberfläche

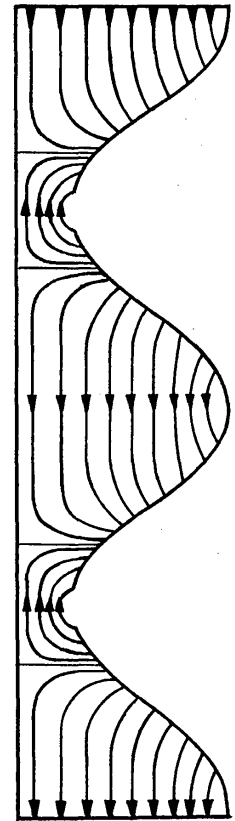


Bild 14.13. Verlauf der Stromlinien in einem welligen Rieselfilm
nach Angaben von MASSOT, IRANI und LIGHTFOOT [14.45]

Die von WILKES und NEDDERMANN [14.42] durchgeführten Messungen ergaben eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der theoretischen Gleichung. Das Profil für den welligen Film weist, wie es nach NUNNER auch bei der Strömung in rauen Rohren der Fall ist, zwei Wendepunkte auf [14.43]. Damit wird das Geschwindigkeitsprofil in zwei deutlich getrennte Bereiche unterteilt. Im oberflächennahen Bereich ergeben sich im zeitlichen Mittel wesentlich höhere örtliche Geschwindigkeiten als im glatten Film. Das stimmt mit der Vorstellung überein, daß die in den Wellen transportierte Flüssigkeitsmasse mit hoher Geschwindigkeit über die wandnahe Schicht hinweggleitet. Zwischen den beiden Schichten besteht ein sehr lebhafter Impulsaustausch, der zu einer örtlichen Abflachung des Geschwindigkeitsgradienten führt. An der Wand selber ist der Geschwindigkeitsgradient wieder steiler als bei dem Profil des Filmes mit glatter Oberfläche. Die bisherigen Bemühungen, genaueren Einblick in die Flüssigkeitsbewegung beim welligen Rieselfilm zu erhalten, gingen von der grundlegenden Arbeit von KAPITZA [14.24] aus, der die Strömung im Film in Gegenwart von Sinuswellen theoretisch untersuchte. Die Rechnungen von KAPITZA sind später von zahlreichen Forschern erweitert und auch verbessert worden. Erwähnt seien insbesondere die Untersuchungen von RUCKENSTEIN und BERBENTE [14.44], MASSOT, IRANI und LIGHTFOOT [14.45] sowie von PORTALSKI [14.46]. Alle diese Untersuchungen gelten natürlich nur für den zwischen Re_{w_1} und Re_{w_2} liegenden engen Bereich. Für einen Wasserfilm erstreckt er sich von etwa $Re = 4$ bis $Re = 9$. Obgleich die Bedeutung der theoretischen Rechnungen daher nur begrenzt ist, vermögen sie doch auch Aufschluß über mögliche Vorgänge innerhalb des praktisch interessanten Bereiches bei höheren Reynoldszahlen zu geben. In *Bild 14.13*

sind nach Angaben von MASSOT, IRANI und LIGHTFOOT die Stromlinien in einem Film mit sinusförmigen Wellen dargestellt. In den Wellentälern sind insbesondere die Rückströmungen zu beachten. An den Grenzen zwischen den vorwärts und den rückwärts gerichteten Strömungsfeldern können, wie PORTALSKI nachwies, zusätzliche Wirbel auftreten. Mit der Flüssigkeitsbewegung in den Wellenbergen haben sich weiterhin STAINTHORP und WILD [14.47] befaßt. Alle diese Untersuchungen liefern den Hinweis, daß die Wellen eine starke Durchmischung der Flüssigkeit herbeiführen.

14.14 Mindestwert der Reynoldszahl für kontinuierliche Filmströmung

Wird die Reynoldszahl bis auf einen Mindestwert Re_{\min} herabgesetzt, so droht der Rieselfilm aufzureißen. Re_{\min} ist also der absolut niedrigste Wert für den Betrieb einer Rieselfilmanlage. Das Aufreißen geschieht häufig in einer Form,

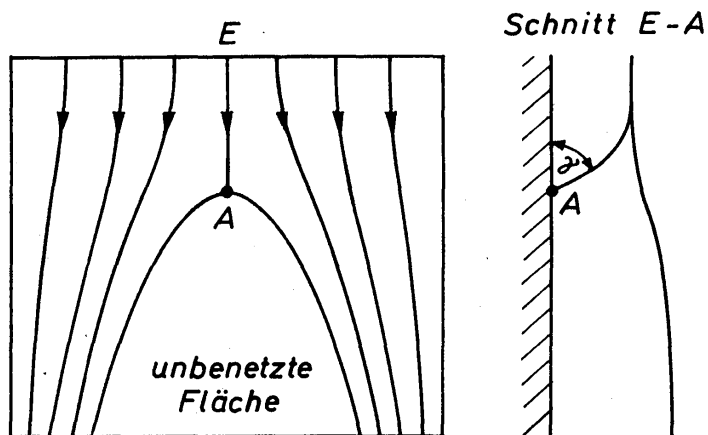


Bild 14.14. Aufreißen eines Flüssigkeitsfilms bei A , der an einer ebenen, senkrechten Platte herabrieselt

wie sie in *Bild 14.14* angedeutet ist. Für diesen Fall haben HARTLEY und MURGATROYD [14.48] Re_{\min} auf Grund einer Kräftebetrachtung im Punkt A berechnet und eine Gleichung erhalten, die in der hier benutzten Schreibweise folgendermaßen lautet:

$$Re_{\min} = 1,70 (1 - \cos \gamma)^{3/5} K_F^{1/5}. \quad (14.47)$$

Dabei bedeutet γ den Randwinkel zwischen der Flüssigkeit und der Platte, der von den Eigenschaften beider Stoffe abhängt.

Da noch keine Meßwerte vorliegen, die einen einwandfreien Vergleich mit Gl.(14.47) gestatten, ist auch keine genaue Aussage über die Gültigkeit der Gleichung möglich. Die Erfahrung aus zahlreichen Untersuchungen an Rieselfilmen lehrt indes, daß es kaum möglich ist, ungestörte Rieselfilme mit Schichtdicken unter etwa 0,15 bis 0,2 mm zu erzeugen. Die hierzu gehörigen Reynoldszahlen sind um einen Faktor 10 bis 15 kleiner als die mit Gl.(14.47) berechneten. Zur Bestimmung von Re_{\min} sind also Versuche notwendig, die möglicherweise zu einer empirischen Korrektur von Gl.(14.47) führen.

14.2 Filmströmung an unbewegten, geneigten Wänden

Betrachtet sei zunächst der Fall, daß ein Flüssigkeitsfilm an einer ebenen Wand herabrieselt, die mit der Horizontalen den Winkel α einschließt. In diesem Falle wirkt der differentiellen Schubkraft dS die differentielle Schwerkraftkomponente $dG \sin \alpha$ entgegen. Unter Berücksichtigung der Gl. (14.2) folgt, daß die für die Filmströmung an senkrechten ebenen Wänden entwickelten Gleichungen (14.13) bis (14.25) auch für die Filmströmung an geneigten ebenen Wänden angewendet werden dürfen, so man g durch $g \sin \alpha$ ersetzt. Die Gültigkeit dieser Gleichungen wurde in Experimenten überprüft und bestätigt gefunden [14.5 und 14.49]. Bei diesen Versuchen lag der Neigungswinkel der Platten zwischen $0,25^\circ$ und $3,5^\circ$.

In einer neueren, sehr gründlichen Untersuchung von GOODRIDGE und GARTSIDE [14.50] wurde festgestellt, daß die experimentellen Befunde mit der Theorie nicht mehr übereinstimmen, wenn der Neigungswinkel α wesentlich kleiner als etwa 20 min wird. Die bei $\alpha = 20 \text{ min}$ durchgeführten Versuche ergaben sowohl bezüglich der Geschwindigkeitsverteilung als auch bezüglich der Filmdicke noch volle Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Werten. Für noch kleinere Werte von α stellten sich dann jedoch erhebliche Unterschiede zwischen Theorie und Experiment heraus. Sie sind, worauf NEDDERMAN [14.51] hinwies, auf den unvollkommenen Kräfteansatz zurückzuführen. Nebst der Schubkraft und der Schwerkraft müssen zur vollständigen Beschreibung der Flüssigkeitsbewegung auf sehr schwach geneigten Platten zusätzlich die Druckkraft und die Oberflächenspannungskraft sowie der Impulsstrom in Strömungsrichtung berücksichtigt werden. Die aus diesem vollständigen Ansatz entwickelte Gleichung für die Filmdicke steht, wie NEDDERMAN nachwies, in Einklang mit den experimentell gefundenen Ergebnissen von GOODRIDGE und GARTSIDE.

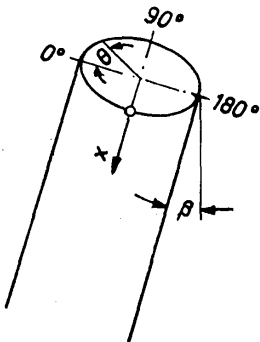


Bild 14.15

Anordnung eines gegen die Vertikale geneigten Rohres

Technisch sehr bedeutsam ist die Filmströmung an der Außenwand eines Rohres, das nicht genau senkrecht steht. In diesem Fall muß man erwarten, daß sich die Flüssigkeit ungleichmäßig über den Umfang verteilt und somit sehr unterschiedliche Bedingungen für Wärme- und Stoffübergangsprobleme auftreten. Das hiermit zusammenhängende Strömungsproblem hat BUTTERWORTH [14.52] theoretisch behandelt. Die Stellung des Rohres geht aus *Bild 14.15* hervor. Die Abweichung von der vertikalen Stellung ist durch den Winkel β gegeben. Ferner wird mit θ der Umfangswinkel, mit R der Rohrradius und mit x die Lauflänge des Rieselfilms bezeichnet. Um die Rechnung zu vereinfachen, setzte BUTTERWORTH voraus, daß β nur kleine Werte annimmt und die Trägheitsglieder in der Bewegungsgleichung vernachlässigt werden dürfen. Die letzte Voraussetzung

schränkt die Gültigkeit der Rechnungen auf sehr kleine Werte der Reynoldszahl ein. Trotzdem geben die Ergebnisse einen guten Eindruck vom Einfluß der Schrägstellung des Rohres auf die Filmströmung. Eine der wichtigsten der von BUTTERWORTH berechneten Größen ist die Filmdicke δ . Ihre Änderung mit dem Rohrumfang geht aus folgender Funktion hervor:

$$\frac{\delta}{\delta_0} = f(X; K_\sigma). \quad (14.48)$$

Hierin bedeuten

$$X \equiv x \operatorname{tg} \beta / R \quad (14.49)$$

die dimensionslose Lauflänge des Rieselfilms, gerechnet von der Aufgabenstelle $x = 0$, und

$$K_\sigma = \frac{\delta_0 \sigma}{R^3 \rho g \sin \beta} \quad (14.50)$$

eine den Einfluß der Oberflächenspannung erfassende Kennzahl. In den letzten Gleichungen sind δ die örtliche Filmdicke und δ_0 die an der Aufgabenstelle, σ Oberflächenspannung, ρ Dichte, g Erdbeschleunigung und R Rohrradius.

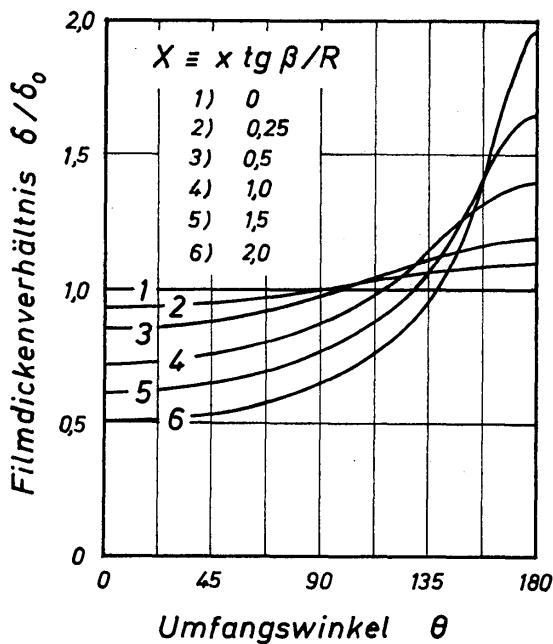


Bild 14.16. Änderung des Verhältnisses δ/δ_0 über den Umfangswinkel θ für einige Werte von X nach Angaben von BUTTERWORTH [14.52]

Für $K_\sigma = 0$ sind in Bild 14.16 einige Kurven für δ/δ_0 bei verschiedenen Werten von X wiedergegeben. Mit $X = 6$ ändert sich δ/δ_0 über dem Rohrumfang von 0,5 bei $\theta = 0$ auf etwa 2 bei $\theta = 180^\circ$. BUTTERWORTH empfiehlt auf Grund seiner Rechnungen, die Ausrichtung der Rohre mit so großer Sorgfalt vorzunehmen, daß X stets kleiner als 0,25 bleibt; denn die Filmdicke soll über dem Rohrumfang möglichst gleichmäßig sein. Betrachtet man beispielsweise ein Rohr von 3000 mm Länge und 20 mm Radius, dessen Achse nur um den kleinen Betrag 1:1000 gegen die Vertikale geneigt ist, dann ergeben sich aus Gl. (14.49) X -Werte von 0,05 bei einer Lauflänge $x = 1000$ mm und 0,15 bei $x = 3000$ mm. Erwähnt sei noch, daß die Filmdickenänderungen über dem Rohrumfang mit zunehmenden Werten von K_σ nur wenig gedämpft werden. Von BUTTERWORTH durchgeführte Experimente bestätigen seine Rechnungen weitgehend.

14.3 Filmströmung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten an senkrechten, ebenen Wänden

Aus dem Gleichgewicht von Schwer- und Reibungskraft folgt für eindimensionale Filmströmung die allgemein gültige Beziehung

$$\frac{d\tau}{dy} = -g\rho, \quad (14.51)$$

die unabhängig ist vom speziellen Fließverhalten der Flüssigkeiten. Mit τ wird die örtliche Schubspannung im Film und mit y der Wandabstand bezeichnet. Das Fließverhalten der Flüssigkeiten wird durch den Zusammenhang von Schubspannung τ und Geschwindigkeitsgradient dw/dy beschrieben. Hierauf ist in Kapitel 3 ausführlich eingegangen worden. Zur Behandlung der Filmströmung soll hier der einfachste Schubspannungsansatz, nämlich der von OSTWALD und DE WAELE, verwendet werden [14.53]:

$$\tau = K \left(\frac{dw}{dy} \right)^n. \quad (14.52)$$

Mit K wird der Ostwald-Faktor und mit n der Flüssigkeitsindex bezeichnet. Ist $n = 1$, so stimmt der Potenzansatz mit dem Newtonschen Ansatz überein, da hierbei K zur Viskosität η wird. Durch $n > 1$ werden dilatante und durch $n < 1$ strukturviskose Flüssigkeiten gekennzeichnet.

Führt man den Schubspannungsansatz gemäß Gl.(14.52) in Gl.(14.51) ein, so erhält man:

$$\left(\frac{dw}{dy} \right)^{n-1} \frac{d^2w}{dy^2} = -\frac{g\rho}{nK}. \quad (14.53)$$

Mit den Randbedingungen $w = 0$ für $y = 0$ und $dw/dy = 0$ für $y = \delta$ folgt nach Integration:

$$w = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g}{K} \right)^{1/n} \delta^{(n+1)/n} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{(n+1)/n} \right]. \quad (14.54)$$

Um einen Überblick zu erhalten, wie sich die örtliche Geschwindigkeit w im Film ändert, wird zur Vereinfachung der Auswertung die Gleichung folgendermaßen umgeformt:

$$w^* \equiv \frac{w}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g}{K} \right)^{1/n} \delta^{(n+1)/n}} = 1 - \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{(n+1)/n}. \quad (14.55)$$

Die dimensionslose örtliche Geschwindigkeit w^* ist in *Bild 14.17* über dem dimensionslosen Wandabstand y/δ aufgetragen. Für $n = 1$ ergibt sich das bekannte Halbparabelprofil Newtonscher Flüssigkeiten. In extrem strukturviskosen Flüssigkeiten mit $n = 0$ stellt sich ein kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil ein, d.h. w ist über den Filmquerschnitt konstant. Im anderen Grenzfall der extrem dilatanten Flüssigkeiten mit $n = \infty$ ändert sich w linear mit dem Wandabstand.

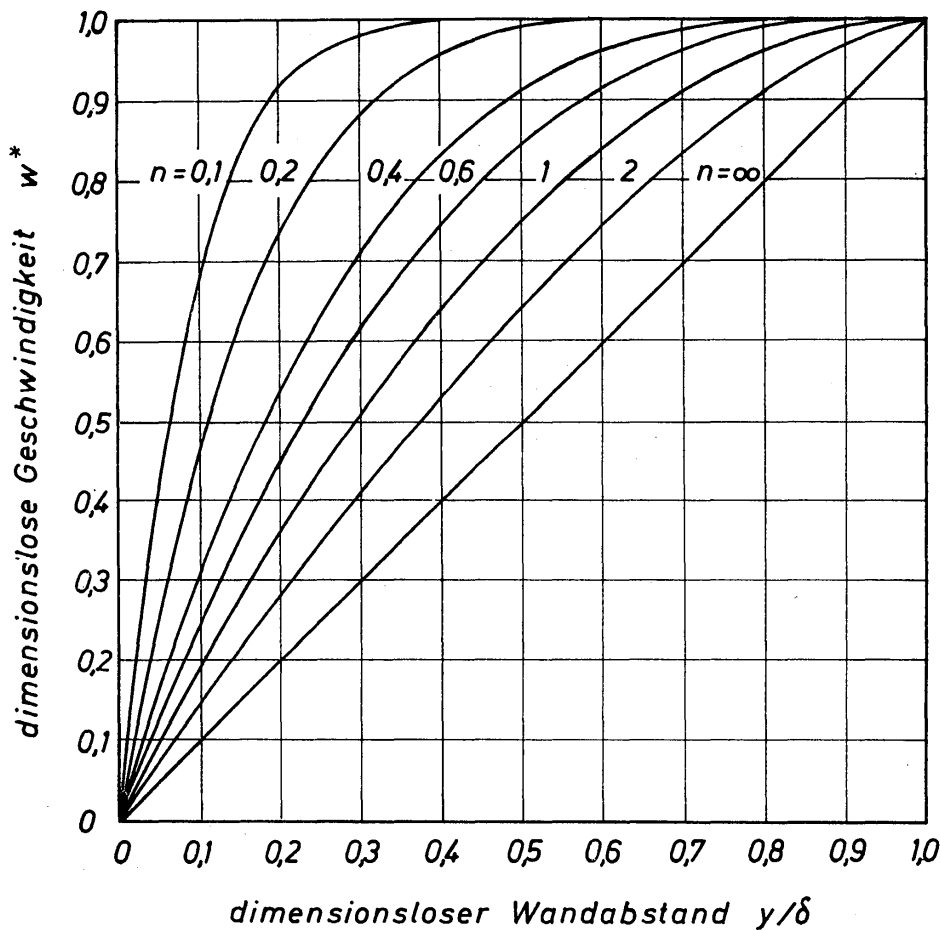


Bild 14.17. Geschwindigkeitsprofile im Rieselfilm für nicht-Newton'sche Flüssigkeiten, die dem Potenzansatz für die Schubspannung gehorchen

Für Anstrichmittel sind insbesondere die Profile für n zwischen 1 und 0 von Interesse. Die Oberfläche des Filmes erstarrt im Laufe der Trocknung. Schichten zwischen Wand und Oberfläche können jedoch weiter fließen. Dieses Verhalten beeinflusst Farbanstriche besonders bei kleinen n -Werten wegen des flachen Geschwindigkeitsprofils nachteilig. Jedoch wirkt dem entgegen, daß Anstrichmittel mit sehr kleinen n -Werten meistens das Fließverhalten von Bingham-Flüssigkeiten aufweisen: bei Unterschreiten einer Anfangsschubspannung τ_0 hört die Bewegung auf.

Für die Oberflächengeschwindigkeit w_δ erhält man aus Gl.(14.54) mit $y/\delta = 1$ die Beziehung

$$w_\delta = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g}{K} \right)^{1/n} \delta^{(n+1)/n}. \quad (14.56)$$

Die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} , definiert durch Gl.(14.15), ergibt sich zu

$$\bar{w} = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\rho g}{K} \right)^{1/n} \delta^{(n+1)/n}. \quad (14.57)$$

Für das Geschwindigkeitsverhältnis w_δ/\bar{w} erhält man

$$\frac{w_\delta}{\bar{w}} = \frac{2n+1}{n+1}. \quad (14.58)$$

Dieses Verhältnis ist in Bild 14.18 abhängig von n dargestellt.

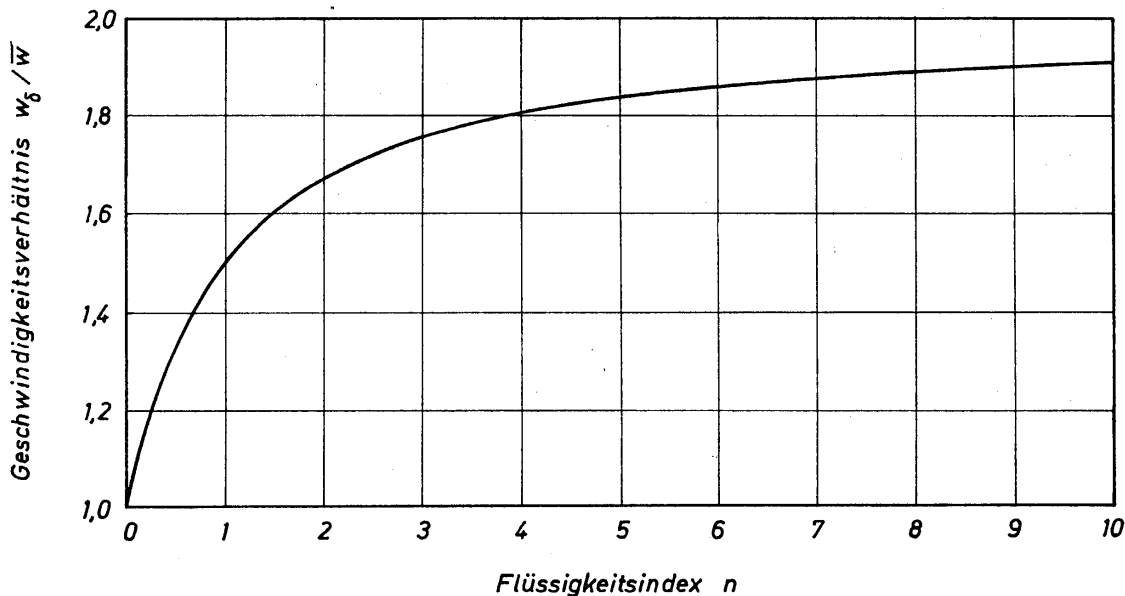


Bild 14.18. Geschwindigkeitsverhältnis w_δ/\bar{w} , abhängig vom Flüssigkeitsindex n

Für die Schubspannung im Film ergibt sich die gleiche Beziehung wie bei Newtonschen Flüssigkeiten. Somit muß also auch die Wandschubspannung τ_w durch $g \rho \delta$ gegeben sein.

Aus den obigen Ausführungen geht hervor, daß sich die Geschwindigkeiten und die Wandschubspannung nur berechnen lassen, wenn die Filmdicke δ bekannt ist. Für sie läßt sich mittels der Kontinuitätsbedingung

$$\dot{V}/U = \bar{w} \delta \quad (14.59)$$

und der Gl.(14.57) folgende Beziehung herleiten:

$$\delta = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{\frac{n}{2n+1}} \left[\frac{K}{\rho g} \left(\frac{\dot{V}}{U} \right)^n \right]^{\frac{1}{2n+1}}. \quad (14.60)$$

Hiernach ist die Filmdicke δ eine Funktion des Volumstroms \dot{V} der Flüssigkeit, des Rohrumfangs bzw. der Plattenbreite U , der Erdbeschleunigung g und der Stoffparameter ρ , K und n . Mittels Gl.(14.60) ist es möglich, die Geschwindigkeiten \bar{w} und w_δ sowie die Wandschubspannung $\tau_w = g \rho \delta$ zu berechnen. Aus den Gleichungen (14.57) und (14.60) erhält man die mittlere Filmgeschwindigkeit zu

$$\bar{w} = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{\frac{n}{2n+1}} \left[\frac{\rho g}{K} \left(\frac{\dot{V}}{U} \right)^{n+1} \right]^{\frac{1}{2n+1}} \quad (14.61)$$

und damit unter Berücksichtigung von Gl.(14.58) die Oberflächengeschwindigkeit zu

$$w_\delta = \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{\frac{n}{2n+1}} \left[\frac{\rho g}{K} \left(\frac{\dot{V}}{U} \right)^{n+1} \right]^{\frac{1}{2n+1}}. \quad (14.62)$$

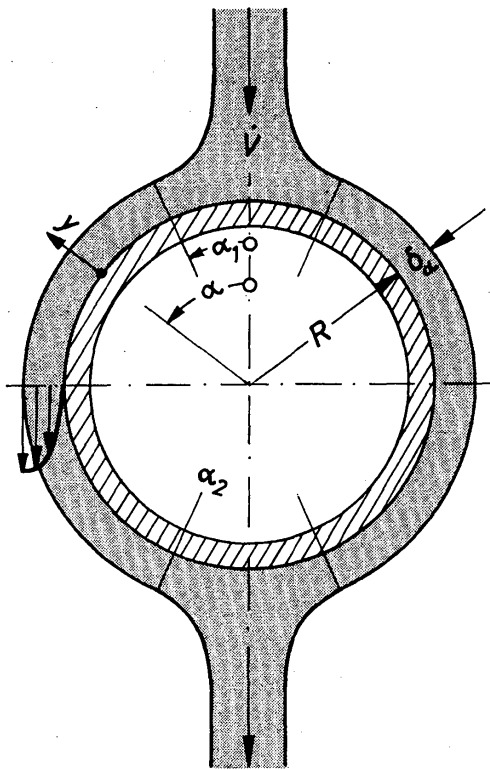
Es lassen sich also die Geschwindigkeiten unmittelbar aus bekannten Betriebsgrößen bestimmen.

Mit einem anderen Schubspannungsansatz als dem hier verwendeten haben MATSUHISA und BIRD [14.54] entsprechende Rechnungen für die Filmströmung durchgeführt. Ferner schlugen ASTARITA, MARRUCCI und PALUMBO [14.55] vor, aus Meßwerten für die Filmdicke den Schubspannungsansatz für nicht-Newton'sche Flüssigkeiten zu ermitteln.

14.4 Filmströmung an gekrümmten Flächen

14.41 Filmströmung am horizontalen Zylinder

In *Bild 14.19* ist die Filmströmung um die Außenwand eines horizontal angeordneten Zylinders in schematisierter Form angegeben. Es bedeuten R Rohrradius, y Wandabstand, δ_α örtliche Filmdicke, α Umfangswinkel und \dot{V} Volumstrom der Flüssigkeit. Es wird angenommen, daß sich die bei $\alpha = 0^\circ$ auf den Zylinder auftreffende Flüssigkeit gleichmäßig verteilt. Mit zunehmendem Winkel α wird die



Flüssigkeit in der oberen Zylinderhälfte fortlaufend beschleunigt, so daß die Filmdicke δ_α abnimmt. Den kleinsten Wert erreicht δ_α bei $\alpha = 90^\circ$. Anschließend wird die Flüssigkeit verzögert, so daß die Schichtdicke des Rieselfilms wieder ansteigt. Bei $\alpha = 180^\circ$ löst sich die Flüssigkeit vom Zylinder ab. Die Filmströmung an horizontalen Zylindern ist technisch im Zusammenhang mit Berieselungskondensatoren und Absorbern von Interesse.

Bild 14.19

Bezeichnungen bei der Filmströmung an einem Zylinder oder an einer Kugel

Im stationären Zustand besteht an jedem Flüssigkeitselement Gleichgewicht zwischen der Reibungskraft, der Schwerkraft, der Trägheitskraft, der Druckkraft und der Oberflächenspannungskraft. Die letzten drei Kräfte sind insbesondere in den Bereichen stark veränderlicher Filmdicke, also in den Zufluss- und Abflussgebieten, von Bedeutung. Diese Gebiete erstrecken sich von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_1$ und von $\alpha = \alpha_2$ bis $\alpha = 180^\circ$. Für die beiden Grenzwinkel α_1 und α_2 lassen sich keine genauen Werte angeben, da die Filmströmung unter Berücksichtigung aller Kräfte noch nicht berechnet wurde. Vermutlich liegt α_1 in der Größenordnung von 30° und α_2 in der Größenordnung von 150° . Innerhalb des Winkelbereiches von 30° bis 150° wird man mit guter Sicherheit annehmen können, daß allein Reibungs- und Schwerkraft die Filmströmung bestimmen.

Zur näherungsweise Berechnung der Filmströmung wird der laminare Strömungszustand vorausgesetzt. Ferner wird angenommen, daß δ_a klein ist im Vergleich zum Zylinderradius und die Geschwindigkeit nur eine Komponente in Umfangsrichtung besitzt. Sind die Randbedingungen schließlich durch $w_a = 0$ für $y = 0$ und $(dw_a/dy) = 0$ für $y = \delta_a$ festgelegt, dann können unmittelbar die für Rieselfilme an ebenen Wänden entwickelten Gleichungen übernommen werden. Für die örtliche Geschwindigkeit w_a erhält man:

$$w_a = \frac{g \sin \alpha \delta_a^2}{\nu} \left[\frac{y}{\delta_a} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_a} \right)^2 \right]. \quad (14.63)$$

Zur Angabe der weiteren Gleichungen sei zunächst die Reynoldszahl Re eingeführt:

$$Re \equiv \frac{\dot{V}/U}{\nu} = \frac{\bar{w}_a 2 \delta_a}{\nu}. \quad (14.64)$$

Zu beachten ist, daß bei der Filmströmung an der Außenwand des horizontal angeordneten Zylinders der auf die Zylinderlänge U bezogene Volumstrom \dot{V} gleich $\bar{w}_a 2 \delta_a$ ist, da sich die Flüssigkeit gleichmäßig auf beide Zylinderhälften verteilt. Mit der so definierten Reynoldszahl folgt unter Verwendung von Gl. (14.15) die über den Filmquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit

$$\bar{w}_a = \left(\frac{\nu g \sin \alpha}{12} \right)^{1/3} Re^{2/3} \quad (14.65)$$

und aus Gl. (14.63) unter Berücksichtigung von $y/\delta_a = 1$ die örtliche Oberflächengeschwindigkeit

$$w_{\delta_a} = \frac{3}{2} \left(\frac{\nu g \sin \alpha}{12} \right)^{1/3} Re^{2/3}. \quad (14.66)$$

Schließlich ergibt sich für die örtliche Filmdicke δ_a die Beziehung

$$\delta_a = \left(\frac{3 \nu^2}{2 g \sin \alpha} \right)^{1/3} Re^{1/3}. \quad (14.67)$$

Hiernach ist die Filmdicke bei $\alpha = 30^\circ$ um den Faktor 1,26 größer als bei $\alpha = 90^\circ$. Diese Filmdickenänderung darf vermutlich noch zugelassen werden, ohne daß die Vernachlässigung der Trägheits-, Druck- und Oberflächenspannungskraft die Gültigkeit der Rechnungen zu stark einschränkt.

Beim Vergleich der obigen Gleichungen mit denen, die für die Filmströmung an ebenen Wänden hergeleitet wurden, ist der Unterschied in der Definition der Reynoldszahl zu beachten. In beiden Fällen ist $Re \equiv \dot{V}/(U\nu)$. Bei der Strömung um den Zylinder wird \dot{V} jedoch in zwei gleiche Teile aufgespaltet. Bei gleichen Werten für Re ergeben sich daher zwangsläufig nur halb so große Werte für die Geschwindigkeiten und die Filmdicke. Berechnet man andererseits mittels Gl. (14.43) die für das erste Auftreten von Wellen maßgebende Reynoldszahl Re_{w_1} , so ist deren Wert mit 2 zu multiplizieren, wenn er auf die Filmströmung um den Zylinder angewendet werden soll. Unter Berücksichtigung dieser Hinweise lassen

sich auch die Gesetze für die turbulente Filmströmung an ebenen Wänden auf die um Zylinder übertragen.

Im Rahmen von Wärmeübergangsuntersuchungen an berieselten horizontalen Rohren hat HUPE [14.56] auch einige Beobachtungen über die Wellenbewegungen und über das Abfließen des Films vom Zylinder gemacht und hierüber berichtet.

14.42 Filmströmung an Kugeln

Die Filmströmung an Kugeln hat seit nun bald zwei Jahrzehnten die Aufmerksamkeit vieler Forscher erregt. Ausgelöst wurde dieses Interesse durch den Vorschlag von STEPHENS und MORRIS [14.57], Scheibenketten von der in *Bild 14.20* skizzierten Anordnung als Modell einer Füllkörperschüttung zu verwenden. Über die Scheibenkette strömt von oben nach unten ein Flüssigkeitsfilm, dem von unten nach oben ein Gasstrom entgegengerichtet ist. Man hoffte mit Untersuchungen an solchen Anordnungen Aufschluß über alle jene Vorgänge zu erhalten, die in berieselten Füllkörpersäulen auftreten. Von besonderer Bedeutung sind natürlich der Druckverlust in der Gasphase, das Aufstauen der Flüssigkeit durch den Gasstrom, die Flüssigkeitsströmung selbst und schließlich der Stoffübergang in der Gas- und in der Flüssigkeitsphase. Um den Stoffübergang in der Flüssigkeitsphase eindeutig klären zu können, ersetzte man die Scheibenkette durch eine Kugelkette, da die Filmströmung an einer Kugel einfacher und übersichtlicher zu sein schien als die an einer Scheibe. Von den zahlreichen Arbeiten, in denen man sich mit Scheiben- und Kugelketten befaßte, seien nur einige wenige hier genannt [14.58 bis 14.63].

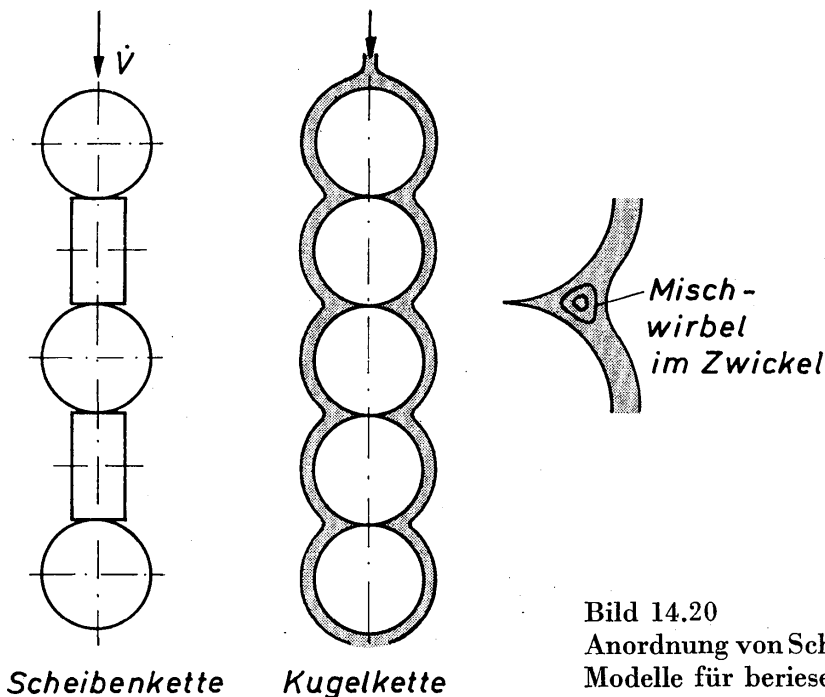


Bild 14.20

Anordnung von Scheiben- und Kugelketten als Modelle für berieselte Füllkörperschüttungen

Bei der Behandlung der Filmströmung an der Kugel stößt man grundsätzlich auf die gleichen Schwierigkeiten wie bei der Behandlung der Filmströmung am Zylinder. Vernachlässigt man die Trägheits-, Druck- und Oberflächenspannungs-

kräfte, berücksichtigt also allein die Schwer- und Reibungskräfte, dann lassen sich die für den Film am Zylinder entwickelten Gleichungen übernehmen. Zu beachten ist dabei jedoch, daß der Umfang U , gemäß

$$U = 2 \pi R \sin \alpha, \quad (14.68)$$

eine Funktion des Winkels α ist (siehe *Bild 14.19*). Das heißt, daß sich auch die Reynoldszahl $Re \equiv \dot{V}/U\nu$ mit dem Winkel α ändert. Sie erreicht am Äquator der Kugel, bei $\alpha = 90^\circ$, ihren niedrigsten Wert. Dieser soll mit

$$Re_A \equiv \frac{\dot{V}}{\nu 2 \pi R} \quad (14.69)$$

bezeichnet werden. Unter Verwendung dieser Definition für die Reynoldszahl ergibt sich die über den Filmquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit zu

$$\bar{w}_\alpha = \left(\frac{\nu g}{3 \sin \alpha} \right)^{1/3} Re_A^{2/3}, \quad (14.70)$$

die Oberflächengeschwindigkeit zu

$$w_{\delta_\alpha} = \frac{3}{2} \left(\frac{\nu g}{3 \sin \alpha} \right)^{1/3} Re_A^{2/3} \quad (14.71)$$

und die örtliche Filmdicke zu

$$\delta_\alpha = \left(\frac{3 \nu^2}{g \sin^2 \alpha} \right)^{1/3} Re_A^{1/3}. \quad (14.72)$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (14.67) folgt, daß die Filmdicke an der Kugel wesentlich stärker vom Winkel α abhängt als die am Zylinder. Aus diesem Grunde ist es also beim Film an der Kugel noch wesentlich bedeutsamer als beim Film am Zylinder, den Rechnungen den vollständigen Kräfteansatz zugrunde zu legen. Große mathematische Schwierigkeiten verhinderten bislang jedoch die Durchführung dieser Rechnungen. Von DORNIEDEN [14.64] wurden in einer neueren Untersuchung wenigstens die Trägheitskräfte zusätzlich berücksichtigt. Merkliche Abweichungen von den hier mitgeteilten Gleichungen ergeben sich für $\alpha < 45^\circ$ und $\alpha > 135^\circ$. Im mittleren Bereich stimmen gemessene und berechnete Werte gut überein.

14.5 Bewegung der Haftflüssigkeit an bewegten und ruhenden Körpern

Platten, Zylinder oder geometrisch anders geformte Körper werden in der technischen Praxis häufig mittels eines Tauchverfahrens mit einem Schutzüberzug aus Farbe, Lack oder Metall versehen. Im kontinuierlichen Prozeß wird der Körper mit einer konstanten Geschwindigkeit w_p durch das Tauchbad gezogen. Gemäß der schematisierten Darstellung in *Bild 14.21* bleibt dabei Flüssigkeit an der Körperfläche haften und bildet einen Film von der Dicke δ . Die wirklichen Verhältnisse werden mit guter Näherung durch die Vorstellung getroffen, daß δ

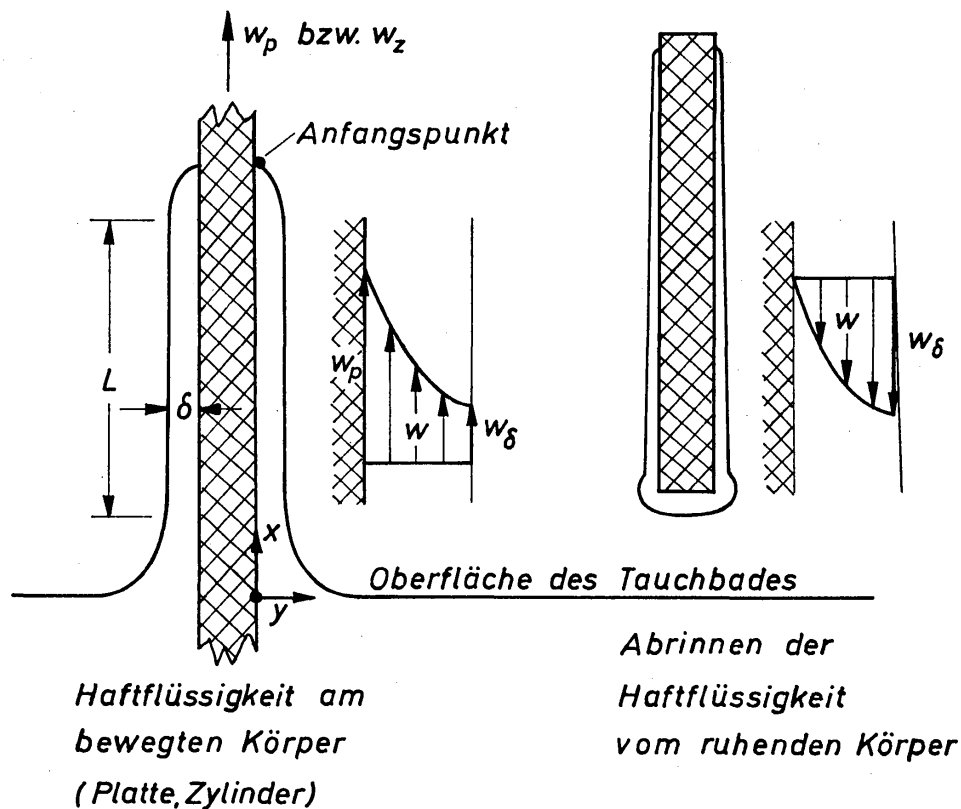


Bild 14.21

Bewegung der Haftflüssigkeit an bewegten und ruhenden Platten bzw. Zylindern

konstant ist. Veränderlich ist die Filmdicke nur in der Nähe der Oberfläche des Tauchbades und des Anfangspunktes. Beim diskontinuierlichen Betrieb wird der Körper nur kurzzeitig in die Flüssigkeit eingetaucht. Anschließend rinnt die Tauchflüssigkeit langsam vom Körper ab, so daß sich die Filmdicke zeitlich ändert. Die größte zeitliche Änderung der Filmdicke tritt wieder am Anfangspunkt und am unteren Ende des Körpers auf. Am unteren Ende stellen sich die für die Tropfenbildung charakteristischen Vorgänge ein.

Die in *Bild 14.21* angedeuteten Formen der Verteilung und der Bewegung des Flüssigkeitsfilms bei kontinuierlichem und diskontinuierlichem Tauchverfahren sind nur zwei Beispiele von sehr vielen. Der derzeitige Stand des Wissens über das Verhalten der Haftfilme unter den verschiedenartigsten Bedingungen ist in einer Übersichtsarbeit von TALLMADGE und GUTFINGER [14.65] zusammengefaßt worden. In dieser Arbeit ist auch das gesamte Schrifttum aufgeführt. Im folgenden wird insbesondere auf die Haftfilme an bewegten Platten und Zylindern eingegangen.

14.51 Haftfilme an bewegten Platten

Die für den Ingenieur wichtigsten Größen sind der von der Platte mitgerissene Volumstrom \dot{V} der Tauchflüssigkeit und die Schichtdicke δ des sich ausbildenden Haftfilms. Weiter können aber auch die Oberflächengeschwindigkeit w_δ und die örtliche Geschwindigkeit w im Film von Bedeutung sein. Diese Größen sollen nach Möglichkeit abhängig von Ort und Zeit, von der Plattengeschwindigkeit w_p und von den Stoffeigenschaften der Haftflüssigkeit bekannt sein.

Zur mathematischen Beschreibung der interessierenden Vorgänge wird vorausgesetzt, daß sich die Platte senkrecht zur Oberfläche des Tauchbades bewegt. Der Haftfilm soll von einer Newtonschen Flüssigkeit gebildet werden. Sein Strömungszustand sei laminar, und die Reynoldszahl soll dabei so kleine Werte annehmen, daß sich noch keine Wellen bilden. Ferner soll die Schubspannung an der Filmoberfläche verschwinden. Beschränkt man die Rechnungen auf den Bereich konstanter Filmdicke, dann besteht an jedem Volumelement des Haftfilms Gleichgewicht zwischen Reibungs- und Schwerkraft. Die Trägheits- und Oberflächenspannungskraft werden vernachlässigt, da sie nur in den Bereichen starker Filmdickenänderung den Strömungsvorgang merklich beeinflussen. Unter diesen Bedingungen erhält man als Differentialgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung:

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = - \frac{g}{\nu}. \quad (14.73)$$

Mit y wird hierin der Wandabstand bezeichnet. Berücksichtigt man die Randbedingungen, $w = w_p$ für $y = 0$ und $dw/dy = 0$ für $y = \delta$, so erhält man nach Integration in dimensionsloser Schreibweise

$$\frac{w}{w_p} = 1 - \frac{g \delta^2}{w_p \nu} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (14.74)$$

Setzt man in dieser Gleichung die Plattengeschwindigkeit $w_p = 0$, dann ergibt sich mit umgekehrtem Vorzeichen die bereits früher mitgeteilte Gl.(14.13). Mit $y/\delta = 1$ folgt die auf w_p bezogene Oberflächengeschwindigkeit w_δ zu

$$\frac{w_\delta}{w_p} = 1 - \frac{g \delta^2}{2 w_p \nu}. \quad (14.75)$$

Die Oberflächengeschwindigkeit w_δ kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Im Sonderfall $g \delta^2 = 2 w_p \nu$ wird $w_\delta = 0$. Unter den praktisch üblichen Bedingungen ist w_δ jedoch stets positiv, d.h. senkrecht nach oben, gerichtet. Für die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} erhält man unter Berücksichtigung von Gl.(14.15) mit Gl.(14.74) die Beziehung

$$\frac{\bar{w}}{w_p} = 1 - \frac{g \delta^2}{3 w_p \nu}. \quad (14.76)$$

Ist U die Plattenbreite, dann läßt sich der Volumstrom wegen $\dot{V} = \bar{w} U \delta$ aus dem Zusammenhang

$$\frac{\dot{V}/U}{w_p \delta} = \frac{\bar{w}}{w_p} \quad (14.77)$$

leicht bestimmen.

Die obigen Gleichungen kann man nur auswerten, wenn die Filmdicke δ bekannt ist. Die Filmdicke muß also entweder gemessen oder berechnet werden. Die theoretische Bestimmung bereitet außerordentliche Schwierigkeiten, da hierbei der

Einfluß der Oberflächenspannung σ auf die Bereiche stark veränderlicher Filmdicke berücksichtigt werden muß. Ohne auf die Herleitung einzugehen, soll daher unmittelbar die von WHITE und TALLMADGE [14.66] mitgeteilte Gleichung wiedergegeben werden:

$$\frac{K_\delta}{(1-K_\delta)^{4/3}} = 0,890 Ca^{1/3}. \quad (14.78)$$

Hierin bedeuten

$$K_\delta \equiv \frac{\delta^2 \rho g}{w_p \eta} \quad (14.79)$$

die für die Filmdicke maßgebende Kennzahl und

$$Ca \equiv \frac{w_p \eta}{\sigma} \quad (14.80)$$

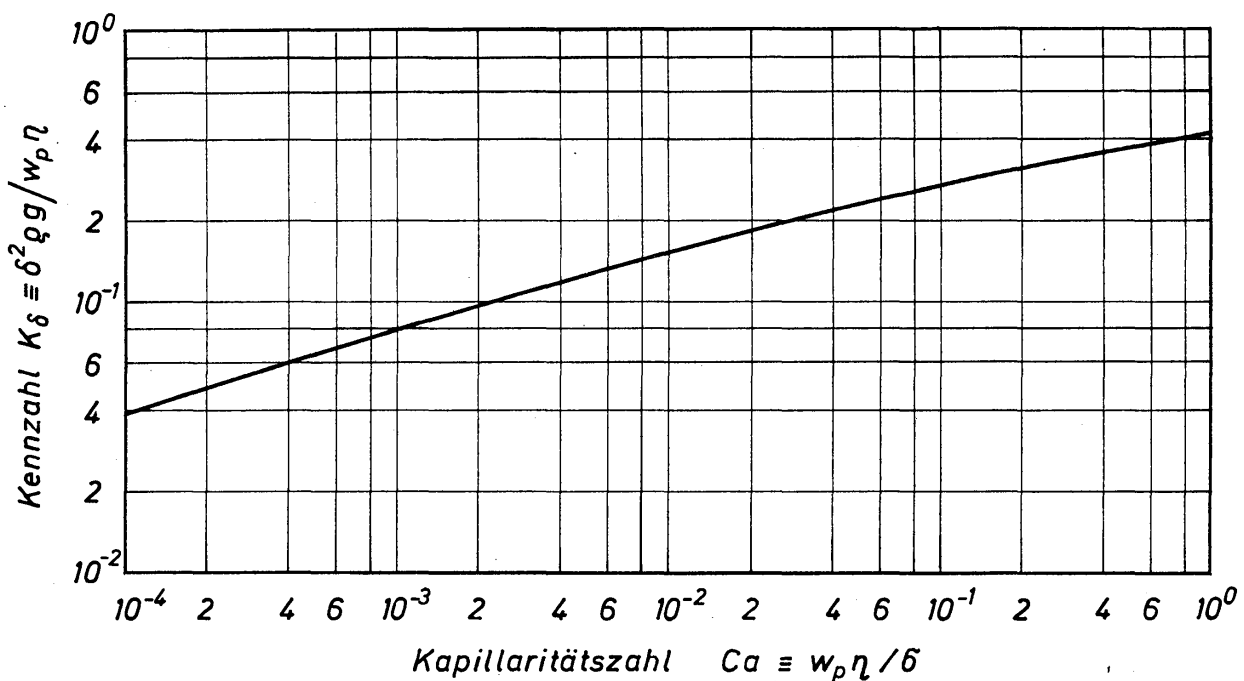


Bild 14.22. Abhängigkeit der Kennzahl K_δ von der Kapillaritätszahl Ca für Haftfilme an bewegten Platten

die Kapillaritätszahl. In Bild 14.22 ist K_δ über Ca dargestellt. Für sehr große Werte von Ca wird $K_\delta \approx 1$. In diesem Falle ist die Filmdicke unabhängig von der Oberflächenspannung. Übt die Oberflächenspannung einen maßgebenden Einfluß auf die Filmdicke aus, dann nimmt Ca sehr kleine Werte, an und man erhält aus Gl.(14.87) das Grenzesetz

$$K_\delta = 0,890 Ca^{1/3}. \quad (14.81)$$

Diese Gleichung ist bereits früher von LANDAU und LEVICH [14.67] hergeleitet worden und darf dann angewendet werden, wenn Ca kleiner als etwa 10^{-3} ist. Führt man hierin die Definitionen für K_δ und Ca ein, so ergibt sich für δ die Beziehung:

$$\delta = 0,943 \left(\frac{w_p^2 \eta^2}{\rho^{3/2} g^{3/2} \sigma^{1/2}} \right)^{1/3}. \quad (14.82)$$

Den stärksten Einfluß üben also die Plattengeschwindigkeit w_p und die Viskosität η auf die Filmdicke aus.

Gl.(14.78) ist von WHITE und TALLMADGE [14.66] mit Meßwerten von MOREY [14.68] und VAN ROSSUM [zitiert in 14.66] verglichen worden, wobei sich eine gute Übereinstimmung ergab. Die Meßwerte lagen zwischen $Ca = 10^{-4}$ und $Ca = 10^0$.

Entsprechende Rechnungen, wie sie hier für Newtonsche Flüssigkeiten durchgeführt wurden, haben GUTFINGER und TALLMADGE [14.69] auch für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten veröffentlicht. Bei anschließenden Versuchen stellte sich heraus, daß die gemessenen Filmdicken nur etwa halb so groß sind wie die berechneten. Aus Meßwerten wurde dann eine empirische Gleichung entwickelt.

14.52 Haftfilme an bewegten Zylindern

Die Bewegung von Flüssigkeitsfilmen, die an bewegten Zylindern haften, haben TALLMADGE, LABINE und WOOD [14.70] sowie WHITE und TALLMADGE [14.71 und 14.72] theoretisch und experimentell studiert. Im Bereich der konstanten Filmdicke, der in *Bild 14.21* angedeutet ist, ergibt sich für die Geschwindigkeitsverteilung im Film die Beziehung:

$$\frac{w}{w_z} = 1 - \frac{R^2 g}{2 w_z \nu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right]. \quad (14.83)$$

Hierin bedeuten w_z die Geschwindigkeit, mit der der Zylinder (Draht) mit dem Radius R in senkrechter Richtung durch das Tauchbad gezogen wird. Der laufende Radius r ändert sich von R bis $R + \delta = r_\delta$. Mit $r = r_\delta$ ergibt sich die Geschwindigkeit an der Filmoberfläche:

$$\frac{w_\delta}{w_z} = 1 - \frac{R^2 g}{2 w_z \nu} \left[1 - \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 \ln \left(\frac{r_\delta}{R} \right) \right]. \quad (14.84)$$

Den Volumstrom \dot{V} der Flüssigkeit berechnet man mit

$$\dot{V} = 2\pi \int_R^{r_\delta} w r dr \quad (14.85)$$

unter Heranziehung von Gl.(14.83) zu

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{w_z R^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{R^2 g}{2 w_z \nu} \left\{ \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^2 - \frac{1}{4} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{r_\delta}{R} \right)^4 \left[\frac{3}{4} - \ln \left(\frac{r_\delta}{R} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14.86)$$

In diesen Gleichungen ist der Radius $r_\delta = R + \delta$ noch unbekannt. Nach dem gleichen Verfahren, welches zur Herleitung von δ an Platten entwickelt wurde,

haben WHITE und TALLMADGE [14.72] eine Beziehung für r_δ hergeleitet, die sich in der folgenden Form schreiben läßt:

$$Ca = \left\{ 1,498 Go \left(\frac{r_\delta}{R} - 1 \right) \left[\frac{2,4 Go^{0,85} (r_\delta/R)^{0,85}}{1 + 2,4 Go^{0,85} (r_\delta/R)^{0,85}} \right] \right\}^{1,5} + 2 Go^2 (r_\delta/R)^2 \left[\ln (r_\delta/R) + \frac{1}{2(r_\delta/R)^2} - \frac{1}{2} \right]. \quad (14.87)$$

In dieser Gleichung bedeuten Ca die bereits durch Gl.(14.80) definierte Kapillaritätszahl, die jedoch mit der Zylindergeschwindigkeit w_z zu bilden ist, und

$$Go \equiv R \left(\frac{\rho g}{2 \sigma} \right)^{1/2} \quad (14.88)$$

die nach GOUCHER benannte Kennzahl. Die Goucherzahl läßt sich als das Verhältnis aus dem Zylinderradius R und der Laplaceschen Konstanten $(2 \sigma / \rho g)^{1/2}$ deuten. Für viele Flüssigkeiten liegt der Wert der Laplaceschen Konstanten in der Größenordnung von 3 mm. Somit wird die Größe von Go im wesentlichen durch den Zylinderradius R bestimmt. Für R kleiner als 3 mm ist Go daher kleiner als 1. In vielen praktischen Fällen wird $Go \ll 1$ sein.

In Bild 14.23 ist die bezogene Filmdicke $\delta/R = (r_\delta/R) - 1$, berechnet mittels Gl.(14.87), abhängig von der Kapillaritätszahl Ca , für verschiedene Werte der Goucherzahl Go dargestellt.

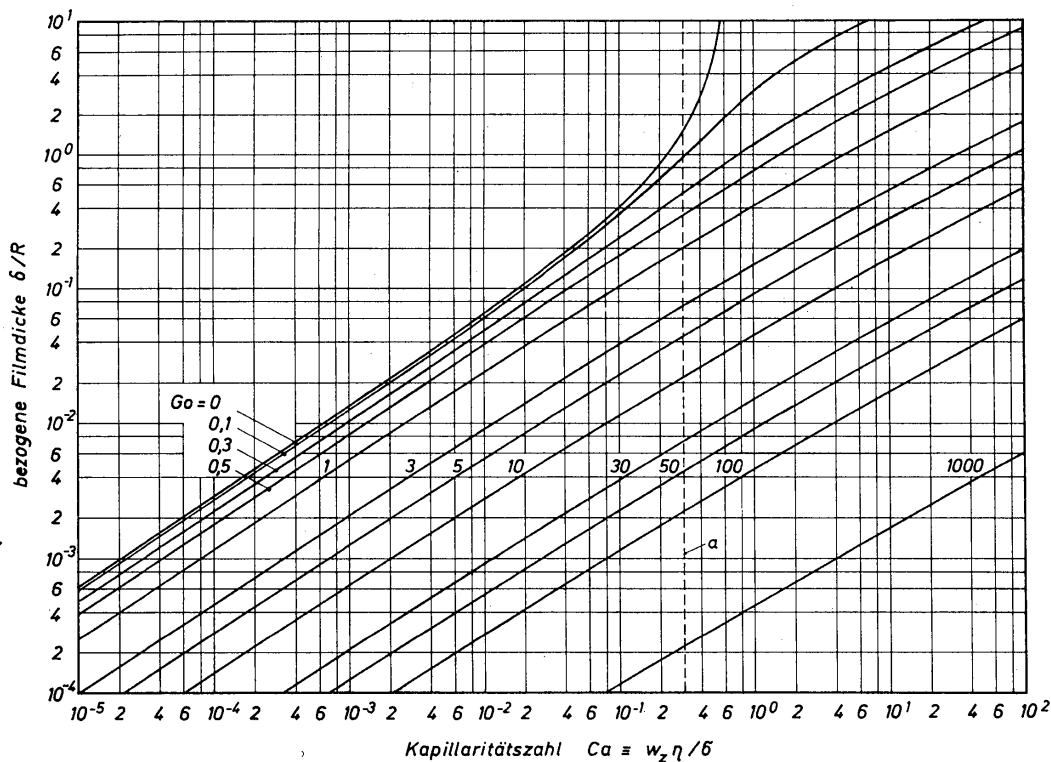


Bild 14.23. Abhängigkeit der bezogenen Filmdicke δ/R von der Kapillaritätszahl Ca und der Goucherzahl Go für Haftfilme an bewegten Zylindern. Die gestrichelte Gerade a gibt die obere Gültigkeitsgrenze an

Die Gleichung (14.87) wurde durch Messungen nur für Werte der Kapillaritätszahl $Ca \leq 0,3$ bestätigt. Der Grenzwert $Ca = 0,3$ ist in *Bild 14.23* durch die gestrichelte Gerade a angedeutet. Also dürfen auch die im folgenden aus Gl. (14.87) hergeleiteten Näherungsbeziehungen nur für $Ca \leq 0,3$ angewendet werden. Für $Go = 0$ erhält man aus Gl. (14.87) das einfache Grenzesetz

$$\frac{\delta}{R} = \frac{1,335 Ca^{2/3}}{1 - 1,335 Ca^{2/3}} \quad (14.89)$$

Hiernach wird $\delta/R = \infty$ bei $Ca = 0,6488$. Dieser Grenzwert ist physikalisch nicht gerechtfertigt; er läßt erkennen, daß die Rechnungen von WHITE und TALLMADGE wegen der gemachten Voraussetzungen nur beschränkt gültig sind.

Für große Werte der Goucherzahl, und zwar für $Go \geq 2$, folgt aus Gl. (14.87) ein Näherungsgesetz, das bei allen Werten der Kapillaritätszahl, soweit $Ca \leq 0,3$ ist, gilt:

$$Ca = [1,498 Go (\delta/R)]^{1,5} + 2 Go^2 (\delta/R)^2. \quad (14.90)$$

Schließlich läßt sich für $Ca \leq 0,1$ und $0 \leq Go \leq 2$ aus den Kurven des *Bildes 14.23* in Anlehnung an Gl. (14.87) das folgende Näherungsgesetz ermitteln:

$$\frac{\delta}{R} = 0,944 Ca^{2/3} \left\{ \sqrt{2} Go \left[\frac{2,4 Go^{0,85}}{1 + 2,4 Go^{0,85}} + \frac{1}{2 Go} \right] \right\}^{-1}. \quad (14.91)$$

Mit diesen Grenz- und Näherungsgesetzen dürfte es möglich sein, die meisten technisch interessanten Probleme zu lösen, ohne die vollständige Gl. (14.87) anwenden zu müssen.

Schrifttum

- [14.1] W. NUSSELT, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes, *Z. VDI 60* (1916) 541–46
- [14.2] M. L. JACKSON, Liquid films in viscous flow, *AICHE J. 1* (1955) 2, 231–40
- [14.3] H. BRAUER, Strömung und Wärmeübergang bei Rieselfilmen, *VDI-Forschungsh. 457*, VDI-Verlag, Düsseldorf 1956
- [14.4] K. FEIND, Strömungsuntersuchungen bei Gegenstrom von Rieselfilmen und Gas in lotrechten Rohren, *VDI-Forschungsh. 481*, VDI-Verlag, Düsseldorf 1960
- [14.5] L. HOPF, Turbulenz bei einem Flusse, *Ann. Physik 32* (1910) 777–808
- [14.6] C. C. MONRAD und W. L. BADGER, Condensation of vapors, *Ind. Eng. Chem. 22* (1930) 10, 1103–12
- [14.7] E. SCHMIDT, W. SCHURIG und W. SELLSCHOPP, Versuche über die Kondensation von Wasserdampf in Film- und Tropfenform, *Techn. Mech. Thermodyn. 1* (1930) 1, 53–63
- [14.8] C. G. KIRKBRIDE, Heat transfer by condensing vapor on vertical tubes, *Ind. Eng. Chem. 26* (1934) 4, 425–8
- [14.9] C. M. COOPER, T. E. DREW und W. H. MCADAMS, Isothermal flow of liquid layers, *Ind. Eng. Chem. 26* (1934) 4, 428–31
- [14.10] U. GRIGULL, Wärmeübergang bei der Kondensation mit turbulenter Wasserhaut, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 13* (1942) 2, 49–57

- [14.11] A. E. DUKLER und O. P. BERGELIN, Characteristics of flow in falling liquid films, *Chem. Eng. Progr.* 48 (1952) 11, 557–63
- [14.12] E. E. EMMERT und R. L. PIGFORD, A study of gas absorption in falling liquid films, *Chem. Eng. Progr.* 50 (1954) 2, 87–93
- [14.13] W. BRÖTZ, Über die Vorausberechnung der Absorptionsgeschwindigkeit von Gasen in strömenden Flüssigkeitsschichten, *Chem.-Ing.-Techn.* 26 (1954) 8/9, 470–8
- [14.14] L. Y. ZHIVAIAKIN, Liquid film thickness in film-type units, *Int. Chem. Eng.* 2 (1962) 3, 337–41
- [14.15] S. S. GRIMLEY, Liquid flow conditions in packed towers, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 23 (1945) 228–35
- [14.16] W. J. THOMAS und S. PORTALSKI, Countercurrent flow in wetted-wall columns, *Ind. Eng. Chem.* 50 (1958) 7, 1081–8
- [14.17] H. E. DUKLER, Fluid mechanics and heat transfer in vertical falling-film systems, *Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.* 56 (1960) 30, 1–10
- [14.18] S. PORTALSKI, Studies of falling liquid film flow. Film thickness on a smooth vertical plate, *Chem. Eng. Sci.* 18 (1963) 12, 787–804
- [14.19] J. LEE, Turbulent velocity profile of a vertical film flow, *Chem. Eng. Sci.* 20 (1965) 6, 533–6
- [14.20] S. J. FRIEDMAN und C. O. MILLER, Liquid films in the viscous flow region, *Ind. Eng. Chem.* 33 (1941) 7, 885–90
- [14.21] R. FALLAH, T. G. HUNTER und A. W. NASH, Isothermal flow in liquid wetted wall systems, *J. Soc. Chem. Ind. (London)* 53 (1934) 369T–379T
- [14.22] H. H. BELKIN, A. A. MACLEOD, C. C. MONRAD und R. R. ROTHFUS, Turbulent liquid flow down vertical walls, *AIChE J.* 5 (1959) 2, 245–8
- [14.23] S. KAMEI und J. OISHI, Hold-up in a wetted wall tower, *Mem. Fac. Eng. Kyoto University* 18 (1956) 1, 1–12
- [14.24] P. L. KAPITZA, Wellenströmung der dünnen Schichten einer viskosen Flüssigkeit, *J. exp. theoret. Physik* 18 (1948) 1, 3–18
- [14.25] CH.-S. YIH, Stability of parallel laminar flow with a free surface, *Proceedings of the Second U. S. National Congress on Applied Mechanics, 1954*, 623–8
- [14.26] CH.-S. YIH, Stability of liquid flowing down an inclined plane, *Physics of Fluid* 6 (1963) 321–34
- [14.27] W. TOLLMIEN, Über die Entstehung der Turbulenz, *Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, Math.-Physik. Kl.* 1929, 1, 21–44
- [14.28] T. BROOKE BENJAMIN, Wave formation in laminar flow down an inclined plane, *J. Fluid Mech.* 2 (1957) 554–74
- [14.29] P. L. KAPITZA und S. P. KAPITZA, Wellige Strömung dünner Schichten einer zähen Flüssigkeit: III. Fallunterscheidung der Wellen, *J. exp. theoret. Physik (USSR)* 19 (1949) 2, 105–20
- [14.30] S. WHITAKER, Effect of surface active agents on stability of falling liquid films, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 3 (1964) 2, 132–42
- [14.31] J. SHIBUYA, On the transition of free flow along outer surface of vertical circular pipe, *Report of the Institute of High Speed Mechanics, Tohoku University I* (1951) 17–25
- [14.32] M. GRAEF, Über die Eigenschaften zwei- und dreidimensionaler Störungen in Rieselfilmen an geneigten Wänden, *Mitt. des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung und der AVA, Nr. 36*, Göttingen 1966
- [14.33] A. M. BINNIE, Instability in a slightly inclined water channel, *J. Fluid Mech.* 5 (1959) 4, 561–70
- [14.34] L. O. JONES und S. WHITAKER, An experimental study of falling liquid films, *AIChE J.* 12 (1966) 3, 525–9
- [14.35] S. R. TAILBY und S. PORTALSKI, The optimum concentration of surface active agents for the suppression of ripples, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 39 (1961) 5, 328–36

- [14.36] B. E. ANSHUS und A. ACRIVOS, The effect of surface active agents on the stability characteristics of falling liquid films, *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 3, 389–93
- [14.37] S. WHITAKER und L. O. JONES, Stability of falling liquid films. Effect of interface and interfacial mass transport, *AIChE J.* 12 (1966) 3, 421–31
- [14.38] F. P. STAINTHORP und J. M. ALLEN, The development of ripples on the surface of a liquid film flowing inside a vertical tube, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 43 (1965) T 85–T 91
- [14.39] J. C. JEPSEN, O. K. CROSSER und R. H. PERRY, The effect of wave induced turbulence on the rate of absorption of gases in falling liquid films, *AIChE J.* 12 (1966) 1, 186–92
- [14.40] S. R. TAILBY und S. PORTALSKI, The hydrodynamics of liquid films flowing on a vertical surface, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 38 (1960) 324–30
- [14.41] W. NUNNER, Wärmeübergang und Druckabfall in rauhen Röhren, *VDI-Forschungsh.* 455, VDI-Verlag, Düsseldorf 1956
- [14.42] J. O. WILKES und R. M. NEDDERMANN, The measurement of velocities in thin films of liquids, *Chem. Eng. Sci.* 17 (1962) 3, 177–87
- [14.43] H. BRAUER, Wärmeübergang bei der Filmkondensation reiner Dämpfe an lotrechten Wänden, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 24 (1958) 4, 105–17
- [14.44] E. RUCKENSTEIN und C. BERBENTE, Mass transfer in wave flow, *Chem. Eng. Sci.* 20 (1965) 9, 795–801
- [14.45] C. MASSOT, F. IRANI und E. N. LIGHTFOOT, Modified description of wave motion in a falling film, *AIChE J.* 12 (1966) 3, 445–55
- [14.46] S. PORTALSKI, Eddy formation in film flow down a vertical plate, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 3 (1964) 1, 49–53
- [14.47] E. P. STAINTHORP und G. J. WILD, Film flow. The simultaneous measurement of wave amplitude and the local mean concentration of a transferable component, *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 4, 701–4
- [14.48] D. E. HARTLEY und W. MURGATROYD, Criteria for a break-up of thin liquid layers flowing isothermally over solid surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer* 7 (1964) 9, 1003–15
- [14.49] A. SCHOKLITSCH, Über die Bewegungsweise des Wassers in offenen Gerinnen, *Sitzungsber. Wiener Akad. Math.-naturwiss. Kl. 2a*, 129 (1920) 895–917
- [14.50] F. GOODRIDGE und G. GARTSIDE, Mass transfer into near-horizontal liquid films. Part I: Hydrodynamic studies, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 43 (1965) T 62–T 67
- [14.51] R. M. NEDDERMANN, The flow of thin films of a viscous liquid down nearly horizontal surfaces, *Chem. Eng. Sci.* 21 (1966) 8, 715–7
- [14.52] D. BUTTERWORTH, The laminar flow of liquid down the outside of a rod which is at a small angle from the vertical, *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 7, 911–24
- [14.53] H. BRAUER, Fließ- und Bewegungsvorgänge bei Anstrichmitteln, *Farbe u. Lack* 67 (1961) 3, 132–7
- [14.54] S. MATSUHISA und R. B. BIRD, Analytical and numerical solutions for laminar flow of the non-Newtonian Ellis fluid, *AIChE J.* 11 (1965) 4, 588–95
- [14.55] G. ASTARITA, G. MARRUCCI und G. PALUMBO, Non-Newtonian gravity flow along inclined plane surfaces, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 3 (1964) 4, 333–9
- [14.56] K.-P. HUPE, Wärmeübertragung am berieselten horizontalen Rohr, Dissertation, Technische Hochschule Karlsruhe 1961
- [14.57] E. J. STEPHENS und G. A. MORRIS, Determination of liquid films absorption coefficients, *Chem. Eng. Progr.* 47 (1951) 5, 232–42
- [14.58] S. LYAN, J. R. STRATEMEIER und H. KRAMERS, Absorption studies in the light of the penetration theory, III: Absorption by wetted spheres, singly and in columns, *Chem. Eng. Sci.* 4 (1955) 2, 63–7
- [14.59] R. F. TAYLOR und F. ROBERTS, The calibration of disc-type laboratory gas-absorption columns, *Chem. Eng. Sci.* 5 (1956) 3, 168–77

- [14.60] J. E. HOWKINS und J. F. DAVIDSON, Generalized correlation for loading in packed towers with countercurrent gas-liquid flow, *AIChE J.* 4 (1958) 3, 324-9
- [14.61] J. F. DAVIDSON, E. J. CULLEN, D. HANSON und D. ROBERTS, The hold-up and liquid film coefficient of packed towers, Part I: Behaviour of a string of spheres, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 37 (1959) 122-30
- [14.62] G. A. RATCLIFF und K. J. REID, Mass transfer into spherical liquid films, Part I: Measurement of diffusivities of liquids, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 39 (1961) 423-32
- [14.63] G. A. RATCLIFF und K. F. REID, Mass transfer into spherical liquid films, Part II: Mixing effects on a column of spheres, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 40 (1962) 69-74
- [14.64] M. DORNIEDEN, Die Oberflächengeschwindigkeit von Rieselfilmen an gekrümmten Flächen, *Verfahrenstechn.* 2 (1968) 4, 149-52
- [14.65] J. A. TALLMADGE und C. GUTFINGER, Entrainment of liquid films, *Ind. Eng. Chem.* 59 (1967) 11, 19-34
- [14.66] D. A. WHITE und J. A. TALLMADGE, Theory of drag-out of liquids on flat plates, *Chem. Eng. Sci.* 20 (1965) 1, 33-7
- [14.67] ● V. G. LEVICH, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, New York 1962
- [14.68] F. C. MOREY, Thickness of liquid film adhering to surface slowly withdrawn liquid, *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 25 (1940) 385-93
- [14.69] C. GUTFINGER und J. A. TALLMADGE, Films of non-Newtonian fluids adhering to flat plates, *AIChE J.* 11 (1965) 3, 403-13
- [14.70] J. A. TALLMADGE, R. A. LABINE und B. H. WOOD, Films adhering to large wires upon withdrawal from liquid baths, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 4 (1965) 4, 400-7
- [14.71] D. A. WHITE und J. A. TALLMADGE, Theory of withdrawal of cylinders from liquid baths, *AIChE J.* 12 (1966) 2, 333-9
- [14.72] D. A. WHITE und J. A. TALLMADGE, A gravity corrected theory for cylinder withdrawal, *AIChE J.* 13 (1967) 4, 745-50

15 Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Rohren

Gas-Flüssigkeits-Strömungen sind fast immer mit Wärme- und Stoffaustauschvorgängen verknüpft. Zur Berechnung der hierfür verwendeten Apparate sind einige von der Strömung abhängige Größen von besonderer Bedeutung. Diese sind der Druckverlust, der Flüssigkeitsinhalt und die möglichen Belastungsgrenzen. Darüber hinaus möchte der Ingenieur aber gerne wissen, in welcher Form sich die beiden Phasen durch das Rohr bewegen und wie groß die Phasengrenzfläche ist. Auf die ersten drei Fragen gibt es heute schon teilweise befriedigende, wenn auch nicht erschöpfende Antworten. Wegen der großen technischen Bedeutung der Gas-Flüssigkeits-Strömung bemühten sich viele Forschungsinstitute um die Lösung der Probleme. Die Zahl der veröffentlichten wissenschaftlichen Arbeiten ist in den letzten zehn Jahren lawinenartig angeschwollen, so daß es kaum noch möglich ist, sie alle zu lesen und bezüglich des erzielten Fortschrittes auszuwerten. In diesem Abschnitt werden daher nur verhältnismäßig wenige Arbeiten zitiert, von denen der Verfasser annimmt, daß sie zur Klärung einzelner Probleme besonders wertvolle Beiträge geliefert haben. In diesen Arbeiten werden im allgemeinen zahlreiche andere Untersuchungen zitiert, die das Eindringen des Lesers in das spezielle Fachgebiet ermöglichen. Darüberhinaus sei auf die in wissenschaftlichen Zeitschriften, jährlich oder zweijährlich erscheinenden Fortschrittsberichte und auf die wertvolle Dokumentation von GOUSE [15.1] verwiesen, die das gesamte Schrifttum über Gas-Flüssigkeits-Strömungen bis zum Jahre 1966 enthält.

15.1 Klärung der Strömungs- und Phasenverteilungszustände

Die gleichzeitige Strömung einer gasförmigen und einer flüssigen Phase im Rohr ist mit einer verwirrenden Vielfalt von Erscheinungen verbunden. Zum Verständnis der Vorgänge erweist es sich daher als notwendig, sie zunächst nach geeigneten Gesichtspunkten zu gliedern und in anschaulicher Form zu beschreiben.

15.11 Allgemeiner Überblick

Geht man davon aus, daß der Strömungszustand sowohl des Gases wie der Flüssigkeit laminar oder turbulent sein kann, dann ergeben sich bei der zweiphasigen Strömung vier kombinierte Strömungszustände gegenüber nur zweien bei der Einphasenströmung.

Gas	Flüssigkeit	Zweiphasige Strömung
laminar (<i>l</i>)	laminar (<i>l</i>)	laminar-laminar (<i>l-l</i>)
laminar (<i>l</i>)	turbulent (<i>t</i>)	laminar-turbulent (<i>l-t</i>)
turbulent (<i>t</i>)	laminar (<i>l</i>)	turbulent-laminar (<i>t-l</i>)
turbulent (<i>t</i>)	turbulent (<i>t</i>)	turbulent-turbulent (<i>t-t</i>)

Statt der zwei Strömungszustände bei einphasigen Strömungen sind bei zweiphasigen Strömungen vier kombinierte Strömungszustände zu unterscheiden. Man erkennt also, daß die Klärung der Strömung eines zweiphasigen Systems einen großen Aufwand erfordert. Er ist jedoch keineswegs nur durch die kombinierten Strömungszustände bedingt. Jede Phase kann zudem in kontinuierlicher und in diskontinuierlicher Verteilung vorliegen. Bei der Zweiphasenströmung sind also folgende Möglichkeiten für den Phasenverteilungszustand zu unterscheiden:

Gas	Flüssigkeit	Zweiphasige Strömung
kontinuierlich (<i>k</i>)	kontinuierlich (<i>k</i>)	(<i>k-k</i>)
kontinuierlich (<i>k</i>)	diskontinuierlich (<i>d</i>)	(<i>k-d</i>)
diskontinuierlich (<i>d</i>)	kontinuierlich (<i>k</i>)	(<i>d-k</i>)
diskontinuierlich (<i>d</i>)	diskontinuierlich (<i>d</i>)	(<i>d-d</i>)

Eine diskontinuierliche Verteilung beider Phasen ist nur in Ausnahmefällen möglich, so daß man im allgemeinen nur mit den ersten drei Phasenverteilungszuständen rechnen muß. Damit ist die Vielfalt der Phasenverteilungszustände erst angedeutet. Wegen der Deformierbarkeit der Phasengrenzfläche können sich für jede der oben genannten Zustandsformen Variationen ergeben. Diese werden teilweise durch die geometrische Berandung des Strömungssystems und durch seine räumliche Anordnung bestimmt.

Für die drei erst genannten Formen der Phasenverteilung soll jeweils ein Beispiel genannt werden. Beide Phasen liegen in kontinuierlicher Verteilung vor, wenn in einem Rohr die Flüssigkeit die Innenwand als geschlossener Film bedeckt und das freie Kernvolumen vom Gas ausgefüllt wird. Man spricht hierbei von einer Gas-Film-Strömung, die in vielen Apparaten für die Absorption, Rektifikation oder auch in Rohrleitungen zum Transport von Erdgas auftritt, wobei Flüssigkeit mitgerissen wird. Liegt das Gas als kontinuierliche, die Flüssigkeit als diskontinuierliche Phase vor, so handelt es sich um die Bewegung von Flüssigkeitstropfen im Gasstrom. Dieser Fall tritt in der freien Atmosphäre bei Regen und Nebel auf, in technischen Anlagen bei der Gasbefeuchtung und Gaskühlung oder bei der Zerstäubung von flüssigen Brennstoffen in Verbrennungskraftmaschinen. Bewegen sich im umgekehrten Falle Gasblasen in einer Flüssigkeit, so ist offensichtlich das Gas die diskontinuierliche und die Flüssigkeit die kontinuierliche Phase. Dieser letzte Fall spielt eine große Rolle bei der Verdampfung, Absorption und Rektifikation.

In allen angeführten Beispielen ist die Zweiphasenströmung verbunden mit Wärme- und Stoffaustauschvorgängen. Die für diese Vorgänge entwickelten Apparate unterscheiden sich zum Teil in wichtigen konstruktiven Merkmalen, so daß die Strömung hierdurch maßgeblich beeinflusst wird. Es ist daher notwendig, bei der Behandlung der Strömung auf die in der verfahrenstechnischen Industrie

verwendeten Apparate bzw. deren Elemente und ihrer Anordnung Rücksicht zu nehmen. Die für uns bedeutsamen Elemente sind das Rohr und die Kolonne bzw. der Kessel, ohne und mit verschiedenen Einbauten. Im folgenden werden zuerst Verteilungsformen der Phasen bei der Strömung in Rohren näher erörtert.

15.12 Phasenverteilungszustände bei Rohrströmungen

Sowohl das von einer kontinuierlichen als auch das von einer diskontinuierlichen Phase eingenommene Volumen kann von sehr unterschiedlicher Form sein, obgleich natürlich die volumetrische Verteilung der einen Phase die Verteilung der anderen festlegt. Betrachten wir als Beispiel die Gas-Flüssigkeits-Strömung durch ein horizontales Rohr, wofür in *Bild 15.1* die Phasenverteilungszustände schematisch dargestellt sind. Bei einer recht weitgehenden Unterteilung ergeben sich acht leicht zu unterscheidende Verteilungszustände. Hiervon sind jedoch nur vier die sogenannten Grundzustände mit charakteristischen Unterscheidungsmerkmalen. Das sind in Richtung zunehmenden Gasanteiles die Blasenströmung, die Schichtenströmung, die Filmströmung und die Nebelströmung. Die anderen Verteilungszustände sind Zwischenstadien und verbinden die genannten Grundzustände.

Bei sehr geringem Gasanteil bewegt sich das Gas in Form von Blasen an der höchsten Querschnittsstelle durch das Rohr. Im Grenzfall ist die Form der Blasen halbkugelförmig. Die Größe der Blasen ist nicht einheitlich, wenn auch ihr Durchmesser nur in begrenztem Maße von einem Mittelwert abweicht. Sehr kleine Blasen werden von den größeren angezogen, so daß sie sich vereinigen. Bei der Blasenströmung ist die Gasphase diskontinuierlich und die Flüssigkeitsphase kontinuierlich, wobei die Phasengrenzfläche diskontinuierlich ist.

Wird der Gasanteil erhöht, so wachsen immer mehr Blasen zusammen und bilden Gaskolben; man beobachtet die Kolbenströmung. Es ist nicht festzustellen, daß das Gas bei konstantem Volumstrom in einer Vielzahl von kleinen Blasen enthalten und über dem gesamten Rohrquerschnitt verteilt ist. Die Auftriebskräfte der in der unteren Rohrhälfte enthaltenen Blasen überwinden die Oberflächenspannungskräfte und erzwingen dadurch einen Zusammenschluß vieler kleiner Blasen zu wenigen großen Kolben. Dies ist unter den gegebenen Bedingungen der stabile Zustand, wobei sich die kleinste Grenzfläche zwischen den Phasen ausbildet. Das Gas ist auch bei der Kolbenströmung noch die diskontinuierliche Phase.

Eine weitere Erhöhung des Gasanteiles führt schließlich zu der zweiten Grundverteilungsform, der Schichtenströmung. Hierbei strömen Gas und Flüssigkeit nach ihrer Dichte geschichtet durch das Rohr. Die beiden Phasen liegen in kontinuierlicher Verteilung vor und haben eine in sich geschlossene Phasengrenzfläche.

Ausgehend von der Schichtenströmung werden durch Erhöhung des Gasanteiles einige Zwischenzustände durchlaufen, bis schließlich mit der Filmströmung ein Verteilungszustand erreicht wird, bei dem beide Phasen wieder in kontinuierlicher Form vorliegen.

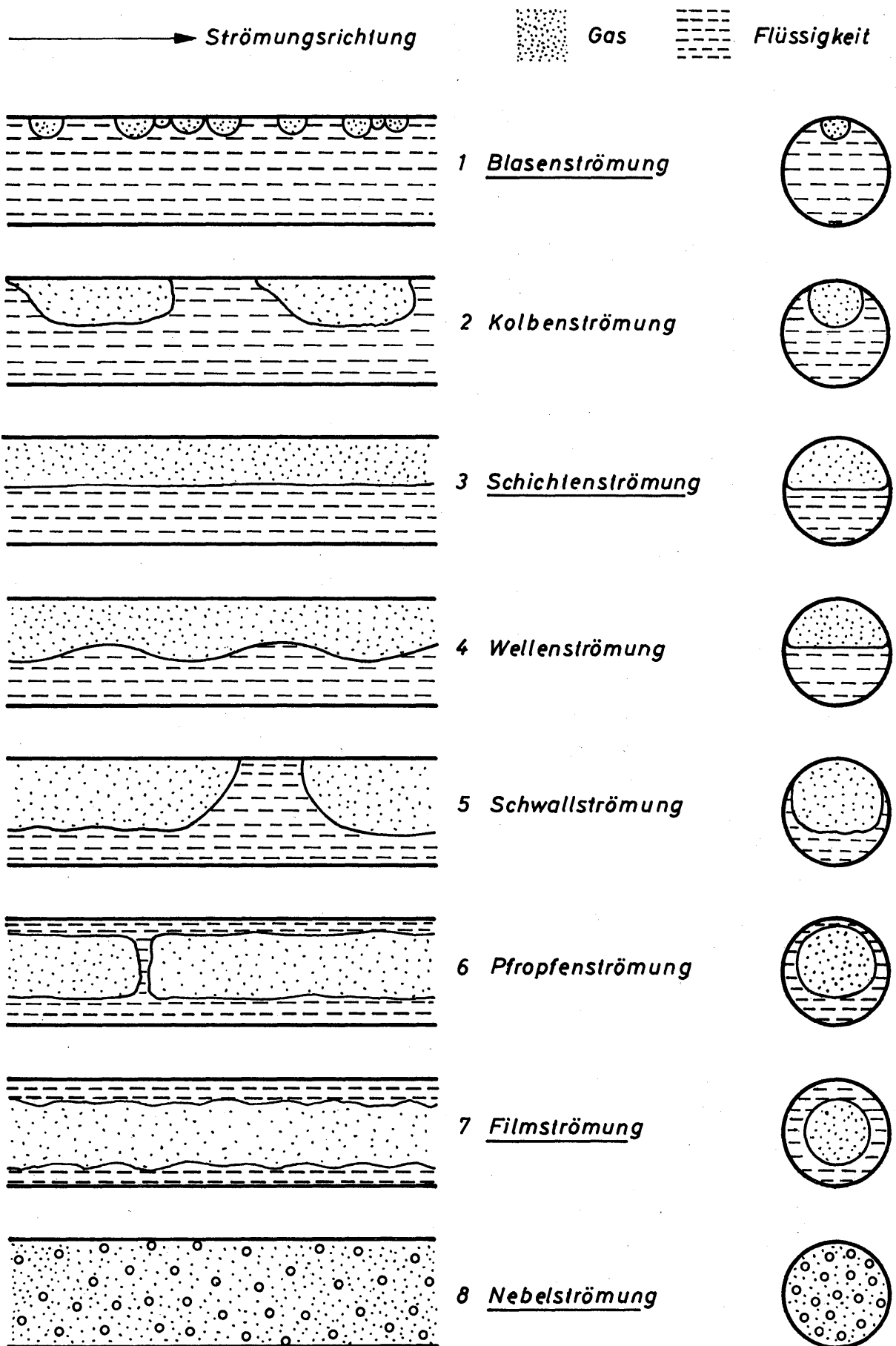


Bild 15.1

Phasenverteilungszustände bei der Gas-Flüssigkeits-Strömung im horizontalen Rohr

Der erste Zwischenzustand ist die Wellenströmung. Der Gasstrom überträgt auf die Flüssigkeitsströmung eine Schubspannung, die bei Überschreiten eines bestimmten Wertes zur Ausbildung der Wellen führt. Dabei wird gleichzeitig die Oberflächenspannungskraft wieder bedeutsam, die bei der Schichtenströmung nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Durch zunehmende Erhöhung des Gasdurchsatzes und somit auch Erhöhung der Schubspannung an der Phasengrenzfläche wird die Wellenbewegung weiter angefacht. Dabei erreichen einzelne Wellenberge eine so große Höhe, daß sie auf Grund ihres Druckwiderstandes als Schwall durch das Rohr geschoben werden. Mit zunehmender Lauflänge erhöht sich der Wellenberg so weit, daß er schließlich den gesamten Rohrquerschnitt ausfüllt. Damit ist die Schwallströmung erreicht. Die Gasphase ist wieder diskontinuierlich geworden. Gleichzeitig nimmt die Wirkung der Oberflächenspannungskraft zu, und die Flüssigkeit beginnt an der Rohrwand hochzusteigen.

Eine weitere Erhöhung des Gasdurchsatzes führt schließlich zur Pfropfenströmung. Die Flüssigkeit hat sich dabei bereits über den ganzen Rohrumfang verteilt, wobei die Dicke des Flüssigkeitsfilmes aber noch sehr unterschiedlich sein kann. In größeren Abständen befinden sich Flüssigkeitsmembranen, die die Gasphase in Pfropfen unterteilen. Der Druck ist in benachbarten Gaspfropfen nicht gleich groß, die Differenz aber auch noch nicht groß genug, als daß die Druckkraft die Flüssigkeitsmembrane zerstören könnte.

Erst bei einem noch wesentlich höheren Gasdurchsatz werden die Flüssigkeitsmembranen zerschlagen und man beobachtet die reine Filmströmung. Hierbei ist wieder die Grenzflächenschubspannung die maßgebende Kraft, ohne daß die Oberflächenspannungskraft völlig bedeutungslos würde. Bei der Filmströmung liegen beide Phasen in kontinuierlicher Verteilung vor.

Der äußerste Grenzfall der Gas-Flüssigkeits-Strömung im Rohr ist die Nebelströmung. Die noch vorhandene Flüssigkeit ist durch die große Grenzflächenschubspannung von der Wand losgelöst worden und hat sich unter der Wirkung der Oberflächenspannung zu kleinen Tropfen zusammengeschlossen.

Da die Betrachtung der Phasenverteilungszustände in Richtung steigender Gasbelastung erfolgte, lag im ersten Verteilungszustand das Gas als diskontinuierliche und die Flüssigkeit als kontinuierliche Phase vor. Im letzten Verteilungszustand ist das Gas die kontinuierliche und die Flüssigkeit die diskontinuierliche Phase. Somit haben Gas und Flüssigkeit ihre Rollen getauscht. Den Zustand der diskontinuierlichen Phase bestimmt im wesentlichen die Oberflächenspannung, bei der Blasenströmung also das Verhalten der Gasphase und bei der Nebelströmung das Verhalten der Flüssigkeitsphase.

Alle Zwischenzustände, die zwischen der Blasen- und der Nebelströmung liegen, kommen durch die Einwirkung von Trägheitskraft, Reibungskraft mit besonderer Bedeutung der Grenzflächenschubspannung, der Druckkraft, der Massenkraft und schließlich der Oberflächenspannungskraft zustande. Bei jeder Phasenverteilung ist nur eine dieser Kräfte die entscheidende. Für die vier Grundverteilungsformen ergibt sich folgende Zuordnung:

Blasenströmung –	Gasphase diskontinuierlich:	Oberflächenspannungskraft
Schichtenströmung –	beide Phasen kontinuierlich:	Grenzflächenschubspannung
Filmströmung –	beide Phasen kontinuierlich:	Grenzflächenschubspannung
Nebelströmung –	Flüssigkeit diskontinuierlich:	Oberflächenspannungskraft

Ähnlich wie im horizontalen Rohr bilden sich auch bei der Gas-Flüssigkeits-Strömung im senkrechten Rohr besondere Phasenverteilungen aus, die sich aber nicht grundsätzlich von denen im waagerechten Rohr unterscheiden. Ein wichtiger Unterschied besteht jedoch darin, daß Gas und Flüssigkeit nicht die gleiche Strömungsrichtung haben müssen. Im senkrechten Rohr können drei Richtungs-fälle unterschieden werden:

- Gas und Flüssigkeit strömen aufwärts.
- Gas und Flüssigkeit strömen abwärts.
- Gas strömt aufwärts, Flüssigkeit aber abwärts.

In dieser Reihenfolge sollen die zugehörigen Verteilungsformen betrachtet werden. *Bild 15.2* zeigt die Zustände der Phasenverteilung bei senkrechtem Aufwärtsströmen beider Phasen in der Reihenfolge zunehmender Gasbelastung. Bei sehr kleinen Gasbelastungen bilden sich zunächst verhältnismäßig kleine kugelförmige Blasen, deren Bewegung im wesentlichen von der Rohrwand unbeeinflusst bleibt. Erst wenn der Durchmesser der entstehenden Blasen mit dem Rohrdurchmesser nahezu übereinstimmt, wird die Blasenbewegung durch die Rohrwand stark beeinflusst. Dabei kommt es dann zu den charakteristischen Schirmblasen. Die Blasen berühren an keiner Stelle die Rohrwand selbst, vielmehr besteht zwischen Blase und Rohrwand ein dünner Flüssigkeitsfilm, entlang dem die Blasen durch das Rohr aufwärts gleiten. Der Flüssigkeitsfilm dient der Blase sozusagen als Schmierfilm.

Mit weiter zunehmender Gasbelastung bildet sich dann zunächst die Kolbenströmung aus, wobei die Gaskolben ebenfalls durch einen Flüssigkeitsfilm von der Wand getrennt sind. Das Kolbenvolumen nimmt weiterhin zu und das Flüssigkeitsvolumen zwischen aufeinanderfolgenden Kolben ab, so daß nur noch eine dünne Flüssigkeitsmembran bestehen bleibt. Bei genügend großem Druckunterschied zwischen zwei Gaskolben wird die Membran schließlich zerstört, und

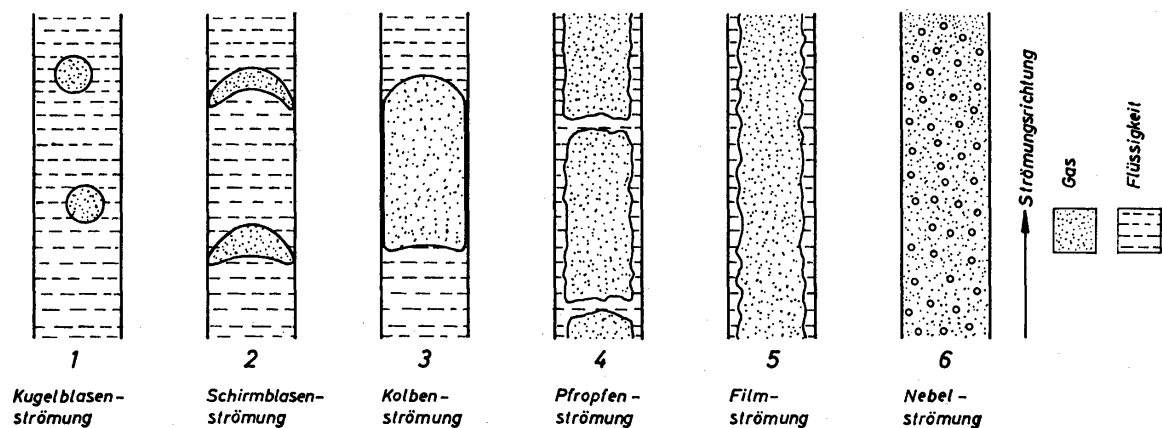


Bild 15.2

Phasenverteilungszustände bei der Gas-Flüssigkeits-Strömung im vertikalen Rohr

es entsteht die Filmströmung. Diese geht dann bei sehr großen Gasbelastungen in die Nebelströmung über.

Diese Ausführungen in Verbindung mit den schematischen Darstellungen in *Bild 15.2* lassen die große Ähnlichkeit der Gas-Flüssigkeits-Bewegung bei Gleichstrom beider Phasen in waagerechten und senkrechten Rohren erkennen. Bei senkrechten tritt als neue Strömungsform die Schirmblasenströmung (als Grenzfall der Kugelblasenströmung) auf. Es entfallen jedoch die Schichtenströmung und die daraus entstehende Wellen- und Schwallströmung. Die Unterschiede zwischen den Verteilungszuständen im senkrechten und waagerechten Rohr sind also allein durch die Rohranordnung bedingt und nicht von grundsätzlicher Bedeutung.

Strömen in einem senkrechten Rohr beide Phasen abwärts, so kann es zu den gleichen Strömungsformen kommen wie beim Aufwärtsstrom. Blasenströmung entsteht bei sehr kleinen Blasendurchmessern und sehr großer Viskosität der Flüssigkeit. Bei Erhöhung der Gasbelastung kommt es dann aber sehr bald zur Filmströmung. Im Grenzfall sehr hoher Gasbelastung tritt schließlich wieder die Nebelströmung auf. Für die Praxis interessiert vornehmlich die Filmströmung und in manchen Fällen die Nebelströmung.

Von sehr großer Bedeutung ist schließlich der Fall, daß die Flüssigkeit abwärts- und das Gas aufwärtsströmt. Der Gegenstrom zweier Phasen führt stets zu den günstigsten Bedingungen für den Wärme- und den Stoffaustausch. Beim Gegenstrom tritt praktisch nur die Film- und als Grenzfall die Nebelströmung auf.

Während beim Gleichstrom Gas und Flüssigkeit in beliebigem Volumverhältnis auftreten können, ist das beim Gegenstrom nicht der Fall. Durch die Übertragung einer Schubspannung vom Gasstrom auf die Flüssigkeit wird der Flüssigkeitsstrom bei einer bestimmten Gasgeschwindigkeit aufgestaut. Dieser Vorgang ist in *Bild 15.3* in verschiedenen Stadien sichtbar gemacht. Hierbei strömt die

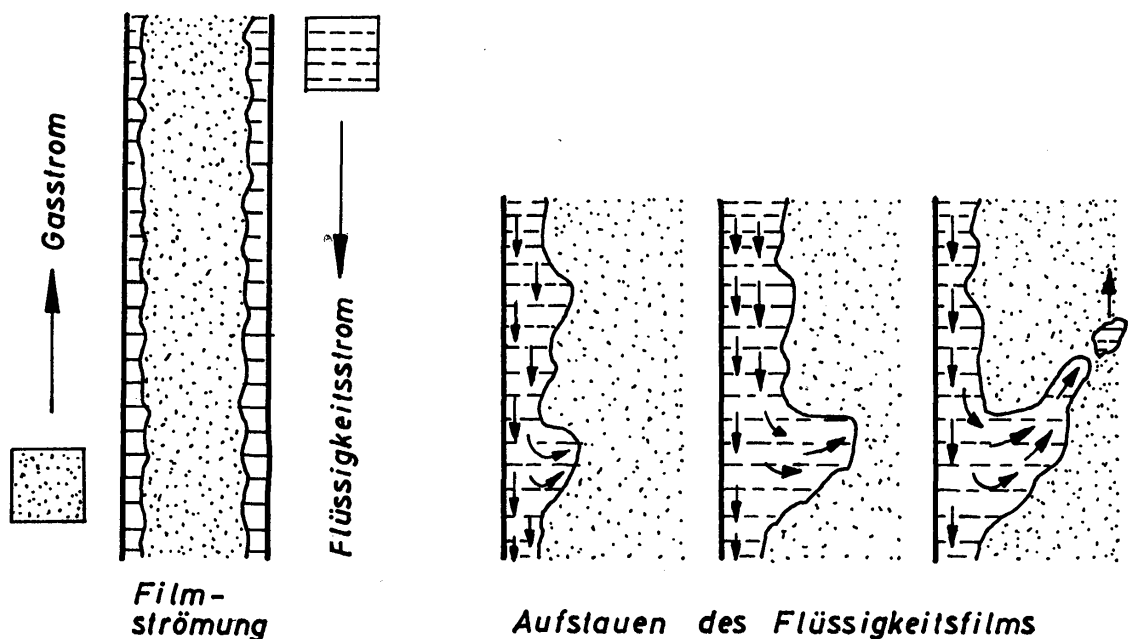


Bild 15.3

Zur Erläuterung des Gegenstromes von Gas und Flüssigkeit im vertikalen Rohr

Flüssigkeit an der Wand noch abwärts, während sie in der Nähe der Phasengrenze unter der Einwirkung der Grenzflächenschubspannung bereits nach oben zu strömen beginnt. Dabei bildet sich ein rasch ansteigender Wellenberg aus, der durch den angreifenden Staudruck des Gasstromes langsam nach oben geschoben wird und in den die von oben kommende Flüssigkeit zum größten Teil einmündet. Bei sehr großer Höhe des aufgestauten Flüssigkeitsberges wird dieser durch den Staudruck des Gases in Tropfen aufgelöst. Damit ist die obere Grenze für den praktischen Betrieb einer solchen Anlage erreicht.

Zusammenfassend läßt sich über die Formen der Phasenverteilung sagen, daß sich bei kleinen Gasbelastungen die Blasenströmung und bei großen Gasbelastungen die Filmströmung einstellt. Dazwischen liegen eine ganze Reihe von Phasenverteilungszuständen, die von zahlreichen Einflüssen abhängen. Es wurde bereits gesagt, daß hierfür die Trägheits-, Reibungs-, Druck-, Massen- und Oberflächen-

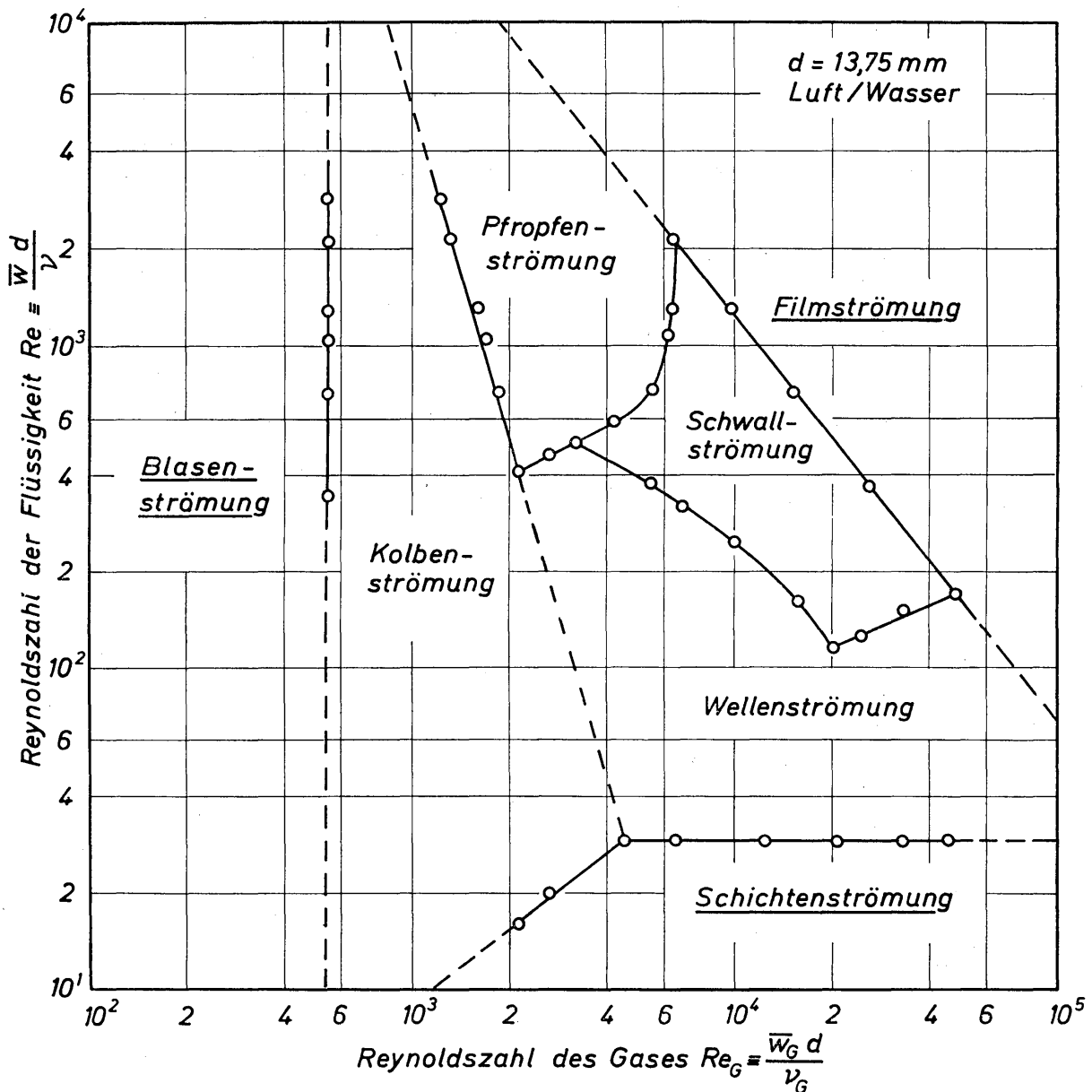


Bild 15.4. Bereiche der Phasenverteilungszustände für die Gas-Flüssigkeits-Strömung im horizontalen Rohr; die eingezeichneten Punkte auf den Grenzkurven stellen Meßwerte dar

spannungskraft von besonderer Bedeutung sind. Damit üben auch die geometrischen Größen und die Stoffeigenschaften der Flüssigkeit und des Gases einen Einfluß aus. Berücksichtigt man alle diese Einflußgrößen, so überrascht es nicht, daß es bislang nicht gelungen ist, die Phasenverteilungszustände für bestimmte Betriebsbedingungen einwandfrei vorauszusagen. Die bisherigen Bemühungen haben nur zu einer Darstellung geführt, die in *Bild 15.4* angegeben ist. Hier sind in ein Koordinatennetz mit der Reynoldszahl Re_G des Gases als Abszisse und der Reynoldszahl Re der Flüssigkeit als Ordinate die Bereiche für verschiedene Phasenverteilungen angegeben. Diese Darstellung gilt für das System Luft/Wasser, das durch ein horizontales Rohr strömt, wobei der Rohrdurchmesser $d = 13,75 \text{ mm}$ ist [15.2]. Obgleich die Bedeutung dieses Diagramms damit stark eingeschränkt ist, läßt es wenigstens deutlich erkennen, daß die drei Hauptzustände, Blasen-, Schichten- und Filmströmung, die anderen Phasenverteilungszustände gewissermaßen einrahmen, wodurch deren Übergangscharakter nochmals hervorgehoben wird. Versuche, ein allgemeingültiges Diagramm zur Bestimmung der Phasenverteilungszustände aufzustellen, sind bislang noch nicht erfolgreich gewesen. QUANDT [15.5] hat hierzu jedoch einen Beitrag geliefert, indem er die für die Phasenverteilungszustände maßgebenden Kräfte analysierte und Kennzahlen bildete. Mit deren Hilfe lassen sich dann Aussagen über das Auftreten bestimmter Phasenverteilungszustände machen. Der Vergleich mit experimentell gewonnenen Angaben führte aber noch nicht zu einer in jeder Hinsicht befriedigenden Übereinstimmung.

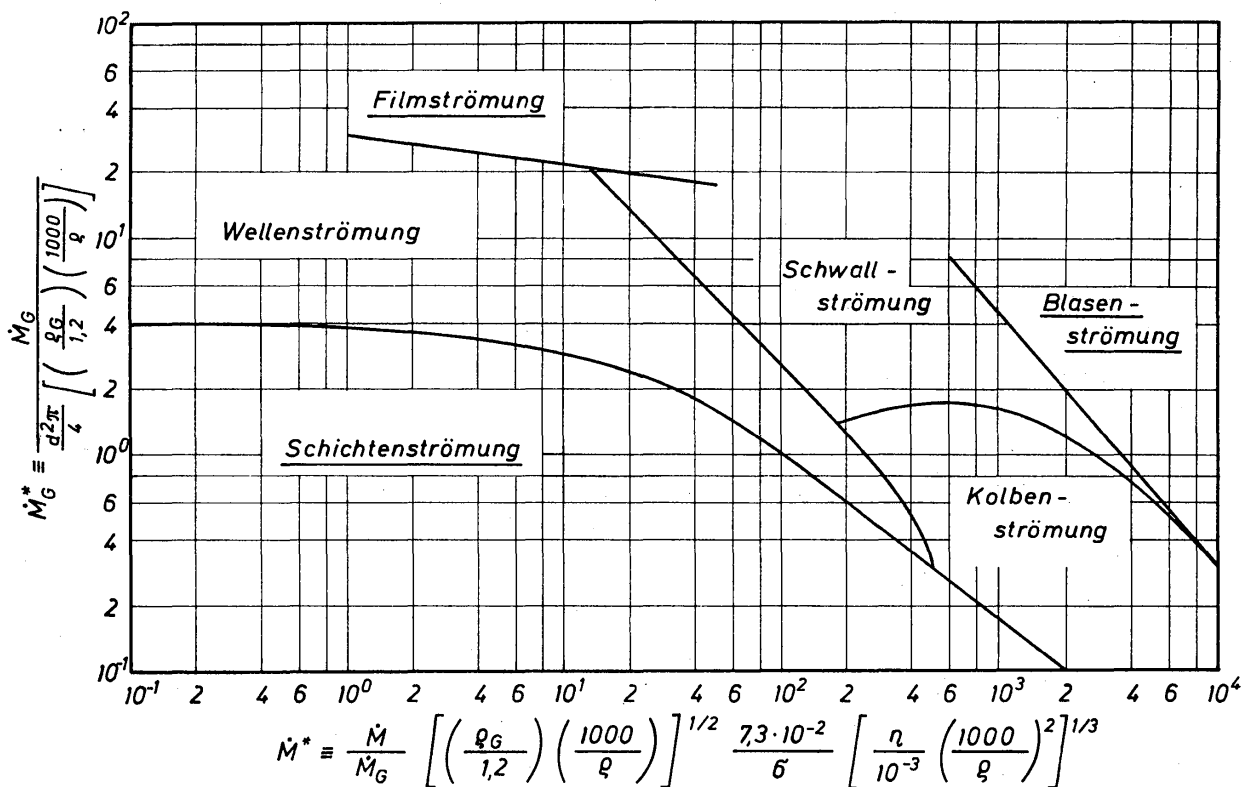


Bild 15.5. Diagramm zur Ermittlung der Phasenverteilungszustände für eine Gas-Flüssigkeits-Strömung im horizontalen Rohr; vorgeschlagen von BAKER, korrigiert von SCHICHT [15.4]

Eine gewisse praktische Bedeutung zur Ermittlung der Phasenverteilungszustände scheint ein von BAKER [15.3] entwickeltes Diagramm zu erlangen. In der von SCHICHT [15.4] veränderten Form ist das Diagramm in *Bild 15.5* wiedergegeben. Hierin wird die für den Gasstrom maßgebende dimensionsbehaftete Größe \dot{M}_G^* [kg/m² s] über der dimensionslosen Größe \dot{M}^* , die im wesentlichen das Verhältnis der Massenströme für Gas und Flüssigkeit enthält, aufgetragen. Es bedeuten \dot{M} und \dot{M}_G die Massenströme der Flüssigkeit und des Gases, ρ und ρ_G die zugehörigen Dichten, η die dynamische Viskosität der Flüssigkeit, σ die Oberflächenspannung und d den Rohrdurchmesser. Die Definition der Größen \dot{M}_G^* und \dot{M}^* ist noch sehr unbefriedigend. Die Stoffwerte der Fluide sind, damit dimensionsfreie Verhältnisse entstehen, mit denen für Luft bzw. Wasser ins Verhältnis gesetzt. Das Diagramm sollte nur mit großer Vorsicht angewendet werden.

Man wird erwarten dürfen, daß sich das Interesse der Forschung der Klärung der Phasenverteilungszustände in Zukunft in verstärktem Maße zuwendet. Denn wenn der Phasenverteilungszustand eindeutig vorausgesagt werden kann, dann ist es gerechtfertigt, für jeden einzelnen Zustand gesonderte Strömungsgesetze zu ermitteln. Diese werden eine viel größere Genauigkeit aufweisen können als die heute noch für alle Zustände gemeinsam angewendeten Gesetzmäßigkeiten.

Auf Grund der obigen Ausführungen scheint der Versuch, die für den Ingenieur interessanten Angaben über Druckverlust, Flüssigkeitsinhalt des Rohres und Staugrenze zu ermitteln, keine große Aussicht auf Erfolg zu bieten. Es hat sich indes herausgestellt, daß man die gesteckten Ziele zumindest näherungsweise erreichen kann, wenn man zunächst die Strömung für einen bestimmten Phasenverteilungszustand untersucht. Die sich aus dieser Untersuchung ergebenden Informationen sind bereits eine wertvolle Grundlage für Rechnungen und Messungen in Bereichen mit anderen Phasenverteilungszuständen. Als besonders geeignet erweist sich für ein solches Vorgehen die gründliche Erforschung der Gas-Film-Strömung im senkrechten Rohr.

15.2 Gas-Film-Strömung im senkrechten Rohr

15.21 Theorie der Gas-Film-Strömung

In diesem Abschnitt soll die Filmströmung mit angrenzendem Gasstrom zunächst theoretisch behandelt werden [15.6]. Die Ergebnisse bilden die Grundlage für die Deutung von Versuchsergebnissen und für die Aufstellung empirischer Gleichungen. Bei der Berechnung der Gas-Film-Strömung hat man zwischen drei Fällen zu unterscheiden:

- a) Filmströmung und Gasströmung sind abwärts gerichtet (*Gleichstrom abwärts*). Dieser Fall tritt beispielsweise bei der Kondensation von Dämpfen auf.
- b) Filmströmung ist abwärts und Gasströmung ist aufwärts gerichtet (*Gegenstrom*). Dieses ist der bei Stoffaustauschvorgängen bevorzugte Fall; als Beispiele seien die Rektifikation und Absorption genannt.

- c) Filmströmung und Gasströmung sind aufwärts gerichtet (*Gleichstrom aufwärts*). Dieser Strömungsfall tritt bei der Förderung von Flüssigkeiten im Gasstrom auf.

Es sind also zwei Gleichstromfälle und ein Gegenstromfall zu behandeln. Für jeden Fall ist in *Bild 15.6* die Geschwindigkeitsverteilung im Film- und im Gasstrom dargestellt. Die gemeinsame Grenzfläche von Gas und Flüssigkeit wird Phasengrenzfläche genannt. Die in der Phasengrenzfläche wirksame Schubspannung heißt Grenzflächenschubspannung τ_δ . Durch diese Größe sind der Gas- und der Flüssigkeitsstrom verknüpft. Berücksichtigt man τ_δ , so lassen sich Film- und Gasströmung getrennt berechnen. In dieser Form wird im folgenden auch vorgegangen. Es sei vorausgesetzt, daß Flüssigkeit und Gas laminar strömen.

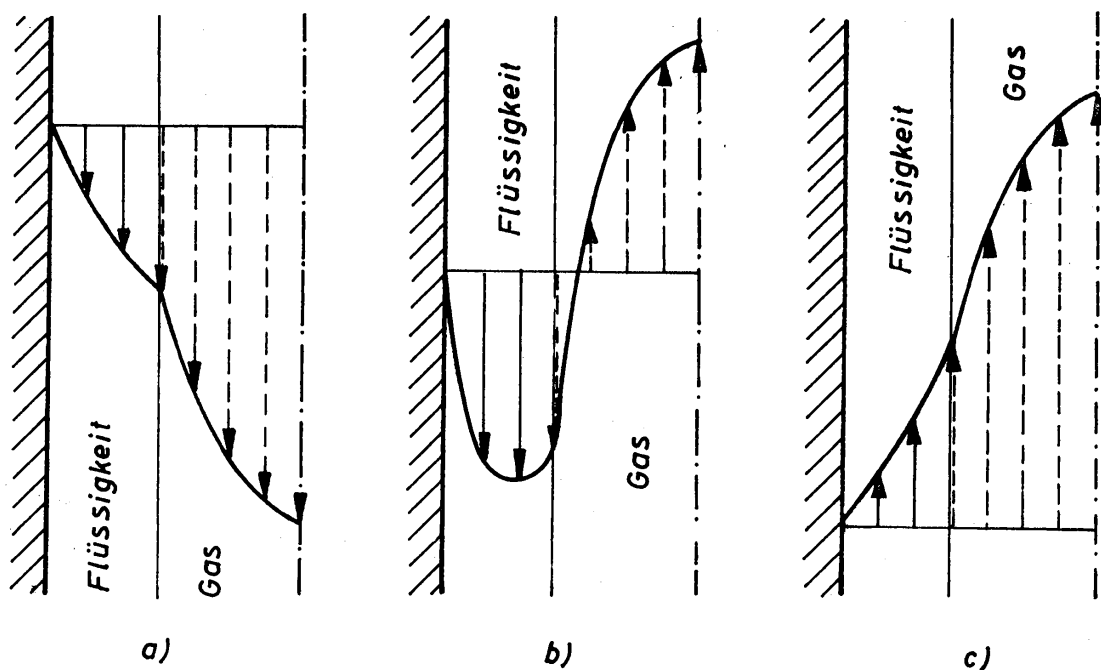


Bild 15.6. Form der Geschwindigkeitsprofile für die drei Richtungsfälle bei der Gas-Film-Strömung im senkrechten Rohr

15.211 Gesetze der Filmströmung

Wie schon bei der Betrachtung des Rieselfilms wird auch hier wieder angenommen, daß keine Druck- und Beschleunigungskräfte auftreten und daß die Filmdicke stets klein ist im Vergleich zum Rohrradius. Die letzte Annahme bedeutet, daß man die Filmströmung im Rohr durch die an einer ebenen Wand ersetzen darf. UCKE [15.7] ließ diese Annahme jedoch in einer theoretischen Arbeit fallen. Innerhalb des praktisch interessanten Bereiches ergaben sich keine entscheidenden Abweichungen. Mit den Bezeichnungen in *Bild 15.7* gilt für den ebenen Flüssigkeitsfilm die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = -\frac{g}{\nu} \quad (15.1)$$

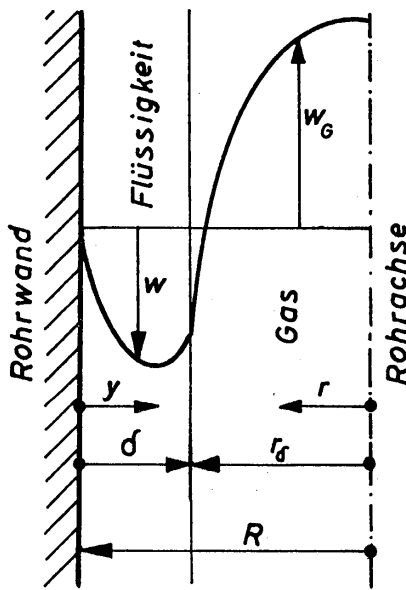


Bild 15.7. Bezeichnungen zur Berechnung der Gas-Film-Strömung

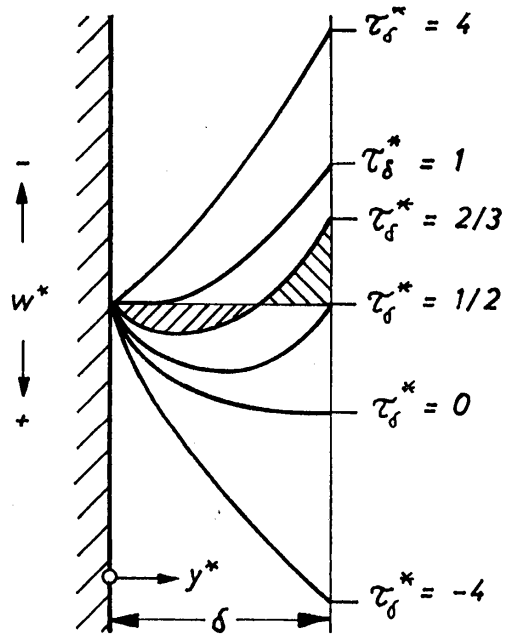


Bild 15.8. Geschwindigkeitsprofile im Flüssigkeitsfilm für verschiedene Werte der dimensionslosen Schubspannung an der Phasengrenzfläche τ_δ^*

mit den Randbedingungen:

$$y = 0: \quad w = 0$$

$$y = \delta: \quad \frac{dw}{dy} = -\frac{\tau_\delta}{\eta}$$

Es bedeuten w örtliche Geschwindigkeit, y Wandabstand, δ Filmdicke, g Erdbeschleunigung, $\nu = \eta/\rho$ kinematische und η dynamische Viskosität. Nach Integration ergibt sich für die Geschwindigkeitsverteilung im Flüssigkeitsfilm die Beziehung:

$$w = \frac{g \delta^2}{\nu} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - \frac{\tau_\delta}{g \cdot \rho \cdot \delta} \frac{y}{\delta} \right]. \quad (15.2)$$

Verwendet man die dimensionslosen Größen

$$\left. \begin{aligned} \tau_\delta^* &\equiv \frac{\tau_\delta}{g \cdot \rho \cdot \delta}, \\ y^* &\equiv \frac{y}{\delta} \quad \text{und} \\ w^* &\equiv \frac{w}{g \cdot \delta^2 / \nu}, \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

so erhält man in verkürzter Schreibweise:

$$w^* = y^* \left[1 - \frac{1}{2} y^* - \tau_\delta^* \right]. \quad (15.4)$$

In Bild 15.8 sind einige hiernach berechnete Geschwindigkeitsprofile abhängig vom Wandabstand y^* und von der Grenzflächenschubspannung τ_δ^* dargestellt.

Für $\tau_\delta^* = 0$ ergibt sich der Sonderfall des Rieselfilms; das Profil hat die bereits bekannte Form der Halbparabel. Strömt das Gas abwärts, wobei τ_δ^* negative Werte annimmt, so wird das Profil in zunehmendem Maße gestreckt. Im Grenzfall sehr großer negativer Werte von τ_δ^* ergibt sich eine geradlinige Geschwindigkeitsverteilung. Ändert sich die Strömungsrichtung des Gases, so wird τ_δ^* positiv. Das Geschwindigkeitsprofil des Flüssigkeitsfilms wird dabei so umgeformt, daß zunächst eine Vollparabel und schließlich, für $\tau_\delta^* \rightarrow +\infty$, wieder ein geradliniges Profil entsteht.

Von besonderem Interesse ist jener Bereich von τ_δ^* , in dem sich die Strömungsrichtung des Flüssigkeitsfilmes umkehrt. Ausgehend von dem Profil für $\tau_\delta^* = 0$ erhält man bei $\tau_\delta^* = 1/2$ eine Vollparabel. Hierbei ist die Oberflächengeschwindigkeit des Flüssigkeitsfilmes gerade zu Null geworden. Die gesamte Flüssigkeit im Film strömt dabei aber noch abwärts. Bei weiterer Erhöhung der Grenzflächenschubspannung τ_δ^* ergibt sich mit $\tau_\delta^* = 2/3$ ein zweiter bedeutsamer Verlauf für die Geschwindigkeit. Die Oberflächengeschwindigkeit w_δ ist jetzt bereits negativ, d.h. nach oben gerichtet. In einer wandnahen Schicht strömt aber noch Flüssigkeit abwärts. Im Mittel heben sich aufwärts- und abwärtsströmende Flüssigkeit gerade auf; die mittlere Filmgeschwindigkeit ist Null. Eine nur geringfügige Erhöhung der Grenzflächenschubspannung auf $\tau_\delta^* = 1$ führt zu einem Geschwindigkeitsprofil, das an der Wand eine horizontale Tangente aufweist. Die Wandschubspannung τ_w ist gleich Null, und die gesamte Flüssigkeit fließt nach oben. Mittels der Darstellung in *Bild 15.8* lassen sich für die drei Richtungsfälle der Gas-Film-Strömung folgende Grenzen angeben:

$$\begin{array}{ll} \tau_\delta^* \leq 0 & \text{Gleichstrom abwärts} \\ 0 \leq \tau_\delta^* \leq 2/3 & \text{Gegenstrom} \\ 2/3 \leq \tau_\delta^* & \text{Gleichstrom aufwärts} \end{array}$$

Diese Grenzen werden bei allen weiteren Rechnungen auftreten.

Aus Gl.(15.4) folgt mit $y^* = 1$ die Oberflächengeschwindigkeit zu

$$w_\delta^* = \frac{1}{2} - \tau_\delta^*. \quad (15.5)$$

Die mittlere Filmgeschwindigkeit berechnet man mittels der Definition

$$\bar{w}^* = \int_0^1 w^* dy^* \quad (15.6)$$

unter Verwendung von Gl.(15.4) für w^* zu

$$\bar{w}^* = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \tau_\delta^*. \quad (15.7)$$

Hierin ist \bar{w}^* die bezogene mittlere Geschwindigkeit, definiert durch

$$\bar{w} \equiv \frac{\bar{w}}{g \cdot \delta^2 / \nu}. \quad (15.8)$$

Damit ist man in der Lage, das Verhältnis von Oberflächengeschwindigkeit w_δ und mittlerer Geschwindigkeit \bar{w} zu berechnen:

$$\frac{w_\delta}{\bar{w}} = \frac{\frac{1}{2} - \tau_\delta^*}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \tau_\delta^*}. \quad (15.9)$$

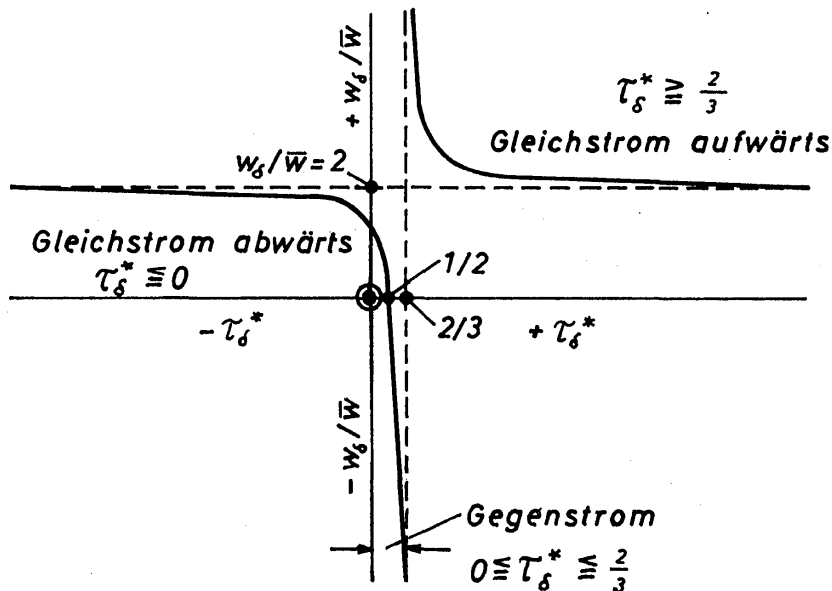


Bild 15.9. Änderung des Geschwindigkeitsverhältnisses w_δ/\bar{w} mit der Schubspannung an der Phasengrenzfläche τ_δ^*

In *Bild 15.9* ist der hierdurch festgelegte Kurvenverlauf dargestellt. Bei $\tau_\delta^* = 2/3$ ergibt sich eine Polstelle, da bei diesem Wert $\bar{w} = 0$ wird. In Richtung sehr großer positiver und negativer Werte von τ_δ^* nähert sich w_δ/\bar{w} sehr schnell dem Wert 2. Im Gegenstrombereich wird $w_\delta/\bar{w} = 0$ bei $\tau_\delta^* = 1/2$, da hier die Oberflächengeschwindigkeit gerade Null ist.

Für die Schubspannung im Flüssigkeitsfilm folgt mit der allgemeinen Gleichung

$$\tau = \eta \cdot \frac{dw}{dy} \quad (15.10)$$

und mit dem durch Differenzieren von Gl.(15.2) erhaltenen Geschwindigkeitsgradienten die Beziehung:

$$\tau^* = 1 - y^* - \tau_\delta^*. \quad (15.11)$$

Mit τ^* wird die dimensionslose örtliche Schubspannung gemäß der Definition

$$\tau^* \equiv \frac{\tau}{g \cdot \rho \cdot \delta} \quad (15.12)$$

bezeichnet. Für $y^* = 0$ erhält man die Wandschubspannung zu

$$\tau_w^* = 1 - \tau_\delta^*. \quad (15.13)$$

Hieraus erkennt man, daß $\tau_w^* = 0$ wird, wenn $\tau_\delta^* = 1$ ist. Das bedeutet, daß das Geschwindigkeitsprofil eine horizontale Tangente aufweisen muß, worauf bereits hingewiesen wurde.

In allen bisher abgeleiteten Gleichungen trat die Filmdicke auf, ohne daß hierfür eine Beziehung angegeben wurde. Man erhält diese Beziehung aus der Kontinuitätsgleichung $\dot{V} = \bar{w} U \delta$ unter Benutzung einer bereits früher angegebenen Definition der Reynoldszahl des Flüssigkeitsfilms:

$$Re \equiv \frac{\dot{V}}{U \nu}. \quad (15.14)$$

Hierin bedeuten \dot{V} den Volumstrom der Flüssigkeit; U den Rohrumfang und ν die kinematische Viskosität der Flüssigkeit. Nach früheren Ausführungen ist $\dot{V}/U = \bar{w} \delta$; unabhängig davon, ob an den Flüssigkeitsfilm ein Gasstrom grenzt oder nicht, also auch unabhängig davon, welchen Wert τ_δ hat. Bezeichnet man mit $\bar{w}_0 \cdot \delta_0$ die Größen für den Rieselfilm, für den $\tau_\delta = 0$ ist, so läßt sich auch schreiben:

$$Re \equiv \frac{\bar{w}_0 \delta_0}{\nu} = \frac{\bar{w} \delta}{\nu}. \quad (15.15)$$

Hieraus folgt zunächst $\delta/\delta_0 = \bar{w}_0/\bar{w}$ und unter Verwendung der Gleichungen für die mittleren Filmgeschwindigkeiten die gesuchte Gleichung für die Filmdicke:

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{2} \tau_\delta^*\right)^{1/3}} \equiv \frac{1}{A}. \quad (15.16)$$

Von der Abkürzung $A \equiv (1 - 3 \tau_\delta^*/2)^{1/3}$ wird in den weiteren Rechnungen Gebrauch gemacht.

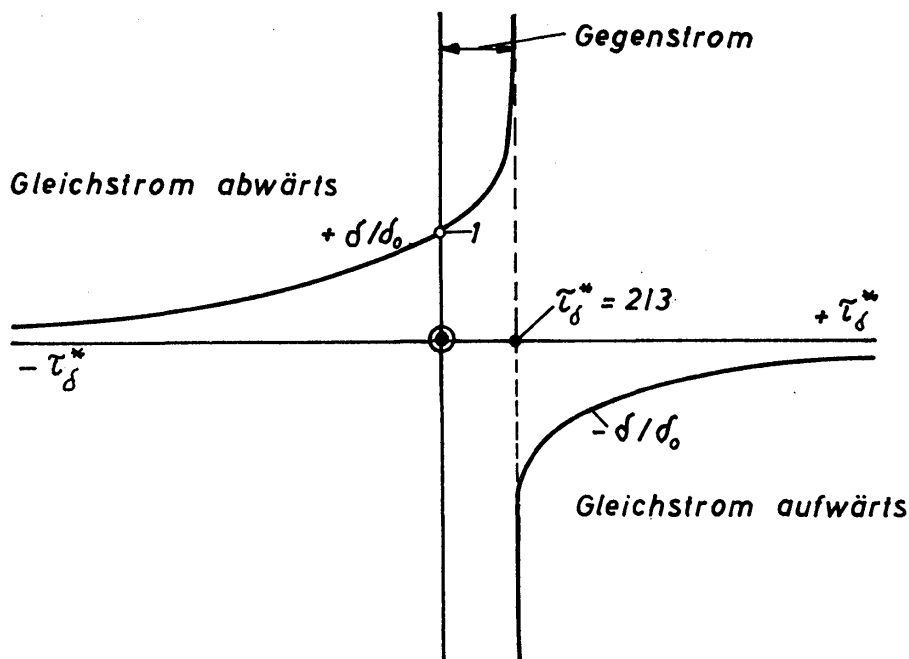


Bild 15.10. Änderung des Filmdickenverhältnisses δ/δ_0 mit der Schubspannung an der Phasengrenzfläche τ_δ^*

In *Bild 15.10* ist δ/δ_0 abhängig von τ_δ^* dargestellt. Bei $\tau_\delta^* = 0$ ist $\delta/\delta_0 = 1$. Des weiteren sei auf die Unendlichkeitsstelle bei $\tau_\delta^* = 2/3$ hingewiesen. Tatsächlich kann aber δ niemals unendlich groß werden, sondern im äußersten Falle gleich dem Rohrradius. Mit $R - r_\delta = \delta$ und $R - r_{\delta_0} = \delta_0$ wird

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{R - r_\delta}{R - r_{\delta_0}}, \quad (15.17)$$

und im Grenzfalle mit $r_\delta = 0$ wird

$$\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)_{\max} = \frac{1}{1 - r_{\delta_0}/R}. \quad (15.18)$$

Nimmt man $r_{\delta_0}/R = 0,9$ an, so wird $(\delta/\delta_0)_{\max} = 10$. Die Kurven für δ/δ_0 müßten also bei $(\delta/\delta_0)_{\max} = 10$ in die in *Bild 15.10* gestrichelt eingezeichnete Linie einlaufen. Wie man bei maßstabgerechter Auftragung von δ/δ_0 über τ_δ^* feststellen kann, wird der Kurvenverlauf praktisch nicht verändert, wenn man bei $\tau_\delta^* = 2/3$ einen endlichen Wert für δ/δ_0 annimmt. Es ist lediglich zu beachten, daß die Voraussetzung $\delta \ll R$, die zur Vereinfachung der Rechnung führte, nicht verletzt wird.

15.212 Gesetze der Gasströmung

Die Differentialgleichung für die örtliche Geschwindigkeit im Gasstrom lautet:

$$\frac{dw_G}{dr} = - \frac{\Delta P}{L \eta_G} \frac{r}{2}. \quad (15.19)$$

Es bedeuten w_G Gaseschwindigkeit, r laufender Radius, ΔP Druckverlust, L Rohrlänge und η_G dynamische Viskosität des Gases. Mit der Randbedingung $w_G = w_\delta$ für $r = r_\delta$ erhält man nach Integration

$$w_G = \frac{\Delta P/L}{4 \eta_G} (r_\delta^2 - r^2) - w_\delta. \quad (15.20)$$

Diese Gleichung soll so umgeformt werden, daß sich eine geeignete dimensionslose Form ergibt. Aus dem Gleichgewicht von Druck- und Reibungskräften folgt

$$\frac{\Delta P}{L} = 2 \frac{\tau_\delta}{r_\delta}. \quad (15.21)$$

Führt man hierin $\tau_\delta = \tau_\delta^* \rho g \delta$ und $r_\delta = R - \delta$ ein, so erhält man mit

$$\frac{\Delta P}{L} = 2 \frac{\tau_\delta^* g \rho}{\frac{R}{\delta_0} A - 1} \quad (15.22)$$

eine Beziehung zwischen τ_δ^* und dem Druckverlust $\Delta P/L$ im Gasstrom. Einsetzen in Gl. (15.20) liefert unter Berücksichtigung von $\eta_G = \nu_G \cdot \rho_G$ die Gleichung

$$w_G = \frac{r_\delta^2 g}{\nu_G} \frac{\tau_\delta^*/2}{\frac{R}{\delta_0} A - 1} \frac{\varrho}{\varrho_G} \left[1 - \left(\frac{r}{r_\delta} \right)^2 \right] - w_\delta. \quad (15.23)$$

Bildet man nun eine dimensionslose örtliche Geschwindigkeit

$$w_G^* \equiv \frac{w_G}{r_\delta^2 g / \nu_G}, \quad (15.24)$$

so folgt

$$w_G^* = \frac{\tau_\delta^*/2}{\frac{R}{\delta_0} A - 1} \frac{\varrho}{\varrho_G} \left[1 - \left(\frac{r}{r_\delta} \right)^2 \right] - \frac{w_\delta}{r_\delta^2 g / \nu_G}. \quad (15.25)$$

Hierin läßt sich der zweite Ausdruck der rechten Seite wie folgt ersetzen:

$$\frac{w_\delta}{r_\delta^2 g / \nu_G} = \frac{\nu_G}{\nu} \frac{w_\delta^*}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1 \right)^2} = \frac{\nu_G}{\nu} \frac{\left(\frac{1}{2} - \tau_\delta^* \right)}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1 \right)^2}. \quad (15.26)$$

Einführen in Gl.(15.25) liefert die endgültige Beziehung für die örtliche Gasgeschwindigkeit:

$$w_G^* = \frac{\tau_\delta^*/2}{\frac{R}{\delta_0} A - 1} \frac{\varrho}{\varrho_G} \left[1 - \left(\frac{r}{r_\delta} \right)^2 \right] - \frac{\nu_G}{\nu} \frac{\frac{1}{2} - \tau_\delta^*}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1 \right)^2}. \quad (15.27)$$

Hieraus kann man deutlich erkennen, von welchen dimensionslosen Größen die Geschwindigkeit des Gases bei der Zweiphasenströmung abhängt. In vereinfachter Form läßt sich schreiben:

$$w_G^* = f \left(\tau_\delta^*, \frac{R}{\delta_0}, \frac{\varrho}{\varrho_G}, \frac{\eta}{\eta_G}, \frac{r}{r_\delta} \right). \quad (15.28)$$

Zum Vergleich sei an die entsprechende Beziehung für die Einphasenströmung erinnert: $w_G^* = f(r/R)$. Während bei der Einphasenströmung w_G^* nur von einer einzigen dimensionslosen Veränderlichen abhängt, bestimmen bei der Zweiphasenströmung fünf Veränderliche die örtliche Geschwindigkeit. Dies gibt einen Hinweis auf die Schwierigkeiten, die bei der Lösung von Problemen der Zweiphasenströmung zu überwinden sind.

Gl.(15.27) soll zum besseren Verständnis zunächst für zwei Sonderfälle betrachtet werden. Wie früher erläutert, wird die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsfilmes an der Grenzfläche zu Null, wenn $\tau_\delta^* = 1/2$ ist. Aus Gl.(15.27) folgt nunmehr mit $r/r_\delta = 1$, daß auch die Gasgeschwindigkeit an der Phasengrenzfläche Null werden muß; *Bild 15.11 a*. Zum zweiten interessiert der Fall $\tau_\delta^* = 0$; es soll also keine Schubspannung am Flüssigkeitsfilm angreifen. Aus Gl.(15.27) folgt zunächst, daß der erste Ausdruck auf der rechten Seite verschwindet. Unter Berücksichtigung von Gl.(15.5) erhält man dann

$$w_G^* = -\frac{v_G}{\nu} \frac{\frac{1}{2} - \tau_\delta^*}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)^2} = -\frac{v_G/\nu}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)^2} w_\delta^* \quad (15.29)$$

Hieraus ergibt sich mit den Gleichungen (15.3) und (15.24), daß bei $\tau_\delta^* = 0$ die Gasgeschwindigkeit w_G gleich der Oberflächengeschwindigkeit w_δ ist. Die Gasgeschwindigkeit hängt nicht von der Radialkoordinate ab; sie ist also konstant über dem Querschnitt. Das war zu erwarten, denn die Geschwindigkeitsverteilung im Flüssigkeitsfilm hat an der Phasengrenzfläche, wie bereits beschrieben, bei $\tau_\delta^* = 0$ eine horizontale Tangente. In *Bild 15.11b* ist das Geschwindigkeitsprofil für $\tau_\delta^* = 0$ dargestellt. Die Bedingung τ_δ^* bzw. $\tau_\delta = 0$ besagt also nicht etwa, daß kein Gasstrom vorhanden ist; $\tau_\delta^* = 0$ besagt lediglich, daß der angrenzende Gasstrom keine Schubspannung auf die Flüssigkeitsoberfläche überträgt. Unter diesem Blickwinkel ist auch der im vorangehenden Kapitel behandelte Rieselfilm zu sehen.

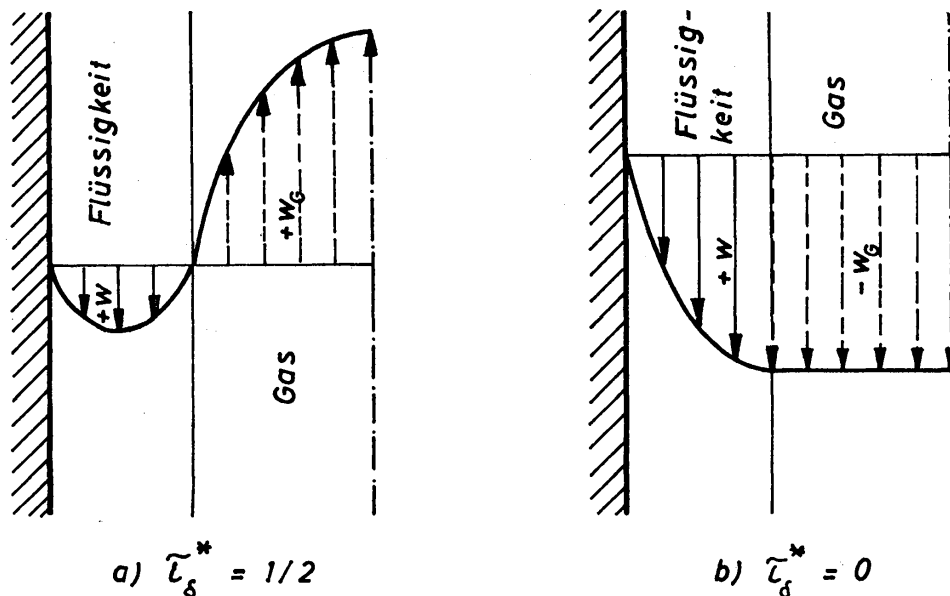


Bild 15.11. Geschwindigkeitsprofile im Flüssigkeitsfilm und im Gasstrom für zwei Werte der Grenzflächenschubspannung τ_δ^*

Die maximale Geschwindigkeit des Gasstromes tritt in Rohrmitte bei $r/r_\delta = 0$ auf. Hierfür folgt aus Gl. (15.27):

$$w_{G_{\max}}^* = \frac{\tau_\delta^*/2}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)} \frac{\rho}{\rho_G} - \frac{v_G}{\nu} \frac{\frac{1}{2} - \tau_\delta^*}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)^2} \quad (15.30)$$

Bei $\tau_\delta^* = 2/3$ wird $w_{G_{\max}}^*$ unendlich groß. Dies folgt aus Gl. (15.30), so man beachtet, daß gemäß Gl. (15.16) gilt $\delta/\delta_0 \rightarrow \infty$. Das ist nur denkbar, wenn mit δ/δ_0 auch R/δ_0 unendlich groß wird. Aus Gl. (15.16) ergibt sich dann $AR/\delta_0 = R/\delta = 1$ und damit aus Gl. (15.30) $w_{G_{\max}}^* \rightarrow \infty$.

Als weitere wichtige Größe ist die mittlere Gasgeschwindigkeit \bar{w}_G^* zu berechnen. Hierfür ergibt sich mit

$$\bar{w}_G^* = \frac{1}{r_\delta^2 \pi} \int_0^{r_\delta} w_G^* 2\pi r dr \quad (15.31)$$

die Beziehung:

$$\bar{w}_G^* = \frac{\tau_\delta^*/4}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)} \frac{\varrho}{\varrho_G} - \frac{\nu_G}{\nu} \frac{\frac{1}{2} - \tau_\delta^*}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)^2}. \quad (15.32)$$

Wie man leicht feststellt, ist für $\tau_\delta^* = 0$ die mittlere Geschwindigkeit \bar{w}^* gleich der örtlichen $w_{\delta_0}^*$, die sich bei verschwindender Schubspannung über dem Querschnitt nicht ändert. Von Interesse für die späteren Rechnungen ist der Fall, bei dem die mittlere Geschwindigkeit $\bar{w}_G^* = 0$ wird. Die hierbei auftretende Grenzflächenschubspannung $\tau_{\delta_0}^*$ hat einen sehr kleinen Wert, so daß $A = 1$ gesetzt werden kann. Dann erhält man aus Gl.(15.32) für die Schubspannung:

$$\tau_G^* = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\eta}{\eta_G} \left(\frac{R}{\delta_0} - 1\right) + 2}. \quad (15.33)$$

Zu beachten ist, daß \bar{w}_G^* wie $w_{G\max}^*$, bei $\tau_\delta^* = 2/3$ gegen Unendlich strebt.

Abschließend soll noch die Reynoldszahl des Gases berechnet werden. Diese ist durch

$$Re_G \equiv \frac{\bar{w}_G 2 r_\delta}{\nu_G} \quad (15.34)$$

definiert und enthält die oben bestimmte mittlere Geschwindigkeit \bar{w}_G und den Radius $r_\delta = R - \delta$; für δ wird Gl. (15.16) unter Verwendung von Gl. (14.21) für δ_0 eingeführt. Hiermit folgt dann für die Reynoldszahl der Ausdruck:

$$Re_G = 2 Re \left(\frac{\nu}{\nu_G} \right)^2 \frac{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)^3}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \tau_\delta^*\right)} \left\{ \frac{\tau_\delta^*/4}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)} \frac{\varrho}{\varrho_G} - \frac{\nu_G}{\nu} \frac{\frac{1}{2} - \tau_\delta^*}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)^2} \right\}. \quad (15.35)$$

In einfacher Schreibweise zeigt sich, daß

$$Re_G = f \left(Re, \tau_\delta^*, \frac{\eta}{\eta_G}, \frac{\varrho}{\varrho_G}, \frac{R}{\delta_0} \right) \quad (15.36)$$

eine Funktion von fünf dimensionslosen Variablen ist, wovon Re die Reynoldszahl der Flüssigkeit bedeutet. Andererseits kann man aus Gl.(15.35) die Schubspannung τ_δ^* berechnen:

$$\tau_\delta^* = f \left(Re_G, Re, \frac{\eta}{\eta_G}, \frac{\varrho}{\varrho_G}, \frac{R}{\delta_0} \right). \quad (15.37)$$

Mittels dieses Zusammenhanges ist es nun möglich, in jeder der bisher abgeleiteten Gleichungen τ_δ^* durch leichter zu bestimmende Größen zu ersetzen.

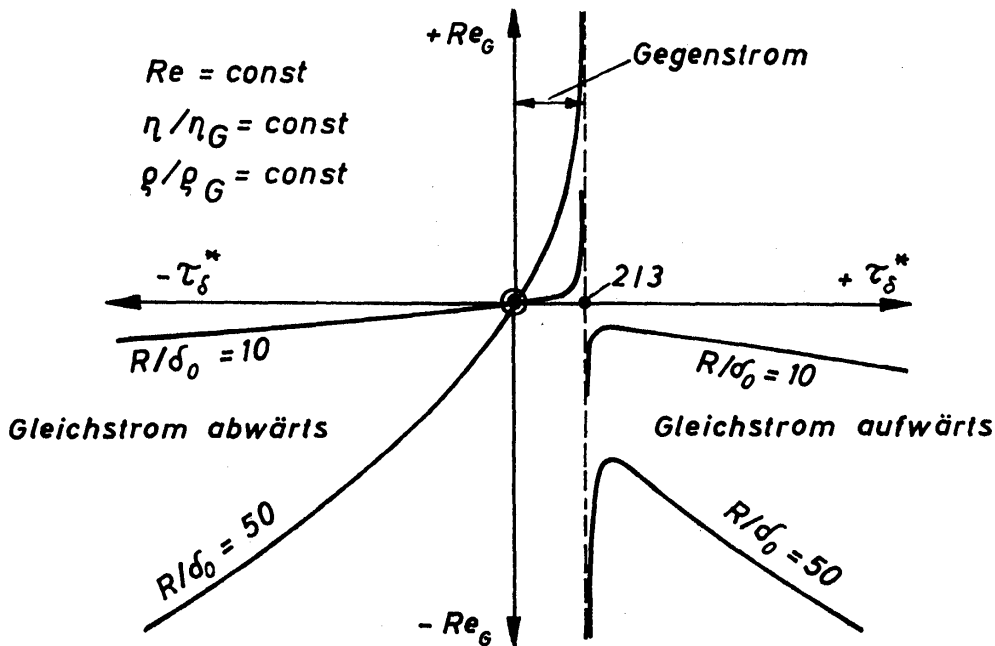


Bild 15.12. Änderung der Reynoldszahl des Gases Re_G mit der Schubspannung τ_δ^* und dem Verhältnis R/δ_0

In *Bild 15.12* ist der Verlauf von Re_G abhängig von τ_δ^* und R/δ_0 dargestellt. Zu beachten ist, daß die Kurven für Re_G nicht durch den Nullpunkt des Koordinatennetzes gehen, sondern die Abszisse bei positiven, wenn auch außerordentlich kleinen Werten für τ_δ^* schneiden. Bei $\tau_\delta^* = 0$ ist Re_G noch negativ, ebenso wie \bar{w}_G^* , was sich an Hand von *Bild 15.11b* nachprüfen läßt. Weiterhin sind die Vorzeichen von Re_G zu beachten, die durch die Wahl der Vorzeichen der Gas- und Flüssigkeitsgeschwindigkeit festgelegt sind. Nur im Gegenstrombereich sind beide Ströme positiv, daher ist auch Re_G positiv. In den beiden Gleichstrombereichen haben Gas- und Flüssigkeitsstrom verschiedene Vorzeichen, daher ergibt sich Re_G als negative Größe. Nachdem für die Reynoldszahl eine Gleichung zur Verfügung steht, soll nun ein Widerstandsgesetz für die Zweiphasenströmung hergeleitet werden.

15.213 Allgemeines Widerstandsgesetz

Das Widerstandsgesetz liefert eine dimensionslose Beziehung für den Druckverlust des Gasstromes. Für die Widerstandszahl ψ gilt bei der Zweiphasenströmung die Definition

$$\psi \equiv \frac{\Delta P}{\rho_G \bar{w}_G^2/2} \frac{2r_\delta}{L} \quad (15.38)$$

Der Druckverlust $\Delta P/L$ ist durch Gl. (15.21) mit der Grenzflächenschubspannung τ_δ verknüpft. Einführen in Gl. (15.38) führt zu

$$\psi \equiv 4 \frac{\tau_\delta}{\rho_G \bar{w}_G^2/2} \quad (15.39)$$

Unter Verwendung der hergeleiteten Beziehung für \bar{w}_G erhält man nach einigen Zwischenrechnungen für das Widerstandsgesetz die Form:

$$\psi = \frac{64}{Re_G K}. \quad (15.40)$$

Hierin ist Re_G durch Gl. (15.34) definiert, und K bedeutet die folgende Funktion:

$$K = 1 - 2 \frac{\eta_G}{\eta} \frac{\left(\frac{1}{\tau_\delta^*} - 2\right)}{\left(\frac{R}{\delta_0} A - 1\right)}. \quad (15.41)$$

Das Widerstandsgesetz für die Zweiphasenströmung unterscheidet sich von dem der Einphasenströmung allein durch das Auftreten der Korrekturgröße K . Volle Übereinstimmung ergibt sich für den Fall, daß $K = 1$ wird. Das trifft aber nur dann zu, wie Gl. (15.41) erkennen läßt, wenn $\tau_\delta^* = 1/2$, wenn also die Geschwindigkeit an der Grenzfläche $w_\delta = 0$ wird. Dieser Fall wurde früher im Zusammenhang mit der Geschwindigkeitsverteilung behandelt (siehe *Bild 15.11 a*). Andererseits zeigt Gl. (15.41) aber auch, daß sich K mit wachsenden positiven oder negativen Werten von τ_δ^* sehr rasch dem Wert 1 nähert. Von besonderer Bedeutung sind daher nur kleine Werte von τ_δ^* für das Widerstandsgesetz.

Berücksichtigt man die in Re_G und K enthaltenen dimensionslosen Größen, so läßt sich das Widerstandsgesetz für die Zweiphasenströmung auch in der allgemeinen Form

$$\psi = f\left(Re_G, Re, \frac{R}{\delta_0}, \frac{\eta}{\eta_G}, \frac{\varrho}{\varrho_G}\right) \quad (15.42)$$

angeben. Zum Vergleich sei auf das Widerstandsgesetz der Einphasenströmung $\psi = f(Re)$ hingewiesen. Das macht noch einmal deutlich, daß Zweiphasenströmungen sehr viel verwickelter sind als Einphasenströmungen.

Die graphische Darstellung des Widerstandsgesetzes erfolgt am zweckmäßigsten in einem Diagramm mit logarithmisch geteilten Koordinaten. Der Nachteil eines solchen Netzes ist der fehlende Nullpunkt. Auch läßt sich der Vorzeichenwechsel im Kurvenverlauf nicht unmittelbar erkennen. Es soll daher zunächst an Hand von *Bild 15.13* der schematisch angedeutete Kurvenverlauf für alle Strömungsbereiche, insbesondere im Hinblick auf die Vorzeichen der Reynoldszahl und der Widerstandszahl, erläutert werden. Da ψ allein als Funktion von Re_G dargestellt ist, sind also die anderen Kennzahlen konstant gesetzt worden. Für andere Werte von η/η_G , ϱ/ϱ_G , R/δ_0 und Re würden sich andere, aber im Verlauf ähnliche Kurven ergeben. Wir beginnen mit dem abwärts gerichteten Gleichstrom, dargestellt durch die ausgezogene Kurve c im 3. Quadranten, und zwar bei großen negativen Werten der Reynoldszahl. Mit abnehmenden Beträgen der Reynoldszahl wird der Betrag der Widerstandszahl zunächst größer, erreicht beim Punkt 1 ein Maximum und endet im Punkt 2. Im Punkt 2 ist die Grenzflächenschubspannung $\tau_\delta^* = 0$.

zeichnungen der Kurven a , b und c stimmen mit denen von *Bild 15.13* überein. Weiterhin sind die gestrichelten Kurven d , e und f eingezeichnet, denen sich jeweils zwei der Kurven a , b und c annähern. Somit lassen sich die Kurven d , e und f auch als Grenzkurven ansehen. Durch sie werden die wichtigsten Eigenschaften des Widerstandsgesetzes besonders deutlich hervorgehoben. Da ist zunächst Kurve d , für die die Gleichung

$$\psi_d = \frac{64}{Re_G} \quad (15.43)$$

gilt. Diesem Gesetz nähern sich die Kurven a und c für den 2. Gegenstrombereich und für den abwärts gerichteten Gleichstrom mit zunehmender Reynoldszahl an. Gl.(15.43) ist gleichfalls das Gesetz der Einphasenströmung. Damit haben wir das wichtige Ergebnis, daß die Widerstandsgesetze für die Ein- und Zweiphasenströmung bei sehr hohen Reynoldszahlen übereinstimmen. Der Einfluß der Kenngrößen η/η_G , ρ/ρ_G , R/δ_0 und Re verschwindet also bei sehr hohen Werten für Re_G . In Richtung kleiner Reynoldszahlen des Gases nähern sich die für den Gegenstrombereich geltenden Kurven a und b der Grenzkurve e . Hierfür läßt sich ebenfalls ein Grenzgesetz aufstellen. Das Grenzgesetz ist streng erfüllt, wenn die mittlere Gasgeschwindigkeit $\bar{w}_G = 0$ wird; das ist bei sehr kleinen positiven Werten von τ_δ^* der Fall. Wir gehen von der Definitionsgleichung für die Widerstandszahl Gl.(15.38) aus und führen hierin eine Beziehung für den Druckverlust ein, die für sehr kleine Werte von τ_δ^* gilt. Diese Beziehung erhält man aus Gl.(15.32) für die mittlere Geschwindigkeit. Setzt man $\bar{w}_G = 0$ und führt für τ_δ^* Gl.(15.22) ein, so folgt nach einer kurzen Zwischenrechnung

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{4 g \rho}{\eta \left(\frac{R}{\delta_0} - 1 \right)^2} \cdot \quad (15.44)$$

Nach Einführen in Gl.(15.38) und unter Berücksichtigung von $r_\delta = R - \delta$ ergibt sich für das gesuchte Grenzgesetz die Beziehung:

$$\psi_e = \frac{64}{Re_G^2} 3 Re \frac{\nu}{\nu_G} \left(\frac{R}{\delta_0} - 1 \right). \quad (15.45)$$

Dieses Grenzgesetz, in *Bild 15.14* durch Kurve e dargestellt, gilt für den Bereich kleiner Reynoldszahlen des Gases. Zieht man zum Vergleich das Grenzgesetz für sehr hohe Reynoldszahlen, welches auch für die Einphasenströmung gilt, heran, so erkennt man folgende Unterschiede: Bei kleinen Werten von Re_G hängt die Widerstandszahl ψ_e von $1/Re_G^2$ ab. Ferner wird ψ_e aber auch von allen anderen maßgebenden Kennzahlen der Zweiphasenströmung beeinflusst.

Ein drittes Grenzgesetz ergibt sich nach der Darstellung von *Bild 15.14* für die gestrichelte Linie f , der sich die Kurven b und c annähern. Bei der mit $Re_{G,\delta}$ bezeichneten Reynoldszahl wird die Widerstandszahl $\psi = 0$, d. h. daß keine Schubspannung an der Filmoberfläche angreift. $Re_{G,\delta}$ folgt unter Berücksichtigung von $\tau_\delta^* = 0$ unmittelbar aus Gl.(15.35):

$$|Re_{G,\delta}| = 3 Re \frac{\nu}{\nu_G} \left(\frac{R}{\delta_0} - 1 \right). \quad (15.46)$$

Die entwickelten Grenzgesetze, die in *Bild 15.14* durch die gestrichelten Linienzüge *d*, *e* und *f* dargestellt sind, schneiden sich im Punkt *S*. Für diesen Punkt des Widerstandsdiagramms folgt aus den Grenzgesetzen

$$|\psi_s| = \frac{64}{3 Re \frac{\nu}{\nu_G} \left(\frac{R}{\delta_0} - 1 \right)} = \frac{64}{|Re_{G,\delta}|}. \quad (15.47)$$

Dieser Schnittpunkt liegt für alle denkbaren Fälle der Gas-Film-Strömung auf der Linie *d*. Man hat damit eine einfache Möglichkeit, die Lage der Widerstandskurven in der ψ/Re_G -Ebene festzulegen. So erkennt man, daß kleinere Werte der Reynoldszahl der Flüssigkeit *Re* die Kurven nach links, in Richtung zu kleineren Werten von Re_G , verschieben. Die gleiche Wirkung haben kleinere Werte von ν/ν_G und von R/δ_0 . Der Einfluß von R/δ_0 auf die Widerstandszahl geht aus *Bild 15.15* hervor.

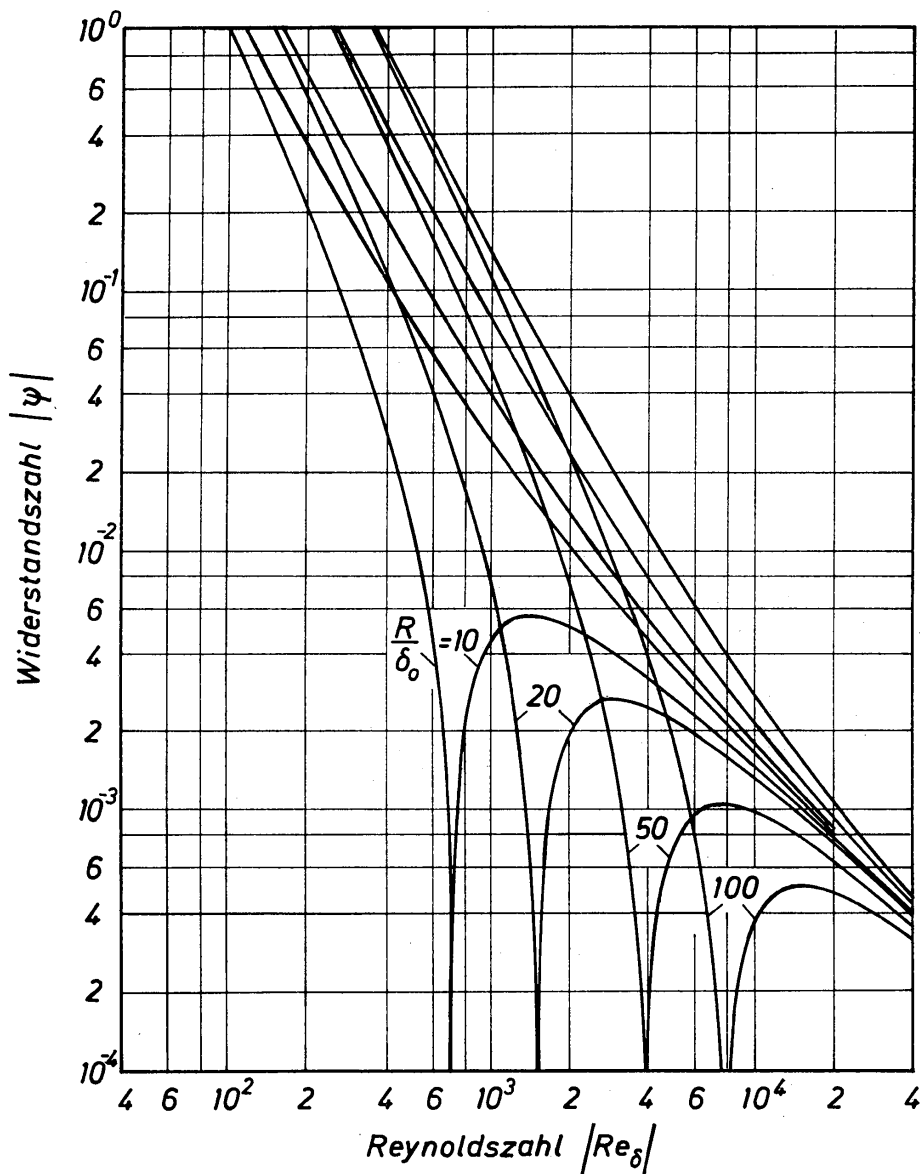


Bild 15.15. Widerstandszahl $|\psi|$, abhängig von der Reynoldszahl des Gases $|Re_G|$ für verschiedene Werte von R/δ_0 . Unverändert blieben $Re = 400$, $\eta_G/\eta = 0,0182$ und $\rho_G/\rho = 0,0012$

Es sei besonders hervorgehoben, daß eine Änderung der Kennzahlen Re , ν/ν_G oder R/δ_0 lediglich eine Verschiebung des Punktes S und damit aller Widerstandskurven längs der Linie d bewirkt. Die Gestalt der Kurven und ihre Lage zum Punkt S jedoch bleibt dabei völlig unverändert.

Unerwähnt geblieben ist bei der doppeltlogarithmischen Darstellung der Widerstandsgesetze der Bereich des aufwärtsgerichteten Gleichstromes. Die Erläuterungen im Zusammenhang mit *Bild 15.13* treffen auch für *Bild 15.14* zu. Der aufwärtsgerichtete Gleichstrombereich liegt auf Kurve c , und zwar in jenem Bereich, in dem c praktisch mit d zusammenfällt.

15.214 Spezielle Widerstandsgesetze

Aus der Theorie für die untersuchte Form der Zweiphasenströmung hatte sich für alle Strömungsformen ein einheitliches Widerstandsgesetz $\psi = 64/(Re_G K)$ ergeben. Beide Größen, sowohl die Reynoldszahl Re_G als auch der Korrekturfaktor K , sind Funktionen der bereits erläuterten Kennzahlen Re , R/δ_0 , η_G/η und ρ_G/ρ . Die praktische Anwendung des theoretischen Gesetzes ist jedoch sehr umständlich. Es ist daher erwünscht, einfacher anzuwendende Gesetzmäßigkeiten zu entwickeln. Dieses sind die speziellen Widerstandsgesetze, die man durch Zusammenfügen der Grenzesetze erhält. Die speziellen Widerstandsgesetze geben die einzelnen Bereiche des allgemeinen theoretischen Gesetzes in den meisten Fällen mit sehr guter Genauigkeit wieder. Die Größe ihrer Abweichung hängt von den Werten für Re , ν/ν_G und R/δ_0 ab.

Für den zweiten Gegenstrombereich, in *Bild 15.14* durch Kurve a dargestellt, ergibt sich:

$$\psi_a = \psi_e + |\psi_d| = \frac{64}{Re_G^2} |Re_{G,\delta}| + \frac{64}{|Re_G|}. \quad (15.48)$$

Dieses Gesetz erfaßt den Gegenstrombereich von $Re_G = 0$ bis $Re_G = \infty$.

Für den ersten Gegenstrombereich, in *Bild 15.14* dargestellt durch Kurve b , erhält man:

$$\psi_b = \psi_e - |\psi_d| = \frac{64}{Re_G^2} |Re_{G,\delta}| - \frac{64}{|Re_G|}. \quad (15.49)$$

Diese Beziehung erfaßt den Gegenstrombereich mit negativen Werten der Reynoldszahl des Gases. Die Anwendungsgrenzen sind durch $|Re_G| \leq |Re_{G,\delta}|$ gegeben.

Für den Bereich des abwärtsgerichteten Gleichstromes, dargestellt durch Kurve c in *Bild 15.14*, gilt die folgende Beziehung:

$$\psi_c = \psi_e - |\psi_d| = \frac{64}{Re_G^2} |Re_{G,\delta}| - \frac{64}{|Re_G|}. \quad (15.50)$$

Sowohl Re_G als auch ψ_e sind in diesem Bereich stets negativ. Die Gültigkeitsgrenzen sind $|Re_G| \geq |Re_{G,\delta}|$ bzw. $\psi \leq 0$.

Für den aufwärtsgerichteten Gleichstrom gilt Gl. (15.43).

15.215 Druckverlust im Gegenstrombereich

Wegen der großen praktischen Bedeutung des zweiten Gegenstrombereiches soll hierfür der Druckverlust gesondert berechnet und in geeigneter Form dargestellt werden. Aus Gl. (15.48) erhält man unter Verwendung der Definitionsgleichungen (15.34) und (15.38) für Re_G und ψ sowie der Gl. (15.46) für $Re_{G,\delta}$ die folgende Druckverlustgleichung:

$$\frac{\Delta P/L}{2 g \rho_G} = \frac{1 + \bar{w}_G/w_{\delta_0}}{\frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu_G} \left(\frac{R}{\delta_0} - 1\right)^2 + 2 \frac{\rho_G}{\rho} \left(\frac{R}{\delta_0} - 1\right)}. \quad (15.51)$$

Hierin bedeuten δ_0 die Filmdicke und w_{δ_0} die Oberflächengeschwindigkeit des Rieselfilmes nach den Gleichungen (14.21) und (14.19). Die mittlere Gasgeschwindigkeit \bar{w}_G wurde auf die Oberflächengeschwindigkeit w_{δ_0} bezogen, um trotz Verwendung dimensionsloser Größen eine anschauliche Vorstellung von den Geschwindigkeitsverhältnissen zu erhalten.

Der bezogene Druckverlust $\Delta P/(L 2 g \rho_G)$ ist in *Bild 15.16* abhängig vom Verhältnis \bar{w}_G/w_{δ_0} für vier Werte von R/δ_0 dargestellt. Die Rechnungen wurden für das System Luft/Wasser mit $\eta_G/\eta = 0,0182$ und $\rho_G/\rho = 0,0012$ durchgeführt.

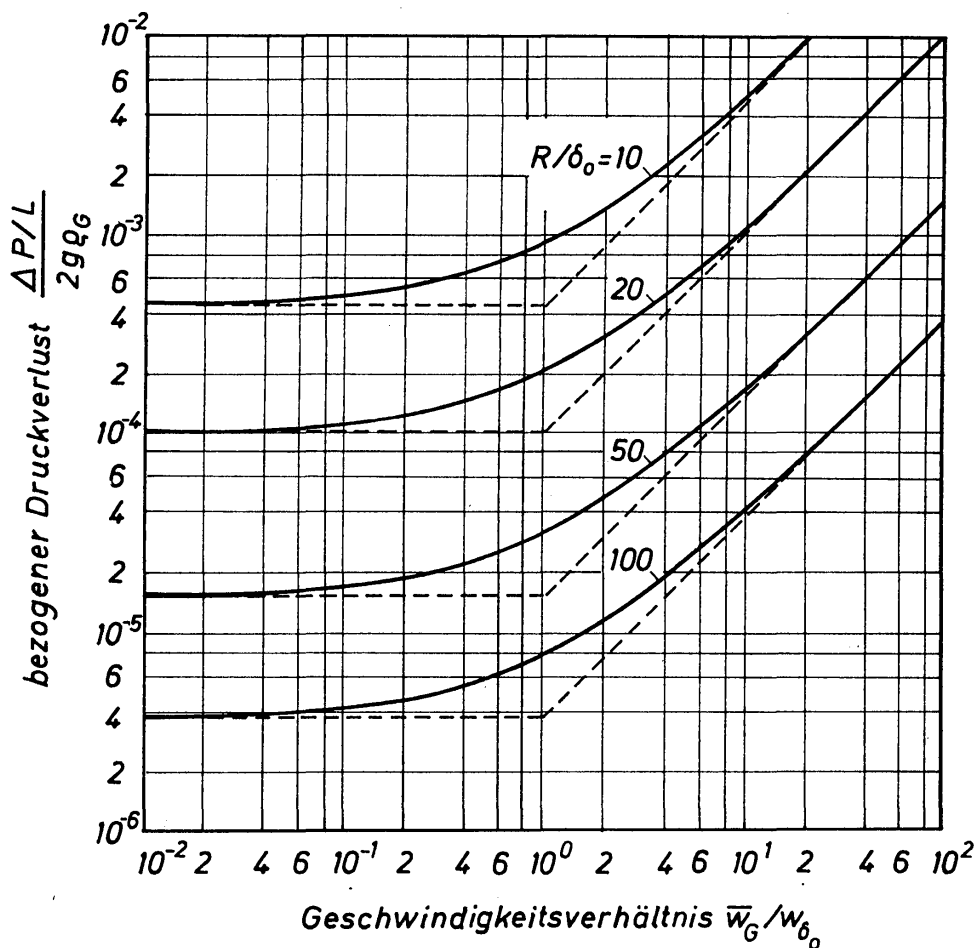


Bild 15.16. Abhängigkeit des bezogenen Druckverlustes vom Geschwindigkeitsverhältnis \bar{w}_G/w_{δ_0} und R/δ_0 für das System Luft/Wasser

Der Verlauf der Kurven ist dadurch gekennzeichnet, daß sich der Druckverlust mit abnehmender Geschwindigkeit einem Grenzwert annähert, der sich mit $\bar{w}_G = 0$ leicht aus Gl.(15.51) bestimmen läßt. Für $\bar{w}_G/w_{\delta_0} \leq 0,1$ wird der Druckverlust allein durch den Grenzwert bestimmt. Für $\bar{w}_G/w_{\delta_0} \geq 10$ hingegen steigt der Druckverlust linear mit der Geschwindigkeit an. In diesem Fall läßt sich in Gl.(15.51) der Zahlenwert 1 gegenüber \bar{w}_G/w_{δ_0} vernachlässigen. Der in *Bild 15.16* angegebene Kurvenverlauf für den Druckverlust ist durch zahlreiche Messungen bestätigt worden.

15.22 Empirische Gesetze für die Gas-Film-Strömung

Die theoretischen Gesetze können nur, wie bereits erwähnt wurde, die in der technischen Praxis üblichen Verhältnisse in qualitativer Form beschreiben. Die Abweichungen von der Theorie sind vor allem dadurch bedingt, daß fast ausschließlich Flüssigkeitsfilme mit welliger Oberfläche auftreten. Durch die Wellen wird nicht nur die Strömung des Flüssigkeitsfilms, sondern auch die des Gases verändert. Darüber hinaus ist der Strömungszustand des Gases nahezu immer turbulent, wohingegen der Theorie ein laminarer Strömungszustand zugrunde gelegt wurde. Trotz dieser veränderten Bedingungen haben erst die theoretisch hergeleiteten Gesetze die Möglichkeit geschaffen, aus den verfügbaren Meßwerten für verschiedene Größen empirische Gleichungen zu entwickeln.

Die nachfolgenden Ausführungen über empirische Gesetze betreffen vornehmlich den Gegenstrombereich. Dieser Bereich ist technisch so bedeutsam, daß eine besonders ausführliche Behandlung gerechtfertigt ist. Die Gleichstrombereiche der Gas-Film-Strömung sind technisch weniger bedeutsam und sind daher noch nicht so gründlich untersucht worden. Sie werden in Zusammenhang mit den anderen Phasenverteilungszuständen in Abschnitt 15.3 behandelt.

15.221 Gesetze der Filmströmung

Die für den Ingenieur wichtigste Größe ist die Filmdicke, die nach Gl.(15.16) im Gegenstrombereich mit zunehmender Schubspannung an der Phasengrenzfläche größer wird. Für $\tau_\delta^* = 0,1$ erhöht sich die Filmdicke um etwa 5% gegenüber δ . Es soll nun geprüft werden, ob unter den praktisch üblichen Bedingungen eine Vergrößerung der Filmdicke zu erwarten ist. Zu dem Zweck werden die Rechnungen so durchgeführt, daß die Ergebnisse mit Versuchswerten von FEIND [15.8] verglichen werden können. FEIND hat beim Gegenstrom des Systems Luft/Wasser die Filmdicke gemessen. Der Rohrradius betrug $R = 25$ mm. Mittels Gl.(15.35) wird die Reynoldszahl des Gases berechnet. Auf Grund der Versuchsbedingungen ist für den Fall $\delta_0 = 0,42$ mm, $R/\delta_0 = 59,5$, $Re = 376$, $\eta_G/\eta = 0,0182$ und $\rho_G/\rho = 0,0012$. Mit $\tau_\delta^* = 0,1$ ergibt sich dann $Re_G \approx 7 \cdot 10^5$. Die bei den Versuchen maximal erreichte Reynoldszahl des Gases betrug aber nur $4 \cdot 10^4$. Führt man die gleiche Rechnung mit einem wesentlich kleineren Wert der Grenzflächenschubspannung, nämlich mit $\tau_\delta^* = 0,01$ durch, dann erhält man

$Re_G \approx 7 \cdot 10^4$. Dieser Wert liegt immer noch außerhalb des Versuchsbereiches. Man darf daher auf Grund der theoretischen Rechnungen erwarten, daß sich die Filmdicke unter der Einwirkung des Gasstromes praktisch nicht ändert. Diese Erwartung wird auch dann noch gerechtfertigt sein, wenn man berücksichtigt, daß die Versuche von FEIND im Bereich der turbulenten Gasströmung durchgeführt wurden. Hierbei ist die Schubspannung wesentlich größer, als wenn man für die gleichen Werte von Re_G laminaren Strömungszustand annehmen würde. Die Rechnungen enthalten jedoch eine genügende Sicherheit, so daß die obige Aussage nicht eingeschränkt werden muß. Das Ergebnis der Rechnungen wird auch durch *Bild 15.17* bestätigt, welches der Arbeit von FEIND entnommen wurde. Dargestellt sind Meßwerte für die Filmdicke in Abhängigkeit von der Reynoldszahl des Gases Re_G für mehrere Werte der Reynoldszahl des Flüssigkeitsfilms Re . Die Meßwerte sind jeweils durch einen aus zwei Abschnitten bestehenden Kurvenzug ausgeglichen. Im ersten Abschnitt ist $\delta = \delta_0$ und somit unabhängig von der Reynoldszahl Re_G . Im zweiten Abschnitt steigt δ mit Re_G an. Wie FEIND feststellt, wird im zweiten Abschnitt die Flüssigkeit bereits versprüht. Die Meßwerte geben daher nicht die tatsächliche Filmdicke wieder, sie enthalten vielmehr auch die im Luftstrom befindlichen Wasserstropfen. Der Übergang vom ersten zum zweiten Kurvenabschnitt kennzeichnet die Staugrenze, die zur Aufrechterhaltung des normalen Betriebes einer Rieselfilmanlage nicht

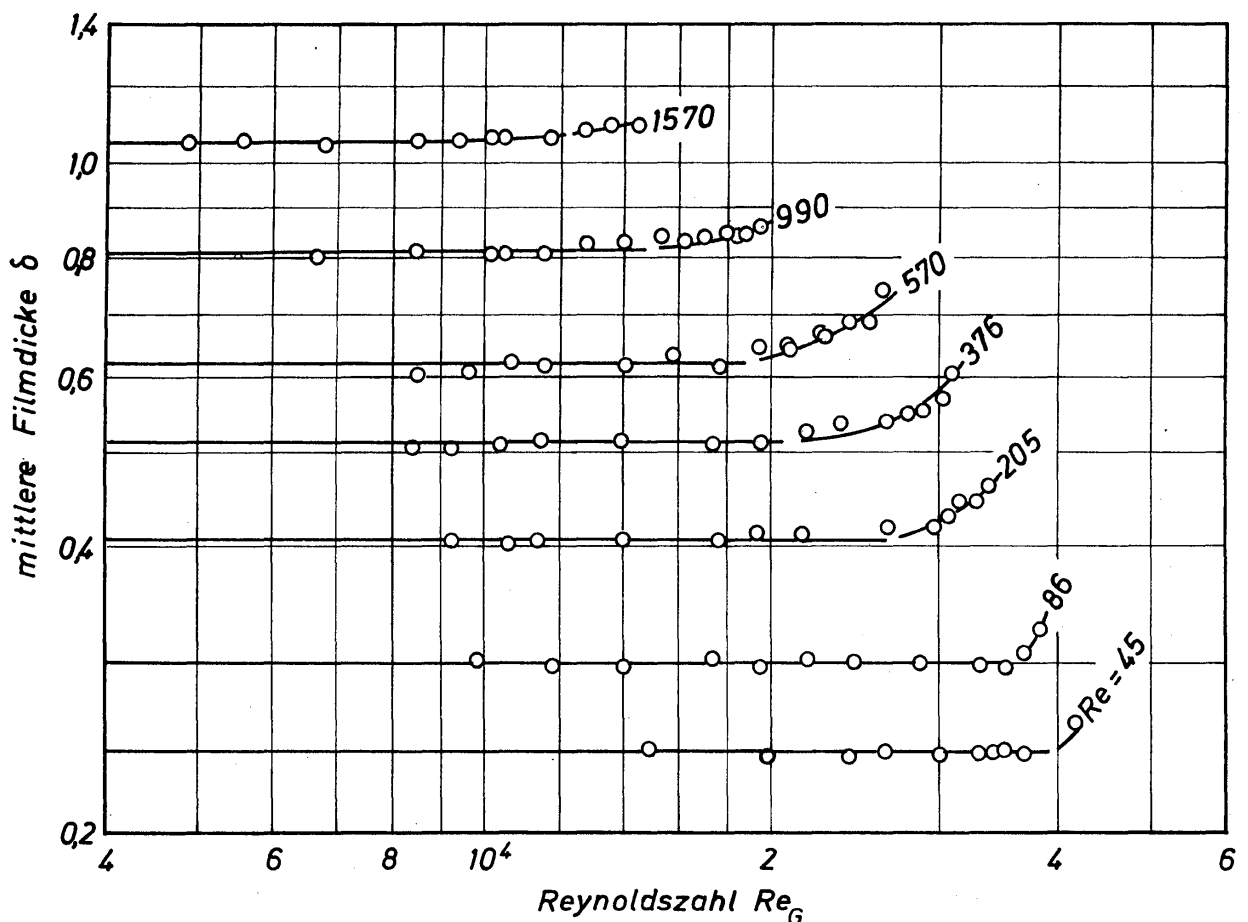


Bild 15.17. Abhängigkeit der mittleren Filmdicke δ von der Reynoldszahl Re_G des Gases und der Reynoldszahl Re des Flüssigkeitsfilms im Gegenstrombereich der Gas-Film-Strömung nach FEIND [15.8]

überschritten werden darf. Somit beweisen die Messungen von FEIND, daß sich die Filmdicke im Gegenstrombereich der Gas-Film-Strömung praktisch nicht ändert. Damit ist es zulässig, bei allen praktischen Rechnungen die von τ_δ^* abhängige Filmdicke δ durch δ_0 zu ersetzen, die im laminaren Strömungsbereich nach Gl. (14.21) und im turbulenten nach Gl. (14.34) berechnet werden kann.

In zahlreichen Untersuchungen hat man sich mit der experimentellen Bestimmung der Filmdicke auch im aufwärtsgerichteten Gleichstrom beschäftigt. Besonders erwähnt seien die Arbeiten von MAHRENHOLZ [15.9], ANDERSON und MANTZOURANIS [15.10], COLLIER und HEWITT [15.11], GILL, HEWITT und LACEY [15.12], SHEARER und NEDDERMAN [15.13] sowie KIM und KNUDSEN [15.14] für die Strömung im senkrechten Rohr. Von den Untersuchungen über die Dicke und die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsfilms bei der Gas-Film-Strömung im waagerechten Rohr sei auf die von RUSSELL und LAMB [15.15) und COHEN und HANRATTY [15.16] aufmerksam gemacht. Allgemein befriedigende Gleichungen für die Filmdicke konnten aber noch nicht aufgestellt werden. Das überrascht keineswegs, hatte sich doch bei der theoretischen Behandlung der Gas-Film-Strömung in Abschnitt 15.21 herausgestellt, daß die Gesetze für den Flüssigkeitsfilm in den Gleichstrombereichen wesentlich verwickelter sind als im Gegenstrombereich.

Wie für den Gegenstrombereich ergibt sich auch im Gleichstrombereich eine Belastungsgrenze, durch die entweder die größte Gasbelastung oder die geringste Flüssigkeitsbelastung festgelegt ist. Bei der größten Gasbelastung werden von der welligen Filmströmung Tropfen abgerissen, so daß die Filmströmung in die Tropfen- bzw. Nebelströmung übergeht. Der Flüssigkeitsfilm kann dabei so stark verdünnt werden, daß er die Rohroberfläche nicht mehr vollständig benetzen kann und aufreißt. Das Aufreißen des Flüssigkeitsfilms kann aber auch ohne Tropfenablösung auftreten, wenn nämlich die Flüssigkeitsbelastung einen Mindestwert unterschreitet. Die hiermit zusammenhängenden Probleme sind experimentell und theoretisch untersucht worden, ohne daß aber bereits allgemein verbindliche Aussagen gemacht werden können [15.17 bis 15.23].

15.222 Widerstandsgesetz für den Gegenstrombereich

Die theoretischen Widerstandsgesetze waren unter der Bedingung hergeleitet worden, daß sowohl die Flüssigkeit als auch die Gasströmung laminar und die Filmoberfläche glatt, also nicht wellig, ist. In den meisten praktischen Fällen ist jedoch die Filmoberfläche wellig, die Filmströmung laminar oder turbulent und die Gasströmung turbulent. Somit können die theoretischen Gesetze nur in Sonderfällen praktisch angewendet werden. Der allgemeine Zusammenhang

$$\psi = f \left(Re_G, Re, \frac{R}{\delta_0}, \frac{\eta}{\eta_G}, \frac{\rho}{\rho_G} \right) \quad (15.52)$$

bleibt jedoch auch bei den anderen oben genannten Strömungsformen erhalten, wenn also entweder die Film- oder die Gasströmung oder auch beide turbulent

sind. Die Welligkeit des Flüssigkeitsfilmes müßte jedoch durch eine gesonderte dimensionslose Kennzahl im Widerstandsgesetz berücksichtigt werden. Von dieser Annahme ist bei der Auswertung experimentell erzielter Ergebnisse bislang noch kein Gebrauch gemacht worden. Man darf indes auch erwarten, daß der durch die Wellen verursachte zusätzliche Widerstand, der als Druck- oder Formwiderstand anzusehen ist, in Abhängigkeit von der Reynoldszahl der Flüssigkeit ausgedrückt werden kann. Das bedeutet, daß keine neue Kennzahl einzuführen ist und das Widerstandsgesetz gemäß Gl.(15.52) auch für wellige Filme gilt.

Die umfangreichsten Druckverlustmessungen im Bereich des Gegenstromes, wobei Gas und Flüssigkeit sowohl laminar als auch turbulent strömten, hat FEIND [15.8] durchgeführt. In einem begrenzteren Rahmen bewegen sich die Untersuchungen von HEMPEL [15.24]. FEIND stellte seine Versuchsergebnisse durch folgende empirische Formel dar:

$$\psi = \frac{120}{D^{5/3}} + \frac{0,14}{D^{1/5}}. \quad (15.53)$$

Wie sich anschließend noch zeigen wird, erfüllt diese Gleichung nicht die Bedingung, daß der Druckverlust der Gasströmung bei welligen Rieselfilmen niemals kleiner sein darf als bei ebenen Rieselfilmen. Diese Bedingung wird durch folgende Gleichung erfüllt:

$$\psi = \frac{358}{D^2} + \frac{0,205}{D^{1/4}}. \quad (15.54)$$

Hierin bedeutet D einen dimensionslosen Ausdruck, der gemäß dem theoretischen Gesetz $\psi = 64/(Re_G K)$ dem Produkt $Re_G K$ entspricht. Für D ermittelte FEIND aus einer großen Anzahl von Meßwerten die Beziehung:

$$D \equiv c \frac{Re_G}{Re^n} \left(\frac{\rho}{\rho_G}\right)^{2/5} \left(\frac{\eta_G}{\eta}\right)^{2/3} \left(\frac{\delta_0}{R}\right)^{1/2}. \quad (15.55)$$

Hierin ist $Re_G \equiv \bar{w}_G \rho_G 2(R - \delta_0)/\eta_G$ die Reynoldszahl des Gases. Der wirksame Radius für die Gasströmung ist gemäß den voraufgegangenen Ausführungen mit δ_0 gebildet. Für δ_0 gilt Gl.(14.21) bei laminarer und Gl.(14.34) bei turbulenter Filmströmung. Mit $Re \equiv \dot{V}/U\nu$ wird die Reynoldszahl des Flüssigkeitsfilms bezeichnet, wobei \dot{V} den Volumstrom, $U = 2R\pi$ den Rohrumfang und ν die kinematische Viskosität der Flüssigkeit bedeuten. Ferner sind c und n folgendermaßen festgelegte Zahlenwerte:

$$\begin{array}{lll} Re \geq 40: & c = 4,76 & \text{und} \quad n = 3/5, \\ Re < 40: & c = 1,31 & \text{und} \quad n = 1/4. \end{array}$$

Die bisher bekannt gewordenen Meßwerte werden durch die Gleichungen (15.53) und (15.54) mit einer maximalen Ungenauigkeit von $\pm 25\%$ wiedergegeben. In diesen Gleichungen berücksichtigt der erste Summand den Widerstand bei laminarer Gasströmung und welliger Filmströmung und der zweite Summand den

Widerstand bei turbulenter Gasströmung und welliger Filmströmung. Damit sind also die in technischen Anlagen auftretenden Betriebszustände in hinreichender Form erfaßt. Im einzelnen wurden die in den empirischen Gleichungen auftretenden Kenngrößen wie folgt verändert:

$$\begin{aligned} Re_G &= 600 && \text{bis} && 40\,000, \\ Re &= 3 && \text{bis} && 2500, \\ R/\delta_0 &= 5 && \text{bis} && 140, \\ \eta/\eta_G &= 23 && \text{bis} && 55, \\ \rho/\rho_G &= 210 && \text{bis} && 1655. \end{aligned}$$

In *Bild 15.18* sind die von FEIND zusammengestellten Meßwerte mit der nach Gl. (15.54) berechneten Kurve verglichen. Die bei den Versuchen verwendeten Flüssigkeiten *D I* bis *D IV* waren Gemische aus Wasser und Äthylenglykol.

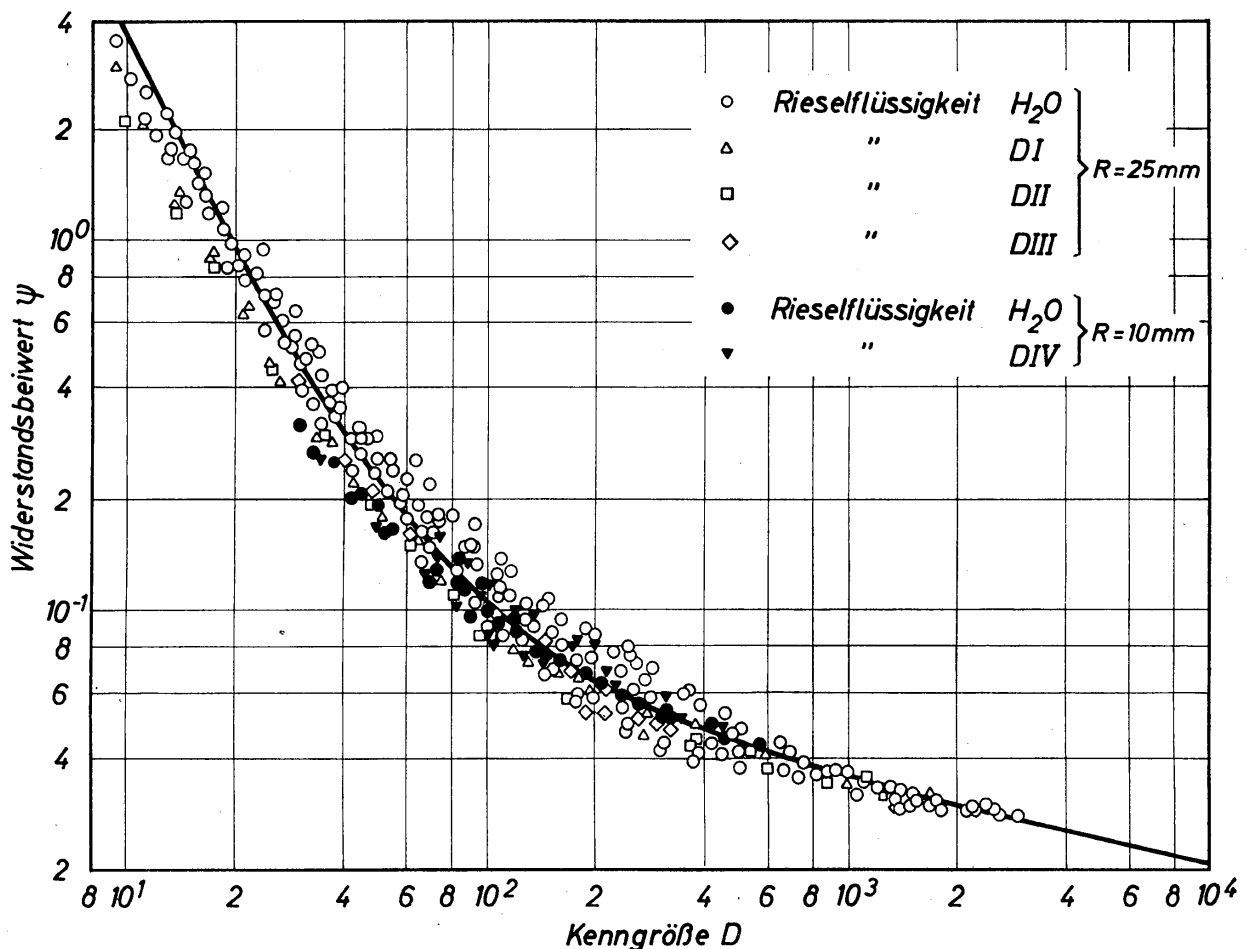


Bild 15.18. Widerstandszahl ψ , abhängig von der Kenngröße D für den Gegenstrombereich der Gas-Film-Strömung in senkrechten Rohren. Die Kurve wurde nach Gl. (15.54) berechnet

Eine Vergleich zwischen den Widerstandsgesetzen für die Ein- und für die Zweiphasenströmung ermöglicht die Darstellung in *Bild 15.19*. Mit a und b werden die Widerstandsgesetze für die Einphasenströmung bezeichnet, wobei a nach $\psi = 64/Re_G$ und b nach $\psi = 0,3164/Re^{1/4}$ berechnet wurden. Nach dem theoretischen Widerstandsgesetz für den Gegenstrombereich der Gas-Film-Strömung

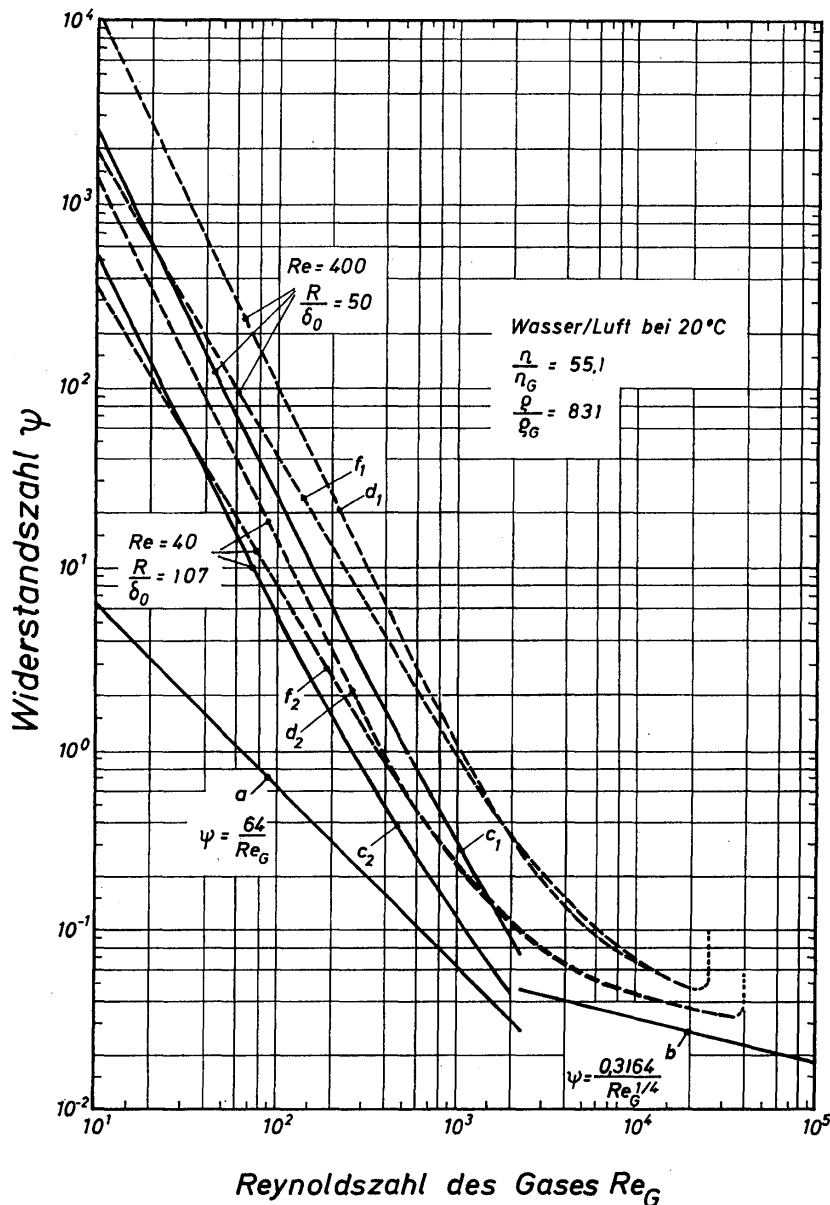


Bild 15.19. Vergleich zwischen theoretischen und empirischen Widerstandsgesetzen für die Ein- und Zweiphasenströmung in senkrechten Röhren; Erläuterung im Text

gemäß Gl.(15.48) wurden die Kurven c_1 (für $Re = 400$ und $R/\delta_0 = 50$) und c_2 (für $Re = 40$ und $R/\delta_0 = 107$) berechnet. Man entnimmt dem Bild, daß sich die Kurven c_1 und c_2 mit zunehmenden Re_G -Werten der Kurve a annähern. Bevor sie diese jedoch erreichen, wird der Strömungszustand des Gases turbulent; die Kurven c_1 und c_2 wurden daher nur bis etwa $Re_G = 2000$ gezeichnet. Mit d_1 und d_2 werden die nach der empirischen Gleichung (15.54) berechneten Kurven bezeichnet. Diese Kurven verlaufen im Bereich der laminaren Gasströmung parallel zu den theoretisch bestimmten Kurven c_1 und c_2 . In Richtung steigender Reynoldszahlen nähern sich die Kurven d_1 und d_2 der Kurve b an, die für die turbulente Einphasenströmung gilt. Schließlich sind noch die Kurven f_1 und f_2 eingezeichnet worden, für die die empirische Gl.(15.53) gilt. Diesen Kurven zufolge ist der Druckverlust bei welliger Filmströmung im Bereich sehr kleiner Werte von Re_G geringer als bei wellenfreier Filmströmung. Da ein solches Ergebnis nicht zutreffen kann, wird der Gl.(15.54) der Vorzug gegeben.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment auf den Übergang der Gasströmung vom laminaren in den turbulenten Zustand und auf die Welligkeit des Flüssigkeitsfilms zurückzuführen sind. Man erkennt aus *Bild 15.19* aber deutlich, daß der Verlauf der empirischen Kurven im wesentlichen durch den Bereich der laminaren Gasströmung festgelegt ist. Auch das rechtfertigt die eingehende theoretische Behandlung der laminaren Zweiphasenströmung.

Eine für den praktischen Betrieb bedeutsame Eigenschaft der empirischen Kurven ist durch den punktierten Kurvenverlauf in *Bild 15.19* angedeutet. Bei einem bestimmten Wert von Re_G steigen die Widerstandskurven plötzlich steil an. Hierbei wird der Flüssigkeitsfilm durch den Gasstrom aufgestaut und schließlich mitgerissen, d.h. die Strömungsrichtung des Flüssigkeitsfilms ändert sich. Man bezeichnet diese Grenze als Staugrenze, die dem Betrieb von Anlagen eine obere Grenze setzt. Diese Grenze muß bei der Berechnung von praktischen Anlagen bekannt sein. Im folgenden Abschnitt wird auf die Staugrenze näher eingegangen.

15.223 Gleichung für die Staugrenze

Dem Gegenstrom von Flüssigkeitsfilm und Gas ist in senkrechten Rohren eine obere Grenze gesetzt, die Staugrenze genannt wird. An der Staugrenze ändert sich die Strömungsrichtung des Flüssigkeitsfilms, und die Flüssigkeit wird vom Gasstrom hochgerissen. Eine anschauliche Deutung des Stauvorganges war in *Bild 15.3* gegeben worden. Der Beginn des Stauvorganges ist durch das Abreißen von kleinen Flüssigkeitstropfen vom Film gekennzeichnet. Bei nur geringfügiger Erhöhung der Reynoldszahl des Gases wird dann die gesamte Flüssigkeit vom Gasstrom mitgerissen. Das Aufstauen erstreckt sich über einen so kleinen Bereich der Reynoldszahl Re_G , daß es gerechtfertigt ist, von einem Staupunkt und nicht von einem Staubereich zu sprechen. Als theoretischer Wert hatte sich für die Staugrenze $\tau_\delta^* = 2/3$ ergeben. Dieser Wert ist im praktischen Betrieb aber nicht zu erwarten, da die Gasströmung in den meisten Fällen turbulent und die Filmoberfläche wellig ist, die theoretischen Rechnungen aber für den Fall der laminaren Strömung und einer ebenen Filmoberfläche durchgeführt wurden. Allgemein wird man aber auf Grund von Gl.(15.37) für die an der Staugrenze auftretende Reynoldszahl des Gases Re_{Gs} schreiben dürfen:

$$Re_{Gs} = f \left(Re, \frac{R}{\delta_0}, \frac{\eta}{\eta_G}, \frac{\rho}{\rho_G} \right). \quad (15.56)$$

Unter dieser Voraussetzung stellte FEIND (15.8) auf Grund zahlreicher Meßwerte folgende empirische Formel auf:

$$Re_{Gs} = \frac{1,4 \cdot 10^4}{k} Re^m \left(\frac{\rho_G}{\rho} \right)^{2/5} \left(\frac{\eta}{\eta_G} \right)^{3/4} \left[0,093 \left(\frac{R}{\delta_0} \right)^{5/4} - 1 \right]. \quad (15.57)$$

Hierin nehmen die Konstanten k und m folgende Werte an:

$$\begin{array}{lll} Re \leq 400 : & k = 58,2 & m = 1/3, \\ Re \geq 400 : & k = 157,7 & m = 1/2. \end{array}$$

Die Exponenten m der Reynoldszahl des Flüssigkeitsfilms entsprechen der Abhängigkeit der mittleren Filmdicke δ_0 von der Reynoldszahl. Für den unterkritischen Bereich war gemäß Gl. (14.21) $m = 1/3$ und für den überkritischen, turbulenten Bereich gemäß Gl. (14.34) $m = 8/15 \approx 1/2$.

Bisher bekanntgewordene Meßwerte werden durch Gl. (15.57) mit einer Streuung von etwa $\pm 20\%$ ausgeglichen. Die Bereiche, innerhalb der die einzelnen Kenngrößen bei Versuchen verändert wurden, sind folgende:

$$\begin{array}{llll} Re_G & = & 600 & \text{bis} & 40\,000, \\ Re & = & 3 & \text{bis} & 2\,500, \\ R/\delta_0 & = & 8 & \text{bis} & 400, \\ \eta/\eta_G & = & 23 & \text{bis} & 55, \\ \rho/\rho_G & = & 210 & \text{bis} & 1\,655. \end{array}$$

Hiervon ist insbesondere der untere Grenzwert von R/δ_0 zu beachten, der keineswegs unterschritten werden darf. Wie sich aus Gl. (15.57) ergibt, wird $Re_{Gs} = 0$ für $R/\delta_0 = 6,68$. Erwähnenswert ist schließlich, daß die Staugrenze in geringem Maße auch von der Rohrlänge, also der Lauflänge des Flüssigkeitsfilms, abhängt. Das ist darauf zurückzuführen, daß die Wellenberge mit zunehmender Lauflänge etwas größer werden. Somit muß sich also die Staugrenze mit zunehmender Lauflänge in Richtung kleinerer Werte von Re_{Gs} verschieben. Praktisch macht sich dieser Einfluß aber nur für Reynoldszahlen des Flüssigkeitsfilms bemerkbar, die größer als 400 sind. Im allgemeinen darf man daher den Einfluß der Lauflänge bzw. der Rohrlänge vernachlässigen.

Die Oberflächenspannung der Flüssigkeit übt auf den Stauvorgang ebenfalls nur einen sehr geringen Einfluß aus und darf vernachlässigt werden. Das wird durch vorliegende Versuche bestätigt, bei denen die Oberflächenspannung immerhin um einen Faktor 2 geändert wurde [15.8]. Damit werden die meisten aller anorganischen und organischen Flüssigkeiten erfaßt.

15.3 Empirische Gesetze für die Gas-Flüssigkeits-Strömung bei beliebigen Phasenverteilungszuständen im Gleichstrom

In der Mehrzahl aller Arbeiten über den Gleichstrom von Gas und Flüssigkeit in vertikalen und horizontalen Rohren bemüht man sich um die Ermittlung des Druckverlustes. Zur Einführung in dieses Gebiet sei insbesondere auf die Veröffentlichungen von KOWALCZEWSKI [15.25], HOOGENDOORN [15.26], GOVIER [15.27], SCHICHT [15.28 und 15.29], HUGHMARK [15.30], DUKLER, WICKS und CLEVELAND [15.31], FARADY, MATOLOS, UJHIDY und BABOS [15.32] sowie

BARTHELS [15.33] hingewiesen. Durch das Studium dieser Arbeiten erhält man einen Überblick über den Stand der Erkenntnisse und über die entwickelten Meßverfahren. Die für den Ingenieur besonders wichtigen Größen sind der Druckverlust und der Flüssigkeitsinhalt.

Die Auswertung der Meßergebnisse für den Druckverlust wird vornehmlich nach einem Verfahren vorgenommen, das bereits 1949 von LOCKHART und MARTINELLI [15.34] vorgeschlagen wurde. Die Genauigkeit dieses Verfahrens ist jedoch verhältnismäßig gering. Es gestattet häufig nur eine grobe Abschätzung des Druckverlustes. Trotzdem kamen DUKLER, WICKS und CLEVELAND [15.31] noch in einer 1964 veröffentlichten Untersuchung zu dem Ergebnis, daß das von LOCKHART und MARTINELLI vorgeschlagene Verfahren von allen bis dahin bekanntgewordenen die genaueste Berechnung des Druckverlustes liefert. KRIEGEL [15.35] weist in einer 1967 veröffentlichten Arbeit nach, daß sich die von LOCKHART und MARTINELLI verwendeten Parameter für einen bestimmten Fall der Phasenverteilungszustände theoretisch begründen lassen. Durch eine empirische Erweiterung der theoretischen Gleichung gelangt KRIEGEL zu einer wesentlich erhöhten Genauigkeit bei der Berechnung des Druckverlustes. Die neueste Entwicklung auf diesem Gebiet stellt eine von CHAWLA [15.36 und 15.37] mitgeteilte Gleichung dar, mittels derer der Druckverlust mit bisher unerreichter Genauigkeit berechnet werden kann. Im folgenden wird auf die genannten Verfahren zur Berechnung des Druckverlustes und des Flüssigkeitsinhaltes sowie auf einige Sonderprobleme eingegangen.

15.31 Druckverlust bei der gleichgerichteten Gas-Flüssigkeits-Strömung

Von allen Phasenverteilungszuständen ist bislang allein die Filmströmung für den Gegenstrombereich in senkrechten Rohren behandelt worden. In diesem Abschnitt sollen in zusammenfassender Weise alle in waagerechten und senkrechten Rohren bei Gleichstrom auftretenden Verteilungszustände berücksichtigt werden.

Mißt man den Druckverlust $(\Delta P/L)_2$ einer in Rohren auftretenden Zweiphasenströmung abhängig von der Reynoldszahl Re_G des Gases und Re der Flüssigkeit, so kommt man zu der in *Bild 15.20* wiedergegebenen Darstellung [15.2]. Der Druckverlust wird mit zunehmender Reynoldszahl der Flüssigkeit Re bei konstantem Wert für Re_G größer. Auf einer Kurve für $Re = \text{const}$ treten bei veränderter Reynoldszahl des Gases Re_G die bereits erläuterten Phasenverteilungszustände auf. Bei kleinen Werten von Re_G stellt sich die Blasenströmung und bei großen Werten von Re_G die Filmströmung ein. Mit abnehmender Reynoldszahl des Gases nähert sich der Druckverlust einem festen Endwert. Es mag zunächst überraschen, daß sich trotz der vielfältigen Verteilungsformen ein stetiger Kurvenverlauf ergibt, der zudem qualitativ mit dem für die Filmströmung theoretisch ermittelten übereinstimmt. Bei der folgenden Behandlung des Druckverlustes der Zweiphasenströmung wird daher auch keine Rücksicht auf die Verteilungsformen der beiden Phasen genommen.

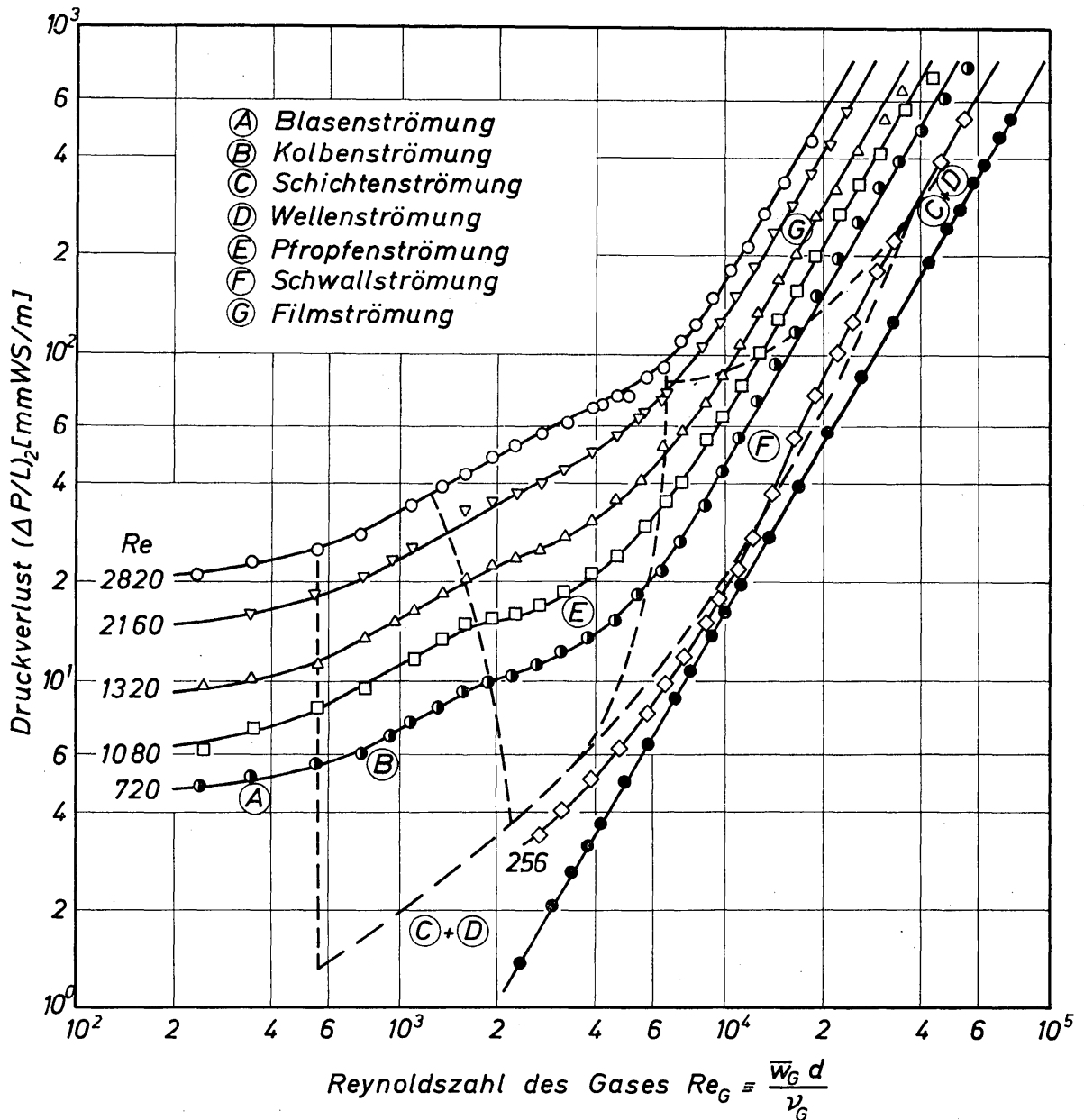


Bild 15.20. Druckverlust für die Gas-Flüssigkeits-Strömung in waagerechten Rohren

15.311 Berechnungsverfahren von Lockhart und Martinelli

LOCKHART und MARTINELLI [15.34] gehen davon aus, daß der Druckverlust einer Zweiphasenströmung $(\Delta P/L)_2$ proportional dem Druckverlust einer Einphasenströmung $(\Delta P/L)_1$ ist. Dabei kann für die Einphasenströmung sowohl der Druckverlust $(\Delta P/L)_G$ des Gasstromes als auch der Druckverlust $(\Delta P/L)$ des Flüssigkeitsstromes genommen werden; denn der statische Druck ist über dem Rohrquerschnitt sowohl in der Flüssigkeit als auch im Gas konstant.

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_2 = \Phi_G^2 \cdot \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_G = \Phi^2 \cdot \left(\frac{\Delta P}{L}\right). \quad (15.58)$$

Hierin bedeuten Φ_G^2 und Φ^2 Proportionalitätskonstanten, deren physikalische Bedeutung aus den nachfolgenden Rechnungen hervorgeht. Für die Herleitung dieser zwei Funktionen werden folgende Voraussetzungen gemacht:

- a) Der statische Druck ist über dem Rohrquerschnitt konstant und unabhängig von der Form der Phasenverteilung.
- b) In einem Rohrabschnitt ist das Rohrvolumen gleich der Summe aus Gasvolumen und Flüssigkeitsvolumen; das Volumverhältnis ist in jedem Rohrquerschnitt gleich.
- c) Gas und Flüssigkeit sind als inkompressibel anzusehen.
- d) Gas und Flüssigkeit strömen isotherm; zwischen den beiden Phasen findet kein Wärme- und Stoffaustausch statt.

In Anlehnung an die Einphasenströmung läßt sich der Druckverlust der Zweiphasenströmung wie folgt berechnen:

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_2 = \psi \frac{\rho \bar{w}^2}{2 d_h} \quad (15.59)$$

Hierin bedeuten ρ Flüssigkeitsdichte, \bar{w} auf den gesamten Rohrquerschnitt bezogene mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit, d_h hydraulischer Durchmesser für den Flüssigkeitsstrom und ψ Widerstandszahl der Zweiphasenströmung. In Gl.(15.59) wird der Druckverlust der Zweiphasenströmung durch den Druckverlust im Flüssigkeitsstrom ausgedrückt. Da im Gas und in der Flüssigkeit über den Querschnitt der gleiche Druck herrscht, könnte die gleiche Betrachtung auch für den Gasstrom angestellt werden. Für die Widerstandszahl ψ , die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} und den hydraulischen Durchmesser d_h müssen Gleichungen aufgestellt und in Gl.(15.59) eingesetzt werden.

Für die Widerstandszahl gilt ganz allgemein

$$\psi = \frac{C}{Re^m} \quad (15.60)$$

Bei laminarer Rohrströmung sind $C = 64$ und $m = 1$, während bei turbulenter Rohrströmung $C = 0,3164$ und $m = 1/4$ gesetzt werden dürfen. Die Reynoldszahl ist durch $Re \equiv \bar{w} d_h / \nu$ definiert. Die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} ist durch $\bar{w} = \dot{V} / F_h$ gegeben, wobei

$$F_h = k \pi d_h^2 / 4 \quad (15.61)$$

die hydraulische Querschnittsfläche für den Flüssigkeitsstrom bedeutet. Mit k wird ein empirischer Faktor bezeichnet, der die Abweichung der tatsächlichen Querschnittsfläche des Flüssigkeitsstromes von der Kreisfläche berücksichtigt. Führt man die Gleichungen (15.60) und (15.61) in Gl.(15.59) ein, dann erhält man nach Umformung und Erweiterung mit dem Rohrdurchmesser d die Beziehung:

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_2 = \frac{(d/d_h)^{5-m}}{k^{2-m}} \left\{ \frac{(4/\pi)^{2-m} C \eta^m \rho^{1-m} \dot{V}^{2-m}}{2 d^{5-m}} \right\} \quad (15.62)$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer stellt den Druckverlust $\Delta P/L$ des Flüssigkeitsstromes bei der Einphasenströmung im Rohr dar. Somit darf man schreiben:

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_2 = \frac{(d/d_h)^{5-m}}{k^{2-m}} \frac{\Delta P}{L}. \quad (15.63)$$

Durch Vergleich mit Gl.(15.58) folgt dann, daß

$$\Phi^2 \equiv \frac{(d/d_h)^{5-m}}{k^{2-m}} \quad (15.64)$$

ist. Führt man die entsprechenden Rechnungen für den Gasstrom durch, so ergeben sich die beiden folgenden Beziehungen:

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_2 = \frac{(d/d_{hG})^{5-m}}{k_G^{2-m}} \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_G, \quad (15.65)$$

$$\Phi_G^2 \equiv \frac{(d/d_{hG})^{5-m}}{k_G^{2-m}}. \quad (15.66)$$

Durch die Gleichungen (15.64) und (15.66) haben die in Gl.(15.58) eingeführten Korrekturgrößen Φ^2 und Φ_G^2 eine gewisse Deutung erfahren. Eine theoretische Berechnung von Φ^2 und Φ_G^2 ist für den allgemeinen Fall nicht möglich. LOCKHART und MARTINELLI haben daher den Vorschlag gemacht, die Korrekturfaktoren aus Meßwerten für den Druckverlust $(\Delta P/L)_2$ der Zweiphasenströmung zu ermitteln und sie über dem Druckverlustverhältnis $(\Delta P/\Delta P_G)^{1/2} \equiv X$ aufzutragen. Bild 15.21 zeigt die von LOCKHART und MARTINELLI mitgeteilten Kurven für die Korrekturfaktoren Φ und Φ_G . Da gemäß den Ausführungen in Abschnitt 15.11 vier Kombinationsmöglichkeiten für den Strömungszustand auftreten, müssen also für Φ und Φ_G jeweils vier Kurven vorliegen. Die Strömungszustände üben jedoch nur einen verhältnismäßig geringen Einfluß auf Φ und Φ_G aus.

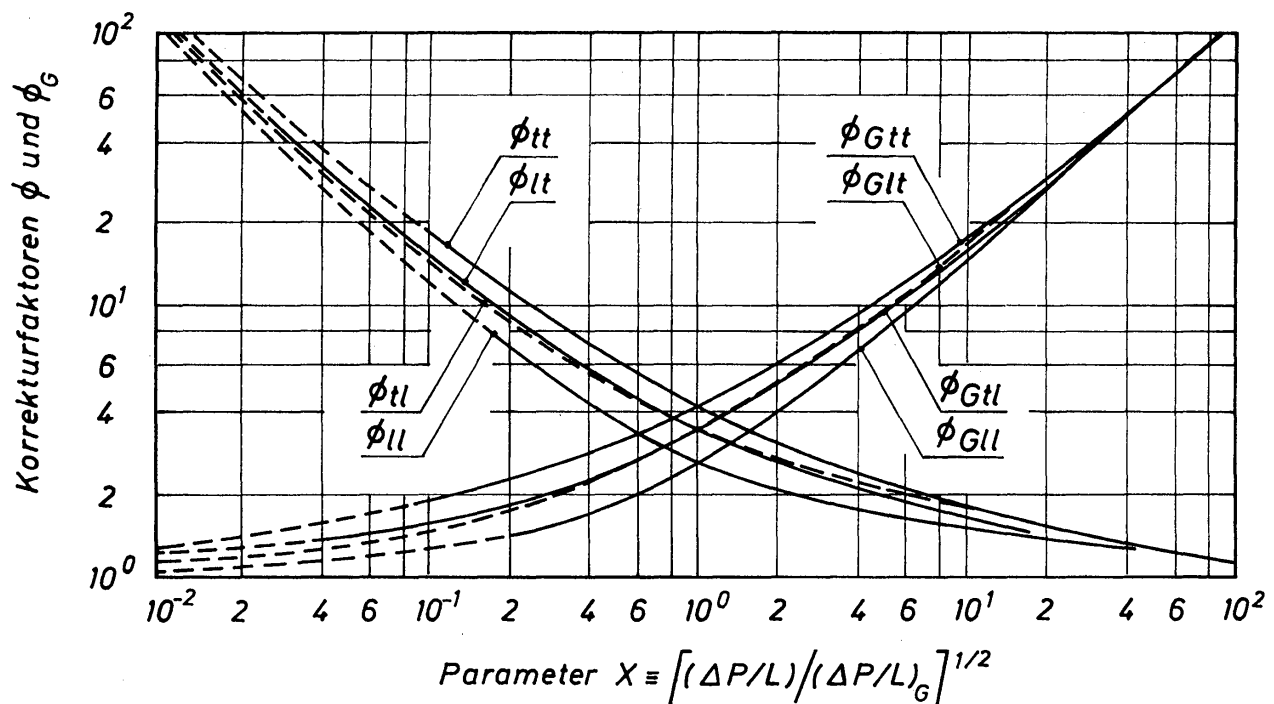


Bild 15.21. Abhängigkeit der von LOCKHART und MARTINELLI eingeführten Korrekturfaktoren von dem Druckverlustverhältnis X zur Berechnung des Druckverlustes bei der Zweiphasenströmung in Rohren

Die Berechnung des Druckverlustes $(\Delta P/L)_2$ der Zweiphasenströmung geschieht nach LOCKHART und MARTINELLI in der folgenden Weise. Man berechnet zunächst die Druckverluste im Flüssigkeits- und im Gasstrom mittels der Gesetze für die Einphasenströmung. Es wird dabei vorausgesetzt, daß jede Phase den gesamten Rohrquerschnitt ausfüllt. Aus dem Volumstrom \dot{V} ergibt sich die mittlere Phasengeschwindigkeit zu $\bar{w} = 4\dot{V}/d^2\pi$, wobei d der Rohrdurchmesser ist. Über X erhält man aus *Bild 15.21* den gewünschten Korrekturfaktor und berechnet dann mittels Gl.(15.58) den Druckverlust $(\Delta P/L)_2$.

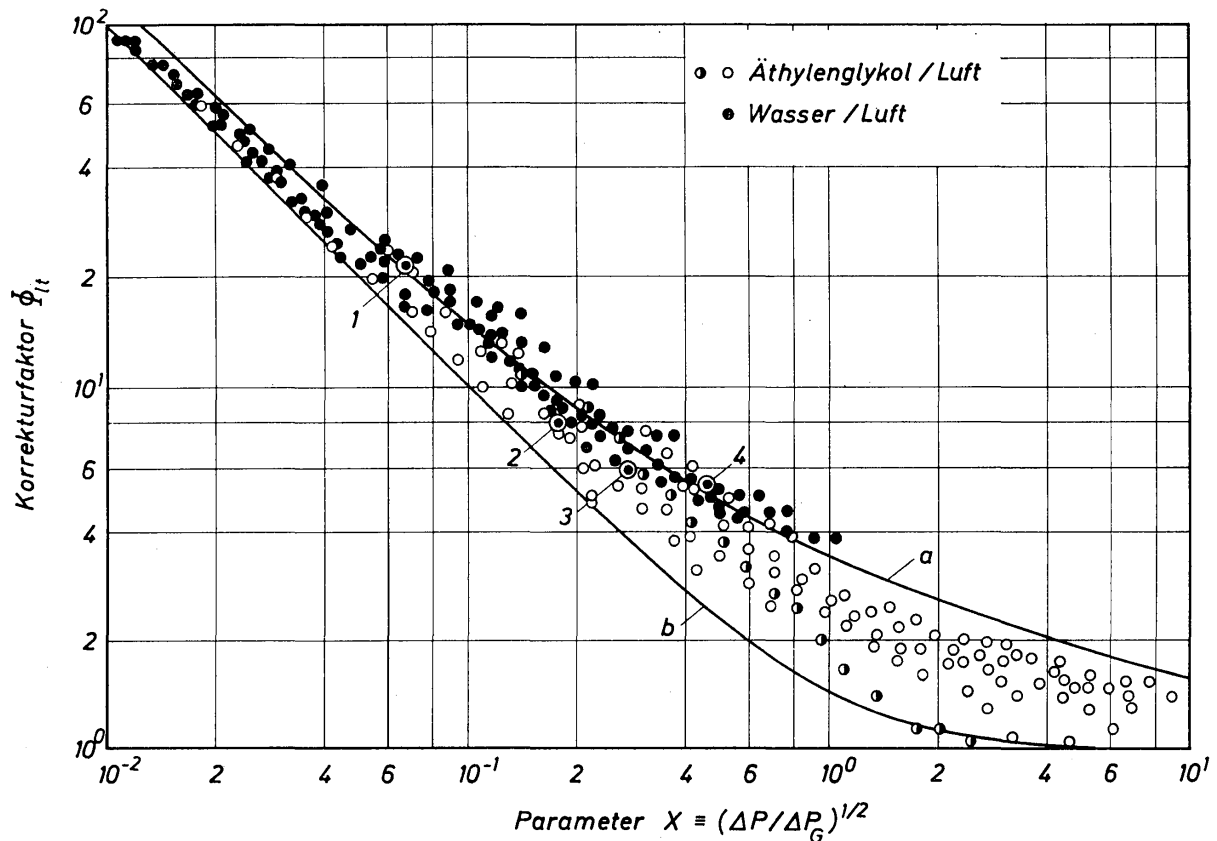


Bild 15.22. Vergleich zwischen Meßwerten für den Druckverlust einer Gas-Flüssigkeits-Strömung in Rohren mit der von LOCKHART und MARTINELLI mitgeteilten Kurve *a* für den Korrekturfaktor Φ_{lt} . Kurve *b* gibt Gl.(15.67) von KRIEGEL wieder

Um eine Vorstellung von der Genauigkeit des Berechnungsverfahrens zu erhalten, sind in *Bild 15.22* Meßwerte mit der von LOCKHART und MARTINELLI angegebenen Kurve *a* für Φ_{lt} verglichen. Der Strömungszustand der Flüssigkeit war laminar und der des Gases turbulent. Die Meßwerte für Äthylenglykol/Luft stammen von ARNOLD [15.38] und die für Wasser/Luft von STECHEMESSER [15.39]. Im Bereich kleiner Werte für X weichen die Meßwerte nur verhältnismäßig wenig von der Kurve *a* ab. Im Bereich großer Werte für X ist die Abweichung teilweise so groß, daß man das Verfahren von LOCKHART und MARTINELLI lediglich zum groben Abschätzen des Druckverlustes verwenden darf. Die Bedeutung der Kurve *b* wird im folgenden Abschnitt erklärt.

Um den Verlauf der Meßwerte für eine bestimmte Reynoldszahl der Flüssigkeit erkennen zu können, sind die Meßwerte für $Re = 19,8$ durch halb ausgefüllte

Kreise besonders hervorgehoben worden. Der dadurch sichtbar werdende Verlauf ergibt sich in ähnlicher Weise bei allen Meßreihen mit $Re = \text{const.}$ Mit zunehmenden Werten von X fallen die Meßwerte wesentlich stärker ab, als es durch die empirische Kurve a angezeigt wird, und nähern sich dann einem nahezu konstanten Wert. Die aus *Bild 15.22* zu entnehmenden Mängel des Verfahrens von LOCKHART und MARTINELLI werden durch die Ergebnisse vieler Untersuchungen bestätigt. Die Mängel sind überraschenderweise jedoch nur zu einem kleinen Teil dadurch bedingt, daß Meßwerte für alle denkbaren Phasenverteilungszustände durch eine einzige Kurve ausgeglichen werden. Die Phasenverteilungszustände sind für eine Meßreihe, bei der die Reynoldszahl des Gases mit $Re_G \approx 5800$ konstant war, durch Ziffern gekennzeichnet. Bei Meßwert 1 lag Schichtenströmung, bei den Meßwerten 2 und 3 Wellenströmung und bei Meßwert 4 Schwallströmung vor. Diesen Ergebnissen zufolge möchte man den Schluß ziehen, daß eine Verfeinerung des Berechnungsverfahrens von LOCKHART und MARTINELLI durch eine besondere Berücksichtigung der Reynoldszahl der Flüssigkeit möglich sein sollte. Eine derartige Verbesserung der Berechnungsverfahren hat KRIEGEL [15.35] vorgenommen.

Innerhalb der Streubreite, die aus *Bild 15.22* hervorgeht, liegen auch Meßwerte für den Druckverlust, wenn die Flüssigkeit nicht-Newton'sche Eigenschaften aufweist. In der Untersuchung von OLIVER und HOON [15.40] werden die Abweichungen von der Kurve nach LOCKHART und MARTINELLI insbesondere durch das besondere Verhalten der nicht-Newton'schen Flüssigkeiten erklärt.

15.312 Berechnungsverfahren von Kriegel

KRIEGEL [15.35] erweiterte die in Abschnitt 15.2 entwickelte Theorie der Gas-Film-Strömung, indem er die einschränkende Bedingung $\delta \ll R$ fallen ließ. Die Ergebnisse für den Druckverlust beim Gleichstrom in senkrechten Rohren wurden so umgeformt, daß sich für den von LOCKHART und MARTINELLI eingeführten Korrekturfaktor Φ die folgende theoretische Gleichung ergab:

$$\Phi^* = (1 + 1/X^2)^{1/2}. \quad (15.67)$$

Mit X^2 wird wieder das Druckverlustverhältnis $\Delta P/\Delta P_G$ bezeichnet. Φ^* ist der Korrekturfaktor bei laminarer Strömung von Flüssigkeit und Gas. Da die Rechnungen für einen Flüssigkeitsfilm mit glatter Oberfläche durchgeführt wurden, wird Φ^* den absolut niedrigsten Wert des Korrekturfaktors haben. Jeder aus Meßwerten ermittelte Wert muß größer sein als der von Φ^* oder gleich groß. In *Bild 15.22* ist Φ^* über X als Kurve b dargestellt. Man sieht, daß das Verhalten der Φ^* -Kurve den Meßwerten besser gerecht wird als das Verhalten der Φ_{μ} -Kurve a . Damit ist die Grundlage für die Entwicklung eines verbesserten Verfahrens zur Berechnung des Druckverlustes geschaffen.

KRIEGEL ging von der Erkenntnis aus, daß die Strömungszustände den Korrekturfaktor Φ nur wenig beeinflussen. Maßgebend für die Größe von Φ ist die Reynoldszahl der Flüssigkeit Re , da durch diese der Phasenverteilungszustand in entschei-

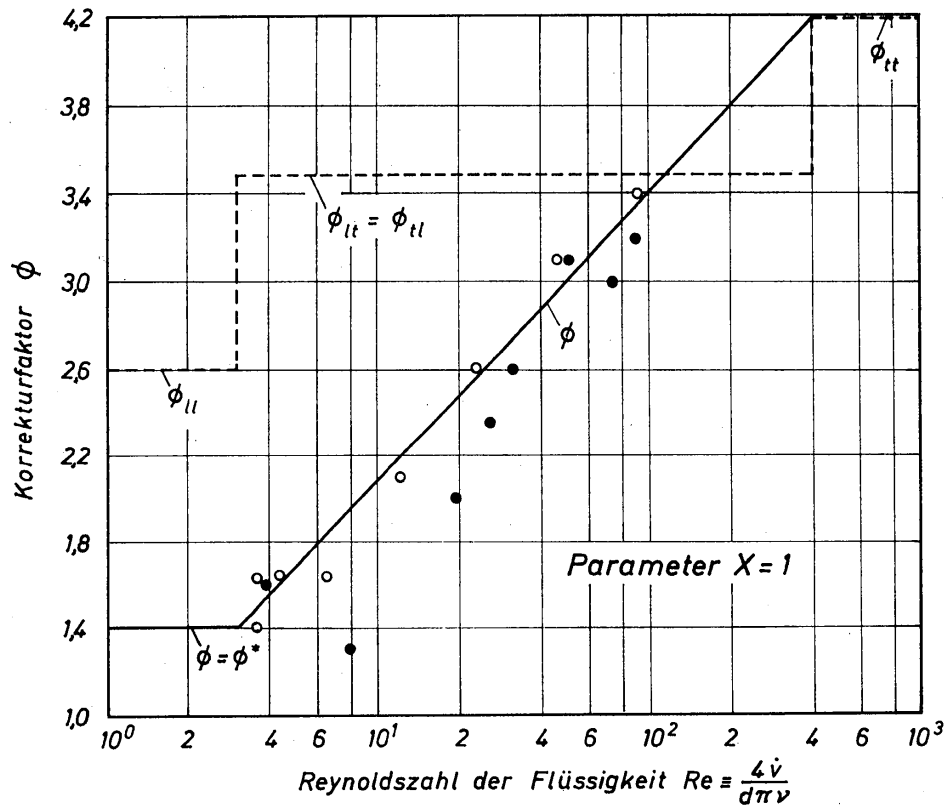


Bild 15.23. Abhängigkeit des Korrekturfaktors Φ von der Reynoldszahl der Flüssigkeit Re für $X=1$. Eingezeichnete Punkte stellen Meßwerte dar

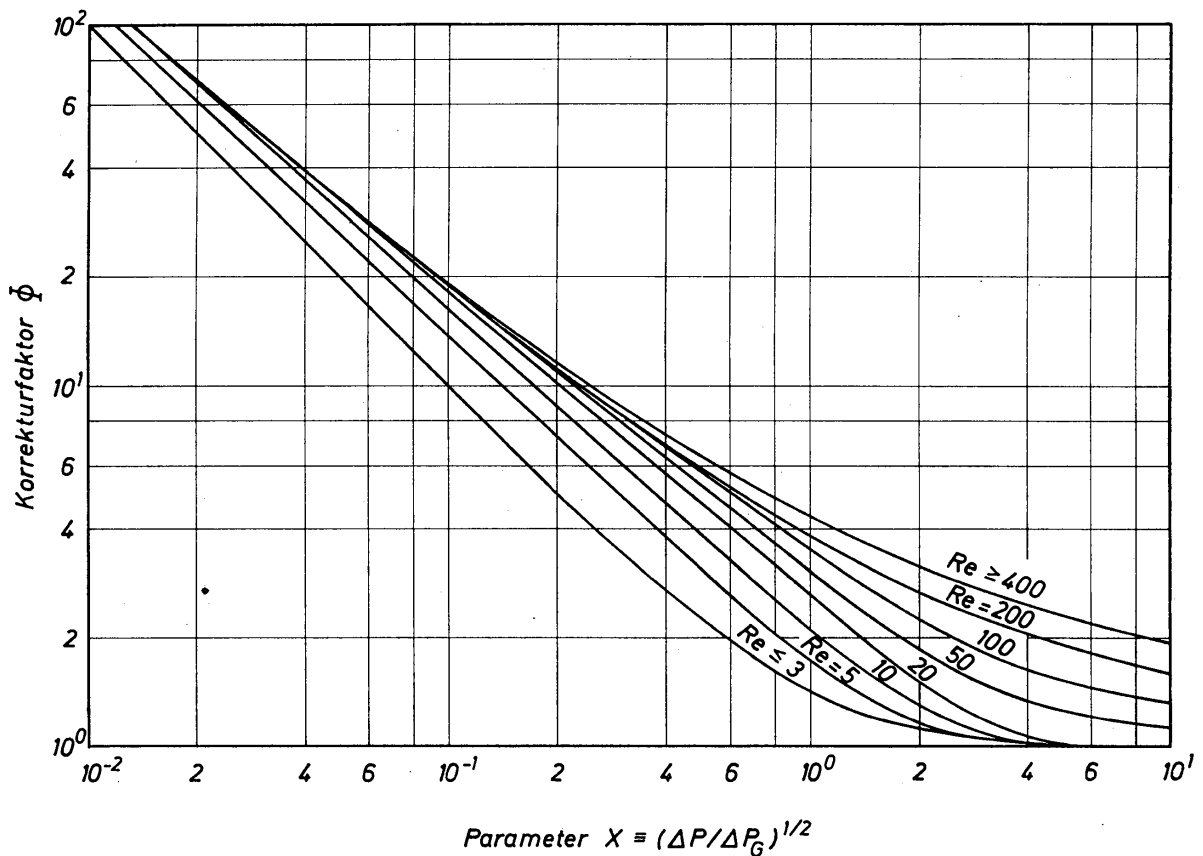


Bild 15.24. Diagramm zur Bestimmung des Korrekturfaktors Φ als Funktion von X und Re

dender Weise beeinflußt wird. In *Bild 15.23* ist Φ für $X = 1$ über Re aufgetragen. Der ausgezogene Linienzug gibt die eingezeichneten Meßwerte wieder. Der niedrigste Wert für Φ ist Φ^* . Der höchste Wert für Φ stimmt mit Φ_u nach LOCKHART und MARTINELLI überein. Zum Vergleich ist Φ auch nach Angaben von LOCKHART und MARTINELLI eingezeichnet, wobei sich die gestrichelte Stufenkurve ergibt. Wesentlich ist, daß die Meßwerte einen logarithmischen Anstieg von Φ mit der Reynoldszahl der Flüssigkeit zeigen. Für andere Werte von X haben sich ähnliche Kurven ergeben. Damit ist es dann möglich, das in *Bild 15.24* dargestellte Diagramm zu zeichnen. Hiernach ist also der Korrekturfaktor Φ eine Funktion des Parameters X und der Reynoldszahl der Flüssigkeit Re . Mit Hilfe dieses Diagramms berechnet man den Druckverlust in der gleichen Weise wie nach dem Verfahren von LOCKHART und MARTINELLI.

15.313 Berechnungsverfahren von Chawla

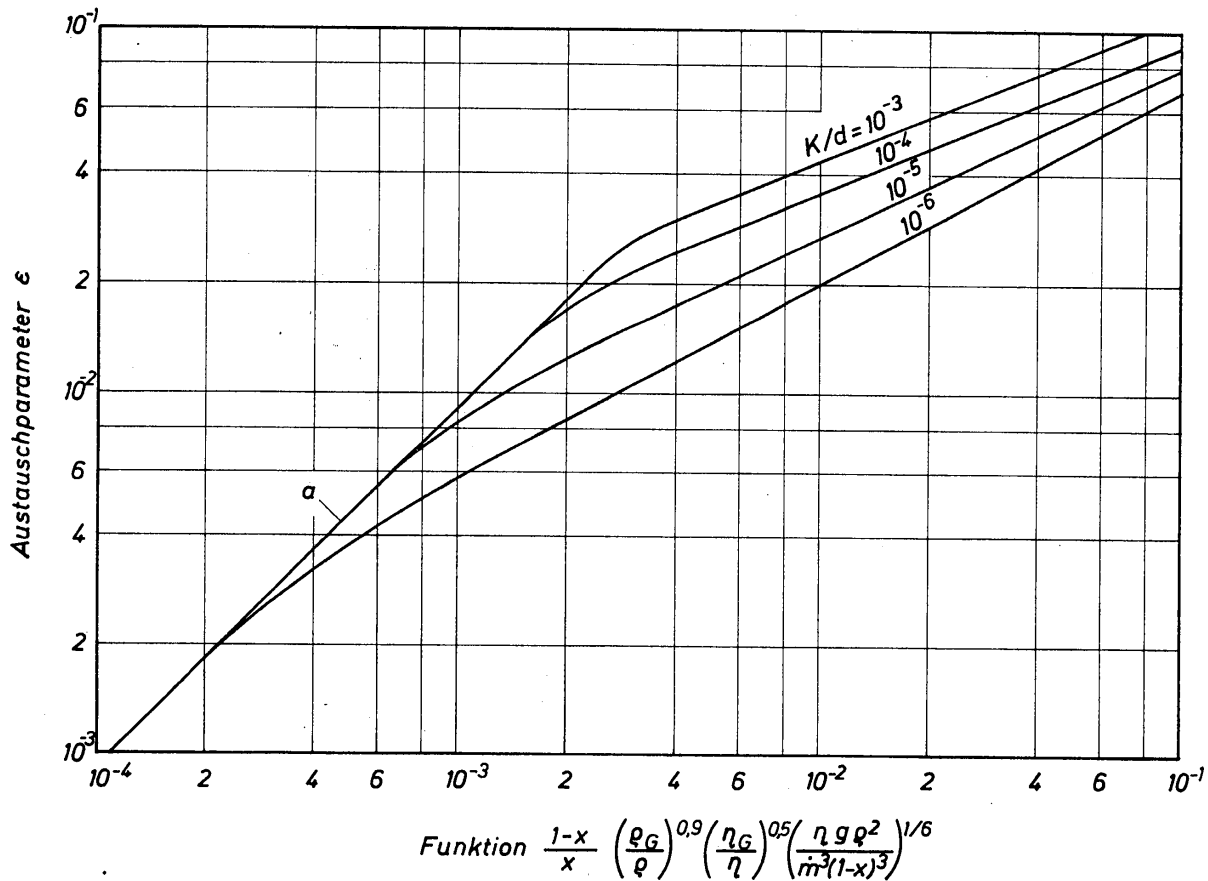
Ausgehend von der Vorstellung, die bereits LOCKHART und MARTINELLI der Druckverlustberechnung zugrunde legten, gelangte CHAWLA [15.37] unter Verwendung einer einfachen Beziehung für den hydraulischen Durchmesser zu der folgenden Druckverlustgleichung:

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_2 = \frac{0,3164}{(\dot{m} d / \eta_G)^{1/4}} \frac{\dot{m}^2 x^{7/4}}{2 d \rho_G} \left(1 + \frac{1-x}{x \varepsilon \rho / \rho_G}\right)^{19/8} \quad (15.68)$$

Hierin bedeuten $\dot{m} = \dot{m}' + \dot{m}''$ die Massenstromdichte mit \dot{m}' und \dot{m}'' als Massenstromdichten der Flüssigkeit und des Gases bzw. des Dampfes, $x = \dot{m}'' / \dot{m}$ den Dampf- bzw. Gasgehalt, d den Rohrdurchmesser, ρ und ρ_G die Dichten der Flüssigkeit und des Gases und η_G die dynamische Viskosität des Gases. Mit ε bezeichnet CHAWLA einen Austauschparameter, der ursprünglich die Bedeutung eines Geschwindigkeitsverhältnisses hatte. Der Austauschparameter wurde aus Meßwerten für den Druckverlust bestimmt, die von über 40 Experimentatoren stammen. In *Bild 15.25* ist ε graphisch dargestellt. Es zeigt sich, daß ε nicht nur von den auch in Gl. (15.68) auftretenden Größen, sondern zusätzlich noch vom Rauigkeitsparameter k/d abhängt; mit k wird die Rauigkeit der Rohrwand bezeichnet. In Richtung kleiner werdender Abszissenwerte münden alle Kurven für $k/d = \text{const}$ in die Grenzkurve a ein. Für diese gilt folgende Gleichung:

$$\varepsilon = 9,1 \frac{1-x}{x} \left(\frac{\rho_G}{\rho}\right)^{0,9} \left(\frac{\eta_G}{\eta}\right)^{0,5} \left(\frac{\eta g \rho^2}{\dot{m}^3 (1-x)^3}\right)^{1/6} \quad (15.69)$$

Der mit $1/6$ potenzierte Ausdruck ist gleich $1/(Re Fr)$, mit $Re \equiv m (1-x) d / \eta$ als Reynoldszahl der Flüssigkeit und $Fr \equiv m^2 (1-x)^2 / (\rho^2 g d)$ als Froudezahl. Der Rauigkeitsparameter k/d übt nur bei kleinen Dampfgehalten x einen Einfluß auf den Austauschparameter ε aus. Bei einem gegebenen Wert der auf der Abszisse aufgetragenen Funktion ist ε um so größer, je größer die Rauigkeit ist. Gemäß Gl. (15.68) ergibt sich bei großer Rauigkeit der niedrigste Druckverlust. Die Ursache für dieses ungewöhnliche Verhalten ist wahrscheinlich in einer bekannten

Bild 15.25. Diagramm zur Ermittlung des Austauschparameters ε

Eigenart der Zweiphasenströmung zu suchen: leitet man eine starke wellige oder schwallartige Filmströmung über kleine, aber schroffe Erhebungen der Wand, so wird die Phasengrenzfläche geglättet. Wenn die damit erreichte Verminderung des Druckverlustes die durch Wandrauigkeiten bedingte Erhöhung des Druckverlustes überwiegt, dann muß insgesamt der Druckverlust geringer werden, wie es CHAWLA festgestellt hat.

Bei den von CHAWLA zur Auswertung herangezogenen Meßwerten wurden die Einflußgrößen wie folgt verändert: Rohrdurchmesser d zwischen 6 und 154 mm, Rauigkeitsparameter k/d zwischen $5,9 \cdot 10^{-6}$ und $6,8 \cdot 10^{-2}$, Reynoldszahl der Flüssigkeit Re zwischen 10^2 und $3 \cdot 10^5$, Froudezahl der Flüssigkeit Fr zwischen 10^{-5} und 10^2 , Dichteverhältnis ρ/ρ_G zwischen 30 und 850, Viskositätsverhältnis η/η_G zwischen 40 bis 7000 und der Dampfgehalt x zwischen 10^{-4} und 0,98. Die maximale Streuung der Meßwerte um die nach Gl.(15.68) berechnete Kurve betrug nur in Ausnahmefällen mehr als $\pm 20\%$.

15.314 Druckverlust in senkrechten Rohren und in Rohrkrümmern

Die drei erörterten Verfahren von LOCKHART und MARTINELLI [15.34], KRIEGEL [15.35] und CHAWLA [15.37] dienen zur Berechnung des Druckverlustes bei der Zweiphasenströmung in horizontalen Rohren. Bei der Strömung in senkrechten Rohren setzt sich der Druckverlust $(\Delta P/L)_{2s}$ aus zwei Anteilen zusammen:

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{2s} = \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_2 \pm g \rho_2. \quad (15.70)$$

Der erste Anteil $(\Delta P/L)_2$ ist nach den drei genannten Verfahren zu berechnen und erfaßt den Druckverlust auf Grund von Reibungs- und sonstigen Strömungswiderständen. Der zweite Anteil $g\varrho_2$ berücksichtigt die Förderung des zweiphasigen Systems über die Höhendifferenz L . Das positive Vorzeichen betrifft die nach oben und das negative Vorzeichen die nach unten gerichtete Förderung. Mit ϱ_2 wird die mittlere Dichte des zweiphasigen Systems bezeichnet:

$$\varrho_2 = \varrho \frac{V}{V_R} + \varrho_G \frac{V_G}{V_R}. \quad (15.71)$$

Es bedeuten ϱ und ϱ_G die Dichten von Flüssigkeit und Gas, $V_R = d^2 \pi L/4$ das Rohrvolumen sowie V und V_G die darin enthaltenen Volumina für die Flüssigkeit und das Gas. Dabei ist stets $V + V_G = V_R$. Zur Berechnung der mittleren Dichte ϱ_2 müssen also die Volumanteile V/V_R und V_G/V_R bekannt sein. Eine näherungsweise Bestimmung der Volumanteile erfolgt in Abschnitt 15.32.

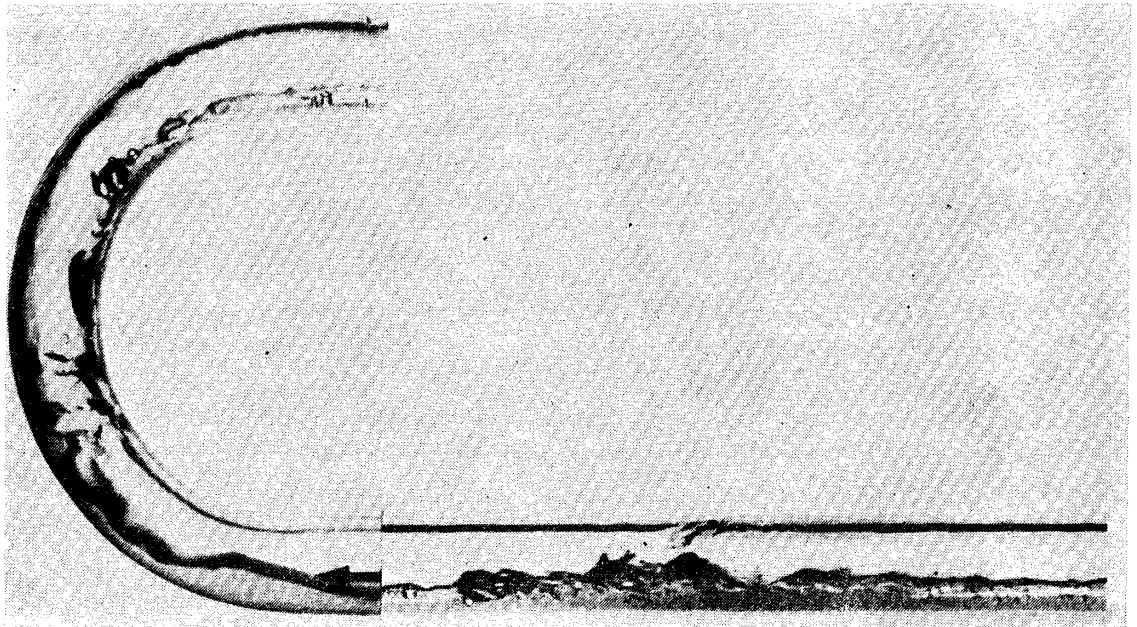


Bild 15.26. Photographische Aufnahme von der Gas-Flüssigkeits-Strömung (Schwallströmung) durch einen Krümmer

Eine Vorstellung von der Gas-Flüssigkeits-Strömung durch einen Krümmer vermittelt die photographische Aufnahme in *Bild 15.26*. Dargestellt ist die von rechts nach links gerichtete Schwallströmung durch ein gerades Rohr und einen angeschlossenen Krümmer. Die Aufnahme läßt erkennen, daß der Phasenverteilungszustand und somit auch die Form der Phasengrenzfläche im Krümmer und im geraden Rohr weitgehend übereinstimmen. Aus diesem Grunde darf man erwarten, daß im Krümmer nahezu der gleiche Druckverlust auftritt wie in einem geraden Rohr von der Länge des Krümmers. Diese Erwartung wird durch Messungen von STECHEMESSER [15.39] bestätigt. Abweichende Ergebnisse sind nur bei sehr kleinen Werten für das Durchmesser Verhältnis D/d zu erwarten, wobei D und d Krümmer- und Rohrdurchmesser bedeuten. Wenn der Druckverlust

in nicht zu kleinen Krümmern mittels der Gesetze für gerade Rohre berechnet werden kann, dann muß das auch für die Gas-Flüssigkeits-Strömung in Rohrschlangen gelten. RIPPEL, EIDT und JORDAN [15.41] bestätigen das durch ihre Versuche.

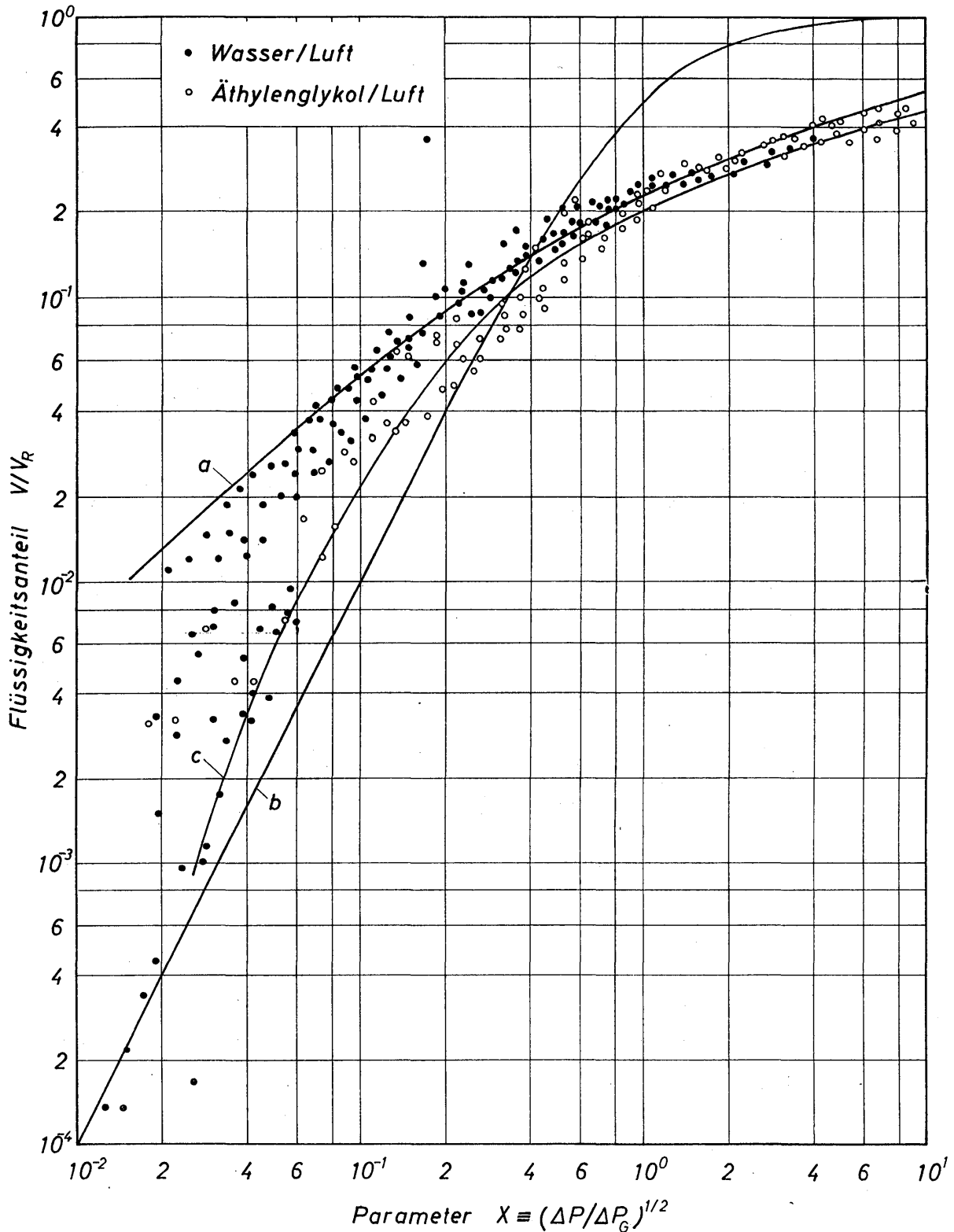


Bild 15.27. Flüssigkeitsanteil V/V_R , abhängig von dem Parameter X ; Kurve *a* nach Angaben von LOCKHART und MARTINELLI [15.34], Kurve *b* nach Gl. (15.73) von KRIEGEL [15.35] und Kurve *c* nach Angaben von RIPPEL, EIDT und JORDAN [15.41].

15.32 Flüssigkeits- und Gasanteil

Bei der Behandlung der Gas-Film-Strömung in senkrechten Rohren erwies sich die Filmdicke als eine der bedeutsamsten Größen zur Kennzeichnung der Flüssigkeitsströmung. Bei allen anderen Phasenverteilungszuständen ist eine solche Angabe nicht mehr möglich. Man muß sich damit begnügen, den volumetrischen Flüssigkeitsanteil anzugeben. Das Rohrvolumen V_R setzt sich stets aus dem darin befindlichen Flüssigkeitsvolumen V und dem Gasvolumen V_G zusammen. Bezieht man V und V_G auf das Rohrvolumen V_R , so muß also gelten

$$\frac{V}{V_R} + \frac{V_G}{V_R} = 1. \quad (15.72)$$

Verfahren zur Messung der volumetrischen Phasenanteile sind in den Arbeiten von BARTHELS [15.33] sowie PIKE, WILKINS und WARD [15.42] ausführlich beschrieben worden. LOCKHART und MARTINELLI [15.34] haben vorgeschlagen, die Anteile V/V_R und V/V_G abhängig von dem Parameter $X \equiv (\Delta P/\Delta P_G)^{1/2}$ darzustellen. Sie hofften, daß alle Meßwerte durch eine Kurve genügend genau ausgeglichen werden. Diese Hoffnung hat sich jedoch nicht erfüllt. In *Bild 15.27* sind Meßwerte von ARNOLD [15.38] und von STECHEMESSER [15.39] dargestellt. Zum Vergleich ist die von LOCKHART und MARTINELLI mitgeteilte Kurve *a* angegeben. Im Bereich großer Werte von X werden die Meßwerte genügend genau ausgeglichen. Unterhalb von $X = 1$ fächern die Meßwerte stark auf. Kurve *a* darf möglicherweise als obere Grenze angesehen werden. Ferner ist in *Bild 15.27* die nach der von KRIEGEL [15.35] hergeleiteten theoretischen Gleichung,

$$\frac{V}{V_R} = \frac{X^2}{1 + X^2}, \quad (15.73)$$

berechnete Kurve *b* eingetragen. Für $X > 0,4$ liefert diese Gleichung viel zu große Werte für den Flüssigkeitsanteil. Für $X < 0,4$ könnte Kurve *b* möglicherweise die untere Grenze sein. Schließlich ist noch Kurve *c* nach Angaben von RIPPEL, EIDT und JORDAN [15.41] eingetragen. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Kurve *a* von LOCKHART und MARTINELLI die Meßwerte für $X > 1$ in befriedigender Weise ausgleicht. Unterhalb von $X = 1$ ist eine befriedigende Vorausberechnung des Flüssigkeitsanteils noch nicht möglich. Die für nicht-Newton'sche Flüssigkeiten [15.40) und für flüssige Metalle [15.43] angegebenen Meßwerte liegen teilweise sehr weit von den in *Bild 15.27* eingezeichneten Kurven entfernt. Weitere Untersuchungen wären zur Klärung erwünscht.

15.33 Druckschwankungen

Bei der Messung des Druckverlustes von Gas-Flüssigkeits-Strömungen beobachtet man stets starke Schwankungen. Die Zahl aller registrierten Schwankungen je Zeiteinheit wird als Frequenz f der Druckverlustschwankungen und die Differenz aus aufeinanderfolgendem maximalem und minimalem Wert des Druckverlustes

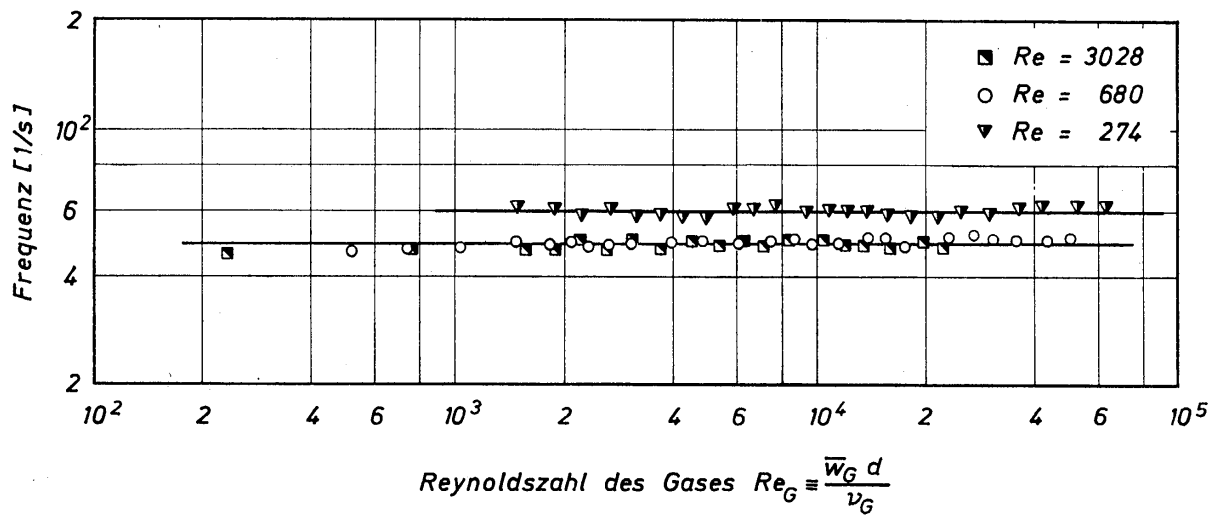


Bild 15.28. Abhängigkeit der Frequenz der Druckverlustschwankungen von der Reynoldszahl des Gases für drei Werte der Reynoldszahl der Flüssigkeit Re

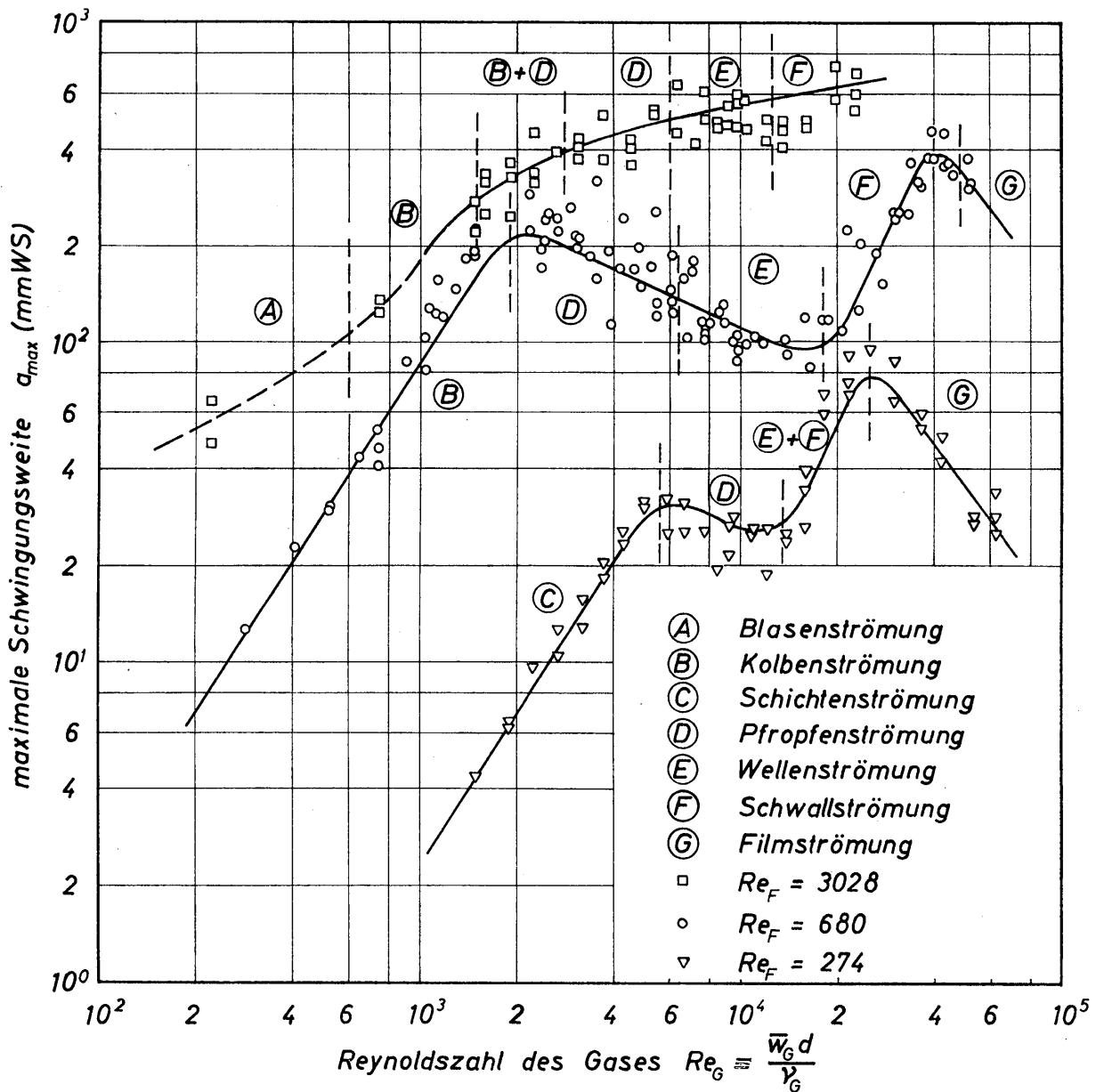


Bild 15.29. Abhängigkeit der maximalen Schwingungsweite a_{max} der Druckverlustschwankungen von der Reynoldszahl des Gases für drei Werte der Reynoldszahl der Flüssigkeit

wird als Schwingungsweite a bezeichnet. MICHEL [15.44] hat diese Größen bei der Wasser/Luft-Strömung in einem horizontalen Rohr von $d = 13,95$ mm gemessen.

In *Bild 15.28* sind die gemessenen Frequenzen über der Reynoldszahl des Gases Re_G für drei verschiedene Werte der Reynoldszahl der Flüssigkeit Re dargestellt. Es zeigt sich das bemerkenswerte Ergebnis, daß die Frequenz unabhängig von der Reynoldszahl des Gases ist. Für die drei angegebenen Werte der Reynoldszahl der Flüssigkeit liegt die Frequenz zwischen 50 und 60 Hz. Die maximalen Schwingungsweiten a_{\max} sind für die gleichen Werte der Reynoldszahl der Flüssigkeit in *Bild 15.29* über der Reynoldszahl des Gases Re_G aufgetragen. Bei den beiden niedrigen Werten von Re zeigt die maximale Schwingungsweite eine starke Abhängigkeit von den Phasenverteilungszuständen. Die größten Werte für a_{\max} treten beim Übergang von der Pfropfenströmung zur Filmströmung auf. Der Einfluß der Phasenverteilungszustände auf a_{\max} wird bei größeren Werten der Reynoldszahl der Flüssigkeit offensichtlich schwächer. Die wenigen bisher vorliegenden Meßwerte gestatten noch keine eingehende Analyse der Schwingungsvorgänge. Erwähnt sei jedoch, daß die maximale Schwingungsweite des Druckverlustes bei den Versuchen von MICHEL mit guter Näherung gleich dem Mittelwert des Druckverlustes je Meter Rohrlänge war.

15.4 Einige Hinweise auf die Strömung nicht mischbarer Flüssigkeiten

Zwischen der Gas-Flüssigkeits-Strömung und der Strömung von zwei nicht mischbaren Flüssigkeiten durch Rohrleitungen besteht eine große Ähnlichkeit. Es scheint daher gerechtfertigt zu sein, hier zumindest einige Hinweise auf Untersuchungen über die Strömung nicht mischbarer Flüssigkeiten zu bringen. Technisch ist diese Form der Zweiphasenströmung deshalb von Interesse, weil der Druckverlust kleiner sein kann als bei der Einphasenströmung. Für den laminaren Gleichstrom beider Phasen durch einen Kanal mit rechteckigem Querschnitt haben CHARLES und LILLELEHT [15.45] umfangreiche theoretische und experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Von besonderer Bedeutung ist der Druckverlustminderungsfaktor

$$P \equiv \frac{(\Delta P/L)}{(\Delta P/L)_2}, \quad (15.74)$$

der das Verhältnis aus dem Druckverlust $\Delta P/L$ der viskoserer Flüssigkeit und dem Druckverlust $(\Delta P/L)_2$ der zweiphasigen Strömung darstellt. In *Bild 15.30* ist als Beispiel P über dem Volumstromanteil Öl aufgetragen. Dem Öl war als weniger viskose Phase Wasser zugemischt. Bei der Strömung stellte sich unter den Versuchsbedingungen eine Schichtung beider Phasen ein. Die in *Bild 15.30* eingezeichnete Kurve ist theoretisch berechnet worden. Zum Vergleich enthält das Bild einige Meßwerte für verschiedene Reynoldszahlen der Ölströmung. Ist der Volumstromanteil des Öles größer als 0,5, dann wird $P > 1$. In diesem Fall hat also die Gegenwart des Wassers zu einer Herabsetzung des Druckverlustes geführt.

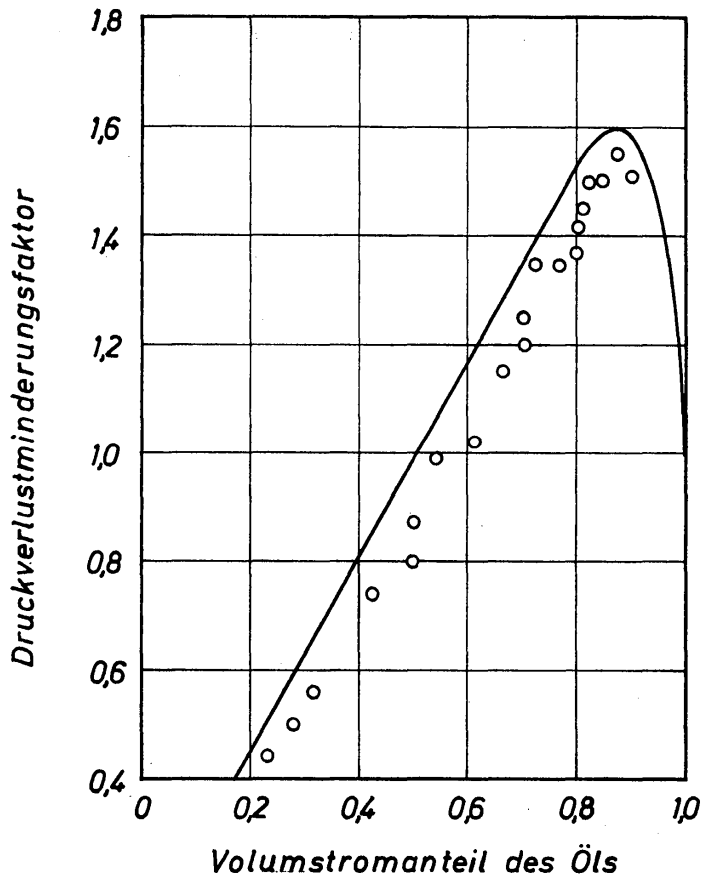


Bild 15.30
Abhängigkeit des Druckminderungsfaktors P vom Volumstromanteil des Öls, dem als weniger viskose Phase Wasser zugemischt ist

Die Probleme der zweiphasigen Strömung nicht mischbarer Flüssigkeiten durch Rohre sind in weiteren Arbeiten theoretisch [15.46 bis 15.49] und experimentell [15.50 und 15.51] untersucht worden. Von besonderer Bedeutung ist eine weitere Arbeit von CHARLES und LILLELEHT [15.52], in der zahlreiche Meßwerte für die Strömung nicht mischbarer Flüssigkeiten durch Kanäle mit kreisförmigem und

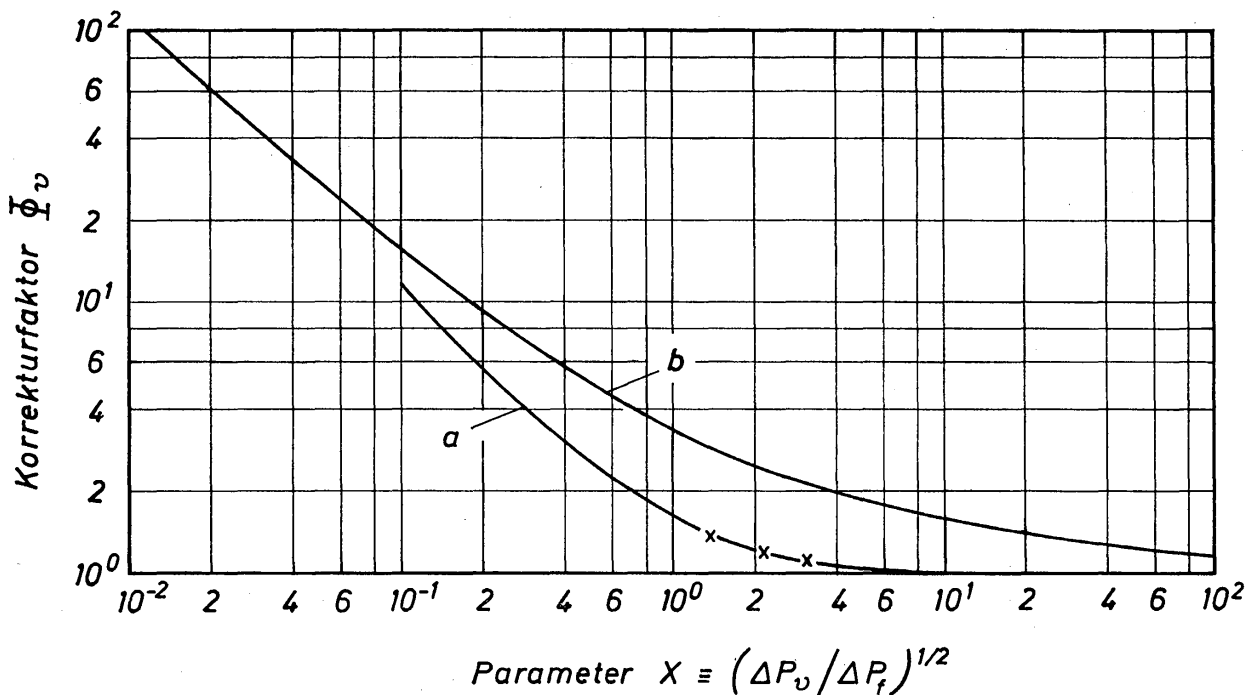


Bild 15.31. Abhängigkeit des Korrekturfaktors Φ_v zur Berechnung des Druckverlustes bei der Strömung von zwei nicht mischbaren Flüssigkeiten durch Rohre

rechteckigem Querschnitt nach dem Verfahren von LOCKHART und MARTINELLI [15.34] ausgewertet wurden (siehe Abschnitt 15.311). Es stellte sich heraus, daß alle Meßwerte mit sehr guter Genauigkeit durch eine Kurve ausgeglichen werden. Diese Kurve ist in *Bild 15.31* mit *a* bezeichnet. Hierbei ist Φ_v^2 das Verhältnis aus dem Druckverlust der zweiphasigen Strömung $(\Delta P/L)_2$ und dem Druckverlust der einphasigen Strömung der viskoserer Flüssigkeit $(\Delta P/L)_v$. Demgemäß stellt X^2 das Verhältnis der Druckverluste $(\Delta P/L)_v$ und $(\Delta P/L)_f$ für die viskosere und die weniger viskose Phase dar. Kurve *a* gilt für laminare Strömung der viskoseren und turbulente Strömung der weniger viskosen Flüssigkeit. Sie liegt erheblich unterhalb der von LOCKHART und MARTINELLI angegebenen Kurve *b*. Wie man durch Vergleich mit *Bild 15.22* feststellt, stimmt Kurve *a* näherungsweise mit der von KRIEGEL [15.35] theoretisch nach Gl. (15.67) berechneten Kurve überein.

Schrifttum

- [15.1] ● S. W. GOUSE, *An index to the two-phase gas-liquid flow literature*, MIT Report No. 9, The MIT Press, Cambridge/Massachusetts und London (England)
- [15.2] J. SCHRÖTER, *Untersuchung einer Zweiphasenströmung im horizontalen Rohr*, Dipl.-Arbeit der Technischen Hochschule Hannover 1962
- [15.3] O. BAKER, Simultaneous flow of oil and gas, *Oil & Gas J.* 53 (1954) 12, 185–95
- [15.4] H. H. SCHICHT, Strömungsbilder bei adiabater Zweiphasenströmung Wasser/Luft in einem horizontalen Rohr, *Verfahrenstechn.* 3 (1969) 4, 153–61
- [15.5] E. QUANDT, Analysis of gas-liquid flow patterns, *Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.* 61 (1965) 57, 128–35
- [15.6] H. BRAUER, Widerstandsgesetze für innen berieselte und gasdurchströmte senkrechte Rohre, *Chem.-Ing.-Techn.* 32 (1960) 11, 719–25
- [15.7] T. UCKE, *Das Widerstandsgesetz der laminaren Gas-Film-Strömung im senkrechten Rohr unter Berücksichtigung der Krümmung des Flüssigkeitsfilms*, Studienarbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik der TU Berlin 1966
- [15.8] K. FEIND, Strömungsuntersuchungen bei Gegenstrom von Rieselfilmen und Gas in lotrechten Rohren, *VDI-Forschungsh.* 481, VDI-Verlag, Düsseldorf 1960
- [15.9] O. MAHRENHOLTZ, Förderung eines Flüssigkeitsfilms an einer senkrechten Wand durch einen Gasstrom, *Kältetechn.* 10 (1958) 5, 150–6
- [15.10] G. H. ANDERSON und B. G. MANTZOURANIS, Two-phase (gas-liquid) flow phenomena, I: Pressure drop and hold-up for two-phase flow in vertical tubes, *Chem. Eng. Sci.* 12 (1960) 2, 109–26
- [15.11] J. G. COLLIER und G. F. HEWITT, Data on the vertical flow of air-water mixtures in the annular and dispersed flow regions, Part II: Film thickness and entrainment data and analysis of pressure drop measurements, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 39 (1961) 127–36
- [15.12] L. E. GILL, G. F. HEWITT und P. M. C. LACEY, Data on the upwards annular flow of air-water mixtures, *Chem. Eng. Sci.* 20 (1965) 2, 71–88
- [15.13] C. J. SHEARER und R. M. NEDDERMAN, Pressure gradient and liquid film thickness in co-current upwards flow of gas liquid mixtures, *Chem. Eng. Sci.* 20 (1965) 7, 671–83
- [15.14] D. H. KIM und J. G. KNUDSEN, Momentum transfer in climbing film flow in annular duct, *AIChE J.* 13 (1967) 2, 326–34
- [15.15] T. W. F. RUSSELL und D. E. LAMB, Flow mechanism of two-phase annular flow, *Can. J. Chem. Eng.* 43 (1965) 5, 237–45

- [15.16] L. S. COHEN und T. J. HANRATTY, Hight of a liquid film in a horizontal concurrent gas-liquid flow, *AICHE J.* 12 (1966) 2, 290-2
- [15.17] N. H. TAYLOR, G. F. HEWITT und P. M. C. LACEY, The motion and frequency of large disturbance waves in annular two-phase flow of air-water mixtures, *Chem. Eng. Sci.* 18 (1963) 8, 537-52
- [15.18] V. A. HALLETT, Surface phenomena causing break down of falling liquid films during heat transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer* 9 (1966) 4, 283-94
- [15.19] S. OSTRACH und A. KOESTEL, Film instabilities in two-phase flows, *AICHE J.* 11 (1965) 2, 294-303
- [15.20] L. S. COHEN und T. J. HANRATTY, Generation of waves in the concurrent flow of air and a liquid, *AICHE J.* 11 (1965) 1, 138-44
- [15.21] L. P. KHOLPANOV, The wavy flow of thin liquid films on vertical planes, *Int. Chem. Eng.* 5 (1965) 4, 633-5
- [15.22] S.-F. CHIEN und W. E. IBELE, Photographic study of the interfacial disturbances of liquid films in falling film flow, in vertical downward, annular two-phase flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 10 (1967) 7, 1016-8
- [15.23] F. P. STAINTHORP und R. S. W. BATT, The effect of cocurrent and countercurrent air flow on the wave properties of falling liquid films, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 45 (1967) 9, T372-T382
- [15.24] J. HEMPEL, Widerstandsbeiwert der Gasströmung in einem berieselten Rohr, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 7, 421-5
- [15.25] J. J. KOWALCZEWSKI, Two-phase flow in an unheated and heated tube, Dissertation ETH Zürich 1964
- [15.26] C. J. HOOGENDOORN, Gas-liquid flow in horizontal pipes, *Chem. Eng. Sci.* 9 (1959) 4, 205-17
- [15.27] G. W. GOVIER, Developments in the understanding of the vertical flow of two fluid phases, *Can. J. Chem. Eng.* 43 (1965) 1, 3-10
- [15.28] H. H. SCHICHT, Zweiphasenströmungen in Rohrleitungen, *Chem.-Ing.-Techn.* 37 (1965) 3, 245-50
- [15.29] H. H. SCHICHT, Die adiabate Zweiphasenströmung Gas-Flüssigkeit in Rohrleitungen. Ein Überblick über den Stand der Forschung, *Verfahrenstechn.* 1 (1967) 8, 341-5
- [15.30] G. A. HUGHMARK, Pressure drop in horizontal and vertical cocurrent gas-liquid flow, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 2 (1963) 4, 315-21
- [15.31] A. E. DUKLER, M. WICKS und R. G. CLEVELAND, Frictional pressure drop in two-phase flow. Part A: Comparison of existing correlations. Part B: An approach through similarity analysis, *AICHE J.* 10 (1964) 1, 38-51
- [15.32] L. FARADY, K. MATOLOSY, A. UJHIDY und B. BABOS, Two-phase gas-liquid flow in pipe lines, *Int. Chem. Eng.* 5 (1965) 2, 263-71
- [15.33] H. BARTHELS, Meßverfahren für Zweiphasenströmungen, *Chem.-Ing.-Techn.* 40 (1968) 11, 530-7
- [15.34] R. W. LOCKART und R. C. MARTINELLI, Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two-component flow in pipes, *Chem. Eng. Progr.* 45 (1949) 1, 39-48
- [15.35] E. KRIEGEL, Berechnung von Zweiphasenströmungen von Gas/Flüssigkeits-Systemen in Rohren, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 22, 1267-74
- [15.36] J. M. CHAWLA, Wärmeübergang und Druckabfall in waagerechten Rohren bei der Strömung von verdampfenden Kältemitteln, *VDI-Forschungsh.* 523, VDI-Verlag, Düsseldorf 1967
- [15.37] J. M. CHAWLA, Reibungsdruckabfall bei der Strömung von Flüssigkeits-Gas-Gemischen in waagerechten Rohren, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 34 (1968) 2, 47-54
- [15.38] W. ARNOLD, Untersuchung einer Zweiphasenströmung in einer senkrechten Rohrschlange, Studienarbeit, TH Hannover 1962

- [15.39] H. STECHEMESSER, *Untersuchung einer Zweiphasenströmung in einer senkrechten Rohrschlange*, Studienarbeit, TH Hannover 1962
- [15.40] D. R. OLIVER und A. Y. HOON, Two-phase non-Newtonian flow, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 46 (1968) 4, T106-T115
- [15.41] G. R. RIPPEL, C. M. EIDT und H. B. JORDAN, Two-phase flow in a coiled tube, *Ind. Eng. Chem. Process, Design & Development* 5 (1966) 1, 32-9
- [15.42] R. W. PIKE, B. WILKINS und H. C. WARD, Measurement of the void fraction in two-phase flow by x-ray attenuation, *AIChE J.* 11 (1965) 5, 794-800
- [15.43] L. R. SMITH, M. R. TEK und R. E. BALZHISER, Pressure drops and void fractions in horizontal two-phase flows of potassium, *AIChE J.* 12 (1966) 1, 50-8
- [15.44] K. MICHEL, *Untersuchung von Druckschwingungen einer Zweiphasenströmung im waagerechten Rohr*, Studienarbeit, TH Hannover 1963
- [15.45] H. E. CHARLES und L. U. LILLELEHT, Co-current stratified laminar flow of two immiscible liquids in a rectangular conduit, *Can. J. Chem. Eng.* 43 (1965) 3, 110-6
- [15.46] T. W. F. RUSSELL und M. E. CHARLES, Effect of less viscous liquid in laminar flow of two immiscible liquids, *Can. J. Chem. Eng.* 37 (1959) 1, 18-24
- [15.47] M. E. CHARLES und P. J. REDBERGER, Reduction of pressure gradients in oil pipelines by addition of water-numerical analysis of stratified flow, *Can. J. Chem. Eng.* 40 (1962) 2, 70-5
- [15.48] A. R. GEMMEL und N. EPSTEIN, Numerical analysis of stratified laminar flow of two immiscible newtonian liquids in circular pipe, *Can. J. Chem. Eng.* 40 (1962) 5, 215-24
- [15.49] Y. P. TANG und D. M. HIMMELBLAU, Velocity distribution for isothermal two-phase co-current laminar flow in a horizontal rectangular duct, *Chem. Eng. Sci.* 18 (1963) 2, 143-4
- [15.50] M. E. CHARLES, G. W. GOVIER und G. W. HODGSON, Horizontal pipeline flow of equal density oil-water mixtures, *Can. J. Chem. Eng.* 39 (1961) 1, 27-36
- [15.51] T. W. F. RUSSELL, G. W. HODGSON und G. W. GOVIER, Horizontal pipeline flow of mixtures of oil and water, *Can. J. Chem. Eng.* 37 (1959) 1, 9-17
- [15.52] M. E. CHARLES und L. U. LILLELEHT, Correlation of pressure gradients for the stratified laminar-turbulent pipeline flow of two immiscible liquids, *Can. J. Chem. Eng.* 44 (1966) 1, 47-9

16 Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Füllkörperschichten

Für den Betrieb berieselter Füllkörperschichten wählt man fast immer den Gegenstrom der beiden Phasen. Die Flüssigkeit wird von oben und das Gas von unten in den Apparat geleitet. Besondere Sorgfalt ist für eine möglichst gleichmäßige Verteilung beider Phasen über den Querschnitt der Säule aufzuwenden. Die Flüssigkeit breitet sich bei genügend hoher Belastung über die gesamte verfügbare Oberfläche der Füllkörper aus und bildet dabei einen dünnen Film. In dieser Beziehung hat man also ähnliche Verhältnisse wie bei der Gas-Film-Strömung in senkrechten Rohren. Die Einzelheiten sind jedoch wesentlich komplizierter. In qualitativer Form lassen sich manche der in Kapitel 15 entwickelten Gesetze auf die Vorgänge in berieselten Füllkörperschichten übertragen. Wie im Rohr gibt es auch bei der Zweiphasenströmung in Füllkörperschichten eine obere Belastungsgrenze, die Staugrenze, bei der die Flüssigkeit vom Gasstrom aufgestaut wird. Bei der Behandlung der Gas-Film-Strömung in Rohren wurde im Abschnitt 15.1 bereits erörtert, daß beim Gleichstrom beider Phasen eine der Staugrenze vergleichbare Belastungsgrenze nicht auftritt. Es wird daher der nach unten gerichtete Gleichstrom beider Phasen auch bei berieselten Füllkörperschichten in Erwägung gezogen. Die Belastung der Gasphase kann dabei wesentlich höher sein als beim Gegenstrombetrieb. Grundsätzlich muß man beim abwärts gerichteten Gleichstrom aber mit mehreren Phasenverteilungszuständen rechnen, und es ergeben sich daher verwickeltere Strömungsverhältnisse als beim Gegenstrom. Darüber hinaus ist bei sehr hohen Gasbelastungen und niedrigen Flüssigkeitsbelastungen eine mangelhafte Benetzung der Füllkörperschicht zu erwarten. In den folgenden Abschnitten werden die Strömungsverhältnisse bei Gegenstrom und Gleichstrom der beiden Phasen behandelt. Es wird davon ausgegangen, daß die Gesetze der Einphasenströmung in Füllkörperschichten und die Gesetze der Gas-Film-Strömung in Rohren bekannt sind.

16.1 Allgemeine Angaben über die berieselte Füllkörperschicht

Die Füllkörper sind normalerweise in der Schicht regellos verteilt, obgleich auch Schichten mit regulärer Anordnung der Füllkörper von Bedeutung sind. Für nicht zu kleine, aber auch nicht zu große Volumelemente soll der Lückengrad ε der trockenen Schicht über das gesamte Schichtvolumen konstant sein. Setzt man weiter voraus, daß die Schicht überall gleich stark berieselt wird, dann muß auch der für die berieselte Füllkörperschicht maßgebende Lückengrad ε_2 örtlich unveränderlich sein. Der Lückengrad ε_2 stellt das Verhältnis des für die Gasströmung verfügbaren Volumens zum Volumen der Säule dar und ist folgendermaßen definiert:

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{V_s - (V_p + V_f)}{V_s} = \varepsilon - \varepsilon_f. \quad (16.1)$$

Hierin bedeuten V_f das in der Schüttung befindliche Flüssigkeitsvolumen, d. h. den sogenannten Flüssigkeitsinhalt der Schicht, V_s das Säulenvolumen und V_p das Füllkörpervolumen. Bezieht man das freie Volumen der berieselten Schüttung auf das freie Volumen der unberieselten, so erhält man mit

$$\varepsilon_f = \frac{V_s - (V_p + V_f)}{V_s - V_p} = 1 - V_f / (V_s \cdot \varepsilon) \quad (16.2)$$

ein Maß dafür, welchen Anteil des freien Volumens der unberieselten Schicht die Flüssigkeit einnimmt. Bei unberieselter Schicht, d. h. bei $V_f = 0$, wird $V_f / (V_s \cdot \varepsilon) = 0$ und $\varepsilon_f = 1$. Füllt die in der Schüttung enthaltene Flüssigkeit das freie Volumen der trockenen Schüttung vollkommen aus ($V_f = V_s - V_p$), dann gilt $V_f / (V_s \cdot \varepsilon) = 1$ und $\varepsilon_f = 0$. Außerdem wird in diesem Fall gemäß Gl. (16.1) auch $\varepsilon_2 = 0$. Die Größe $V_f / (V_s \cdot \varepsilon)$ bezeichnet man als Flüssigkeitsfüllzahl. In den vorausgegangenen Gleichungen ist der Lückengrad der trockenen Schicht zu

$$\varepsilon \equiv \frac{V_s - V_p}{V_s} \quad (16.3)$$

gegeben.

Man darf nicht erwarten, daß ε_2 bei den wirklichen Strömungsverhältnissen in berieselten Schichten konstant ist. Vielmehr werden Gas und Flüssigkeit die Schüttung ungleichmäßig durchströmen. Die Strömungsverhältnisse sind ziemlich verwickelt. Sie lassen sich jedoch durch das in *Bild 16.1* dargestellte Modell einer berieselten Schüttung recht gut beschreiben [16.1].

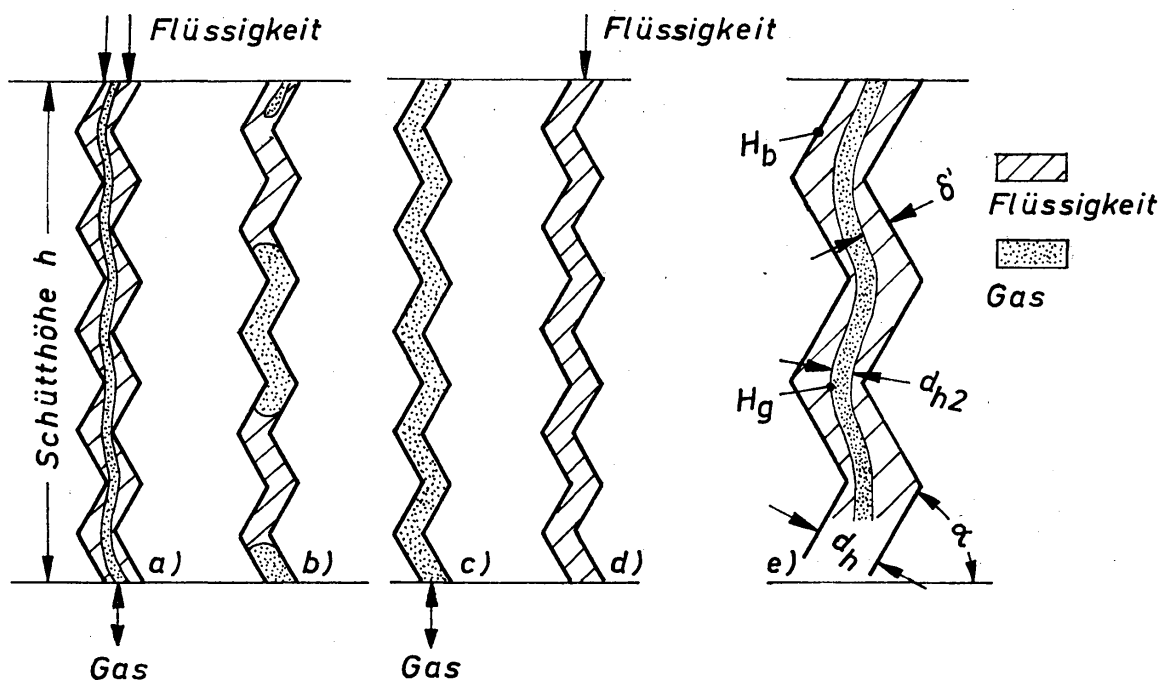


Bild 16.1. Modell zur Erläuterung der berieselten Füllkörperschicht; a) von beiden Phasen durchströmter Kanal, b) verstopfter Kanal, c) nur von Gas durchströmter Kanal, d) nur von Flüssigkeit durchströmter Kanal und e) Kanalausschnitt mit Bezeichnungen

Schraffierte Flächen entsprechen einem Flüssigkeitsstrom, punktierte einem Gasstrom. Im normalen Fall strömt die Flüssigkeit an den Innenwänden der Kanäle dem aufsteigenden Gasstrom entgegen. Der hydraulische Durchmesser d_h und der Neigungswinkel α der Kanäle können sehr unterschiedlich sein. Man muß damit rechnen, daß nur die weiten Kanäle von Gas und Flüssigkeit gleichmäßig durchströmt werden, während diejenigen mit kleinen Querschnitten teilweise oder auch vollständig verstopft sind (*Bild 16.1b*). Diese Kanäle sind dann für den Gasstrom versperrt und werden daher als Strömungstoträume angesehen. Hierauf wird im Zusammenhang mit dem hydraulischen Durchmesser noch näher eingegangen werden. Es ist keineswegs erforderlich, daß verstopfte Kanäle vollkommen mit Flüssigkeit gefüllt sind. Es genügt bereits, daß sich an einer einzelnen Stelle des Kanals ein Flüssigkeitspfropfen festsetzt. Das ist bei engen Kanälen auf Grund von Kapillarspannungen durchaus denkbar. Weiterhin ist es möglich, daß einzelne Kanäle nur vom Gas oder nur von der Flüssigkeit durchströmt werden (*Bild 16.1c* und *d*).

Von diesen Möglichkeiten soll zunächst die in *Bild 16.1a* angedeutete den weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt werden. Die hierfür in Betracht kommenden geometrischen Verhältnisse sind in *Bild 16.1e* etwas größer herausgezeichnet. Es bedeuten d_h den hydraulischen Durchmesser der unberieselten Kanäle und $d_{h,2}$ den hydraulischen Durchmesser für die Gasströmung in einem berieselten Kanal. Die örtliche Dicke des Flüssigkeitsfilmes ist mit δ' bezeichnet. Für die Rechnungen wird später jedoch ein über die Kanallänge gemittelter Wert δ verwendet werden.

Die berieselte, d. h. die benetzte Oberfläche der Kanäle sei A_b , und die Berührungsfläche zwischen Gas und Flüssigkeit, die auch als Phasengrenzfläche bezeichnet wird, sei A_g . Über die Größe der genannten Flächen lassen sich bereits auf Grund der Modellvorstellung einige qualitative Aussagen machen. Zunächst soll auf die Größe der berieselten Oberfläche A_b der Kanäle, welche die benetzte Fläche einer Schüttung darstellt, näher eingegangen werden. Wenn man annimmt, daß alle in einer Schüttung vorhandenen Kanäle von der Flüssigkeit gleichmäßig berieselte werden, dann müßte die benetzte Fläche A_b gleich der Füllkörperoberfläche A_p sein. Tatsächlich ist aber mit Rücksicht auf die in *Bild 16.1* angegebenen Beispiele zu erwarten, daß A_b kleiner ist als A_p , da nicht alle Kanäle von Flüssigkeit durchströmt werden. Man darf annehmen, daß die Kanäle einen bestimmten Mindestquerschnitt aufweisen müssen, wenn Gas und Flüssigkeit wie in *Bild 16.1a* gleichzeitig hindurchströmen sollen. Je kleiner die Füllkörper sind, desto weniger Kanäle werden diesen Mindestquerschnitt haben. Somit ist zu erwarten, daß das Verhältnis A_b/A_p mit der Füllkörpergröße abnimmt.

Es wäre nun sinnvoll, die Phasengrenzfläche A_g in Beziehung zur benetzten Fläche A_b zu setzen. Für die praktische Rechnung ist es indes zweckmäßiger, A_g auf die Füllkörperoberfläche A_p zu beziehen, da sich diese zumindest für einfach geformte Füllkörper näherungsweise ermitteln läßt. Aus *Bild 16.1a* geht bereits hervor, daß das Verhältnis A_g/A_p stets kleiner als 1 sein muß. Bleibt die

Filmströmung der Flüssigkeit bei allen Belastungsbedingungen erhalten, dann muß A_g/A_p mit zunehmender Flüssigkeitsbelastung kleiner werden.

Zur weiteren Beschreibung der Strömungskanäle in der berieselten Schicht dient der hydraulische Durchmesser

$$d_{h2} = 4 \frac{V_s - (V_p + V_f)}{A_g}. \quad (16.4)$$

Hierfür erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (16.1) und (16.3) den Ausdruck:

$$d_{h2} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon} \frac{d_p}{A_g/A_p} = d_h \frac{\varepsilon_2/\varepsilon}{A_g/A_p}. \quad (16.5)$$

Mit d_p wird der Partikeldurchmesser bezeichnet, der für nicht kugelförmige Partikeln vereinbarungsgemäß mit der Gleichung

$$d_p \equiv 6 \frac{V_p}{A_p} \quad (16.6)$$

berechnet wird. Die Gl. (16.5) gibt gleichzeitig den Zusammenhang zwischen den hydraulischen Durchmesser d_{h2} und d_h bei zweiphasiger und einphasiger Strömung an. Unbekannt sind darin ε_2 und A_g . Während es noch verhältnismäßig einfach ist, ε_2 durch Messen des Flüssigkeitsinhalts V_f zu bestimmen, bereitet die genaue Ermittlung der Phasengrenzfläche A_g erhebliche Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde vermeidet man bislang die Verwendung des hydraulischen Durchmessers d_{h2} . Soweit für die Bildung von Kennzahlen ein hydraulischer Durchmesser benötigt wird, wählt man stets den für die einphasige Strömung.

16.2 Gesetze der Flüssigkeitsströmung bei Gegenstrombetrieb

Eine genaue Beschreibung der Flüssigkeitsströmung innerhalb der Füllkörperschicht müßte Aufschluß über die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des Flüssigkeitsfilms, über die Größe der Geschwindigkeit an der Filmoberfläche und über die Dicke des Films liefern. Bereits auf Grund des sehr einfachen, in *Bild 16.1* dargestellten Modells einer berieselten Schicht kommt man zu dem Schluß, daß die genannten Größen örtlich sehr unterschiedlich sind. Darüber hinaus konnten SHULMAN und MELLISH [16.2] durch sehr bemerkenswerte Messungen nachweisen, daß die Geschwindigkeit an der Oberfläche eines Flüssigkeitsfilms nicht nur orts-, sondern auch zeitabhängig ist. Der Flüssigkeitsfilm rieselte über die Oberfläche regellos geschichteter Raschigringe. Die Geschwindigkeit änderte sich beispielsweise an einer bestimmten Stelle eines Raschigringes innerhalb von Bruchteilen einer Sekunde um den Faktor 2. Ähnliche Ergebnisse lieferten auch Messungen an anderen Stellen der Ringoberfläche. Derartige Geschwindigkeitsänderungen sind notwendigerweise mit entsprechenden Änderungen in der Richtung der Flüssigkeitsströmung verbunden. Das heißt also, daß eine kräftige Durchmischung der Flüssigkeit in radialer Richtung auftreten muß. ANDERSON, STOKKE und GILBERT [16.3] haben die radiale Durchmischung gemessen. Ihre

Ergebnisse weisen darauf hin, daß die Filmströmung in Füllkörperschichten außerordentlich verwickelten Gesetzen folgt. Die Forschung steht auf diesem Gebiet noch ganz am Anfang. Man ist daher gezwungen, sich mit Angaben zufrieden zu geben, die nur in pauschaler Weise Auskunft über das Verhalten der Flüssigkeit liefern. Diese Angaben betreffen den Flüssigkeitsinhalt der Schicht und die Verteilung der aus der Schicht abfließenden Flüssigkeit.

16.21 Flüssigkeitsinhalt

Unter Flüssigkeitsinhalt versteht man das unter konstanten Durchflußbedingungen in der Füllkörperschicht befindliche Flüssigkeitsvolumen. Es wird mit V_f bezeichnet. Der Flüssigkeitsinhalt setzt sich, wie insbesondere SHULMAN, ULLRICH und WELLS [16.4] sowie GELBE [16.5] näher ausführen, aus einem dynamischen Anteil $V_{f,d}$ und einem statischen Anteil $V_{f,st}$ zusammen:

$$V_f = V_{f,d} + V_{f,st} \quad (16.7)$$

Als statischen Anteil bezeichnet man die in Poren, Zwickeln und sonstigen Strömungstoträumen befindliche Flüssigkeit. Die Bildung der Haftflüssigkeit zwischen benachbarten Partikeln und die dabei auftretenden Haftkräfte sind bereits häufig theoretisch und experimentell untersucht worden. Hingewiesen sei vor allem auf die neueren Arbeiten von PIETSCH und RUMPF [16.6] sowie SCHUBERT [16.7]. Die Haftflüssigkeit steht nur in schwachem Austausch mit dem dynamischen Anteil, der über die in den Toträumen befindliche Flüssigkeit hinweggleitet. In schematisierter Form vermittelt das von GELBE angegebene *Bild 16.2* eine Vorstellung von der Verteilung beider Anteile des Flüssigkeitsinhalts. Auf Grund kinematographischer Untersuchungen sind SHULMAN, ULLRICH und WELLS zu dem Schluß gelangt, daß die Flüssigkeit in den Strömungstoträumen spätestens nach 5 bis 10 Minuten vollkommen erneuert ist. So lange Erneuerungszeiten treten aber auch nur dann auf, wenn eine sehr schwache oder auch zeitlich unterbrochene Verbindung zwischen dem statischen und dynamischen Anteil besteht. Mit zunehmender Flüssigkeitsbelastung wird der Austausch zwischen dem dynamischen und dem statischen Anteil des Flüssigkeitsinhalts stetig größer, so daß man schließlich nicht mehr von einem statischen Anteil sprechen kann.

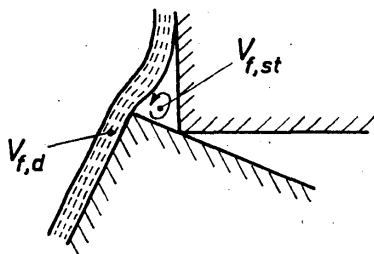


Bild 16.2. Zur Erläuterung des dynamischen ($V_{f,d}$) und des statischen ($V_{f,st}$) Anteils des Flüssigkeitsinhalts einer Füllkörperschicht

Unter der Flüssigkeitsbelastung versteht man den auf den Querschnitt der leeren Säule bezogenen Volumstrom der Flüssigkeit. Um in der Praxis leicht merkbare Zahlenangaben zu erhalten, wählt man als Zeiteinheit die Stunde. Somit hat F die Einheit $l \text{ m}^3/(\text{m}^2 \text{ h})$. Von dieser Bezeichnungsweise wird nur Gebrauch gemacht, wenn dimensionsbehaftete Größen verwendet werden.

Ermittelt man den statischen Anteil $V_{f,st}$ in Abhängigkeit von der Flüssigkeitsbelastung, so stellt man fest, daß sich $V_{f,st}$ mit abnehmender Belastung F einem Grenzwert nähert. Dieser Grenzwert kennzeichnet die Haftflüssigkeit $V_{f,h}$:

$$\lim_{F \rightarrow 0} V_{f,st} = \lim_{F \rightarrow 0} V_f = V_{f,h}. \quad (16.8)$$

Da für $F = 0$ der dynamische Anteil $V_{f,d}$ verschwindet, muß der Grenzwert für $V_{f,st}$ gleich dem Grenzwert für V_f sein. Somit ergibt sich für den Flüssigkeitsinhalt V_f und seine Anteile $V_{f,d}$ und $V_{f,st}$, abhängig von F , der in *Bild 16.3* skizzierte Kurvenverlauf. Für $F = 0$ ist der dynamische Anteil $V_{f,d} = 0$, und der statische Anteil $V_{f,st}$ ist gleich dem Haftinhalt $V_{f,h}$. Mit zunehmender Flüssigkeitsbelastung wird $V_{f,st}$ kleiner, und bei einer bestimmten Belastung F_0 ist $V_{f,st} = 0$, so daß der Flüssigkeitsinhalt nur noch aus dem dynamischen Anteil besteht.

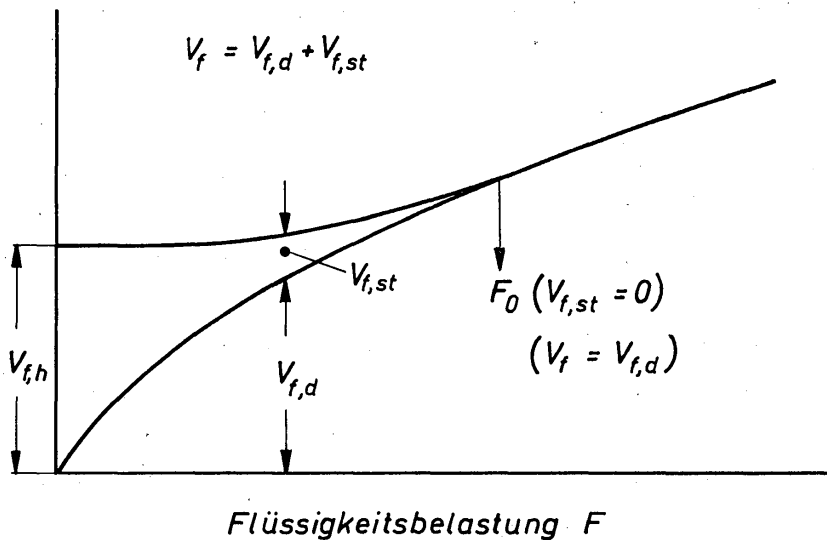


Bild 16.3. Zur Erläuterung des Flüssigkeitsinhaltes V_f und seiner Anteile $V_{f,d}$ und $V_{f,st}$, abhängig von der Flüssigkeitsbelastung F

Um einen ersten Überblick über die Abhängigkeit des Flüssigkeitsinhaltes V_f von den maßgebenden Größen zu erhalten, soll an einigen Beispielen der Einfluß der Gas- und der Flüssigkeitsbelastung erörtert werden. Der Flüssigkeitsinhalt V_f wird mittels der Flüssigkeitsfüllzahl $V_f/(V_s \varepsilon)$ in eine dimensionslose Form gebracht. Der maximale Wert der Flüssigkeitsfüllzahl ist 1. Der Flüssigkeitsinhalt ist von zahlreichen Experimentatoren gemessen worden. Hingewiesen sei vor allem auf die Arbeiten von ELGIN und Mitarbeitern [16.8 und 16.9], SHULMAN und Mitarbeitern [16.2 und 16.10], MOHUNTA und LADDHA [16.11], SATER und LEVENSPIEL [16.12], WIGGERT [16.13], DEITERS [16.14] und auf die Ausführungen in dem Buch von LEVA [16.15]. *Bild 16.4* zeigt die aus den Meßwerten von WIGGERT [16.13] berechneten Werte der Flüssigkeitsfüllzahl $V_f/(V_s \varepsilon)$, abhängig von der Gasbelastung G , für 5 Werte der Flüssigkeitsbelastung F . WIGGERT verwendete bei seinen Versuchen Raschigringe aus Steinzeug mit den Nennmaßen 15×15 . Der Säulendurchmesser betrug 226,5 mm, die Schichthöhe 640 mm und der Lückengrad der trockenen Schicht war 0,676. Die Schicht wurde mit

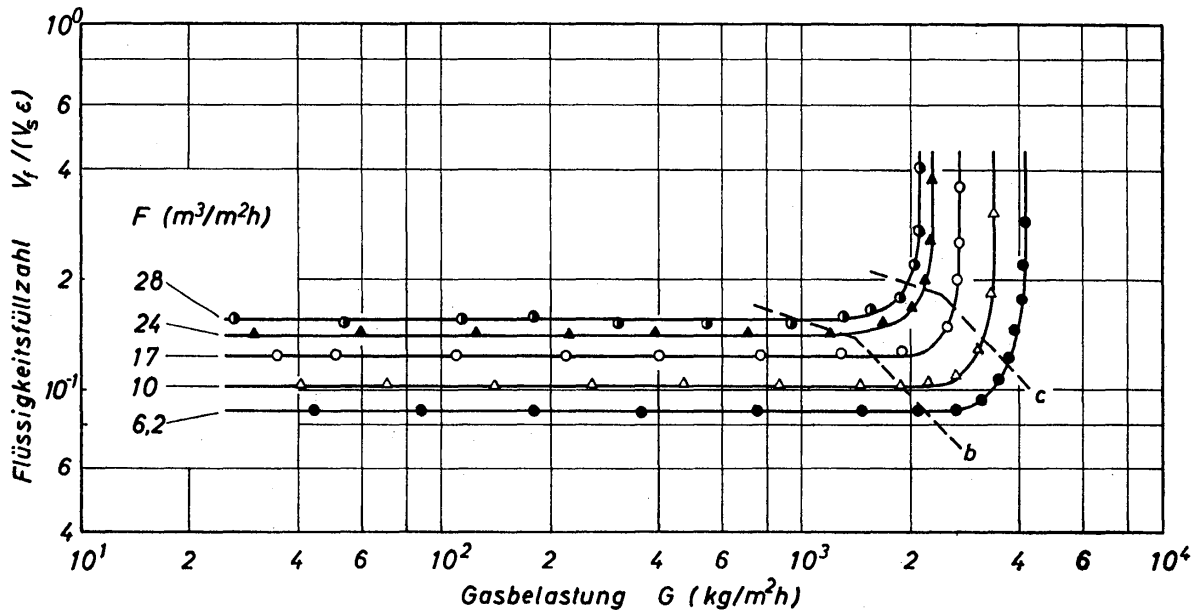


Bild 16.4. Abhängigkeit der Flüssigkeitsfüllzahl von der Gasbelastung für mehrere Werte der Flüssigkeitsbelastung, gültig für Raschigringe 15×15 bei Gegenstrom von Wasser und Luft

Wasser berieselt und von Luft durchströmt. Bis zur Grenzlinie *b* ist die Flüssigkeitsfüllzahl unabhängig von der Gasbelastung. Bei Überschreiten der Grenzlinie *b* steigt die Flüssigkeitsfüllzahl zunächst nur wenig und dann in der Umgebung der Grenzlinie *c* sehr steil an. Der steile Anstieg ist darauf zurückzuführen, daß sich oberhalb der Füllkörperschicht eine vom Gas durchsprudelte Flüssigkeitsschicht ausbildet, deren Flüssigkeitsinhalt dem der Füllkörperschicht zugerechnet wird. Oberhalb der Linie *c* sind die Meßwerte also verfälscht. Man sagt, daß die Flüssigkeit bei Überschreiten der Grenzlinie *c* aufgestaut wird, und bezeichnet diese Linie als Staugrenze. Die Linie *b* bezeichnet die Flutgrenze. Beide Grenzen lassen sich mit sehr guter Genauigkeit aus Druckverlustmessungen bestimmen. Hieraus hat sich ergeben, daß die Gasbelastung an der Staugrenze um den Faktor 1,7 größer ist als an der Flutgrenze. Obgleich die Unabhängigkeit der Flüssigkeitsfüllzahl von der Gasbelastung nur bis zur Flutgrenze streng erfüllt ist, nimmt man im allgemeinen an, daß das auch noch bis zur Staugrenze mit einer für die technische Praxis ausreichenden Genauigkeit der Fall ist.

Aus Bild 16.4 geht ferner hervor, daß die Flüssigkeitsfüllzahl mit zunehmender Flüssigkeitsbelastung größer wird. Wesentlich genauere Auskunft über diese Abhängigkeit liefern die von DEITERS [16.14] mitgeteilten Meßwerte. DEITERS führte seine Versuche an derselben Anlage wie WIGGERT durch. Als Füllkörper verwendete er jedoch Kugeln, deren Durchmesser 12,44 mm betrug, und Raschigringe mit den Nennabmessungen 25×25 . DEITERS ermittelte den Flüssigkeitsinhalt an der Staugrenze. Die hieraus berechnete Flüssigkeitsfüllzahl $V_f/V_s \epsilon$ ist in Bild 16.5 über der Flüssigkeitsbelastung F aufgetragen. Die beiden Kurven lassen sich in zwei Abschnitte unterteilen. Die Grenze ist durch $F = F_k$ angedeutet.

Im unteren Abschnitt, $F \leq F_k$, weisen die Kurven in der Nähe von F_k für beide Füllkörper eine Steigung auf, die etwa gleich $1/3$ ist. Diese Steigung wird mit

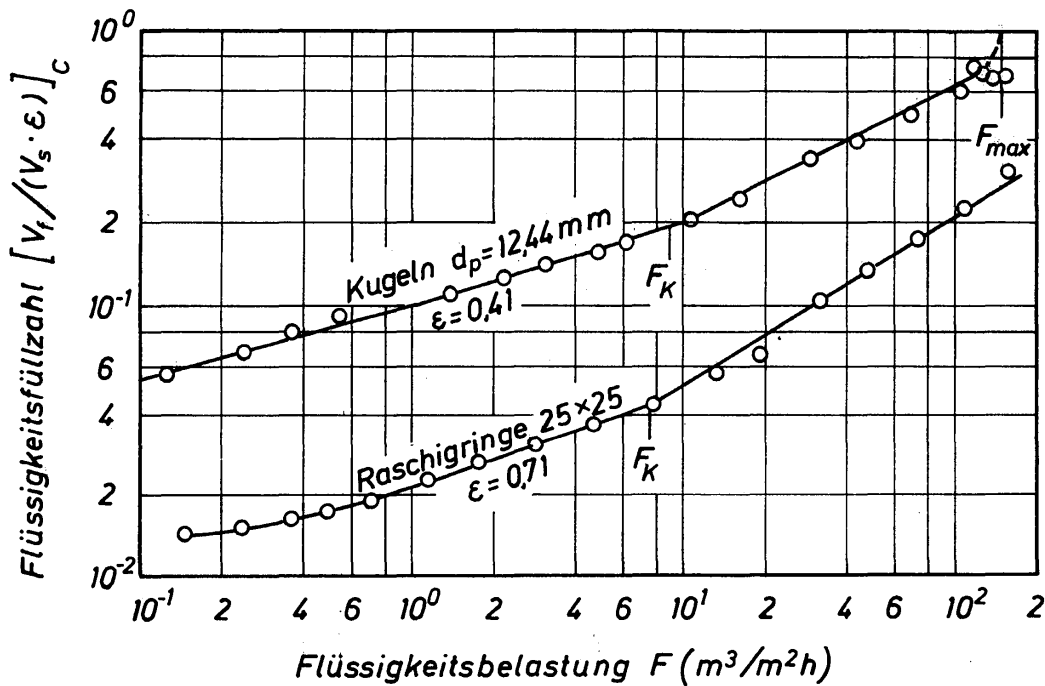


Bild 16.5. Flüssigkeitsfüllzahl an der Staugrenze, abhängig von der Flüssigkeitsbelastung für Kugel- und Raschigringschichten bei Gegenstrom von Wasser und Luft

abnehmender Flüssigkeitsbelastung jedoch geringer. Für $F = 0$ ist auch die Steigung Null, da der Flüssigkeitsinhalt an dieser Stelle gleich der Haftflüssigkeit ist. Im oberen Abschnitt, $F \geq F_k$, liegt die Steigung der Kurven zwischen 0,5 und 0,6. Von besonderem Interesse ist die Kurve für die Kugelschicht. Die Meßwerte lassen erkennen, daß der obere Grenzwert für die Flüssigkeitsfüllzahl, nämlich $V_f / (V_s \cdot \epsilon) = 1$, im praktischen Betrieb nicht erreicht werden kann. Der höchste durch Messungen erreichte Wert liegt bei etwa 0,75. Bei diesem Wert staute sich die Flüssigkeit oberhalb der Füllkörperschicht bereits auf, ohne daß ein Gasstrom durch die Schicht hindurchgeleitet wurde. Das trotzdem beobachtete Aufstauen der Flüssigkeit ist folgendermaßen zu erklären. Jeder Flüssigkeitsfilm, dem kein genügend starker Gasstrom entgegengerichtet ist, reißt Gas mit. Da dieser allein von der Flüssigkeitsströmung erzwungene Gasstrom die Anlage am unteren Ende nicht verlassen kann, muß er notwendigerweise wieder umkehren. Der wieder aufsteigende Gasstrom ist stark genug, die Flüssigkeit aufzustauen. Die unter diesen Bedingungen auftretende Flüssigkeitsbelastung ist die maximal mögliche beim Betrieb einer berieselten Füllkörperschicht. Für die von DEITERS verwendete Kugelschicht ist $F_{max} \approx 150 \text{ m}^3/\text{m}^2\text{h}$. Für die Raschigringschicht konnten die Versuche nicht bis zum Erreichen von F_{max} durchgeführt werden.

Die Versuchsergebnisse von DEITERS und vielen anderen Experimentatoren lassen den Schluß zu, daß die Filmströmung unterhalb der Belastung $F = F_k$ laminar und oberhalb von $F = F_k$ turbulent ist. Aus den in den Abschnitten 14.11 und 14.12 mitgeteilten Gesetzen für die mittlere Dicke von Rieselfilmen folgt, daß die Flüssigkeitsfüllzahl im laminaren Strömungsbereich proportional $F^{1/3}$ und im turbulenten Bereich proportional $F^{0,5}$ bis $F^{0,53}$ sein muß. Diese Abhängigkeit wird durch die in Bild 16.5 dargestellten Kurven bestätigt. Sie tritt auch in der

von GELBE [16.5] mitgeteilten empirischen Gleichung zur Berechnung des dynamischen Flüssigkeitsinhalts auf.

Zur Berechnung des Flüssigkeitsinhaltes von Schichten aus Ringkörpern stellte GELBE auf der Grundlage zahlreicher eigener und fremder Meßwerte getrennte Gleichungen für den dynamischen und statischen Anteil auf. Eine Dimensionsanalyse der maßgebenden Einflußgrößen führte auf die folgenden Kennzahlen:

$$\text{Verhältnis} \quad \frac{We}{Fr} \equiv \frac{g \rho d_h^2}{\sigma} \quad (16.9)$$

$$\text{Reynoldszahl:} \quad Re \equiv \frac{w}{a_p \nu} \quad (16.10)$$

$$\text{Galileizahl:} \quad Ga \equiv \frac{g d_h}{\nu^2 \cdot a_p^2} \quad (16.11)$$

$$\text{Produkt:} \quad a_p d'_a.$$

$$\text{Durchmesserverhältnis:} \quad \frac{d'_i}{d'_a}.$$

Es bedeuten g Erdbeschleunigung, ρ Dichte und ν kinematische Viskosität der Flüssigkeit, σ ihre Oberflächenspannung und w die auf den Querschnitt der leeren Säule bezogene Flüssigkeitgeschwindigkeit. Ferner ist

$$d_h = 4 \frac{\varepsilon}{a_p} \quad (16.12)$$

der hydraulische Durchmesser, wobei

$$a_p = \frac{A_p}{V_s} \quad (16.13)$$

die auf das Schichtvolumen V_s bezogene Füllkörperoberfläche A_p ist. Der Füllkörperdurchmesser d'_a ist wie folgt definiert:

$$d'_a = \sqrt[3]{d_a^2 h_p}. \quad (16.14)$$

Mit d_a wird der äußere Durchmesser und mit h_p die Höhe der Ringkörper bezeichnet. Schließlich ist d'_i gleich dem Innendurchmesser d_i einfacher Ringkörper. Bei Ringkörpern mit Innensteg wird d'_i nach folgender Gleichung berechnet:

$$d'_i = \frac{d_i - 4s/\pi}{1 + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \frac{s}{d_i}} \quad (16.15)$$

Hierin sind d_i der Innendurchmesser und s die Dicke des Steges.

Für den dynamischen Flüssigkeitsinhalt stellte GELBE folgende Beziehung auf:

$$\frac{V_{f,d}}{V_s} = 1,59 \left(\frac{d'_a}{d'_i} \right)^{5/9} \left(\frac{Fr}{We} \right)^{1/7} \frac{Re^n}{Ga^{0,3}} \quad (16.16)$$

Der Exponent der Reynoldszahl ergibt sich für $Re \leq 1$ zu $n = 1/3$ und für $R \geq 1$ zu $n = 5/11$.

Zur Berechnung des statischen Flüssigkeitsinhalts $V_{f,st}$ wird eine Kenngröße X_r mit folgender Definition eingeführt:

$$We/Fr \leq 10 : X_r \equiv \frac{(We/Fr)(Re/Ga)^2}{(a_p \cdot d'_a)^6 X_{r,0}}, \quad (16.17)$$

$$We/Fr \geq 10 : X_r \equiv \frac{(We/Fr)^3 (Re/Ga)^2}{10^2 (a_p \cdot d'_a)^6 X_{r,0}}. \quad (16.18)$$

Hierin ist $X_{r,0} = 1,4 \cdot 10^{-13}$ derjenige Wert von X_r , bei dessen Überschreiten der statische Flüssigkeitsinhalt zu Null wird. Wird X_r hingegen kleiner als $X_{r,0}$, dann nähert sich der statische Flüssigkeitsinhalt dem Haftinhalt. Somit muß also gelten:

$$X_r \geq X_{r,0} : V_{f,st} = 0.$$

Im Bereich $10^{-3} \leq X_r \leq 1$ gilt die Beziehung:

$$\frac{V_{f,st}}{V_s} = -1,67 \cdot 10^{-4} (a_p \cdot d'_a) \log X_r. \quad (16.19)$$

Die mittels der Gleichungen (16.16) und (16.19) berechneten Werte für den gesamten Flüssigkeitsinhalt V_f weichen im Mittel um nicht mehr als $\pm 6\%$ von den gemessenen ab. Insgesamt standen für den Vergleich 650 Meßwerte zur Verfügung.

Wie bereits erwähnt, gelten die mitgeteilten Gleichungen für Schichten aus Ringkörpern ohne und mit Steg. Die Ringkörper bestanden aus Glas, Porzellan und Metall. Ihre äußeren Durchmesser d_a lagen zwischen 2,3 und 38,1 mm. Die Viskosität der bei den Versuchen verwendeten Flüssigkeiten lag zwischen $\eta = 9,8 \cdot 10^{-4}$ kg/ms und 0,185 kg/ms und deren Oberflächenspannung zwischen $\sigma = 7,2 \cdot 10^{-2}$ N/m und $3,8 \cdot 10^{-2}$ N/m. Damit sind sowohl die Abmessungen der Ringkörper als auch die Flüssigkeitseigenschaften in weiten Grenzen geändert worden. Für die Ermittlung des Flüssigkeitsinhalts von Schichten aus Ring- und aus Vollkörpern hat MERSMANN [16.16] ein Diagramm entwickelt, das wahrscheinlich aber nur im Bereich höherer Flüssigkeitsbelastungen zuverlässige Angaben liefert.

16.22 Flüssigkeitsverteilung

Die Verteilung der Flüssigkeit bei der Gas-Flüssigkeits-Strömung durch Füllkörperschichten läßt sich in einfacher Weise nur am unteren Säulenquerschnitt messen. Dabei sind grundsätzlich ähnliche Verteilungsprofile zu erwarten, wie sie sich für die Einphasenströmung ergaben (siehe Abschnitt 8.2). Es besteht eine starke Neigung der Flüssigkeit, an den Rand der Füllkörperschicht zu gelangen, wo der Lückengrad am größten ist. Man bezeichnet diesen Vorgang als «Randgängigkeit». Die Randgängigkeit bedeutet also ungleichmäßige und so-

mit auch ungünstige Austauschmöglichkeiten zwischen den beiden Phasen. Man kann der Randgängigkeit nur dadurch entgegenwirken, daß man die Möglichkeiten für eine Querbewegung beider Phasen verstärkt. Das kann sowohl durch eine geschickte Formgebung der Apparatewand als auch durch eine geschickte Formgebung der Füllkörper erreicht werden. So hat KIRSCHBAUM [16.17] nachgewiesen, daß eine wellenförmige Apparatewand die Randgängigkeit stark herabsetzt. ALT, MEIER und RICHTER [16.18] führten vergleichende Versuche über die Flüssigkeitsverteilung in Schichten aus Raschigringen und Pallringen durch. Dabei zeigte sich, daß die Randgängigkeit bei Pallringschichten geringer ist als bei Raschigringschichten.

Die Randgängigkeit hängt darüber hinaus stark von der Schichthöhe ab. STAGE und BOSE [16.19] haben das Schrifttum zu diesem Problem zusammengefaßt. Allgemeine Aussagen über das Ausmaß der Randgängigkeit und der maßgebenden Einflußgrößen lassen sich noch nicht machen.

16.3 Gesetze der Gasströmung bei Gegenstrombetrieb

Eine vollständige Beschreibung der Gasströmung in berieselten Füllkörperschichten ist noch nicht möglich. Man muß sich mit einigen empirischen Gleichungen begnügen, die wenigstens eine näherungsweise Berechnung des Druckverlustes und der Staugrenze ermöglichen.

16.31 Druckverlust

Die erste grundlegende Arbeit über den Druckverlust in berieselten Füllkörperschichten hat MACH [16.20] geliefert. Der hierbei gewonnene Einblick in die für den Druckverlust maßgebenden Gesetzmäßigkeiten wurde durch die Arbeit vieler Forscher vertieft. Erwähnt seien insbesondere die Untersuchungen von WHITE [16.21], UCHIDA und FUJITA [16.22], SARCKET [16.23], BAIN und HOUGEN [16.24], FURNAS und BELLINGER [16.25], SCHOENHORN und DOUGHERTY [16.26], BARTH [16.27], BRAUER [16.1, 16.28] und anderen [16.29 bis 16.32]. Die Entwicklung scheint mit einem bedeutsamen Beitrag von TEUTSCH [16.33] zunächst zu einem Stillstand gekommen zu sein.

Der Druckverlust hängt von sehr vielen Einflußgrößen ab. Ein erster Überblick über die verwickelten Gesetzmäßigkeiten ergibt sich, wenn man den Druckverlust allein in Abhängigkeit von der Gas- und der Flüssigkeitsbelastung betrachtet. In *Bild 16.6* sind die Ergebnisse einiger von WIGGERT [16.13] durchgeführter Druckverlustmessungen wiedergegeben. Kurve 1 gilt für den Druckverlust der trockenen Raschigringschicht. Diese Kurve läßt sich mittels der in Abschnitt 8.413 bzw. der in Abschnitt 8.414 mitgeteilten Gleichungen berechnen. Die Kurven 2 bis 6 gelten für den Druckverlust bei verschiedenen Werten der Flüssigkeitsbelastung F . Sie haben alle einen gleichartigen Verlauf. Mit zunehmender Gasbelastung sind die Kurven 2 bis 6 parallel zu Kurve 1, bis sie die Grenzlinie a erreichen. Zwischen den Grenzlinien a und b verlaufen die Kurven 2

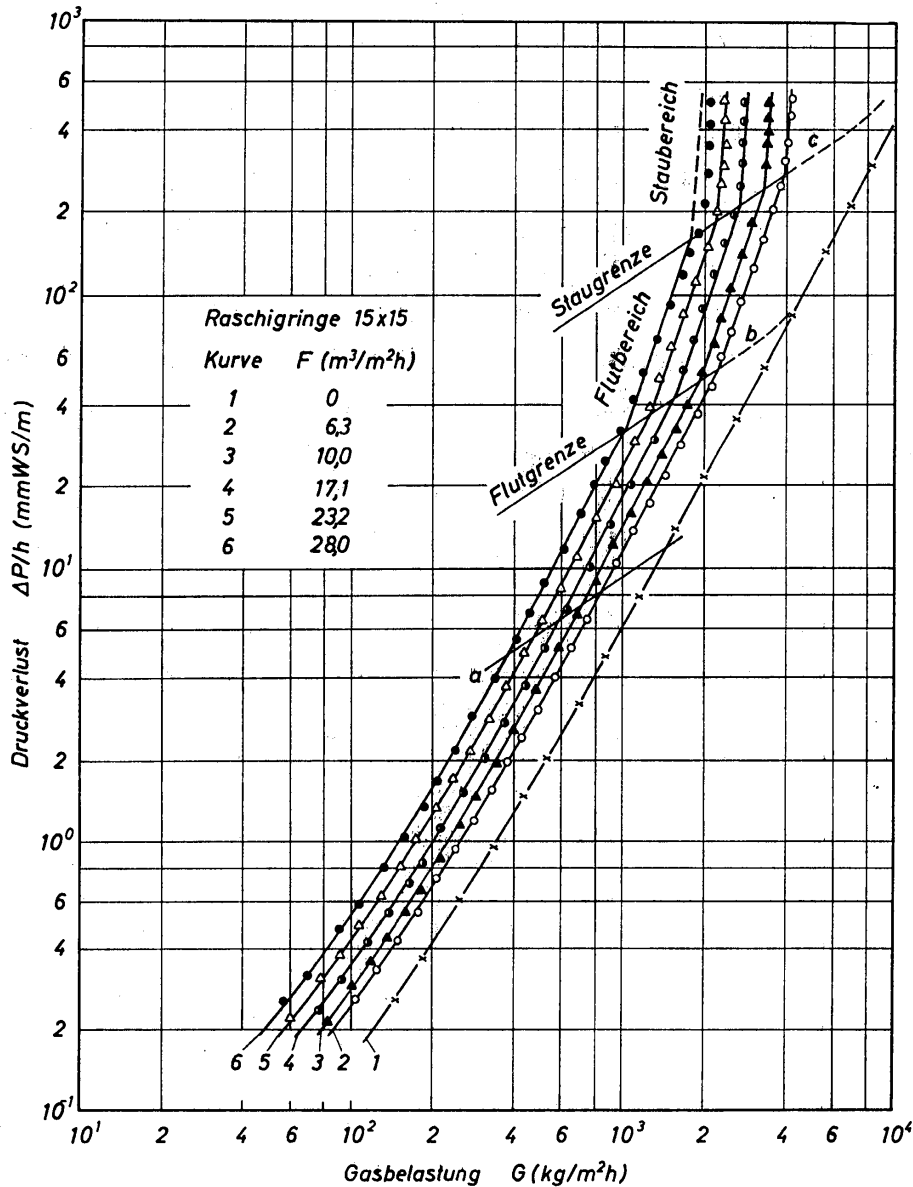


Bild 16.6. Abhängigkeit des Druckverlustes einer Raschigringschicht von der Gasbelastung für verschiedene Werte der Flüssigkeitsbelastung

bis 6 zueinander parallel und weisen eine konstante Steigung auf. In diesem Bereich läßt sich der Druckverlust also durch eine Gleichung von der Form

$$\Delta P/h = K G^n \tag{16.20}$$

beschreiben. Der Exponent n der Gasbelastung hat den Wert 1,9. Die Konstante K ist eine Funktion der Flüssigkeitsbelastung F . Die obere Grenze dieses Bereiches ist die Flutgrenze. Bei ihrem Überschreiten erhöht sich die Steigung der Druckverlustkurven auf $n = 2,95$. Wie bereits im Zusammenhang mit dem Flüssigkeitsinhalt erläutert, wird in diesem Flutbereich der Flüssigkeitsinhalt geringfügig größer. Ausschlaggebend für den schon sehr steilen Anstieg des Druckverlustes ist das Verhalten der Flüssigkeit. Nach visuellen Beobachtungen [16.28] gerät die Flüssigkeit an den Berührungsstellen benachbarter Füllkörper in eine lebhaft, schwingende Bewegung, die der Wellenströmung von Riesel-filmen vergleichbar ist. Für den Gasstrom ergibt sich dadurch eine fluktuierende

Berandung. In beiden Phasen tritt in Grenzflächennähe eine starke Querbewegung auf, die den Impulsaustausch sowie den Wärme- und Stoffaustausch erhöht. Auf die gleichzeitige Verbesserung des Wärme- und Stoffaustausches hat insbesondere SCHRADER [16.31] hingewiesen. Somit dürfte der Flutbereich für den technischen Betrieb berieselter Füllkörperschüttungen von besonderem Interesse sein. Die obere Grenze des Flutbereiches ist die Staugrenze. Bei ihrem Überschreiten steigen der Druckverlust und der Flüssigkeitsinhalt steil an. Die Staugrenze gibt die obere Belastungsgrenze für berieselte Füllkörperschichten an. Die Grenzkurven *a*, *b* und *c* verlaufen parallel; ihre Steigung ist $2/3$. Im Flutbereich ändert sich der Druckverlust etwa um den Faktor 5, so daß $(\Delta P/h)_c \approx 5 (\Delta P/h)_b$ ist, und die Gasbelastung ändert sich etwa um den Faktor 1,7, so daß $G_c \approx 1,7 \cdot G_b$ wird. Diese Angaben können für die Festlegung des Betriebspunktes einer Säule von Bedeutung sein.

Gemäß der Darstellung in *Bild 16.6* wird das Druckverlustfeld in vier Gebiete unterteilt. Jedes dieser Gebiete läßt sich aber noch weiter aufgliedern, wenn man den Einfluß der Flüssigkeitsbelastung *F* berücksichtigt. Das wird in *Bild 16.7* deutlich, in dem der Druckverlust über der Flüssigkeitsbelastung *F* für verschie-

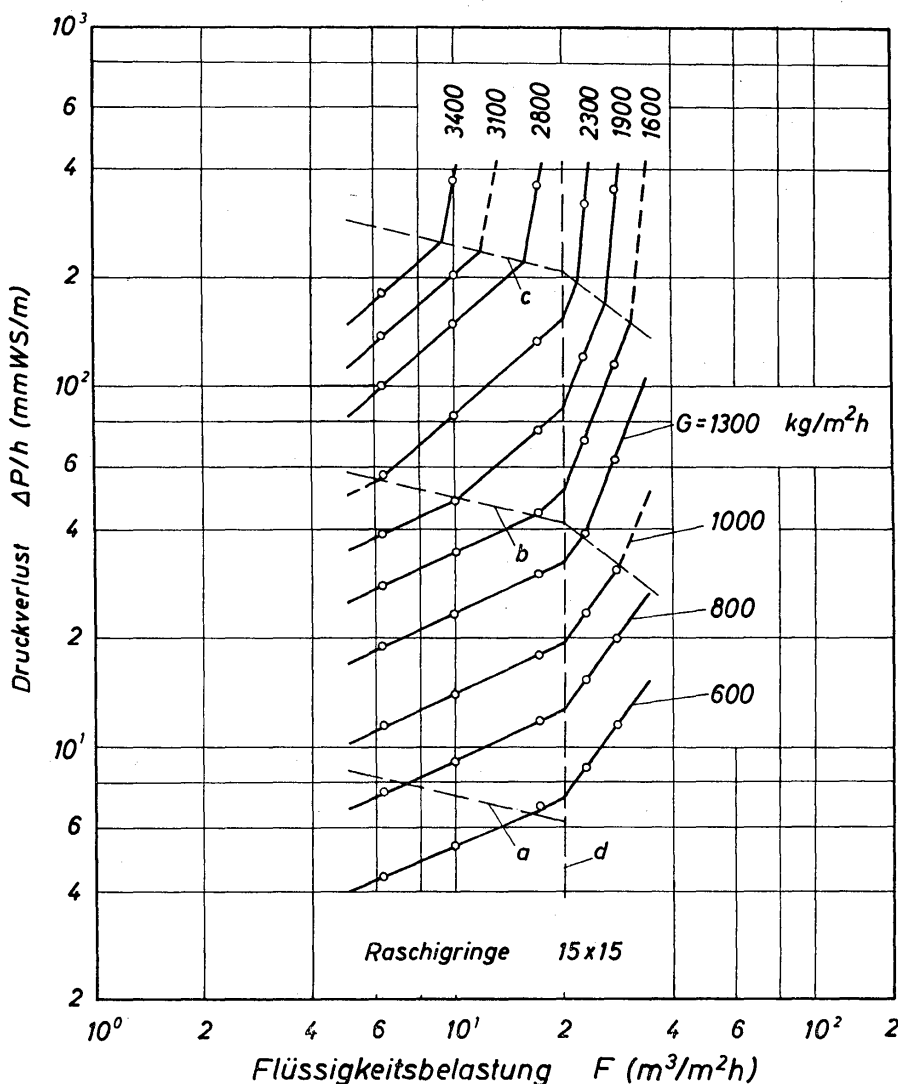


Bild 16.7. Abhängigkeit des Druckverlustes einer Raschigringschicht von der Flüssigkeitsbelastung für verschiedene Werte der Gasbelastung

dene Werte der Gasbelastung G aufgetragen ist. An der bei $F = 20 \text{ m}^3/\text{m}^2 \text{ h}$ eingezeichneten Linie d weisen die Druckverlustkurven einen Knick auf. Eine weitergehende Untersuchung ergab, daß bei einer Mindestflüssigkeitsbelastung von etwa $4 \text{ m}^3/\text{m}^2 \text{ h}$ noch eine Grenzlinie auftritt [16.34]. Insgesamt werden also 12 Bereiche erkennbar, in denen das Druckverlustgesetz jeweils eine andere Form erhält. Berücksichtigt man, daß der Druckverlust noch von der Größe und Form der Füllkörper und von den Stoffeigenschaften beider Phasen abhängt, so wird verständlich, daß es nur mit meist ungerechtfertigt hohem Aufwand möglich ist, die gewünschten Druckverlustgesetze zu ermitteln. Man ist zu sehr weitgehenden Vereinfachungen gezwungen. Hiervon hat TEUTSCH [16.33] in einer bemerkenswerten Arbeit Gebrauch gemacht, indem er die Meßwerte für $G = \text{const}$ und $F = \text{const}$ durch einen durchgehenden, gekrümmten Kurvenzug ausglich.

Auf Grund umfangreicher Messungen hat TEUTSCH für den Druckverlust berieselter Füllkörperschüttungen Berechnungsgleichungen aufgestellt. Die Schüttungen wurden mit Wasser berieselt, dem Luft entgegenströmte. Somit gelten auch die Gleichungen streng nur für das System Wasser/Luft. Die Übertragung auf andere Zweistoffsysteme darf nur mit Vorsicht vorgenommen werden, wobei die Verhältniswerte von Dichte und Viskosität nicht zu sehr von denen für das System Wasser/Luft abweichen dürfen.

Die verwendeten Füllkörper, deren Abmessungen, der Lückengrad der trockenen Schüttung ε sowie die maximale Flüssigkeitsbelastung F_{max} sind in *Tabelle 16.1* zusammengestellt:

Tabelle 16.1: Angaben zu den Druckverlustmessungen von TEUTSCH [16.33]

Füllkörper	Nennabmessungen	d_p (mm)	ε	F_{max} ($\text{m}^3/\text{m}^2 \text{ h}$)	Material
Raschigringe	$15 \times 15 \times 2$	6,1	0,657	76	Steinzeug
	$25 \times 25 \times 3$	9,6	0,720	76	„
	$30 \times 30 \times 4$	10,7	0,755	76	„
	$35 \times 35 \times 4$	10,8	0,773	76	„
	$50 \times 50 \times 5$	13,0	0,785	76	„
Pallringe	$25 \times 25 \times 3$	8,1	0,742	76	Steinzeug
	$35 \times 35 \times 4$	9,8	0,773	76	„
	$50 \times 50 \times 5$	10,7	0,785	76	„
	$35 \times 35 \times 0,8$	2,3	0,950	190	Stahl
Berlsättel	25×25	9,5	0,690	76	Steinzeug
	35×35	11,3	0,750	91	„
	$35 \times 35 \times 0,4$	0,8	0,978	152	Stahl
Intaloxsättel	25×25	8,8	0,732	76	Steinzeug
	35×35	10,7	0,760	76	„

d_p ist der nach Gl. (16.6) berechnete Füllkörperdurchmesser. Für die aufgeführten Füllkörperschüttungen hat TEUTSCH eine Beziehung der Form

$$\frac{(\Delta P)_2}{\Delta P} = f(K_p) \quad (16.21)$$

aufstellen können. Hierin bedeuten $(\Delta P)_2$ und ΔP die Druckverluste des Luftstromes in der berieselten und in der trockenen Schüttung. Ferner ist K_p eine zur Abkürzung verwendete Größe:

$$K_p \equiv Fr \cdot Re^{-0,8} (1 + 5 \cdot 10^{-5} \cdot Re_G). \quad (16.22)$$

Es sind Fr Froudezahl, Re Reynoldszahl der Flüssigkeit und Re_G Reynoldszahl des Gases mit den folgenden Definitionen:

$$Fr \equiv \frac{w^2 (1 - \varepsilon)}{g d_p}, \quad (16.23)$$

$$Re \equiv \frac{w d_p \rho}{\eta (1 - \varepsilon)}, \quad (16.24)$$

$$Re_G \equiv \frac{w_G d_p \rho_G}{\eta_G (1 - \varepsilon)}. \quad (16.25)$$

Mit w und w_G werden die auf den Querschnitt der leeren Säule bezogenen Geschwindigkeiten der Flüssigkeit und des Gases, mit d_p der Füllkörperdurchmesser, mit g die Erdbeschleunigung, mit ρ und ρ_G sowie η und η_G die Dichten und die Viskositäten der Flüssigkeit und des Gases bezeichnet. Damit lassen sich die Kennzahlen und die Größe K_p aus den für den Betrieb einer Säule erforderlichen Angaben berechnen. In der Größe K_p berücksichtigt $Fr \cdot Re^{-0,8}$ die Einengung des für die Gasströmung verfügbaren Querschnitts, da mit wachsender Flüssigkeitsbelastung der Ausdruck $Fr \cdot Re^{-0,8}$ größer wird. Der in der runden Klammer stehende Ausdruck $(1 + 5 \cdot 10^{-5} Re_G)$ darf als Maß für die Beeinflussung der flüssigen Phase durch den Gasstrom angesehen werden. Für kleine Werte der Reynoldszahl des Gases ist der Ausdruck nahezu gleich 1 und somit vernachlässigbar. Man bezeichnet diesen Ausdruck daher auch als Turbulenzfaktor.

Trägt man $(\Delta P)_2/\Delta P$ als Ordinate in einem halblogarithmischen Koordinatennetz über K_p als Abszisse auf, so erhält man zwei Kurven. Die eine, Kurve *a*, faßt die Meßwerte für Raschigringschüttungen und die andere, Kurve *b*, die für Schüttungen aus Pallringen, Berlsätteln, Supersätteln und Intaloxsätteln zusammen. Bei berieselten Schüttungen ergeben sich in bezug auf die Raschigringschüttungen ähnliche Verhältnisse wie für die trockenen Schüttungen. Ein größerer Anteil der Hohlräume bleibt für die Strömung versperrt.

Für Kurve *b* hat TEUTSCH die folgenden Gleichungen aufgestellt:

$$\frac{(\Delta P)_2}{\Delta P} = 1,39 \cdot 10^6 K_p \quad \text{für} \quad 0 \leq K_p \leq 3,0 \cdot 10^{-3}, \quad (16.26)$$

$$\frac{(\Delta P)_2}{\Delta P} = 1,32 \cdot 10^6 K_p \quad \text{für} \quad 4,0 \cdot 10^{-6} \leq K_p \leq 6,0 \cdot 10^{-6}. \quad (16.27)$$

Für $K_p \geq 6 \cdot 10^{-6}$ wurde keine Gleichung aufgestellt. Trägt man die Meßwerte von TEUTSCH in einem doppeltlogarithmischen Koordinatennetz auf, so erhält

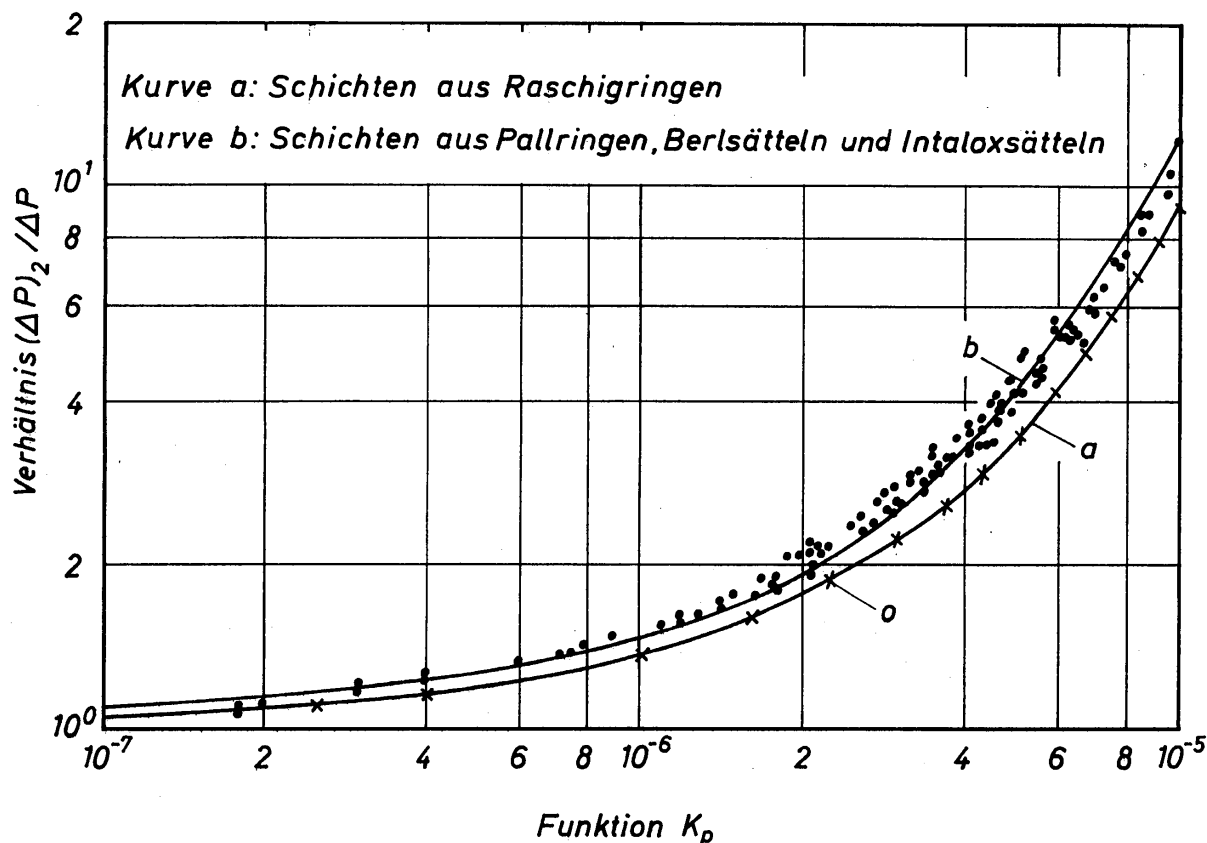


Bild 16.8. Abhängigkeit des Druckverlustverhältnisses von der Funktion K_p für berieselte Füllkörperschichten gemäß Tabelle 16.1

man die Darstellung gemäß *Bild 16.8*. Für Kurve *b*, gültig für Pallringe, Berlsätteln und Intaloxsätteln, läßt sich innerhalb des untersuchten Bereiches bis $K_p = 15 \cdot 10^{-6}$ die folgende Interpolationsformel angeben:

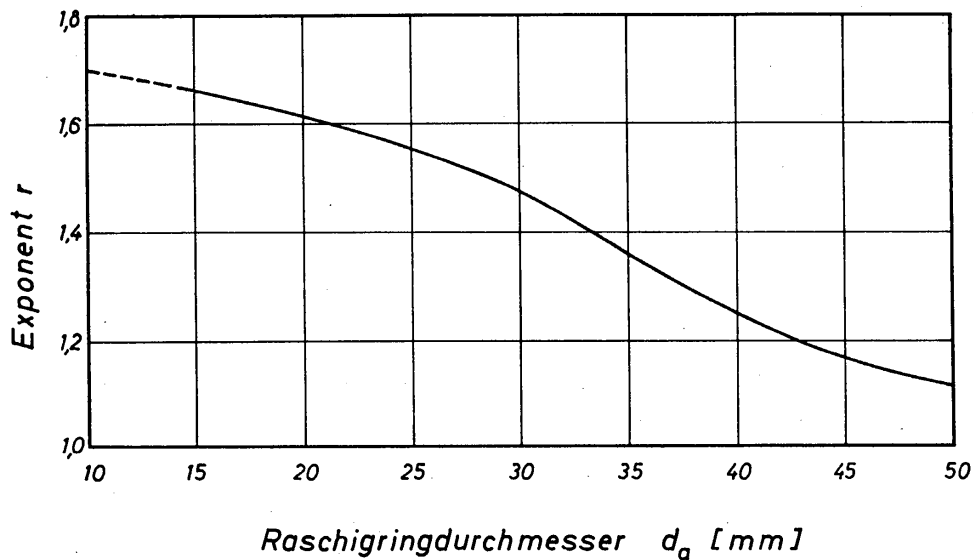
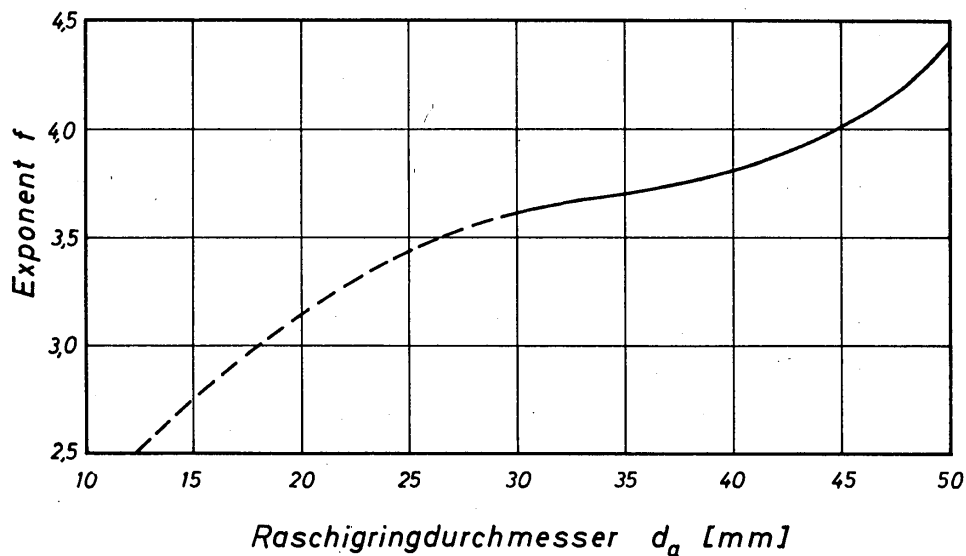
$$\frac{(\Delta P)_2}{\Delta P} = 1 + 3,3 \cdot 10^2 \sqrt{K_p} + 10^{11} \cdot K_p^2. \quad (16.28)$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für den gesamten Untersuchungsbereich, sondern ist auch wegen der einfachen Exponenten von K_p leichter zu handhaben, als es die Gleichungen (16.26) und (16.27) sind.

Für berieselte Raschigringschüttungen, Kurve *a* in *Bild 16.8*, läßt sich die Beziehung

$$\frac{(\Delta P)_2}{\Delta P} = 1 + 3,16 \cdot 10^2 \sqrt{K_p} + 0,7 \cdot 10^{11} \cdot K_p^2. \quad (16.29)$$

aufstellen. Hierdurch werden die Meßwerte mit einer Unsicherheit von nur etwa 3% wiedergegeben. Lediglich im Bereich $K_p < 10^{-6}$ kann die Abweichung etwas größer werden, was praktisch jedoch bedeutungslos ist, da sich $(\Delta P)_2 / \Delta P$ in diesem Bereich nur wenig vom Wert 1 unterscheidet. Zur Berechnung der Größe K_p sind in Gl. (16.29) die Reynoldszahlen der Flüssigkeit Re und des Gases Re_G mit $1/\varepsilon^r$ und die Froudezahl Fr mit $1/\varepsilon^f$ zu multiplizieren. Die Exponenten r und f hängen von dem äußeren Durchmesser d_a der Raschigringe ab und sind in den *Bildern 16.9* und *16.10* dargestellt. Die Abhängigkeit für r und f von d_a ergaben sich aus den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen, die allein mit kera-

Bild 16.9. Abhängigkeit des Exponenten r vom äußeren Durchmesser der RaschiringeBild 16.10. Abhängigkeit des Exponenten f vom äußeren Durchmesser der Raschiringe

mischen Raschiringen durchgeführt wurden. Der Lückengrad ε änderte sich bei Schüttungen aus Raschiringen mit $d_a = 15$ mm bis $d_a = 50$ mm zwischen $\varepsilon = 0,65$ bis $\varepsilon = 0,80$.

Die Verwendung der obigen Gleichungen setzt die Kenntnis des Druckverlustes ΔP der Gasströmung in der trockenen Schüttung voraus. Hierüber sind bereits im Abschnitt 8.41 Angaben gemacht worden.

16.32 Belastungsgrenzen

Die bedeutsamste Belastungsgrenze ist die Staugrenze. Sie wird gekennzeichnet durch die maximale Gaseschwindigkeit w_{Gs} , unter deren Einwirkung die Flüssigkeit nicht mehr unbehindert abfließen kann, sondern aufgestaut wird. Oberhalb der Füllkörperschicht bildet sich eine Flüssigkeitsschicht, die das Gas strahl- und blasenförmig durchströmt. Die Staugrenze ist in *Bild 16.6* durch die Linie *c*

gegeben. Im gleichen Bild stellt die Linie b die Flutgrenze dar. An der Flutgrenze werden die querverrichteten Mischbewegungen im Flüssigkeits- und im Gasstrom erheblich stärker. Schließlich tritt, wie bei allen Gas-Film-Strömungen, auch in berieselten Füllkörperschichten eine untere Grenzgeschwindigkeit auf. Es ist das die Mindestflüssigkeitsgeschwindigkeit w_{\min} , die zur vollständigen Benetzung der Füllkörper erforderlich ist. Bei Unterschreiten von w_{\min} wird die durch die Füllkörper gegebene Phasengrenzfläche nicht mehr ausgenutzt.

Eine erste Gleichung zur Berechnung der Staugrenze stammt von SHERWOOD, SHIPLEY und HOLLOWAY [16.35]. Sie wurde von SAWISTOWSKI [16.36] verbessert. Später hat dann MERSMANN [16.16] auf der Grundlage der Theorie der Gas-Film-Strömung in senkrechten Rohren physikalisch begründete Kennzahlen hergeleitet und mit ihrer Hilfe ein Diagramm aufgestellt, das die Bestimmung der Staugeschwindigkeit w_{Gs} erlaubt.

Die Theorie der Gas-Film-Strömung in senkrechten Rohren lieferte für den Übergang vom Gegenstrom zum aufwärts gerichteten Gleichstrom beider Phasen die Bedingung

$$\tau_{\delta}^* \equiv \frac{\tau_{\delta}}{g \rho \delta} = \frac{2}{3}. \quad (16.30)$$

Es bedeuten τ_{δ} Schubspannung an der Phasengrenzfläche, g Erdbeschleunigung, ρ Flüssigkeitsdichte, δ Dicke des Flüssigkeitsfilms und τ_{δ}^* die dimensionslose Grenzflächenschubspannung. Um die durch Gl. (16.30) ausgedrückte Bedingung auf die Zweiphasenströmung in Füllkörpersäulen anwenden zu können, müssen für die Größe τ_{δ} und δ geeignete Ausdrücke gefunden werden.

Die Grenzflächenschubspannung läßt sich mittels zweier Ausdrücke für die Schubkraft K_{τ} ermitteln:

$$K_{\tau} = \tau_{\delta} h (d_h - 2\delta) \pi = \Delta P_s (d_h - 2\delta)^2 \pi/4. \quad (16.31)$$

Es bedeuten h Höhe der Füllkörperschicht, d_h den hydraulischen Durchmesser der trockenen Füllkörperschicht und ΔP_s den Druckverlust des Gasstromes bei Erreichen der Staugrenze. Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Grenzflächenschubspannung zu

$$\tau_{\delta} = \frac{\Delta P_s}{h} \frac{d_h - 2\delta}{4}. \quad (16.32)$$

Nach Einsetzen in Gl. (16.30) ergibt sich

$$\frac{\Delta P_s}{h g \rho} = \frac{8/3}{\frac{d_h}{\delta} - 2}. \quad (16.33)$$

Hierin läßt sich $h g \rho$ als hydrostatischer Druck der in der Füllkörperschicht befindlichen Flüssigkeitssäule auffassen. Die Gleichung gilt streng nur für die laminare Strömung von Gas und Flüssigkeit in senkrechten Rohren und ferner nur unter der Bedingung, daß der Kanaldurchmesser d_h sehr groß ist im Vergleich zur Filmdicke δ .

In Füllkörpersäulen muß man erwarten, daß die Strömung beider Phasen im Bereich der Staugrenze turbulent ist und der hydraulische Durchmesser d_h in der Größenordnung von 2δ liegt. Somit kann Gl.(16.33) nur dazu dienen, die für die Staugrenze in Füllkörpersäulen maßgebenden Kennzahlen anzugeben. Man darf also schreiben:

$$\frac{\Delta p_s}{h g \varrho} = f_1 \left(\frac{\delta}{d_h} \right). \quad (16.34)$$

Mit den weiteren Rechnungen wird das Ziel verfolgt, den Druckverlust Δp_s und die Filmdicke δ durch Größen auszudrücken, die den Betrieb einer berieselten Füllkörperkolonne kennzeichnen.

Der gesamte Druckverlust Δp_s läßt sich als Summe der beiden Anteile Δp_{ts} und Δp_{fs} auffassen, wobei Δp_{ts} den Druckverlust in der trockenen, also unberieselten Schüttung bedeutet und Δp_{fs} den durch die Flüssigkeit verursachten zusätzlichen Druckverlust. Es soll also gelten:

$$\frac{\Delta p_s}{h g \varrho} = \frac{\Delta p_{ts}}{h g \varrho} + \frac{\Delta p_{fs}}{h g \varrho}. \quad (16.35)$$

Für eine unberieselte Schüttung ist $\Delta p_{fs}/h g \varrho = 0$, da $\delta/d_h = 0$ ist.

Bei maximaler Berieselungsstärke kann δ/d_h im äußersten Falle gleich $1/2$ werden, und $\Delta p_{fs}/h g \varrho$ nimmt den größtmöglichen Wert an. Ganz allgemein gilt:

$$\frac{\Delta p_{fs}}{h g \varrho} = f_2 \left(\frac{\delta}{d_h} \right). \quad (16.36)$$

Damit folgt aus Gl.(16.35) die Beziehung

$$\frac{\Delta p_s}{h g \varrho} = \frac{\Delta p_{ts}}{h g \varrho} + f_2 \left(\frac{\delta}{d_h} \right). \quad (16.37)$$

Durch Gleichsetzen mit Gl.(16.34) ergibt sich zunächst

$$\frac{\Delta p_{ts}}{h g \varrho} + f_2 \left(\frac{\delta}{d_h} \right) = f_1 \left(\frac{\delta}{d_h} \right) \quad (16.38)$$

und damit

$$\frac{\Delta p_{ts}}{h g \varrho} = f_3 \left(\frac{\delta}{d_h} \right). \quad (16.39)$$

Vergleicht man die Gleichungen (16.34) und (16.39), so stellt man fest, daß es durch die obigen Betrachtungen gelungen ist, den unbekanntem gesamten Druckverlust Δp_s durch den als bekannt anzusehenden Druckverlust Δp_{ts} der trockenen Füllkörperschicht zu ersetzen. Für die trockene Füllkörperschicht gelten die bereits früher angegebenen Widerstandsgesetze, wobei die Widerstandszahl ψ_t eine Funktion der Reynoldszahl ist. Aus der Definitionsgleichung für die Widerstandszahl folgt für den Druckverlust Δp_{ts} die allgemeine Beziehung:

$$\frac{\Delta p_{ts}}{h} \equiv \psi_t \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\varrho_G w_{Gs}^2}{d_p}. \quad (16.40)$$

Nach Einsetzen in Gl.(16.39) erhält man

$$\frac{\Delta p_{ts}}{h g \varrho} \equiv \psi_t \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\varrho_G w_{Gs}^2}{d_p g \varrho} = f_3 \left(\frac{\delta}{d_h} \right). \quad (16.41)$$

Mit dieser Beziehung ist ein Zusammenhang zwischen der auf den Querschnitt der leeren Säule bezogenen Gasgeschwindigkeit w_{Gs} und dem Verhältnis von Filmdicke δ zu hydraulischem Durchmesser d_h hergestellt. Bei der Gasgeschwindigkeit w_{Gs} wird die in der Säule herabrieselnde Flüssigkeit aufgestaut, und in der trockenen Schüttung würde der Druckverlust Δp_{ts} auftreten. In den letzten Gleichungen bedeutet d_p den durch Gl.(16.6) definierten Füllkörperdurchmesser. Die nächste Aufgabe besteht darin, für die Filmdicke δ einen Ausdruck zu finden, der nur aus Größen besteht, die beim Betrieb einer berieselten Füllkörperschicht als bekannt angesehen werden dürfen. Für die Filmdicke läßt sich bei turbulenter Filmströmung schreiben:

$$\delta = k_1 \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{1/3} Re^{1/2}. \quad (16.42)$$

Hierin bedeutet k_1 eine Konstante. Die Reynoldszahl der Flüssigkeit ist definiert durch

$$Re \equiv \frac{\dot{V}U}{\nu}, \quad (16.43)$$

wobei \dot{V} den Volumstrom der Flüssigkeit, U den Umfang der in der Schüttung vorhandenen Strömungskanäle und ν die kinematische Viskosität der Flüssigkeit bedeuten. Sind in der Schüttung z Kanäle vorhanden, so ist der Umfang $U = k_2 z d_h$. Mittels der Querschnittsfläche, ausgedrückt durch $F_s = k_3 z d_h^2$, ergibt sich z zu $F_s/(k_3 \cdot d_h^2)$. Somit wird der Umfang zu $U = k_2 F_s/k_3 d_h$. Setzt man ferner $\dot{V}/F_s = w$ und $d_h = k_4 d_p \varepsilon/(1-\varepsilon)$, so läßt sich der Ausdruck für die Reynoldszahl in der Form

$$Re = \frac{k_3 k_4}{k_2} \frac{w d_p}{\nu} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (16.44)$$

schreiben. Nach Einsetzen in Gl.(16.42) erhält man für die mittlere Filmdicke die Beziehung

$$\delta = k_5 \left(\frac{\nu}{g^2} \right)^{1/6} \left(w d_p \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{1/2}, \quad (16.45)$$

wobei alle Konstanten zu einer neuen Konstanten k_5 zusammengefaßt wurden. Das Verhältnis δ/d_h ergibt sich dann zu

$$\frac{\delta}{d_h} = k_6 \left(\frac{\nu}{g^2} \right)^{1/5} \left(\frac{w}{d_p} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (16.47)$$

Da nicht das Verhältnis selbst, sondern eine Funktion des Verhältnisses benötigt wird, läßt sich auch das Quadrat von δ/d_h verwenden. Nach Einsetzen

in Gl. (16.41) erhält man als allgemeine Beziehung zur Berechnung der Staugrenze

$$\frac{\Delta p_{ts}}{h g \varrho} \equiv \psi_t \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\varrho_G}{\varrho} \frac{w_{Gs}^2}{d_p g} = f \left[\left(\frac{\nu}{g^2} \right)^{1/3} \frac{w}{d_p} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right]. \quad (16.47)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$w_{Gs}^* \equiv \psi_t \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\varrho_G}{\varrho} \frac{w_{Gs}^2}{g d_p} \quad (16.48)$$

und

$$w^* \equiv \left(\frac{\nu}{g^2} \right)^{1/3} \frac{w}{d_p} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (16.49)$$

so läßt sich also auch $w_{Gs}^* = f(w^*)$ schreiben. w_{Gs}^* wird die dimensionslose Staugeschwindigkeit und w^* die dimensionslose Flüssigkeitsbelastung genannt. Der funktionelle Zusammenhang zwischen w_{Gs}^* und w^* muß durch Versuche bestimmt werden. Die im Schrifttum vorliegenden Meßwerte hat MERSMANN umgerechnet; das Ergebnis ist in *Bild 16.11* dargestellt. Die Bedeutung der Zeichen geht aus *Tabelle 16.2* hervor.

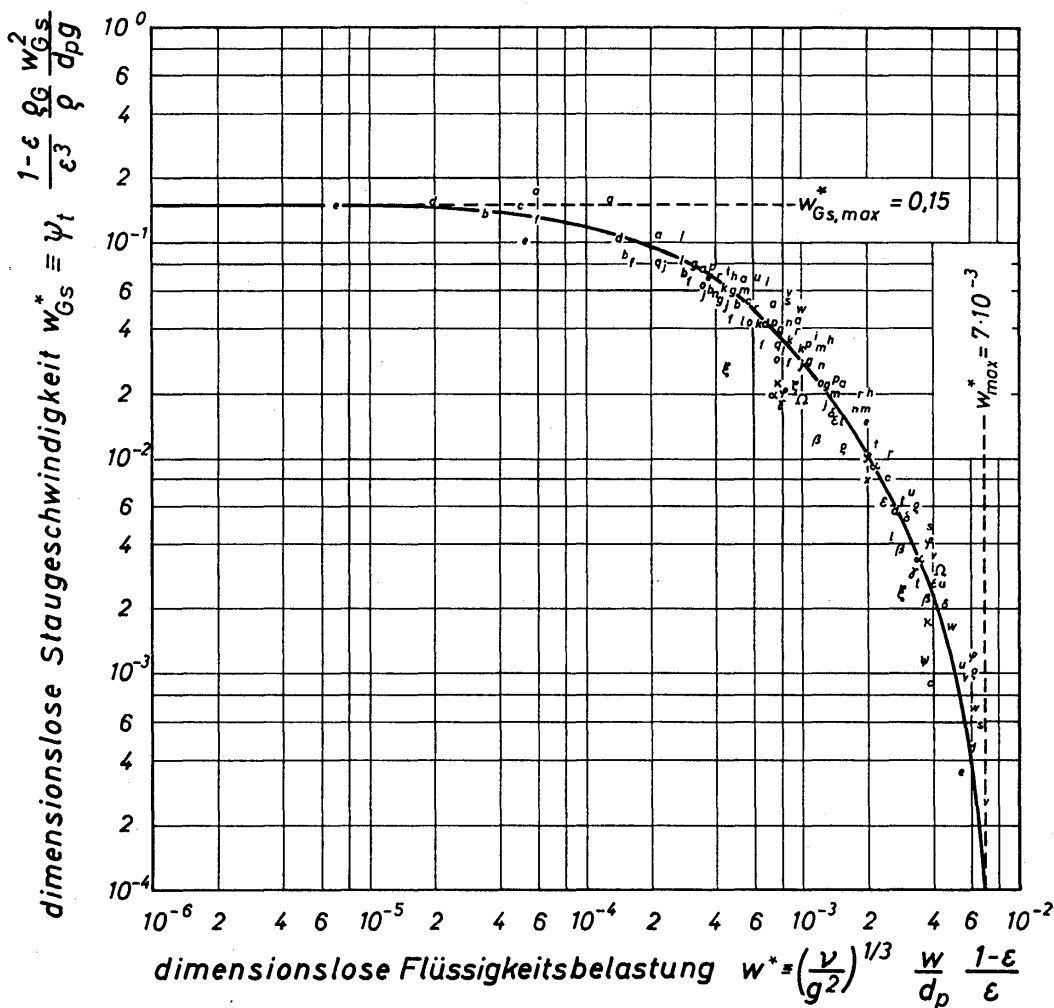


Bild 16.11. Diagramm zur Ermittlung der Staugrenze berieselter Füllkörperschichten; Erläuterung im Text

Tabelle 16.2: Zeichenerklärung zu *Bild 16.11*. Die Messungen *a* bis *r* wurden am Gemisch Wasser/Luft, die Messungen *t* bis ω mit 12,6-mm-Raschig-Ringen vorgenommen

Symbol	Verfasser	Bemerkungen
<i>a</i>	[16.31]	16-mm-Raschigringe
<i>b</i>	[16.37]	25-mm-Raschigringe
<i>c</i>	[16.14]	25-mm-Raschigringe
<i>d</i>	[16.14]	12,4-mm-Kugeln
<i>e</i>	[16.14]	25-mm-Berlsättel
<i>f</i>	[16.38]	12,4-mm-Kugeln
<i>g</i>	[16.13]	15-mm-Raschigringe
<i>h</i>	[16.13]	15-mm-Berlsättel
<i>i</i>	[16.13]	20-mm-Intaloxsättel
<i>j</i>	[16.33]	30-mm-Raschigringe
<i>k</i>	[16.33]	35-mm-Berlsättel
<i>l</i>	[16.33]	35-mm-Pallringe (Stahl)
<i>m</i>	[16.33]	25-mm-Pallringe
<i>n</i>	[16.33]	25-mm-Intaloxsättel
<i>o</i>	[16.33]	35-mm-Raschigringe
<i>p</i>	[16.33]	35-mm-Pallringe
<i>q</i>	[16.33]	35-mm-Intaloxsättel
<i>r</i>	[16.33]	35-mm-Supersättel (Stahl)
<i>s</i>	[16.39]	12,6-mm-Raschigringe Stoffpaar Wasser/Luft
<i>t</i>	[16.39]	Luft/Tetrachlorkohlenstoff
<i>u</i>	[16.39]	Luft/Tetrachlorkohlenstoff/Äthylalkohol-Gemisch
<i>v</i>	[16.39]	Luft/Tetrachlorkohlenstoff/Äthylalkohol-Gemisch
<i>w</i>	[16.39]	Luft/Tetrachlorkohlenstoff/Äthylalkohol-Gemisch
α	[16.35]	Luft/Wasser
β	[16.35]	Wasserstoff/Wasser
γ	[16.35]	Kohlendioxid/Wasser
δ	[16.35]	Luft/wäss. Glycerin
ε	[16.35]	Luft/wäss. Glycerin
φ	[16.35]	Luft/wäss. Glycerin
ϱ	[16.35]	Luft/wäss. Glycerin
ψ	[16.35]	Luft/wäss. Buttersäure
χ	[16.35]	Luft/wäss. Buttersäure
ξ	[16.35]	Luft/Methylalkohol
ζ	[16.35]	Luft/wäss. Methylalkohol
Ω	[16.35]	Luft/wäss. Methylalkohol

Bei den Versuchen, deren Ergebnisse in *Bild 16.11* dargestellt sind, wurden die für die Staugrenze wichtigen Einflußgrößen in folgenden Bereichen geändert:

Druckverlust der trockenen Schüttung Δp_{ts} :	0,25 bis 200 mm WS/m
Dichte des Gases ϱ_G :	0,0855 bis 1,88 kg/m ³
Dichte der Flüssigkeit ϱ :	800 bis 1600 kg/m ³
Flüssigkeitsbelastung $F = w \cdot 3600$ s/h:	0,20 bis 190 m ³ /m ² h
Kinematische Viskosität der Flüssigkeit ν :	$0,675 \cdot 10^{-6}$ bis $20,7 \cdot 10^{-6}$ m ² /s
Lückengrad ε :	0,41 bis 0,978
Rechnerischer Füllkörperradius d_p :	0,80 bis 12,0 mm

Die Abweichung der Meßwerte von der eingezeichneten Ausgleichskurve beträgt maximal $\pm 40\%$. Da die Staugeschwindigkeit im Quadrat auftritt, kann deren Wert also mit einer maximalen Ungenauigkeit von $\pm 20\%$ bestimmt werden. Diese Ungenauigkeit darf noch als recht gering bezeichnet werden, wenn man bedenkt, für welche verschiedenen Füllkörper die Ergebnisse gelten.

Die Meßwerte deuten auf zwei bemerkenswerte Tatsachen hin. Bei sehr niedrigen Berieselungsstärken w^* nähert sich die dimensionslose Staugeschwindigkeit $w_{G_s}^*$ einem maximalen Wert und hängt nicht mehr von der Berieselungsstärke ab:

$$w_{G_{s\max}}^* = 0,15. \quad (16.50)$$

Mit Gl. (16.48) läßt sich daher schreiben

$$\frac{w_{G_{s\max}}^2}{g d_p} = \frac{0,15}{\psi_t} \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} \frac{\rho}{\rho_G}. \quad (16.51)$$

Die maximale Staugeschwindigkeit $w_{G_{s\max}}$ ist demnach um so größer, je kleiner die Widerstandszahl ψ_t , je größer der Lückengrad der Schüttung, je größer das Dichteverhältnis ρ/ρ_G und je größer der Füllkörperdurchmesser d_p ist. Die experimentelle Erfahrung bestätigt die Aussagen der Gl. (16.50). Es ist jedoch zu bemerken, daß diese Gleichung den in *Bild 16.6* eingezeichneten Verlauf der Kurve *c* in Richtung abnehmender Flüssigkeitsbelastungen nicht ganz richtig wiedergibt. Die Kurve *c* schmiegt sich der Kurve *1* für die unberieselte Schüttung allmählich an, so daß für $F = 0$ bzw. $w^* = 0$ kein fester Endwert für $w_{G_s}^*$ erwartet werden darf. Die mitgeteilte Gl. (16.50) ist für praktische Rechnungen aber trotzdem gut geeignet, wenn man unter $w_{G_{s\max}}^*$ diejenige maximale Staugeschwindigkeit versteht, bei der die Flüssigkeitsbelastung noch gerade groß genug ist, um eine vollständige Benetzung der Füllkörper zu gewährleisten. Auf diese Mindestflüssigkeitsbelastung wird anschließend noch eingegangen.

Als weiteres bedeutsames Ergebnis folgt aus *Bild 16.11*, daß die dimensionslose Flüssigkeitsbelastung einen maximalen Wert annimmt, bei welchem die Flüssigkeit bereits aufgestaut wird, ohne daß man einen Gegenstrom des Gases erzwingt:

$$w_{\max}^* = 7 \cdot 10^{-3}. \quad (16.52)$$

Diese absolut obere Grenze der Flüssigkeitsbelastung ist dadurch bedingt, daß die abwärts strömende Flüssigkeit – wie in einer Wasserstrahlpumpe – Gas mitreißt, das im Beharrungszustand aber wieder zurückströmen muß. Bei der maximalen Flüssigkeitsbelastung findet also innerhalb der berieselten Schüttung eine Gaszirkulation statt, ohne daß eine Gasströmung durch ein Gebläse aufgezwungen wird. Auf eine maximale Flüssigkeitsbelastung war im Zusammenhang mit dem Flüssigkeitsinhalt der Schüttung bereits hingewiesen worden.

Mit den Gleichungen (16.49) und (16.52) erhält man die Beziehung

$$\left(\frac{\nu}{g^2}\right)^{1/3} \frac{w_{\max}}{d_p} = 7 \cdot 10^{-3} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (16.53)$$

Diese Gleichung besagt, daß die maximale Flüssigkeitsbelastung mit zunehmendem Lückengrad ε , mit zunehmendem Füllkörperdurchmesser d_p und mit abnehmender kinematischer Viskosität ν der Flüssigkeit ansteigt. Dies kann für die Bemessung von Füllkörpersäulen von großer Bedeutung sein.

Die in *Bild 16.11* eingezeichnete Ausgleichskurve läßt sich durch die folgende empirische Gleichung ausdrücken:

$$\frac{w_{G_s}^*}{w_{G_{s\max}}^*} = \frac{1}{1 + 17 \frac{w^*}{w_{\max}^*} + 73 \frac{(w^*/w_{\max}^*)^2}{1 - w^*/w_{\max}^*}}. \quad (16.54)$$

Setzt man die Grenzwerte für $w_{G_{s\max}}^*$ und w_{\max}^* ein, so ergibt sich:

$$w_{G_s}^* = \frac{0,15}{1 + 2430 w^* + \frac{10430 w^{*2}}{0,007 - w^*}}. \quad (16.55)$$

Die letzten beiden Gleichungen sind für praktische Rechnungen sehr gut geeignet, wenn bei gegebener Flüssigkeitsbelastung w^* die Staugeschwindigkeit des Gases $w_{G_s}^*$ bestimmt werden soll. Ist jedoch die Gasbelastung $w_{G_s}^*$ gegeben und wird die höchstzulässige Flüssigkeitsbelastung w^* gesucht, dann ist es zweckmäßig, das in *Bild 16.11* dargestellte Diagramm zu verwenden.

Nebst der Staugrenze sind für den Betrieb berieselter Füllkörperschichten noch die Flutgrenze und die Mindestflüssigkeitsbelastung zur Erzielung vollständiger Benetzung von Bedeutung. Aus Druckverlustmessungen hatte sich, wie an Hand von *Bild 16.6* bereits erörtert wurde, folgender einfacher Zusammenhang zwischen der Gasbelastung an der Flutgrenze $w_{G_f}^*$ und der an der Staugrenze $w_{G_s}^*$ ergeben:

$$w_{G_f}^* = \frac{1}{1,7} w_{G_s}^*. \quad (16.56)$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist wahrscheinlich auf den Bereich nicht zu hoher Flüssigkeitsbelastungen beschränkt.

Für die Mindestflüssigkeitsbelastung w_{\min}^* teilte MERSMANN den Wert

$$w_{\min}^* \equiv \left(\frac{\nu}{g^2}\right)^{1/3} \frac{w_{\min}}{d_p} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = 0,0002 \quad (16.57)$$

mit, den er nach Angaben von SCHRADER [16.31] und SCHREWE [16.38] berechnete. Durch Vergleich mit Gl.(16.52) stellt man fest, daß $w_{\min}^* = w_{\max}^*/35$ sein muß. Für Kugelschüttungen war nach *Bild 16.5* $F_{\max} = 150 \text{ m}^3/\text{m}^2\text{h}$. Zur vollständigen Benetzung wäre dann eine Flüssigkeitsbelastung von $F_{\min} \approx 4,3 \text{ m}^3/\text{m}^2\text{h}$ erforderlich. Dieser Wert deckt sich gut mit der experimentell gewonnenen Erfahrung.

Die mitgeteilten Gleichungen zur Berechnung der Staugrenze gelten für regellose Schüttungen von Füllkörpern. Bei geordnetem Aufbau von Raschigringschüttungen ist $w_{G_s}^*$ wesentlich größer als bei regellosem Aufbau.

16.4 Größe der Phasengrenzfläche

Die technische Bedeutung der Füllkörperschicht beruht auf ihrer großen Oberfläche je Volumeinheit. Meßbar ist streng nur die geometrische Oberfläche. Die für den Wärme- und Stofftransport wirksame Oberfläche ist bereits geringer als die geometrische, da ein kleiner Anteil der Oberfläche stets durch die Strömungstoträume verdeckt wird. Bei berieselten Füllkörperschichten hat man zwischen der geometrischen und der benetzten Füllkörperoberfläche und der Phasengrenzfläche zu unterscheiden. Die benetzte Füllkörperoberfläche wird stets kleiner sein als die geometrische, und die Phasengrenzfläche wird kleiner sein als die benetzte Füllkörperoberfläche. Von diesen drei Flächen ist die Phasengrenzfläche die bedeutsamste.

Man wird erwarten dürfen, daß sich die Phasengrenzfläche sowohl mit der Gas- als auch mit der Flüssigkeitsbelastung ändert. Den Meßwerten für den Flüssigkeitsinhalt zufolge sollte die Gasbelastung die Phasengrenzfläche jedoch nur verhältnismäßig wenig verändern, so daß man die Gasbelastung als weniger wichtige Einflußgröße ansehen darf. Hierauf deuten auch die aus Stoffübergangsmessungen gewonnenen Angaben von SCHULMAN, ULLRICH, PROULX und ZIMMERMAN [16.40] hin. Bedeutsamer ist der Einfluß der Flüssigkeitsbelastung.

Eine erste Vorstellung über die Abhängigkeit der Phasengrenzfläche von der Flüssigkeitsbelastung ergibt sich, wenn man für die berieselte Schicht das in *Bild 16.1* dargestellte Modell annimmt. Bezieht man die Phasengrenzfläche A_g auf die geometrische Oberfläche A_p der Füllkörper, dann müßte sich für A_g/A_p die in *Bild 16.12* skizzierte Abhängigkeit von der Flüssigkeitsbelastung F ergeben. Ausgehend von $F = 0$, wo auch $A_g/A_p = 0$ ist, steigt A_g/A_p mit zunehmender Belastung F zunächst an, bis F den zur vollständigen Benetzung erforderlichen Mindestwert F_{\min} erreicht hat. Dabei wurde von der Vorstellung ausgegangen, daß sich ein Flüssigkeitsfilm nur dann ausbildet, wenn eine Mindestschichtdicke δ_{\min} gewährleistet ist. Ist δ in bestimmten Oberflächenbereichen kleiner als δ_{\min} , so zieht sich der Flüssigkeitsfilm zu einzelnen Flüssigkeits-

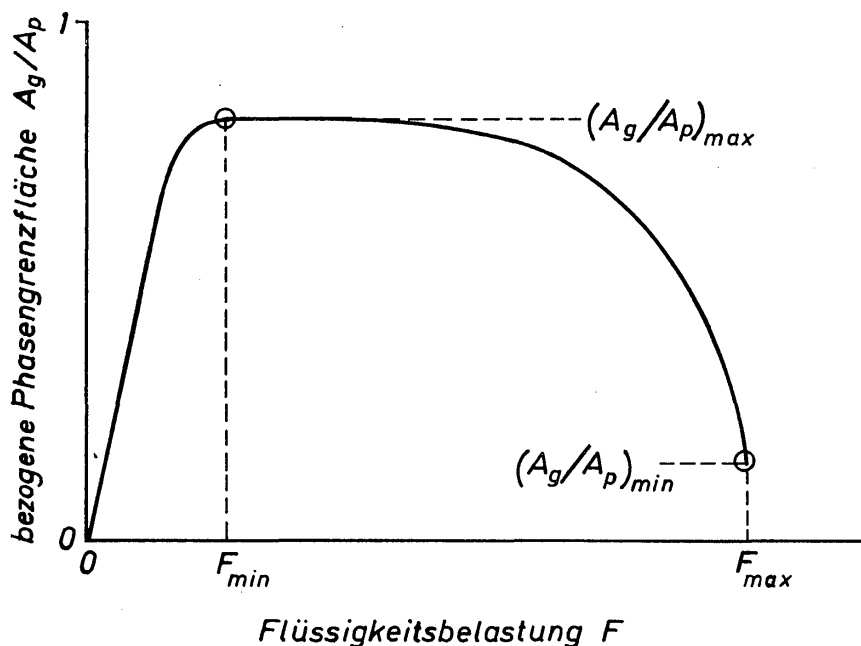


Bild 16.12
Zur Erläuterung der
Abhängigkeit der
Phasengrenzfläche von
der Flüssigkeits-
belastung

strählen zusammen. Die Strähnenoberfläche ist kleiner als die Oberfläche des theoretisch angenommenen Films. Die Größe der Mindestflüssigkeitsbelastung zur Erzielung maximaler Benetzung wurde im voraufgegangenen Abschnitt berechnet. Bei der Mindestflüssigkeitsbelastung F_{\min} erreicht die bezogene Phasengrenzfläche A_g/A_p ihren maximalen Wert. Dieser ist stets kleiner als 1, da sich die Flüssigkeit gemäß *Bild 16.1* so über die Füllkörperoberfläche ausbreitet, daß die Strömungswege für den Gasstrom eingeebnet erscheinen.

Erhöht man die Flüssigkeitsbelastung über F_{\min} hinaus, dann muß der Modellvorstellung entsprechend die Filmdicke größer und die Phasengrenzfläche kleiner werden. Bei der maximalen Flüssigkeitsbelastung F_{\max} müßte sich theoretisch $A_g/A_p = 0$ ergeben. Berücksichtigt man jedoch die Ausführungen über die Abhängigkeit des Flüssigkeitsinhalts von der Flüssigkeitsbelastung, dann wird auch bei maximaler Belastung F_{\max} stets ein von Null verschiedener Wert der Phasengrenzfläche vorhanden sein.

Schematisiert man den Kurvenverlauf für A_g/A_p zwischen F_{\min} und F_{\max} , so lassen sich zwei Kurvenabschnitte erkennen. Im ersten Kurvenabschnitt ist A_g/A_p näherungsweise konstant. Im zweiten Abschnitt fällt das Flächenverhältnis mit zunehmender Flüssigkeitsbelastung stark ab und erreicht als kleinsten Wert $(A_g/A_p)_{\min}$ bei F_{\max} .

Die umfangreichsten Angaben über die Größe der bezogenen Phasengrenzfläche haben SHULMAN und Mitarbeiter [16.40 und 16.41] aus Stoffübergangsmessungen gewonnen. Hiernach ist A_g etwa proportional $F^{1/3}$. Zu dem gleichen Ergebnis sind auch HIKITA und KATAKA [16.42], YOSHIDA und MIURA [16.43] sowie YOSHIDA und KOYANAGI [16.44] gekommen. Die übereinstimmenden Aussagen beruhen auf der Anwendung gleicher Methoden zur Berechnung der Phasengrenzfläche aus gemessenen Stoffübergangsgrößen. Diese Angaben widersprechen dem Verlauf der Kurve für A_g/A_p in *Bild 16.12*. Die von den genannten Verfassern angewendeten Berechnungsmethoden lassen jedoch den Verdacht aufkommen, daß sie einige den Stoffübergang beeinflussende Größen nicht berücksichtigen und daher die Phasengrenzfläche nicht ganz richtig bestimmen. Somit scheint es noch nicht möglich zu sein, zuverlässige Angaben über die Größe der Phasengrenzfläche und über ihre Änderung mit der Flüssigkeitsbelastung zu machen.

16.5 Gleichstrom von Gas und Flüssigkeit

Die beim Gegenstrom von Gas und Flüssigkeit in Füllkörpersäulen auftretende Staugrenze schränkt den Betriebsbereich in empfindlicher Weise ein. Es wurde daher bereits frühzeitig erwogen, auch in Füllkörpersäulen den Gleichstrom beider Phasen anzuwenden. Der Gleichstrom kann dabei sowohl aufwärts als auch abwärts gerichtet sein.

Beim Gleichstrom beider Phasen treten in beiden Richtungsfällen nur drei Phasenverteilungszustände auf, wie WEEKMAN und MYERS [16.45] sowie TURPIN und HUNTINGTON [16.46] durch Untersuchungen mit dem System Wasser/Luft

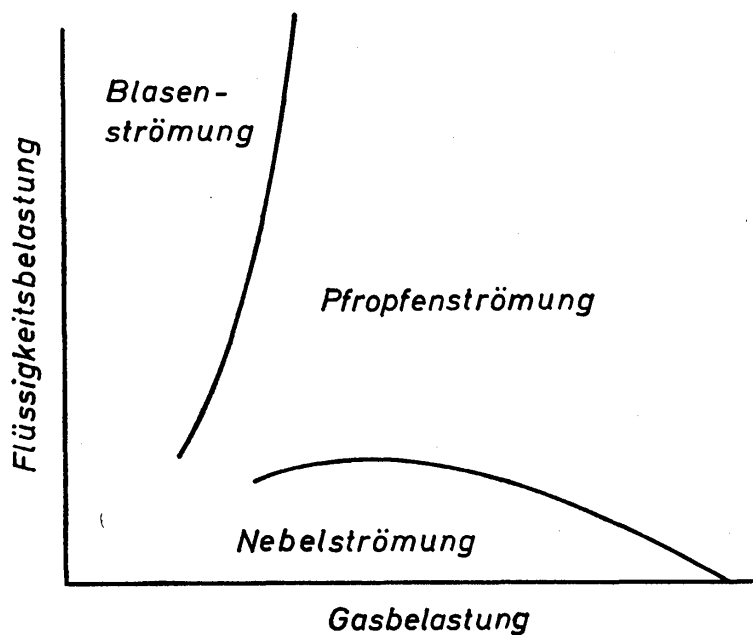


Bild 16.13
Phasenverteilungszustände
bei senkrecht aufwärts und
abwärts gerichteter
Gas-Flüssigkeits-Strömung
in Füllkörperschichten

feststellen. In *Bild 16.13* sind die Bereiche der drei Phasenverteilungszustände, abhängig von der Gas- und der Flüssigkeitsbelastung, in qualitativer Form angegeben. Bei mittleren und hohen Flüssigkeitsbelastungen tritt mit zunehmender Gasbelastung zunächst die Blasenströmung und anschließend die Pfropfenströmung auf. Bei der Blasenströmung verteilt sich die Gasphase in Form sehr kleiner Blasen in der kontinuierlichen Flüssigkeitsphase. Mit zunehmender Gasbelastung werden die Blasen beim Übergang zur Pfropfenströmung sehr groß, so daß sich bei nicht zu großem Säulendurchmesser abwechselnd Gas- und Flüssigkeitspfropfen durch die Säule bewegen. Hierbei treten erhebliche Druckschwankungen auf. Bei sehr geringer Flüssigkeitsbelastung geht die Blasenströmung mit zunehmender Gasbelastung sehr schnell in die Nebelströmung über. Hierbei ist das Gas die kontinuierliche Phase, in welcher sich die Flüssigkeit in Form sehr feiner Tropfen befindet.

Der Druckverlust ist von zahlreichen Experimentatoren gemessen worden. Erwähnt seien insbesondere die Arbeiten von PIRET, MANN und WALL [16.47], LARKINS, WHITE und JEFFREY [16.48], DODDS, STUTZMAN, SOLLAMI und McCARTER [16.49], SWEENEY [16.05], WEEKMAN und MYERS [16.45] sowie TURPIN und HUNTINGTON [16.46]. Von allen Forschern wurde festgestellt, daß beim Übergang zu einem anderen Phasenverteilungszustand keine auffällige Änderung in der Abhängigkeit des Druckverlustes von der Gas- bzw. der Flüssigkeitsbelastung auftritt.

Zur Darstellung des Druckverlustes verwendeten WEEKMAN und MYERS [16.45] das von LOCKHART und MARTINELLI [16.51] für die Gas-Flüssigkeits-Strömung in Rohren vorgeschlagene Verfahren. Dabei treten folgende dimensionslose Parameter auf (zur Erläuterung siehe Abschnitt 15.311):

$$\Phi \equiv \left(\frac{\Delta P_2}{\Delta P} \right)^{1/2}, \quad (16.58)$$

$$X \equiv \left(\frac{\Delta P}{\Delta P_G} \right)^{1/2}. \quad (16.59)$$

Hierin bedeuten ΔP_2 den Druckverlust bei Zweiphasenströmung sowie ΔP und ΔP_G die Druckverluste für die Flüssigkeit und das Gas, wenn diese allein durch die Füllkörperschicht strömen. Die Druckverluste ΔP und ΔP_G lassen sich also mittels der in Abschnitt 8.4 mitgeteilten Gesetze berechnen. Somit ist der Parameter X bekannt. Es hat sich herausgestellt, daß Φ eine Funktion von X ist.

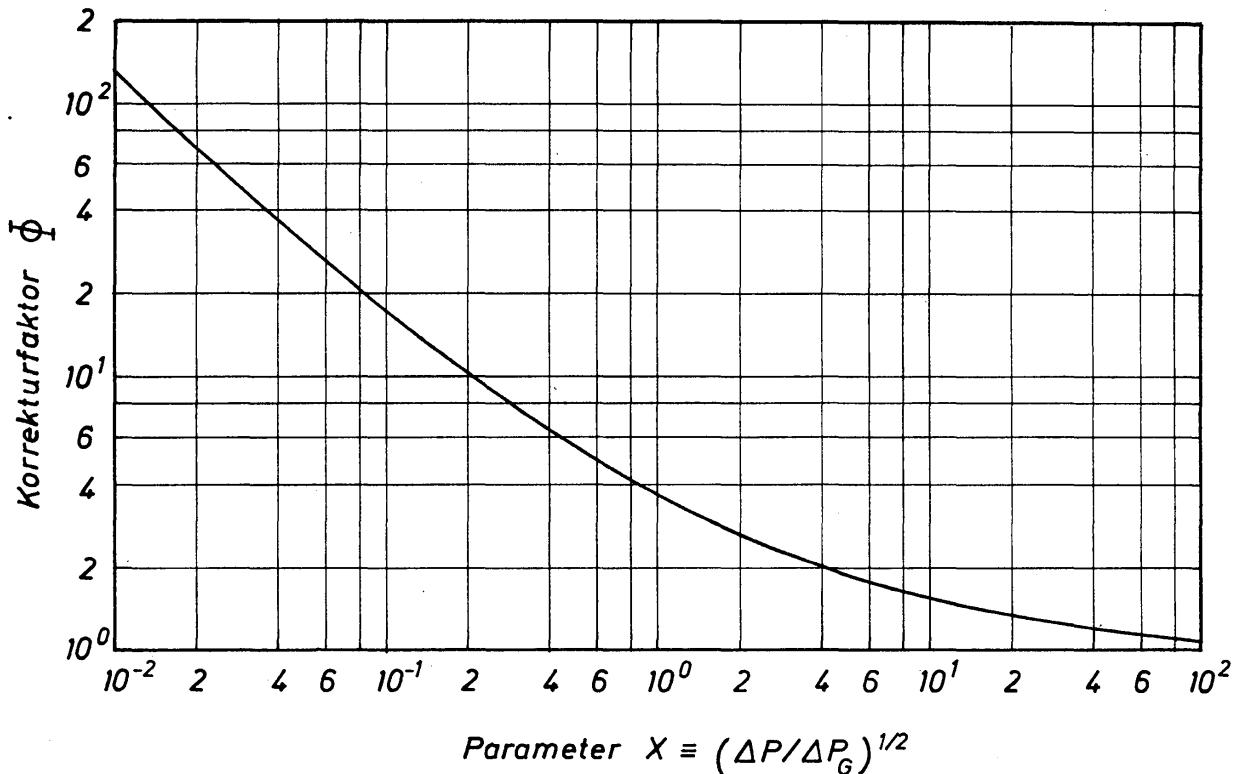


Bild 16.14. Abhängigkeit des Korrekturfaktors Φ von X zur Berechnung des Druckverlustes bei der Gas-Flüssigkeits-Strömung in Füllkörpersäulen für den aufwärts und abwärts gerichteten Gleichstrom

In *Bild 16.14* ist diese Funktion nach Angaben von WEEKMAN und MYERS dargestellt. Die von diesen Forschern zum Vergleich herangezogenen Meßwerte streuen mit $\pm 10\%$ um die mitgeteilte Kurve. Ist Φ bekannt, so läßt sich der Druckverlust der zweiphasigen Strömung aus der Beziehung

$$\Delta P_2 = \Phi^2 \Delta P \quad (16.60)$$

berechnen. Wie WEEKMAN und MYERS nachgewiesen haben, ist es bei der senkrecht nach oben oder nach unten gerichteten Gas-Flüssigkeits-Strömung in Füllkörpersäulen nicht erforderlich, zur Bestimmung des gesamten Druckverlustes neben dem Reibungsanteil einen Massenanteil zu berücksichtigen.

Ähnliche Methoden zur Berechnung des Druckverlustes sind auch von LARKINS, WHITE und JEFFREY [16.48], TURPIN und HUNTINGTON [16.46] und SWEENEY [16.50] entwickelt worden.

Zur Bestimmung des Flüssigkeitsinhalts V_f wird von der Flüssigkeitsfüllzahl $V_f/(V_s \varepsilon)$ Gebrauch gemacht. Auf der Grundlage zahlreicher Meßwerte stellten TURPIN und HUNTINGTON [16.46] folgende empirische Gleichung für den Fall des aufwärts gerichteten Gleichstroms auf:

$$\frac{V_f}{V_s \varepsilon} = -0,035 + 0,182 (\dot{M}/\dot{M}_G)^{0,24} \quad (16.61)$$

und folgende für den abwärts gerichteten Gleichstrom:

$$\frac{V_f}{V_s \varepsilon} = -0,017 + 0,132 (\dot{M}/\dot{M}_G)^{0,24}. \quad (16.62)$$

Hierin bedeuten \dot{M} und \dot{M}_G die Massenströme der Flüssigkeit und des Gases. Die Anwendungsgrenzen der obigen Gleichungen sind durch $1 \leq (\dot{M}/\dot{M}_G)^{0,24} \leq 5$ gegeben. Die Gl. (16.62) liefert nahezu die gleichen Werte für die Flüssigkeitsfüllzahl wie eine von LARKINS, WHITE und JEFFREY [16.48] mitgeteilte Gleichung.

16.6 Gegenstrom durch geordnete Füllkörperschichten

Die bisher behandelten Gesetzmäßigkeiten betrafen stets die Gas-Flüssigkeits-Strömung in ungeordneten Füllkörperschichten. Wegen der verwundenen Strömungswege ergeben sich in ungeordneten Füllkörperschichten sehr hohe Druckverluste. Diese lassen sich stark herabsetzen, wenn man die Füllkörperschicht in geregelter Form anordnet. Für die Einphasenströmung durch geordnete Schichten ist bereits im Abschnitt 8.44 ein Widerstandsgesetz mitgeteilt worden. Für die Zweiphasenströmung wird im folgenden ein Druckverlustgesetz mitgeteilt. Die Schichten sind aus Füllkörpern aufgebaut, deren Form und Anordnung in *Bild 8.32c bis d* angegeben sind. Bei den Versuchen bewegten sich Gas und Flüssigkeit im Gegenstrom durch die Kolonne. Die Fluide waren Luft, Wasser und Zuckerlösungen.

Zur Aufstellung eines Druckverlustgesetzes übernahm KOLEV [16.52] einen von SCHAWORONKOW, AEROW und UMNİK [16.53] vorgeschlagenen Ansatz:

$$\frac{(\Delta P)_2}{\Delta P} = \frac{1}{(1-C)^3}. \quad (16.63)$$

Hierin bedeuten $(\Delta P)_2$ und ΔP die Druckverluste des Gasstromes in der berieselten und in der trockenen Schicht. Zur Berechnung von ΔP ist Gl. (8.91) heranzuziehen. Ferner berücksichtigt C den Anteil des Lückenvolumens der Füllkörperschicht, der von der Rieselflüssigkeit eingenommen wird. Diese Größe muß grundsätzlich von der Struktur der Füllkörperschicht sowie den Eigenschaften der Gas- und der Flüssigkeitsströmung abhängen. Experimentelle Ergebnisse für den Druckverlust (siehe z. B. *Bild 16.6*) legen es nahe, C in zwei Anteile aufzuspalten:

$$C = C_0 + \Delta C. \quad (16.64)$$

Mit C_0 wird ein Grundanteil und mit ΔC ein zusätzlicher Anteil bezeichnet. Der Grundanteil läßt sich in erster Näherung als unabhängig von der Gasbelastung annehmen, da die Druckverlustkurven für die berieselte Füllkörperschicht gemäß *Bild 16.6* mit guter Näherung bis zur Flutgrenze parallel zur Kurve 1 für die trockene Schicht verlaufen. Demgemäß berücksichtigt dann ΔC einen nur inner-

halb des Bereiches zwischen der Flut- und der Staugrenze wirksam werdenden zusätzlichen Anteil. In diesem Bereich weisen die Druckverlustkurven eine größere Steigerung als unterhalb der Flutgrenze auf. Somit hängt ΔC also zusätzlich von der Gasbelastung ab.

KOLEV [16.52] hat zahlreiche Messungen durchgeführt, aus deren Ergebnissen er empirische Gleichungen für C_0 und ΔC ableitete. Für die Versuche diente eine Säule, deren Durchmesser 500 mm betrug. Die Füllkörperschicht hatte eine Höhe von 2,4 m. Die verwendeten Füllkörper waren Raschigringe ohne und mit Steg sowie Wabenkörper, deren Form und Anordnung in *Bild 8.32 c* bis *d* angegeben sind. Die Abmessungen dieser Füllkörper findet man in den Zeilen 25 bis 29 der Tabelle 8.7. Als Gas diente bei den Versuchen Luft, und als Flüssigkeit dienten sowohl Wasser als auch wäßrige Zuckerlösungen. Die Gleichungen für C_0 und ΔC lauten:

$$C_0 = 3,17 \frac{Fr^{0,37} (d_h/h)^{0,779}}{Re^{0,098} \varepsilon^{2,47}}, \quad (16.65)$$

$$\Delta C = 3,48 \cdot 10^{-4} Fr^{0,087} \left(\frac{w_G^2}{\varepsilon^2 g d_h} \right)^{1,69} \left(\frac{w \rho}{w_G \rho_G} \right)^{0,483} \left(\frac{d_h}{h} \right)^{1,17} \varepsilon^{-3,04}. \quad (16.66)$$

Die Froudezahl Fr und die Reynoldszahl Re der Flüssigkeit sind folgendermaßen definiert:

$$Fr \equiv \frac{w^2 V_p / A_p}{g (1 - \varepsilon)}, \quad (16.67)$$

$$Re \equiv \frac{4 w (1 - \varepsilon)}{\nu V_p / A_p}. \quad (16.68)$$

In den letzten Gleichungen bedeuten w und w_G die mittleren Geschwindigkeiten der Flüssigkeit und des Gases in der leer gedachten Säule, ρ und ρ_G die Dichten der Flüssigkeit und des Gases, ν die kinematische Viskosität der Flüssigkeit, g die Erdbeschleunigung, V_p und A_p das Volumen und die Oberfläche der Füllkörper, h die Höhe der Füllkörperschicht, ε den Lückengrad der trockenen Schicht und $d_h = 4 (V_p / A_p) \varepsilon / (1 - \varepsilon) = 4 \varepsilon V_s / A_p$ den hydraulischen Durchmesser, wobei V_s das Volumen der Säule mit der Schichthöhe h ist.

Zur Berechnung des Druckverlustverhältnisses $(\Delta P)_2 / \Delta P$ gemäß Gl.(16.63) ist für den Bereich unterhalb der Flutgrenze $C = C_0$ und für den Bereich zwischen Flut- und Staugrenze $C = C_0 + \Delta C$ zu setzen. In den *Bildern 16.15* und *16.16* sind gemessene Werte des Druckverlustverhältnisses $(\Delta P)_2 / \Delta P$ für die Bereiche unterhalb der Flutgrenze und zwischen Flut- und Staugrenze mit berechneten Werten verglichen. Die berechneten Werte sind durch ausgezogene Kurven wiedergegeben. In *Bild 16.15* beträgt die mittlere Abweichung der Meßwerte von der berechneten Kurve 4,2% und in *Bild 16.16* 11%. 95% bzw. 90% der Meßwerte liegen innerhalb einer Streubreite von $\pm 10\%$ für *Bild 16.15* und von $\pm 20\%$ für *Bild 16.16*. Die in beiden Bildern verwendeten Symbole sind Versuchsbedingungen zugeordnet, die in den Zeilen 25 bis 29 der Tabelle 8.9 näher bezeichnet sind.

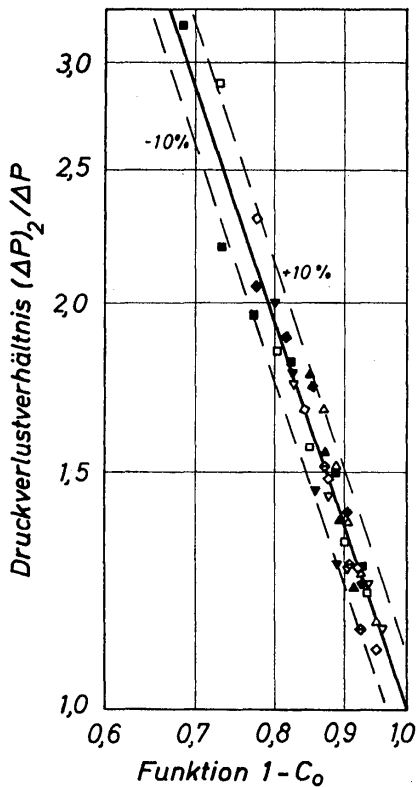


Bild 16.15. Druckverlustverhältnis zur Berechnung des Druckverlustes $(\Delta P)_2$ bei der Gas-Flüssigkeits-Strömung in geordneten Füllkörperschichten für den Bereich unterhalb der Flutgrenze

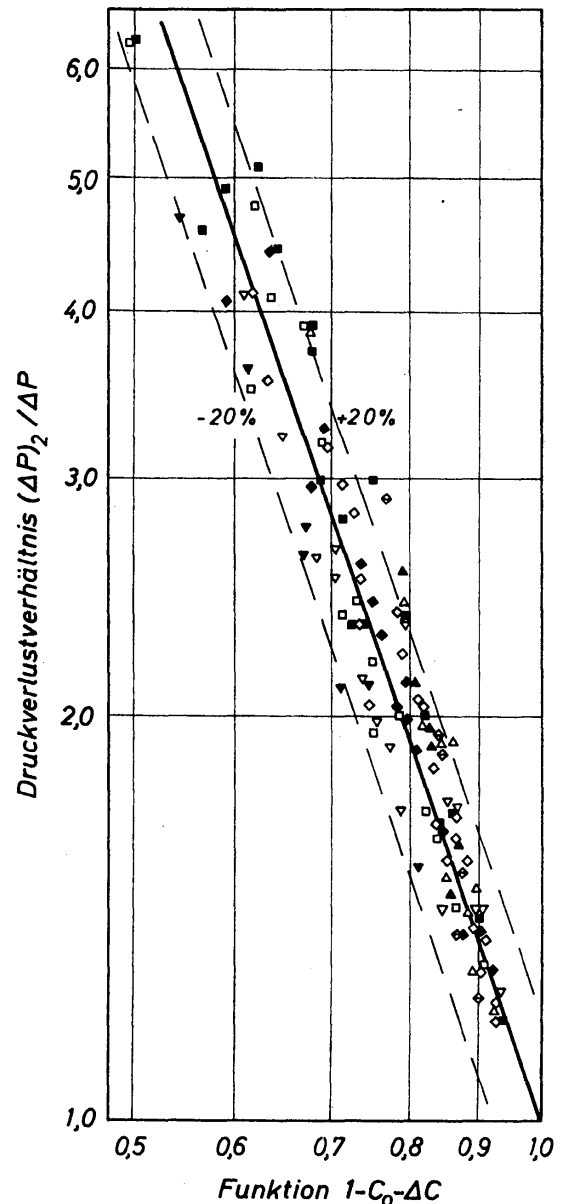


Bild 16.16. Druckverlustverhältnis zur Berechnung des Druckverlustes $(\Delta P)_2$ bei der Gas-Flüssigkeits-Strömung in geordneten Füllkörperschichten für den Bereich zwischen Flut- und Staugrenze

Leere Symbole beziehen sich auf die Berieselung mit Wasser, ausgefüllte auf die mit Zuckerlösungen.

Zur Berechnung der Gasgeschwindigkeit $w_G = w_{Gf}$ am Flutpunkt vermochte KOLEV aus den Ergebnissen seiner Messungen folgende Gleichung herzuleiten:

$$\frac{1 - C_0}{1 - C_0 - \Delta C} = 1,03. \quad (16.69)$$

Die Größe C_0 läßt sich mittels Gl. (16.65) berechnen, wenn nebst den Eigenschaften der Füllkörperschicht nur noch die Bedingungen der Flüssigkeitsströmung bekannt sind. Aus Gl. (16.69) läßt sich sodann der Wert für ΔC ermitteln. Anschließend folgt dann aus Gl. (16.66) die am Flutpunkt auftretende Gasgeschwindigkeit $w_G = w_{Gf}$.

Für die an der Staugrenze auftretende Gasgeschwindigkeit w_{Gs} liegen bislang nur wenige Meßwerte vor, so daß sich noch keine zuverlässige Gleichung aufstellen läßt. Man wird jedoch erwarten dürfen, daß sich die Strömungsverhältnisse in geordneten Füllkörperschichten nicht grundsätzlich von denen in ungeordneten unterscheiden. Es wird daher empfohlen, den für ungeordnete Schichten erkannten Zusammenhang, $w_{Gs} = 1,7 w_{Gf}$, auf geordnete zu übertragen.

Schrifttum

- [16.1] H. BRAUER, Eigenschaften der Zweiphasen-Strömung bei der Rektifikation in Füllkörpersäulen, *Dechema-Monographie* 37, 7–78
- [16.2] H. L. SHULMAN und W. G. MELLISH, Performance of packed columns, Part VIII: Liquid flow patterns and velocities in packed beds, *AIChE J.* 13 (1967) 6, 1137–40
- [16.3] K. L. ANDERSON, O. M. STOKKE und R. E. GILBERT, Radial mixing during two-phase countercurrent flow through a packed column, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 5 (1966) 3, 430–2
- [16.4] H. L. SHULMAN, C. F. ULLRICH und N. WELLS, Performance of packed columns, Part I: Total, static, and operating holdups, *AIChE J.* 1 (1955) 2, 247–52
- [16.5] H. GELBE, Der Flüssigkeitsinhalt und die Rektifizierwirkung bei Vakuumbetrieb in Füllkörperschüttungen, *Fortschr. ber. VDI-Z Reihe* 3, Nr. 23
- [16.6] W. PIETSCH und H. RUMPF, Haftkraft, Papillardruck, Flüssigkeitsvolumen und Grenzwinkel einer Flüssigkeitsbrücke zwischen zwei Kugeln, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 15, 885–93
- [16.7] H. SCHUBERT, Experimentelle Bestimmung von Haftkraft und Randwinkel am System einer Flüssigkeitsbrücke zwischen zwei Kugeln, *Chem.-Ing.-Techn.* 40 (1968) 15, 745–7
- [16.8] J. C. ELGIN und F. B. WEISS, Liquid holdup and flooding in packed towers, *Ind. Eng. Chem.* 31 (1939) 4, 435–45
- [16.9] B. W. JESSER und J. C. ELGIN, Studies of liquid holdup in packed towers, *Trans. Amer. Inst. Chem. Eng.* 39 (1943) 3, 277–98
- [16.10] H. L. SHULMAN, C. F. ULLRICH, N. WELLS und A. Z. PROULX, Performance of packed towers, Part III: Holdup for aqueous and nonaqueous systems, *AIChE J.* 1 (1955) 2, 259–64
- [16.11] D. M. MOHUNTA und G. S. LADDHA, Prediction of liquid phase hold-up in random packed beds, *Chem. Eng. Sci.* 20 (1965) 12, 1069–72
- [16.12] V. E. SATER und O. LEVENSPIEL, Two-phase flow in packed beds, Evaluation of axial dispersion and holdup by moment analysis, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals* 5 (1966) 1, 86–92
- [16.13] K. WIGGERT, Druckverlust und Flüssigkeitsinhalt in berieselten Schüttungen bei verschiedenen Füllkörperarten, *Interne Mitteilungen der Forschungsgruppe für Wärme- und Kältetechnik im MPI für Strömungsforschung, Göttingen, Nr. 92*
- [16.14] B. DEITERS, Flüssigkeitsinhalt und Sprudelpunkt bei verschiedenen Füllkörperarten, *Interne Mitteilungen der Forschungsgruppe für Wärme- und Kältetechnik im MPI für Strömungsforschung, Göttingen, Nr. 110*
- [16.15] ● M. LEVA, *Tower Packings and Packed Tower Design*, The U.S. Stoneware Comp., Akron (USA) 1953
- [16.16] A. MERSMANN, Zur Berechnung des Flutpunktes in Füllkörperschüttungen, *Chem.-Ing.-Techn.* 37 (1965) 3, 218–26
- [16.17] ● E. KIRSCHBAUM, *Destillier- und Rektifizierteknik*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1969

- [16.18] C. ALT, A. MEIER und G. RICHTER, Druckverlustmessungen an Pallringen und normalen zylindrischen Füllringen, *Chem.-Ing.-Techn.* 27 (1955) 8/9, 502–6
- [16.19] ● H. STAGE und K. BOSE, *Die Belastungsverhältnisse in Füllkörpersäulen*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1962
- [16.20] E. MACH, Druckverlust und Belastungsgrenzen in Füllkörpersäulen, *VDI-Forschungsh.* 375, 9–20, VDI-Verlag, Berlin 1935
- [16.21] A. WHITE, Pressure drop and loading velocities in packed towers, *Trans. Amer. Inst. Chem. Eng.* 31 (1935) 2, 390–408
- [16.22] S. UCHIDA und S. FUJITA, Irrigated packed towers VI–VII, *J. Soc. Chem. Ind. (Japan)* 40 (1937) 7, 238B–244B
- [16.23] B. R. SARCHET, Flooding velocities in packed towers, *Trans. Amer. Inst. Chem. Eng.* 38 (1942) 2, 283–301
- [16.24] W. A. BAIN und O. A. HOUGEN, Flooding velocities in packed columns, *Trans. Amer. Inst. Chem. Eng.* 40 (1944) 1, 29–49, und 3, 389–401
- [16.25] C. C. FURNAS und F. BELLINGER, Operating characteristics of packed columns, *Trans. Amer. Inst. Chem. Eng.* 34 (1938) 3, 251–83
- [16.26] E. M. SCHOENHORN und W. J. DOUGHERTY, Pressure drop and flooding velocity in packed towers with viscous liquids, *Trans. Amer. Inst. Chem. Eng.* 40 (1944) 3, 402–7, und 1, 51–77
- [16.27] W. BARTH, Der Druckverlust bei der Durchströmung von Füllkörpersäulen und Schüttgut mit und ohne Berieselung, *Chem.-Ing.-Techn.* 23 (1951) 7, 289–93
- [16.28] H. BRAUER, Zusammenhang zwischen Druckverlust und Rektifizierungswirkung in Füllkörperkolonnen, *Chem.-Ing.-Techn.* 29 (1957) 8, 520–30
- [16.29] F. A. ZENZ, Mechanism of countercurrent gas liquid flow through packed towers, *Chem. Eng. Progr.* 43 (1947) 8, 415–28
- [16.30] M. C. MOLSTAD, R. G. ABBEY, A. R. THOMPSON und J. F. MCKINNEY, Performance of drip-point grid tower packings, *Trans. Amer. Inst. Chem. Eng.* 38 (1942) 2, 387–434, und 5, 885–7
- [16.31] H. SCHRADER, Druckverlust, Wärme- und Stoffaustausch in berieselten Raschig-ringschüttungen, *Kältetechn.* 10 (1958) 9, 290–5
- [16.32] R. BILLET, Belastbarkeit von Laborfüllkörperkolonnen, *Chem.-Ing.-Techn.* 32 (1960) 5, 544–50
- [16.33] T. TEUTSCH, Druckverlust in Füllkörperschüttungen bei hohen Berieselungsdichten, *Chem.-Ing.-Techn.* 36 (1964) 5, 496–503
- [16.34] H. BRAUER, Investigation of a wet air cooler with Raschig ring packing, *Proceedings of the 10th International Congress on Refrigeration, Copenhagen 1959*, Band 1, 333–40
- [16.35] T. K. SHERWOOD, G. H. SHIPLEY und F. A. L. HOLLOWAY, Flooding velocities in packed columns, *Ind. Eng. Chem.* 30 (1938) 7, 765–9
- [16.36] H. SAWISTOWSKI, Flooding velocities in packed columns operating at reduced pressures, *Chem. Eng. Sci.* 6 (1957) 3, 138–40
- [16.37] A. MERSMANN, Untersuchungen an einer berieselten Raschig-ringschüttung, *Interne Mitteilungen der Forschungsgruppe für Wärme- und Kältetechnik im MPI für Strömungsforschung, Göttingen, Nr. 150*
- [16.38] G. SCHREWE, Druckverlust und Flüssigkeitsinhalt in berieselten Schüttungen bei verschiedenen Füllkörperarten, *Interne Mitteilungen der Forschungsgruppe für Wärme- und Kältetechnik im MPI für Strömungsforschung, Göttingen, Nr. 87*
- [16.39] G. W. MINARD und M. D. WINNING, Flooding phenomena in packed gas absorption columns, *Can. J. Chem. Eng.* 35 (1957) 1, 39–46
- [16.40] H. L. SHULMAN, C. F. ULLRICH, A. Z. PROUX und J. O. ZIMMERMANN, Performance of packed columns, Part II: Wetted and effective interfacial areas, gas- and liquid-phase mass transfer rates, *AIChE J.* 1 (1955) 2, 253–8

- [16.41] H.L.SHULMAN und J.J.DEGOUFF, Mass transfer coefficients and interfacial areas for 1-inch Raschig-rings, *Ind. Eng. Chem.* 44 (1952) 8, 1915-22
- [16.42] H.HIKITA und K.KATAKA, Wetted area in a packed column, *Chem. Eng. (Japan)* 20 (1956) 10, 528-33
- [16.43] F.YOSHIDA und Y.MIURA, Effective interfacial area in packed columns for absorption with chemical reaction, *AIChE J.* 9 (1963) 3, 331-7
- [16.44] F.YOSHIDA und T.KOYANAGI, Mass transfer and effective interfacial areas in packed columns, *AIChE J.* 8 (1962) 3, 309-16
- [16.45] V.W.WEEKMAN und J.E.MYERS, Fluid-flow characteristics of concurrent gas-liquid flow in packed beds, *AIChE J.* 10 (1964) 6, 951-7
- [16.46] J.L.TURPIN und R.L.HUNTINGTON, Prediction of pressure drop for two-phase, two-component concurrent flow in packed beds, *AIChE J.* 13 (1967) 6, 1196-202
- [16.47] E.L.PIRET, C.A.MANN und T.WALL, Pressure drop and liquid holdup in packed tower, *Ind. Eng. Chem.* 32 (1940) 6, 861-3
- [16.48] R.P.LARKINS, R.R.WHITE und D.W.JEFFREY, Two-phase concurrent flow in packed beds, *AIChE J.* 7 (1961) 2, 231-9
- [16.49] W.S.DODDS, L.F.STUTZMAN, B.J.SOLLAMI und R.J.McCARTER, Concurrent gas absorption mass transfer, *AIChE J.* 6 (1960) 3, 197-201
- [16.50] D.E.SWEENEY, A correlation for pressure drop in two-phase concurrent flow in packed beds, *AIChE J.* 13 (1967) 4, 663-9
- [16.51] R.W.LOCKHART und R.C.MARTINELLI, Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two-component flow in pipes, *Chem. Eng. Progr.* 45 (1949) 1, 39-48
- [16.52] N.KOLEV, Der Druckverlust von Absorptionssäulen mit regelmäßig angeordneten Füllkörpern, *Verfahrenstechn.* 3 (1969) 4, 163-9
- [16.53] N.M.SCHAWORONKOW, M.E.AEROW und N.N.UMNIK, *Chim. Prom.* 1948, 10, 294 (russisch)

17 Gas-Flüssigkeits-Strömungen auf Kolonnenböden

17.1 Sinn und Zweck von Bodenkolonnen und Kolonnenböden

Bodenkolonnen werden vornehmlich für die Absorption und die Rektifikation eingesetzt. In beiden Prozessen findet zwischen der gas- oder dampfförmigen und der flüssigen Phase ein Stoff- und Wärmeaustausch statt, der bei der Absorption auch häufig noch von einer chemischen Reaktion begleitet wird. Sowohl der Stoff- als auch der Wärmeaustausch ist unmittelbar proportional der Größe der Phasengrenzfläche. Die Kolonnenböden werden daher so gestaltet, daß sich zwischen den beiden Phasen eine möglichst große Grenzfläche ausbildet. Auf den Kolonnenböden bewegt sich die flüssige Phase in den meisten Fällen in einer horizontalen Ebene, durch die das Gas in senkrechter Richtung hindurchtritt. Unter idealen Austauschbedingungen läßt sich auf einem Boden thermodynamisches Gleichgewicht zwischen den beiden Phasen erreichen. Wünscht man eine weitergehende Änderung der Konzentrationen, dann muß jede Phase mit der anderen unter Ungleichgewichtsbedingungen erneut in Berührung gebracht werden. Das erreicht man dadurch, daß viele Böden in einer Kolonne, der Bodenkolonne, angeordnet werden. Dabei führt man die beiden Phasen innerhalb der Kolonne im Gegenstrom, auf den Kolonnenböden jedoch vornehmlich im Querstrom. Das Gas durchströmt die Kolonne von unten nach oben durch jeden Boden, während die Flüssigkeit die Kolonne von oben nach unten durchströmt und dabei quer über jeden Boden geführt wird.

Kolonnenböden sind keineswegs die einzigen Einrichtungen zur Erzeugung einer großen Phasengrenzfläche. Es erscheint an dieser Stelle sinnvoll, auch auf die anderen Einrichtungen hinzuweisen. Je größer die auf die Volumeinheit der beiden Phasen bezogene Grenzfläche ist, desto kleiner wird das Bauvolumen des Apparates. Zur Erzeugung großer Grenzflächen je Volumeinheit bieten sich grundsätzlich drei Möglichkeiten an, die durch die Form der Phasengrenzfläche gekennzeichnet sind:

- a) Kontinuierliche Phasengrenzfläche. Hierbei liegen beide Phasen in kontinuierlicher Form vor. Eine große Phasengrenzfläche je Volumeinheit läßt sich aber nur dann erreichen, wenn man für beide Phasen die Strömung in sehr dünnen Schichten oder Strahlen erzwingt. Da die Schichtdicken oder die Strahldurchmesser bestimmte untere Grenzwerte nicht unterschreiten können, ist der Größe der Phasengrenzfläche eine obere Grenze gesetzt. Bei dieser Art der Erzeugung der Phasengrenzfläche ergeben sich sehr einfache Strömungsverhältnisse, so daß der Druckverlust sehr gering ist. In der Technik versucht man sich diesem Fall durch Verwendung von Rohr- und Füllkörperkolonnen zu nähern.

- b) Diskontinuierliche Phasengrenzfläche, wobei die Flüssigkeit die diskontinuierliche und das Gas die kontinuierliche Phase darstellt. Hierzu ist es erforderlich, die Flüssigkeit zu zerstäuben. Da dem Tropfendurchmesser kaum eine untere Grenze gesetzt ist, ergibt sich eine sehr große Phasengrenzfläche je Volumeinheit der Flüssigkeit. Etwas ungünstiger ist der Wert jedoch, wenn die Fläche auf die Volumeinheit beider Phasen bezogen wird. Das ist vor allem dadurch bedingt, daß sich bei den herkömmlichen Zerstäubungseinrichtungen eine sehr ungleichmäßige räumliche Verteilung der Tropfen ergibt. Die Konzentration der Flüssigkeitsphase im Gas ist nur sehr gering. Dadurch hat man zwar die Flüssigkeit fein verteilt, nicht jedoch die Gasphase. Indes besteht die Hoffnung, daß die physikalischen Möglichkeiten technisch doch noch besser ausgenutzt werden, als es bislang getan wurde. Die Erzeugung einer großen Grenzfläche durch Flüssigkeitszerstäubung läßt sich aber nur für die Absorption, kaum jedoch für die Rektifikation ausnutzen.
- c) Diskontinuierliche Phasengrenzfläche, wobei das Gas die diskontinuierliche und die Flüssigkeit die kontinuierliche Phase darstellt. In diesem Fall muß das Gas in Blasen aufgelöst werden. Darüber hinaus müssen die Blasen möglichst gleichmäßig und dicht in der Flüssigkeit verteilt sein, damit sich auch für diese die gewünschte dünne Schicht ergibt. Die Erzeugung von Blasen kleinsten Durchmessers bereitet technisch keine Schwierigkeiten, so daß man einen sehr günstigen Wert für die Phasengrenzfläche je Volumeinheit erhalten kann. Die Blasen können beispielsweise mittels mechanisch angetriebener Rührvorrichtungen (Desintegration) sowie mittels poröser, gelochter oder geschlitzter Platten erzeugt werden. Platten mit Löchern oder Schlitzern sind die einfachsten Arten der Kolonnenböden.

Neben der Forderung, die Phasengrenzfläche in der gewünschten Weise zu erzeugen, bestimmen noch zahlreiche weitere Bedingungen die Gestalt des Kolonnenbodens:

1. hohe Trennwirkung, damit auf dem Boden eine weitgehende Annäherung an den Gleichgewichtszustand erreicht wird; das erfordert nebst der großen Grenzfläche große Werte für die Stoff- und Wärmeübergangskoeffizienten,
2. geringer Druckverlust, damit der Energieaufwand für die Stofftrennung möglichst gering ist,
3. geringer «Flüssigkeitsinhalt» des Bodens,
4. hohe Durchsatzmöglichkeit,
5. einfache Betriebsweise,
6. Unempfindlichkeit gegen Belastungsänderungen,
7. geringe Neigung zu Flüssigkeitsschwingungen,
8. geringe Neigung zur Verschmutzung,
9. hohe Korrosionsbeständigkeit,

10. geringe Herstellungskosten und

11. geringe Wartungskosten.

Man könnte die Liste der Anforderungen, die an einen Kolonnenboden gestellt werden, sicherlich noch verlängern. Sie ist aber schon lang genug, um erkennen zu können, daß kein technischer Boden alle Bedingungen erfüllen kann. Damit sind dann aber auch der Erfindungsgabe der Ingenieure keine Grenzen gesetzt. Sie wird stets um so mehr angesprochen, je weniger scharf die Anforderungen formuliert sind. Der Erfolg ist dann, daß es eine sehr große Zahl, wenn nicht sogar eine unübersehbare große Zahl von Vorschlägen für die Gestaltung von Kolonnenböden gibt. Man gewinnt den Eindruck, daß manche Bodenarten zu gewissen Zeiten «modern» sind. Eine eindeutige Beurteilung der Güte eines Bodens ist wegen der Vielzahl von Anforderungen bislang kaum möglich. Diesem Mangel kann nur dadurch abgeholfen werden, daß man die physikalischen Vorgänge, also die Strömungs-, Wärme- und Stoffaustauschvorgänge, gründlich untersucht und klärt. Obgleich sich bereits eine große Zahl von Forschern mit diesen Aufgaben beschäftigt hat, konnten bislang nur begrenzte Erfolge erzielt werden.

Die in der Technik verwendeten Kolonnenböden lassen sich in zwei große Gruppen einteilen, nämlich in Siebböden und in Glockenböden. In *Bild 17.1* sind in schematisierter Form Schnittzeichnungen durch zwei Bodenkolonnen angegeben, in denen sich jeweils drei Siebböden oder drei Glockenböden befinden. Die Flüssigkeit strömt vom Zulaufwehr quer über den Boden zum Ablaufwehr und gelangt durch den Ablaufbecher zum nächst tieferen Boden. Das Gas bzw. der Dampf strömt durch die Bodenöffnungen und die darüber befindliche Flüssigkeit direkt dem nächst höheren Boden zu. Die auf den Böden befindliche Flüssigkeit bildet zusammen mit dem darin befindlichen Gas eine Blasen- oder auch eine Schaumschicht.

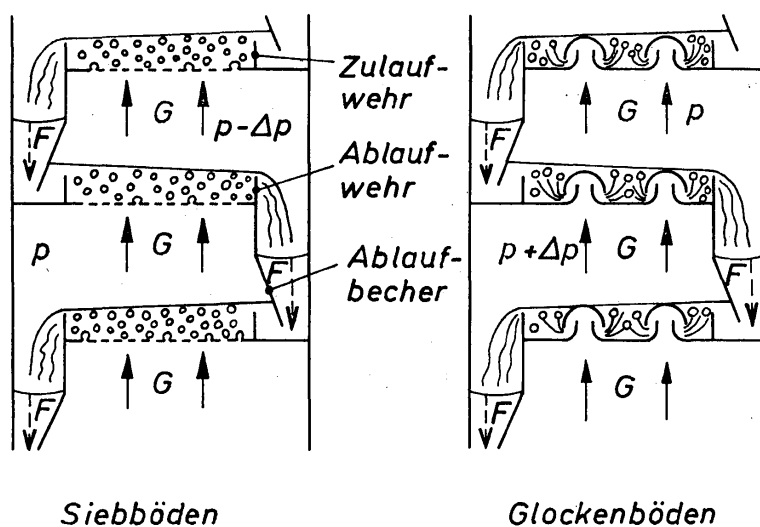


Bild 17.1
Schematisierte
Darstellung von Sieb-
und Glockenböden

Zur Erzielung eines guten Stoff- und Wärmeaustausches bemüht man sich, die Böden so zu gestalten, daß sich innerhalb der Blasen- bzw. Schaumschicht eine große Phasengrenzfläche ausbildet und sich große Werte für die Stoff- und Wärmeübergangskoeffizienten ergeben. Da die Grenzfläche bei gegebenen Belastungs-

verhältnissen mit abnehmendem Blasendurchmesser größer wird, könnte man sich darum bemühen, möglichst kleine Blasen zu erzeugen. Dem Blasendurchmesser ist indes eine untere Grenze gesetzt. Da die Steiggeschwindigkeit mit abnehmendem Blasendurchmesser kleiner wird, besteht bei kleinen Blasen Gefahr, daß sie vom Flüssigkeitsstrom mitgerissen werden und zum nächst tieferen Boden gelangen. Ein Teil des Gasstromes würde damit also im Kreislauf gefördert und den Austauschvorgang zwischen Gas und Flüssigkeit behindern. Den Ausführungen in Abschnitt 6.2 zufolge erfordert die Bildung kleiner Blasen im Bereich des Blasengases kleine Lochdurchmesser. Eine untere Grenze für den Blasendurchmesser führt zwangsläufig auch zu einer unteren Grenze für den Lochdurchmesser der Siebböden. Die Festlegung dieser Grenzwerte erfordert genaue Kenntnisse über die Bildung der Blasen und über ihre Bewegung innerhalb der quer über den Boden strömenden Flüssigkeit.

Wesentlich verwickelter noch sind die Verhältnisse auf den Glockenböden. Unter den üblichen Betriebsbedingungen strömt das Gas durch die Öffnungen der Glockenkappe in Form von Strahlen in die Flüssigkeit hinein. Diesen Vorgang nennt man Strahlgasen. Unter der Einwirkung von Reibungs-, Auftriebs- und Oberflächenspannungskräften kann sich der Strahl dann in Blasen auflösen, die zum Teil jedoch sehr große Durchmesser haben. Häufig schießt der Gasstrahl durch die Flüssigkeitsschicht hindurch. Unter diesen Bedingungen ist die Phasengrenzfläche je Volumeinheit nur sehr klein. Durchschießen die Gasstrahlen oder sehr große Blasen die Flüssigkeitsoberfläche, so reißen sie einen Teil der Flüssigkeit in Form von Tropfen mit. Oberhalb der Flüssigkeitsschicht bildet sich daher eine Tropfen- oder Spritzschicht aus, in welcher sich eine verhältnismäßig große Phasengrenzfläche befindet, die für den Stoffaustausch von wesentlicher Bedeutung ist.

Unter den Bedingungen des Strahlgasens läßt sich die Gas-Flüssigkeits-Schicht in zwei Abschnitte unterteilen. Im unteren Abschnitt ist das Gas die diskontinuierliche Phase, wobei die Phasengrenzfläche verhältnismäßig klein ist. Im oberen Abschnitt ist die Flüssigkeit die diskontinuierliche Phase, wobei die Phasengrenzfläche verhältnismäßig groß ist.

Der Stoff- und Wärmeaustausch wird auf Glockenböden noch durch ausgeprägte örtliche Flüssigkeitsschwingungen verstärkt, da hierdurch lebhaftere Querbewegungen in der Flüssigkeit hervorgerufen werden. Die Schwingungen sind durch eine Instabilität der Grenzfläche zwischen Gas und Flüssigkeit bedingt. Durch eine ähnliche Instabilität werden auch die Meereswellen hervorgerufen. Die im unteren Abschnitt der Flüssigkeitsschicht nur geringe Größe der Phasengrenzfläche wird somit durch große örtliche Stoff- und Wärmeübergangskoeffizienten wieder ausgeglichen.

Während örtliche Flüssigkeitsschwingungen für den Betrieb von Kolonnenböden vorteilhaft sind, können Schwingungen, die die gesamte Flüssigkeit auf den Böden erfassen, zu mechanischen Zerstörungen und zu verschlechterten Austauschbedingungen führen. Derartige Schwingungen entstehen durch Anfachung der örtlichen. Maßgebend ist hierfür die Strömung der Flüssigkeit vom Zulaufwehr

zum Ablaufwehr. Offenbar wird die Anfachung in erträglichen Grenzen gehalten, wenn man die Glocken auf einem Boden so anordnet, daß sich gleichmäßig durchströmte Glockengassen ergeben. Bei Siebböden kann sich in diesem Fall der Einbau von Leitblechen als sinnvoll erweisen. Anhaltspunkte über die günstigsten Maßnahmen zur Dämpfung dieser Art von Schwingungen lassen sich nur aus Strömungsbeobachtungen gewinnen.

Eine große Bedeutung kommt der quer über den Boden gerichteten Flüssigkeitsströmung zu. In den meisten Fällen strömt die Flüssigkeit auf Grund eines sich einstellenden Gefälles, welches vom Zulauf- zum Ablaufwehr gerichtet ist. Bei sehr großen Böden kann dieses Flüssigkeitsgefälle so groß werden, daß sich die Bedingungen für den Stoff- und Wärmeaustausch in Richtung des Gefälles zu stark ändern. Das Flüssigkeitsgefälle läßt sich herabsetzen, wenn man die Flüssigkeit mittels des Gases zum Ablaufwehr fördert. Hierzu werden die Öffnungen im Boden, durch die das Gas in die Flüssigkeit eintritt, entsprechend gestaltet.

Eine für den Betrieb von Kolonnenböden besonders wichtige Größe ist der Druckverlust Δp . Ist Δp sehr groß, dann vermag der höhere Druck unterhalb eines Bodens das Abfließen der Flüssigkeit zu behindern oder sogar zu verhindern. In diesem Falle wird die Dicke der Flüssigkeitsschicht auf dem Boden ansteigen. Dabei ergibt sich die Gefahr, daß durch den Gasstrom Flüssigkeit auf den nächst höheren Boden mitgerissen wird und somit ein Flüssigkeitskreislauf entsteht.

Betrachtet man die in *Bild 17.1* dargestellten Längsschnitte von zwei Kolonnen, so fällt sofort der große Abstand zwischen zwei Böden auf. Dieser Abstand ist ein Vielfaches der Höhe der Gas-Flüssigkeits-Schicht. Die auf das Volumen einer Stufe bezogene Phasengrenzfläche ist daher nur gering. Der große Abstand ist im wesentlichen wegen des Mitreißen von Flüssigkeitstropfen durch den Gasstrom erforderlich.

Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, daß einige der Probleme, die beim Betrieb von Kolonnenböden auftreten, rein strömungstechnischer Natur sind. Für Siebböden ist das hierzu bekannte Schrifttum von RYLEK und STANDARD [17.1] (125 Zitate) kritisch gesichtet worden. Für Glockenböden hat DIERY [17.2] und später nochmals KUTZER [17.3] das Schrifttum zusammengestellt. Hingewiesen sei ferner auf den umfangreichen Bericht von BOLLES [17.4] über Entwurf und Berechnung von Glockenböden sowie auf das Buch von HOPPE und MITTELSTRASS [17.5], *Grundlagen der Dimensionierung von Kolonnenböden*.

17.2 Einige Bauformen für Kolonnenböden

17.21 Grundformen der Kolonnenböden

Die Grundformen der Kolonnenböden sind – wie bereits gesagt – der Sieb- und der Glockenboden. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Bodentypen besteht darin, daß die Flüssigkeit auf dem Glockenboden durch konstruktive Maßnahmen – dem Glockenhals –, auf dem Siebboden indes durch den Staudruck des Dampfes gehalten werden. Hieraus ergeben sich die für Glocken- und Siebböden charakteristischen Eigenschaften.

Die Vorteile des Glockenbodens bestehen darin, daß der durch einen Austauschgrad oder die Trennwirkung gekennzeichnete Stoffaustausch über einen weiten Bereich der Dampfbelastung nahezu konstant ist und nur wenig von den physikalischen Eigenschaften des zu trennenden Stoffgemisches abhängt. Darüber hinaus hat sich der Glockenboden als ziemlich unempfindlich gegen Verschmutzung erwiesen. Diesen Vorteilen stehen aber einige bemerkenswerte Nachteile gegenüber. Der Glockenboden zeichnet sich im allgemeinen durch einen hohen Druckverlust, ein hohes Gewicht und einen hohen Preis aus.

Die Vorteile des Siebbodens sind die gute Trennwirkung, der niedrige Druckverlust, das niedrige Gewicht und der niedrige Preis. Die Nachteile des Siebbodens sind aber ebenso beachtlich. Vor allem zeichnet sich der Siebboden durch einen nur sehr kleinen Belastungsbereich mit guter Trennwirkung aus. Das ist dadurch bedingt, daß der Siebboden erst funktionsfähig wird, nachdem die Dampfbelastung einen Mindestwert überschritten hat. Unterhalb dieses Mindestwertes fließt die Flüssigkeit durch die Siebbohrungen auf den nächst tieferen Boden. Man spricht vom Durchregnen des Bodens. Hierdurch wird die Trennwirkung erheblich vermindert. Ferner hat sich gezeigt, daß die Trennwirkung des Siebbodens von den physikalischen Eigenschaften des Stoffgemisches abhängt. Darüber hinaus ist der Siebboden sehr empfindlich gegen Verschmutzung.

Sowohl der Glockenboden als auch der Siebboden zeichnet sich durch bemerkenswerte Vorteile als auch durch ebenso bemerkenswerte Nachteile aus. Es ist daher verständlich, daß man sich bemühte, Bodenformen zu entwickeln, die die Vorteile des Glockenbodens und die des Siebbodens miteinander vereinen. Aus diesen Bemühungen sind eine große Zahl von Bodenformen entstanden, von denen einige im folgenden beschrieben werden. Auf den Siebboden selbst wird wegen seiner einfachen Form dabei nicht mehr eingegangen. Näher besprochen werden der Glockenboden, der daraus abgeleitete Tunnelboden und der aus der Verbindung von Sieb- und Glockenboden entstandene Ventilboden. Einige für den Betrieb von Kolonnenböden wichtige Angaben sind in Tabelle 17.1 angegeben, die von HOPPE und MITTELSTRASS [17.5] übernommen wurde. Die Angaben lassen deutlich erkennen, daß die Bemühungen, die Vorteile von Sieb- und Glockenboden zu vereinen, erfolgreich waren.

17.22 Der Glockenboden

Das wichtigste Bauelement des Glockenbodens ist die Glocke. Die einfachste Form weist die Zylinderglocke auf, die in *Bild 17.2* dargestellt ist. Es bedeuten d_g Durchmesser und h_g Höhe der Glockenkappe, d_k Durchmesser und h_k Höhe des Glockenkamins, h_a Abstand des Kappenrandes von der Bodenplatte (Randabstand, Austrittshöhe) sowie h_u Umlenkhöhe. Aus der Zylinderglocke wurde die strömungstechnisch günstigere Flachglocke entwickelt, die ebenfalls in *Bild 17.2* dargestellt ist. Dabei wurde angestrebt, die in der Zylinderglocke auftretenden Umlenkverluste weitgehend herabzusetzen. Der Glockenrand kann sehr verschiedene Formen aufweisen. In *Bild 17.2* sind einige Beispiele für den gezackten

Tabelle 17.1: Angaben über die Eigenschaften einiger Kolonnenböden nach HOPPE und MITTELSTRASS [17.5]

Bodenkonstruktion	Relative Dampfkapazität der Böden bei Flüssigkeitsbelastungen		Wirksamkeit %		Elastizität und Flexibilität		Gesamt-Druckverlust bei 85% der maximalen Belastung [mm WS]	Mögliche Bodenabstände [mm]	Kosten im Verhältnis zum Glockenboden	Gewicht $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$
	niedrige	mittlere	bei 85% der maximalen Belastung	bei zulässiger Belastungsänderung	Mögliche Belastungsänderung bei konstanter Wirksamkeit [%]	Verhältnis $\frac{w_{\text{max}}}{w_{\text{min}}}$				
Glockenboden	1		80	60–80	80	4–5	45–80	400–800	1	90–140
Tunnelboden	1,1	bis 1,2	85	70–90	80	4–6	45–60	300–600	0,8	40–70
Ventilboden	1,2	bis 1,5	80	70–90	80	5–8	40–60	300–600	0,7	40–60
Siebboden	1,2	bis 1,3	80	70–80	55	2–3	30–50	400–800	0,7	30–40

und den geschlitzten Rand angeben. Die Zacken und Schlitze sind so geformt, daß sich der in die Flüssigkeit eintretende Dampf möglichst leicht in eine große Zahl von Blasen oder Dampfstrahlen auflöst. Als weiteres Beispiel ist in *Bild 17.2* ein Rand mit Leitflügeln angegeben. Die Leitflügel sollen dem Dampfstrom eine tangentiale Austrittsrichtung aufzwingen, wodurch die umgebende Flüssigkeit eine vorgeschriebene Bewegung ausführt.

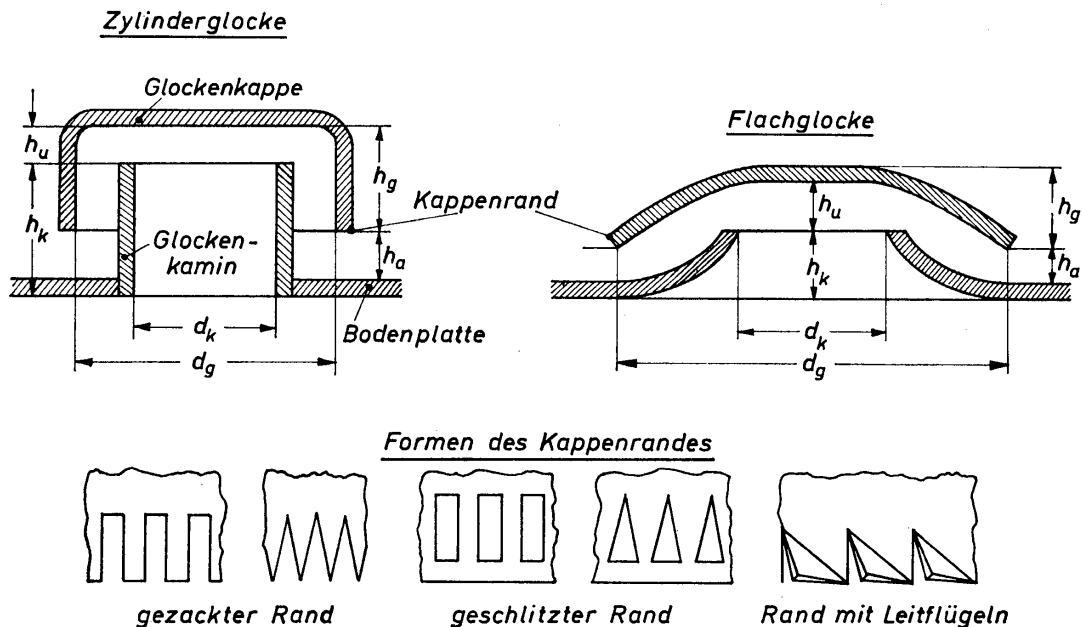


Bild 17.2. Schematische Darstellung einer Zylinderglocke, einer Flachglocke und verschiedener Formen des Kappenrandes

Hergestellt werden Glocken aus metallischen und keramischen Werkstoffen sowie aus Glas und Kunststoffen. Die Form der Glocken wird durch den Werkstoff mitbestimmt. Der geringste Druckverlust ergibt sich nach KUTZER [17.3], wenn man für die Abmessungen der Zylinderglocke die folgenden Werte einhält, wobei der Kamindurchmesser d_k oder die Querschnittsfläche F_k des Kamins als Bezugsgröße dient:

Kaminhöhenverhältnis:	$h_k/d_k \approx 2$ bei scharfkantigem Kamineinlauf,
	h_k/d_k beliebig kleiner bei gut abgerundetem Einlauf,
Umlenkquerschnittsverhältnis:	$F_u/F_k \approx 1,5$: $h_u/d_k \approx 1,5/4 = 0,375$,
Ringraumquerschnittsverhältnis:	$F_r/F_k \approx 2,0$: $d_g/d_k \approx \sqrt{3} = 1,73$,
Austrittsquerschnittsverhältnis:	$F_a/F_k \approx 2,4$: $h_a/d_k \approx 0,6$.

Bei Flachglocken empfiehlt KUTZER folgende Verhältniswerte:

Kaminhöhenverhältnis:	$h_k/d_k \approx 1,0$ bis $1,2$,
Umlenkquerschnittsverhältnis:	$F_a/F_k \approx 1,2$ bis $1,5$.

17.23 Der Tunnelboden

Beim Tunnelboden dienen verhältnismäßig wenige langgestreckte, tunnelförmige Elemente zur Einführung des Gases bzw. Dampfes in die Flüssigkeit. Die gleiche Aufgabe wird beim Glockenboden von einer verhältnismäßig großen Zahl von Glocken erfüllt. Der Querschnitt durch einen Tunnel stimmt mit dem einer Zylinderglocke weitgehend überein. Der Rand der Tunnelkappe weist in den meisten Fällen Leitflügel auf, die in *Bild 17.2* angedeutet sind.

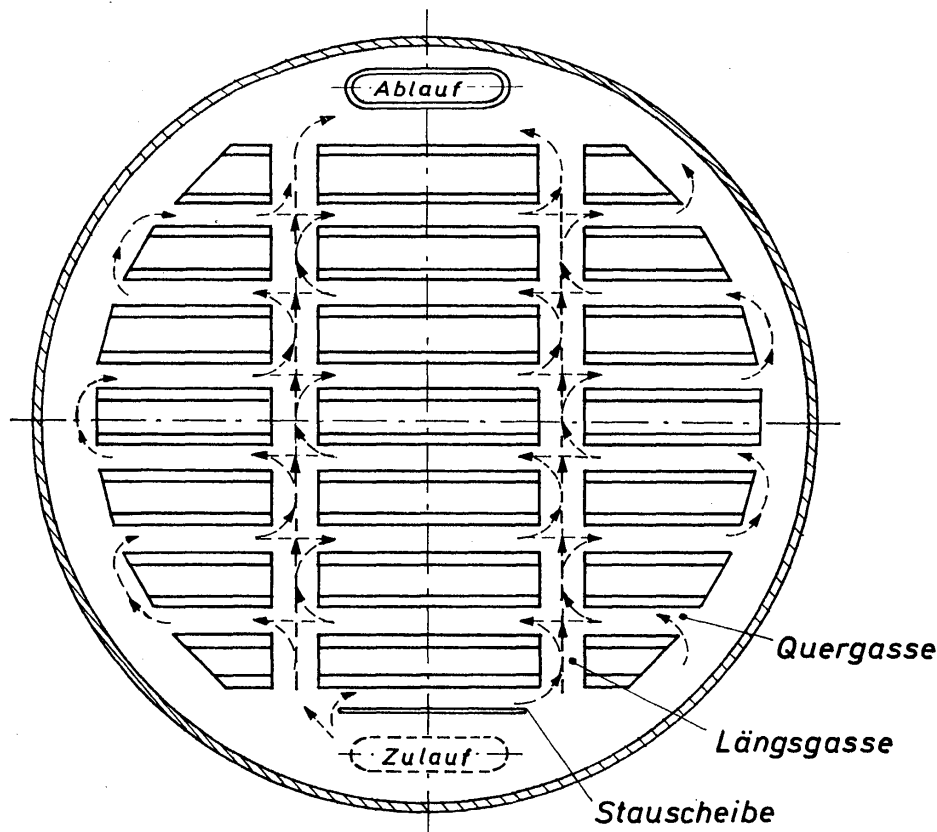


Bild 17.3. Anordnung der Tunnel auf einem Thormann-Boden

Bild 17.3 zeigt als Beispiel für einen Tunnelboden den nach seinem Erfinder benannten Thormann-Boden. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß sich die Tunnel quer zur Hauptströmungsrichtung der Flüssigkeit befinden. Angetrieben durch den Dampf, dessen Strömungsrichtung durch die in den Tunnelklappen befindlichen Leitflügeln bestimmt wird, bewegt sich die Flüssigkeit auf den von Pfeilen bezeichneten Wegen durch die Tunnelgassen über den Boden. In den Längsgassen findet, was durch die Pfeile ebenfalls angedeutet ist, eine Durchmischung zwischen den Flüssigkeitsströmen statt, die aus den Quergassen kommen. Der lange Flüssigkeitsweg und die wiederholte Durchmischung gewährleisten insbesondere für die Flüssigkeit einen wirkungsvollen Stoffaustausch.

Die Vorteile des beschriebenen Tunnelbodens sind: geringer Druckverlust, kleines Flüssigkeitsgefälle vom Zulauf zum Ablauf, hohe Trennwirkung, einfache Bauweise, geringes Gewicht, niedrige Herstellungskosten und gute Reinigungsmöglichkeit.

Weitere Beispiele für Tunnelböden sind der Paralleltunnelboden und der Ringtunnelboden. Beim Paralleltunnelboden sind die Tunnel parallel zur Strömungsrichtung der Flüssigkeit vom Zulauf zum Ablauf angeordnet. Auf dem Ringtunnelboden befinden sich mehrere Tunnelringe mit unterschiedlichem Durchmesser. Die Flüssigkeit bewegt sich dabei in radialer Richtung über den Boden.

17.24 Der Ventilboden

Die Einleitung des Gases bzw. Dampfes in die Flüssigkeit wird auf dem Ventilboden durch Elemente erleichtert, die man Ventile nennt. In *Bild 17.4* ist ein solches Element, welches beim «Glitsch-Ballast-Boden» verwendet wird, dargestellt. Dieses Element kann man als eine Weiterentwicklung der Flachglocke ansehen. Der Kamin ist fortgefallen, und die nahezu ebene Glockenkappe (Ventilkappe) ist so angeordnet, daß sie in vertikaler Richtung beweglich ist. Die maximale Hubhöhe der Ventilkappe wird durch drei Stege begrenzt, die gleichmäßig über den Umfang angeordnet sind. Die Austrittshöhe erreicht hierbei den maximalen Wert $h_a = h_{ao}$. Durch den Index *o* wird die obere Ventilstellung angedeutet. Bei stark gedrosseltem Dampfstrom sitzt die Ventilkappe auf der Bodenplatte. Drei über den Umfang gleichmäßig verteilte Nocken gewährleisten dann die Austrittshöhe $h_a = h_{au}$. Der Index *u* deutet die untere Ventilstellung an. Eine für die Funktion des Ventils sehr bedeutsame Größe ist die Masse m_g der Ventilkappe einschließlich Stege und Nocken.

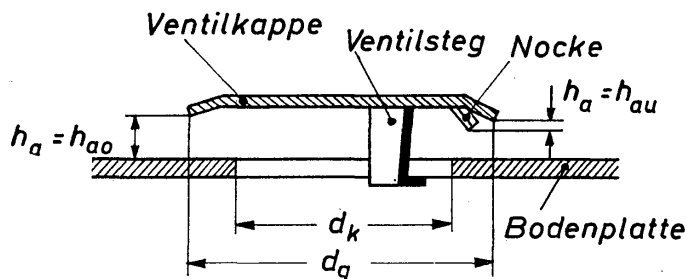


Bild 17.4
Ventil der «Glitsch-Ballast-Bodens»,
Typ V

Nach HOPPE und MITTELSTRASS [17.5] ergeben sich günstige Betriebsverhältnisse, wenn man bei der Auslegung der Ventile folgende Empfehlungen beachtet:

Durchmesserverhältnis	$d_g/d_k \approx 1,4$
bezogene maximale Öffnungshöhe	$h_{ao}/d_g \approx 1/6 \text{ bis } 1/7$
Öffnungsverhältnis	$h_{au}/h_{ao} \approx 1/4 \text{ bis } 1/5$

Masse m_g der Ventilkappe gemäß folgender Tabelle:

d_g [mm]	50	75	100
m_g [g]	35	80	140

Der Ventilboden verbindet viele der Vorteile des Siebbodens mit denen des Glockenbodens. Die wichtigste Eigenschaft des Ventilbodens besteht darin, daß sich der Dampf den erforderlichen Austrittsquerschnitt durch Anheben der Ventilkappe weitgehend selber einstellt. Im Vergleich zum Siebboden ist dadurch ein

wesentlich größerer Belastungsbereich gewährleistet. Die beim Siebboden bestehende Gefahr des Durchregnens ist beim Ventilboden weitgehend beseitigt. Die Umlenkung des Dampfes in die horizontale Richtung verhindert außerdem das Trockenblasen des Bodens und erhöht die Trennwirkung. Die Bodenöffnungen liegen beim Ventilboden in der gleichen Größenordnung wie beim Glockenboden. Die Verschmutzungsgefahr ist daher erheblich geringer als beim Siebboden. Schließlich sind der Druckverlust, das Gewicht und die Herstellungskosten wesentlich niedriger als beim Glockenboden. Erzielt werden alle diese Vorteile dadurch, daß man den Boden mit einem beweglichen Element ausstattete, welches in erhöhtem Maße der Abnutzung unterliegt. Darüber hinaus führt die Ventilkappe in bestimmten Belastungsbereichen Schwingungen aus, die die Dampfströmung stören können.

Neben dem in *Bild 17.4* dargestellten Ventil sind noch zahlreiche andere Bauformen entwickelt worden. KUTZER [17.3] hat sie eingehend beschrieben.

17.3 Siebböden

17.31 Beschreibung und allgemeine Hinweise

Eine einfache Form des Siebbodens soll an Hand von *Bild 17.5* beschrieben werden. Der Siebboden hat den Durchmesser d_s und die Querschnittsfläche F_s . Die Strömungsrichtung der Flüssigkeit ist durch Pfeile angedeutet. Die gesamte Querschnittsfläche des Bodens besteht aus einem gelochten Anteil F_L und zwei nicht gelochten Anteilen $2F_{\ddot{u}}$ und F_a . Der Anteil $2F_{\ddot{u}}$ erfaßt die Querschnittsflächen der Überlaufbecher und der Anteil F_a eine Randfläche, die die gelochte Fläche insbesondere aus Festigkeitsgründen umschließt. Der Anteil F_a ist stets sehr klein im Vergleich zu F_L , so daß er für überschlägige Rechnungen vernachlässigt werden darf.

Die Unterteilung des Siebbodens in die gelochte und die nicht gelochte Fläche erfolgt durch Festlegung der Wehrlänge l_w . Im allgemeinen ist $l_w = 0,6$ bis $0,8 d_s$. Einen mittleren Wert mit $l_w \approx 0,7 d_s$ erhält man, wenn l_w die Länge einer Seite des den Kreis einbeschriebenen Quadrates ist. Für diesen Fall gilt $l_w/d_s = \sqrt{1/2}$. Ferner ist dann das Flächenverhältnis

$$\frac{F_L + F_a}{F_s} = 0,82.$$

Das heißt also, daß für den Kontakt der beiden Phasen 82% der Querschnittsfläche der Säule zur Verfügung stehen. Für andere als die hier angenommenen Bedingungen läßt sich das Flächenverhältnis aus Diagrammen entnehmen, die von mehreren Autoren angefertigt wurden [17.6 und 17.7].

Die Löcher des Siebbodens werden üblicherweise in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet. Der Lochdurchmesser wird mit d_L und die Lochteilung mit t bezeichnet. Um ein örtliches Flächenverhältnis φ , gebildet aus der Lochquerschnittsfläche und dem einem Loch zugeordneten Anteil an der Boden-

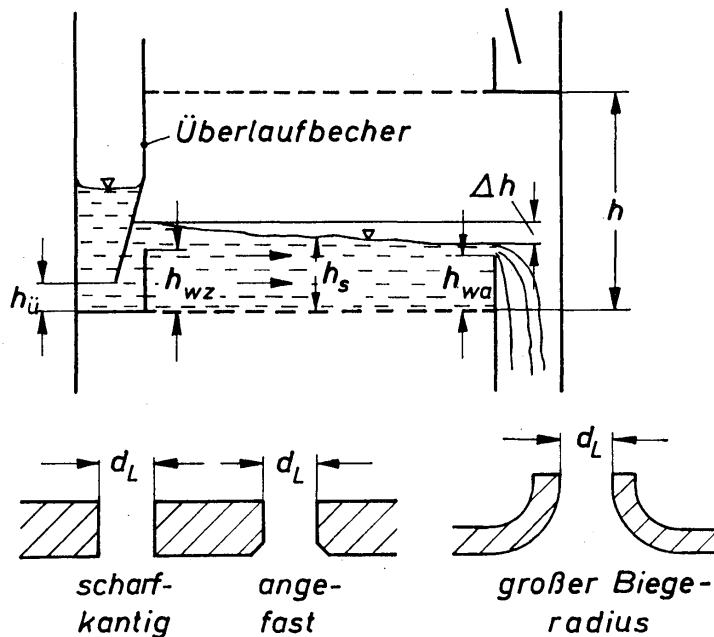
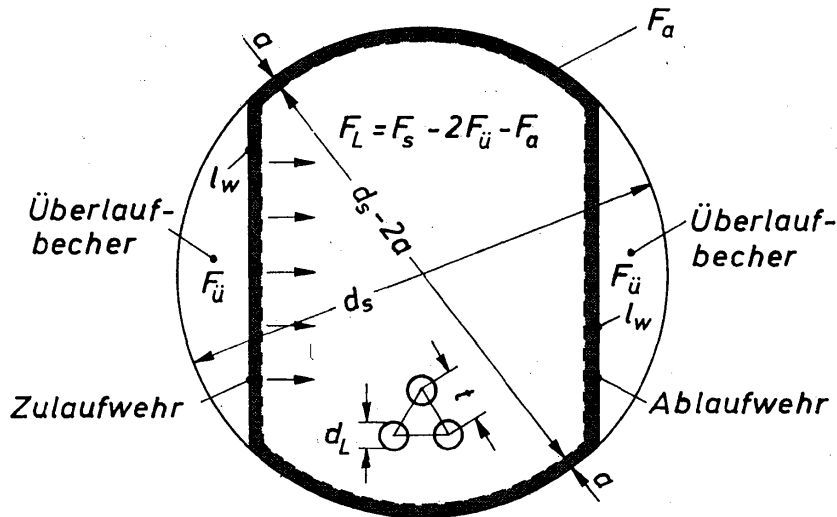


Bild 17.5. Bezeichnungen für einen Siebboden

fläche, berechnen zu können, bezieht man die Fläche eines Loches auf die Fläche von zwei Dreiecken:

$$\varphi = \frac{0,907}{(t/d_L)^2} \quad (17.1)$$

Dieses örtliche Flächenverhältnis gilt nur innerhalb der gelochten Fläche F_L . Für das Teilungsverhältnis t/d_L liegen die üblichen Werte zwischen 2 bis 5, so daß sich für φ Werte zwischen 0,227 und 0,0362 ergeben. Die häufigsten Werte für φ liegen zwischen 0,03 und 0,12. Für den Lochdurchmesser d_L liegen übliche Werte zwischen 0,5 und 15 mm. Bei Durchmessern zwischen 1,5 bis 8 mm wurde noch kein Einfluß auf den Stoffaustausch zwischen den beiden Phasen beobachtet. Im allgemeinen ist der Lochdurchmesser gleich oder größer als die Bodendicke s . Die Löcher werden in den meisten Fällen gebohrt, gestanzt oder auch gedrückt. Bohren und Stanzen sollten in jedem Falle in der Richtung der Strömung erfolgen, damit die unvermeidbaren Grate, so sie nicht entfernt werden, keinen unnötigen Druckverlust hervorrufen können. Man sollte nach Möglichkeit jedoch für eine Entgratung sorgen, da der Grat auch die Schmutzablagerung erleichtert.

Bezüglich des Druckverlustes und auch des Rückfließens der Flüssigkeit ergibt sich bei gedrückten Löchern mit Biegeradius das günstigste Verhalten (*Bild 17.5*). Zur Erzielung einer möglichst gleichmäßigen Flüssigkeitsströmung über den Boden werden Wehrbleche vorgesehen. Dabei ist die Höhe h_{wz} des Zulaufwehrs etwas größer als die Höhe h_{wa} des Ablaufwehrs. Durch die Wehrhöhen wird die Höhe h_s , der auf dem Boden befindlichen Gas/Flüssigkeits-Schicht weitgehend bestimmt. Sie ist für den Stoff- und Wärmeaustausch von maßgebender Bedeutung.

Die Wehrhöhen liegen bei Vakuumbetrieb in der Größenordnung von 6 bis 13 mm und bei Normaldruckbetrieb in der Größenordnung von 20 bis 70 mm. Die Strömung der Flüssigkeit über den Boden ist mit einem «hydraulischen Gradienten» Δh verbunden, der um so größer ist, je größer der Säulendurchmesser ist. Größere hydraulische Gradienten können die Bildung und Bewegung der Gasblasen merklich beeinflussen, so daß sich der Austausch zwischen Gas und Flüssigkeit über den Boden verändert. Gleichmäßige Austauschbedingungen lassen sich also nur bei verschwindend kleinen hydraulischen Gradienten erreichen.

Die Höhe h_s , der auf dem Boden befindlichen Gas/Flüssigkeits-Schicht – weiterhin Sprudelschicht genannt – hängt insbesondere von der Höhe h_{wa} des Ablaufwehrs und den sonstigen Betriebsbedingungen ab. Das in der Sprudelschicht befindliche Flüssigkeitsvolumen läßt sich durch die hypothetische Schichtdicke h_f ausdrücken, die den hydrostatischen Druck der auf dem Boden befindlichen Flüssigkeit bestimmt. Die Flüssigkeitshöhe h_f ändert sich insbesondere mit der Gasbelastung. Das Höhenverhältnis h_s/h_f ist ein Maß für den Gasgehalt der Sprudelschicht.

Die in der Nähe des Zulaufwehrs durch die Sprudelschicht aufsteigenden Gas- oder Dampfblasen können entgegen der Flüssigkeitsströmung in den Überlaufbecher gelangen, so daß ein Teilstrom des Gases oder Dampfes den nächst höheren Boden anströmt und somit nicht am Austauschprozeß teilnimmt. Dieser Nebenstrom läßt sich durch geschickte Anordnung und Gestaltung von Zulaufwehr und Überlaufbecher zumindest sehr klein halten. Der Abstand h_u der Unterkante des Überlaufbeckers vom Boden muß dabei, wie in *Bild 17.5* angedeutet, kleiner sein als die Höhe des Zulaufwehrs. Die in der Nähe des Ablaufwehrs aufsteigenden Blasen, insbesondere die mit sehr kleinem Durchmesser, können von der Flüssigkeit mit in den Überlaufbecher gerissen werden. Ein teilweises Ausscheiden der Blasen kann im Überlaufbecher erfolgen, wenn die Flüssigkeitgeschwindigkeit dort genügend klein ist. In jedem Falle ist aber durch die Gefahr des Mitreißen der Blasen deren Durchmesser und somit auch der Lochdurchmesser des Siebbodens nach unten begrenzt.

Der in *Bild 17.5* angegebene Aufbau eines Siebbodens kann nur als Beispiel dienen. Andere Möglichkeiten der Gestaltung und Anordnung der gelochten Fläche sowie der Zu- und Ablaufwehre sind in zahlreichen Arbeiten untersucht und beschrieben worden [17.1, 17.3, 17.4, 17.6 und 17.8]. In diesen Arbeiten werden auch empirische Gleichungen zur Festlegung einiger wichtiger geometrischer Abmessungen mitgeteilt, insbesondere für die in *Bild 17.5* angegebenen Größen. Hingewiesen sei in diesem Zusammenhang besonders auf die verschie-

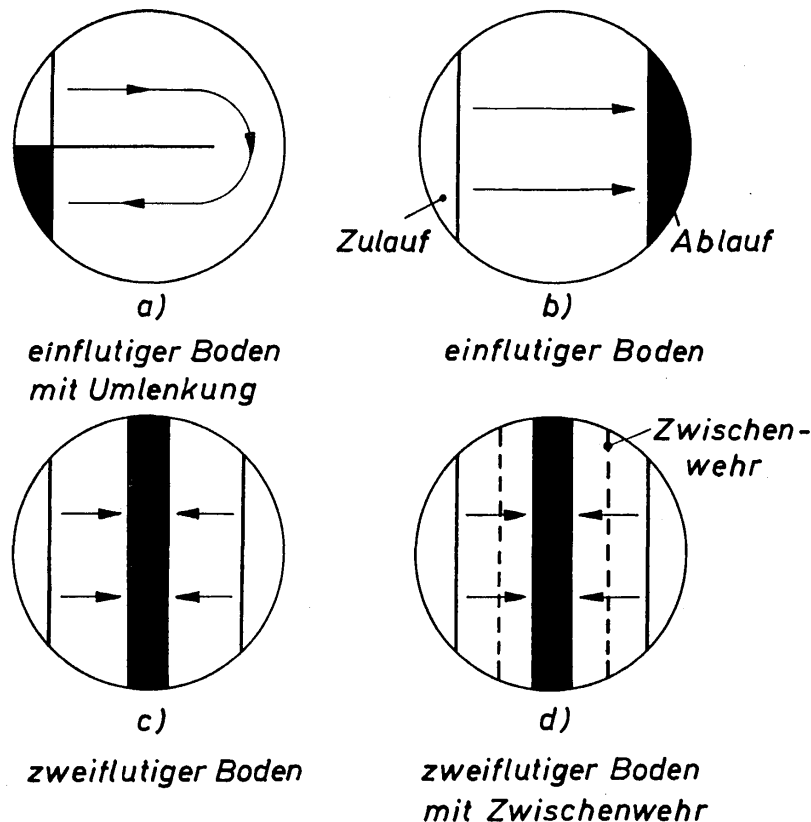


Bild 17.6. Verschiedene Möglichkeiten der Flüssigkeitsführung auf Kolonnenböden; von a bis d zunehmende Flüssigkeitsbelastung

denen Möglichkeiten der Flüssigkeitsführung auf dem Boden, die in *Bild 17.6* dargestellt sind [17.4]. Bei sehr geringen Flüssigkeitsbelastungen von etwa 0,001 bis 0,002 m³/min verwendet man den einflutigen Boden mit Flüssigkeitsumlenkung. Bei Belastungen von etwa 0,1 bis 2 m³/min bevorzugt man den einfachen einflutigen Boden, der am häufigsten angewendet wird. Treten Flüssigkeitsbelastungen über 1,5 m³/min auf, so zieht man bereits eine zweiflutige Gestaltung des Bodens in Betracht. Die einfache Ausführung, *Bild 17.6c*, kommt für Belastungen von 1,5 bis 4 m³/min in Frage. Bei noch höheren Belastungen, bis etwa 7 m³/min, sieht man Zwischenwehre vor, damit eine möglichst gleichmäßige Flüssigkeitsverteilung gewahrt bleibt.

In den folgenden Abschnitten werden einige für den Betrieb von einflutigen Siebböden wichtige Vorgänge näher betrachtet. Von besonders großer Bedeutung ist der Druckverlust, den das Gas bei der Strömung durch den Boden und durch die darauf befindliche Blasenschicht erleidet.

17.32 Druckverlust

Der Druckverlust, der bei der Strömung des Gases oder Dampfes durch eine Siebbodenkolonne auftritt, ist häufig untersucht worden. Erwähnt seien insbesondere die Arbeiten von RYLEK und STANDART [17.1], PAVLOV [17.9], HOBLER, KRUPICZKA und CZAJKA [17.10], MERSMANN [17.11] und ZELFEL [17.12]. Die von ZELFEL durchgeführte Untersuchung dürfte die zur Zeit umfassendste sein.

17.321 Der Gesamtdruckverlust und seine Anteile

Durchströmt ein Gas den Siebboden und die darüber befindliche Flüssigkeitsschicht, dann tritt insgesamt der mit Δp bezeichnete Druckverlust auf. Er wird durch eine Reihe verlustbehafteter Vorgänge hervorgerufen, die auf dem vom Gas zurückgelegten Weg ablaufen. Um eine einfache Berechnungsgleichung für Δp aufstellen zu können, bemüht man sich um eine möglichst weitgehende Aufteilung des Gesamtverlustes in Teilverluste, für die sich dann getrennte Gleichungen angeben lassen. Als sinnvoller Ansatz hat sich der folgende gut bewährt:

$$\Delta p = \Delta p_{fh} + \Delta p_i + \Delta p_\sigma. \quad (17.2)$$

Hierin bedeutet Δp_{fh} den Druckverlust des Gases zur Überwindung des hydrostatischen Druckes der auf dem Boden befindlichen Sprudelschicht. Ist die Dichte des Gases sehr klein im Vergleich zur Dichte der Flüssigkeit, dann ist

$$\Delta p_{fh} = g \varrho_f h_f. \quad (17.3)$$

Mit g wird die Erdbeschleunigung, mit ϱ_f die Flüssigkeitsdichte und mit h_f die Schichtdicke der reinen Flüssigkeit bezeichnet. Diese Schichtdicke ist, wie man auch aus *Bild 17.7* erkennt, niedriger als die sich bei Gasdurchfluß einstellende Höhe h_s der Sprudelschicht. Die Höhe h_f ändert sich mit der Höhe des Ablaufwehres, dem Volumstrom der über den Boden geleiteten Flüssigkeit und sonstigen Betriebsbedingungen. Für h_f bzw. für Δp_f muß also eine alle maßgebenden Einflußgrößen berücksichtigende Gleichung aufgestellt werden.

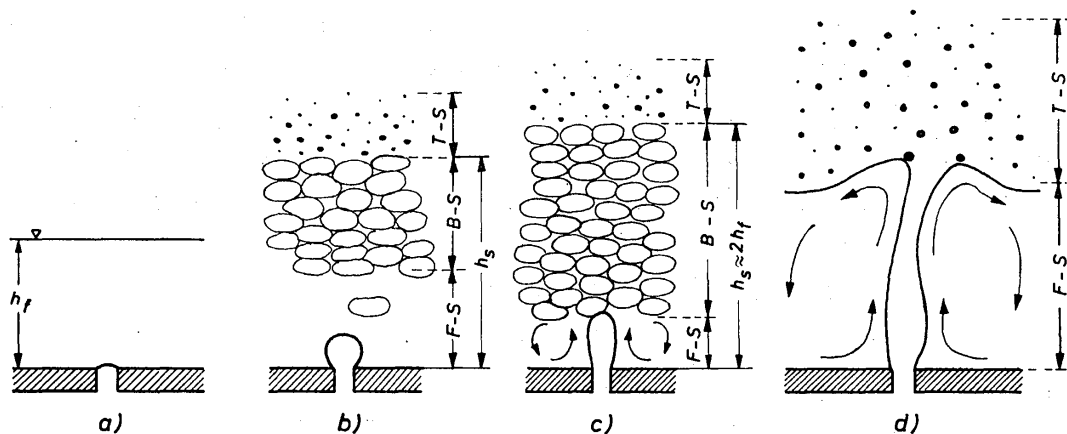


Bild 17.7. Zur Erläuterung des Druckverlustes Δp_σ bei der Gasströmung durch eine Sprudelschicht, die sich über einem Siebboden befindet; die Bilder *a* bis *d* gelten für steigende Gasbelastung

Die beiden Anteile Δp_i und Δp_σ berücksichtigen alle diejenigen Druckverluste, die während der Strömung des Gases durch den Boden und durch die Sprudelschicht auftreten. Dabei nimmt man an, daß der Druckverlust während der Strömung durch den Boden ohne darüber befindlicher Sprudelschicht gleich demjenigen ist, der während der Strömung durch den Boden mit darüber befindlicher Sprudelschicht ist. Es ist das der Druckverlust des sogenannten «trockenen Bodens» Δp_i . Man ist sich dabei im klaren, daß der bei Vorhandensein der Sprudel-

schicht auftretende Druckverlust nicht genau mit Δp_i übereinstimmen kann. Die Abweichungen von Δp_i werden nicht vernachlässigt, sondern von dem Anteil Δp_σ mit erfaßt. Durch diese Aufteilung hat man zumindest den Vorteil, daß man Δp_i für sich durch getrennte Versuche sauber erfassen kann. In dem Anteil Δp_σ sind darüber hinaus aber alle diejenigen Verluste zusammengefaßt, die im Verlauf der Strömung des Gases durch die Sprudelschicht auftreten. Diese hängen zumindest teilweise von der Oberflächenspannung σ ab (daher der Index σ).

An Hand von *Bild 17.7* sollen insbesondere die für Δp_σ maßgebenden Vorgänge näher beschrieben werden. Ausgegangen wird von *Bild 17.7a*, in dem das Gas noch nicht durch die Flüssigkeit hindurchtritt. Der Überdruck im Gas unterhalb des Bodens ist allein durch den hydrostatischen Druck der Flüssigkeitsschicht h_f bedingt, so daß $\Delta p = g \rho_f h_f$ ist. Setzt der Durchfluß des Gases durch den Boden und die Flüssigkeitsschicht ein, dann bilden sich gemäß *Bild 17.7b* bei niedriger Gasbelastung die Blasen unmittelbar am Rand des Loches. Bei nicht zu kleinen Blasen haben diese die Form von Ellipsoiden, die auf schraubenförmigem Wege aufsteigen. Nach einer gewissen Weglänge sammeln sich die Blasen in einer Blasen-schicht. Im Verlauf des Aufstieges nimmt der äußere Druck stetig ab, so daß der in der Blase herrschende Innendruck diese schließlich zerplatzen läßt. Die von der Blase mitgerissene Flüssigkeit wird dabei teilweise in Tropfen aufgelöst. Erhöht man die Gasbelastung, dann tritt das Gas gemäß *Bild 17.7c* als Strahl in die Flüssigkeitsschicht ein. Die Blasen bilden sich an der Strahlkappe. Solange sich das Gas innerhalb der Flüssigkeit in Blasen auflöst, bilden sich drei deutlich getrennte Schichten. Diese sind die Flüssigkeitsschicht $F-S$, die Blasen-schicht $B-S$ und die Tropfenschicht $T-S$. Innerhalb der Flüssigkeitsschicht $F-S$ ist der Gasgehalt verhältnismäßig gering, während innerhalb der Blasen-schicht $B-S$ und der Tropfenschicht $T-S$ der Flüssigkeitsgehalt gering ist. Innerhalb der Blasen-schicht ist die Gasphase und innerhalb der Tropfenschicht die Flüssigkeitsphase die diskontinuierliche. Die Höhe h_s der Sprudelschicht umfaßt im allgemeinen nur die Flüssigkeits- und die Blasen-schicht. Die genaue Messung von h_s ist kaum möglich. Im allgemeinen rechnet man mit $h_s \approx 2 h_f$. Hierbei nehmen die Blasen etwa die dichteste Packung innerhalb der Sprudelschicht ein, was für *Bild 17.7c* angenähert zutrifft. Da h_f leichter meßbar ist, hat man somit zumindest eine Vorstellung von der Größenordnung von h_s .

Innerhalb der drei Schichten treten mehrere verlustbehaftete Vorgänge auf. In der Flüssigkeitsschicht wird die Flüssigkeit insbesondere bei Vorhandensein eines Gasstrahles in eine wirbelnde Bewegung versetzt. Die in der Blasen-schicht aufsteigenden Blasen reißen Flüssigkeit mit, die aus Kontinuitätsgründen auch wieder zurückfließen muß. Somit kommt es auch innerhalb der Blasen-schicht zu sehr verwickelten und verlustreichen Strömungsvorgängen. Als weitere verlustbehaftete Vorgänge sind schließlich noch der Wechsel in der Diskontinuität der Phasen beim Übergang von der Blasen- zur Tropfenschicht und die Tropfenbewegung selbst zu nennen.

Als letztes Beispiel für die Bewegung des Gases durch die Flüssigkeit ist auf den in *Bild 17.7d* dargestellten Vorgang hinzuweisen. Der Gasstrahl schießt bei sehr

hoher Gasbelastung durch die Flüssigkeit hindurch, wobei es zur Bildung zahlreicher Flüssigkeitstropfen kommt. Eine ausgeprägte Blasenschicht wird hierbei nicht beobachtet. Durch Reibung an der Phasengrenze zwischen Gasstrahl und Flüssigkeit wird eine sehr lebhafte Flüssigkeitsverwirbelung hervorgerufen. Bei extrem hohen Gasgeschwindigkeiten ist es möglich, daß die gesamte auf dem Boden befindliche Flüssigkeit zerstäubt, der Boden also trocken geblasen wird. Die Tropfen werden vom Gas mitgerissen und gelangen auf den nächst höher gelegenen Boden.

Diese Ausführungen haben also erkennen lassen, daß Δp_σ alle Verluste erfaßt, die mit der Bildung, der Bewegung und dem Zerfall der Blasen bzw. mit der Bewegung der Gasstrahlen verbunden sind. Darin sind gleichzeitig natürlich auch alle diejenigen Verluste eingeschlossen, die durch die vom Gas erzwungenen Flüssigkeitsbewegungen hervorgerufen werden. Somit muß also Δp_σ im Bereich größerer Gasbelastung in jedem Falle eine starke Abhängigkeit von dieser aufweisen.

Eine direkte Messung des Druckverlustes Δp_σ ist nicht möglich. Man ermittelt daher Δp_σ stets aus der Beziehung

$$\Delta p_\sigma = \Delta p - (\Delta p_{fh} + \Delta p_t). \quad (17.4)$$

Die auf der rechten Seite stehenden Druckverluste Δp , Δp_{fh} und Δp_t werden gemessen. Trägt man die Druckverluste Δp und Δp_t in einem logarithmisch geteilten Koordinatennetz über der Gasgeschwindigkeit auf, so erhält man die in *Bild 17.8* dargestellten Kurvenzüge. Mit abnehmender Gasgeschwindigkeit nähert sich der Gesamtdruckverlust Δp dem Wert des Druckverlustanteils Δp_{fh} . Aus der Differenz $\Delta p - \Delta p_t = \Delta p_\sigma + \Delta p_{fh}$ läßt sich, da Δp_{fh} gemessen werden kann, der Anteil Δp_σ leicht ermitteln. Die weiteren Abhandlungen über den Druckverlust betreffen die Aufstellung von Berechnungsgleichungen für den Druckverlust Δp_t des trockenen Bodens, für Δp_{fh} und für Δp_σ .

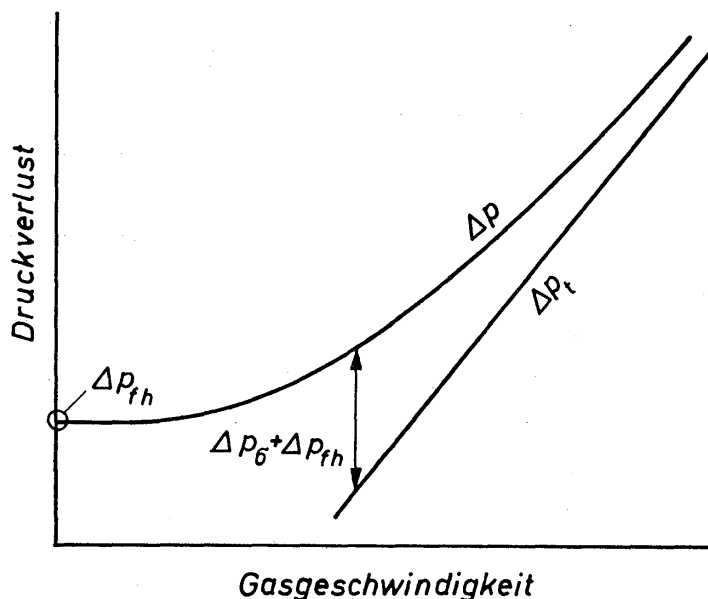


Bild 17.8. Zur Erläuterung des gesamten Druckverlustes Δp und seiner Anteile bei der Gasströmung durch einen Siebboden mit darauf befindlicher Sprudelschicht

17.322 Druckverlust beim Durchströmen des trockenen Siebbodens

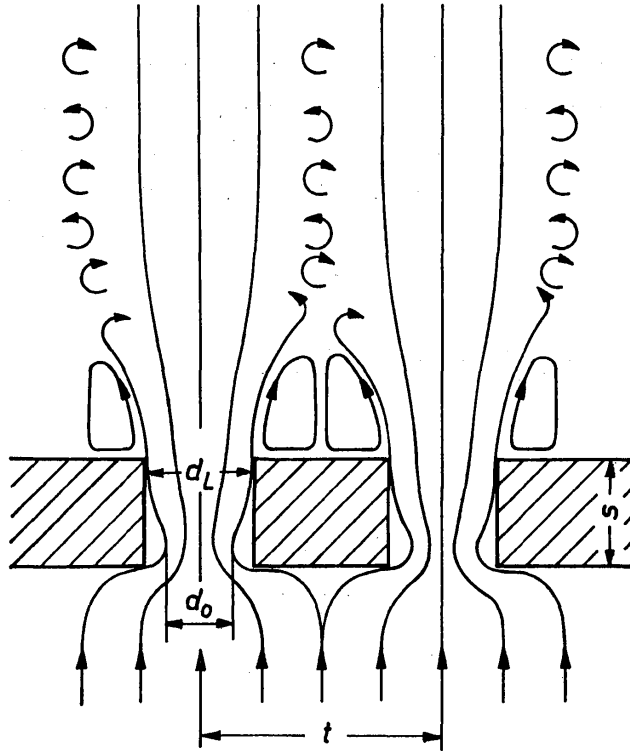


Bild 17.9. Zur Erläuterung des trockenen Druckverlustes Δp_t und seiner Anteile bei der Gasströmung durch einen trockenen Siebboden

Der Druckverlust Δp_t , der bei der Strömung durch einen trockenen Siebboden auftritt, setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen, die an Hand des in *Bild 17.9* dargestellten Verlaufs der Stromfäden erläutert werden sollen. An der scharfen Eintrittskante des Loches lösen sich die Stromfäden von der Wand ab, so daß der wirksame Strömungsquerschnitt wesentlich verkleinert wird. An der engsten Stelle ist der Durchmesser d_0 , der über $d_0^2 = \alpha d_L^2$ mit dem Lochdurchmesser verbunden ist. Die Proportionalitätskonstante α wird Kontraktionszahl genannt. Der mit der Einschnürung verbundene Druckverlust ist daher der Kontraktionsverlust, er wird mit Δp_{tk} bezeichnet. Nach der Einschnürung legt sich die Strömung, so die Bodendicke s groß genug ist, an die Bohrungswand an, wodurch ein Reibungsverlust Δp_{tr} hervorgerufen wird. Nach Verlassen der Bohrung weitet sich das Stromfadenfeld wieder aus, womit ein Erweiterungsverlust Δp_{te} verbunden ist. Ansätze für die Berechnung des Erweiterungsverlustes werden üblicherweise aus Versuchen an Einzelbohrungen übernommen. Hierbei tritt im allgemeinen nur ein sehr geringer Verlust durch Strahlvermischung auf. Bei Siebböden mit sehr kleinem Lochabstand kann dieser zusätzliche Verlust indes sehr bedeutsam sein; man berücksichtigt ihn jedoch nicht gesondert, sondern schließt ihn in den Reibungsdruckverlust Δp_{tr} mit ein. Für den gesamten Druckverlust ergibt sich dann folgender Ansatz:

$$\Delta p_t = \Delta p_{tk} + \Delta p_{te} + \Delta p_{tr}. \quad (17.5)$$

Zur dimensionslosen Darstellung bezieht man den Druckverlust auf den mit der mittleren Geschwindigkeit w_L im Loch gebildeten Staudruck und erhält den Widerstandsbeiwert:

$$\zeta_{ii} \equiv \frac{\Delta p_{ii}}{\rho_G w_L^2/2}. \quad (17.6)$$

Mit ρ_G und w_L werden die Dichte und die Geschwindigkeit des Gases im Loch bezeichnet. Für Δp_{ii} sind die in Gl.(17.5) auftretenden Druckverlustanteile einzuführen, so daß sich für jeden Druckverlustanteil der zugehörige Widerstandsbeiwert ergibt. Damit läßt sich Gl.(17.5) in der folgenden dimensionslosen Form schreiben:

$$\zeta_t = \zeta_{tk} + \zeta_{te} + \zeta_{tr}. \quad (17.7)$$

Die im Loch auftretende Geschwindigkeit w_L errechnet sich aus dem Volumstrom \dot{V}_G des Gases zu

$$w_L = \frac{\dot{V}_G}{z_L d_L^2 \pi/4}. \quad (17.8)$$

Mit d_L wird der Lochdurchmesser und mit z_L die Zahl der Löcher in der Siebplatte bezeichnet. Die Zahl der Löcher ergibt sich für praktische Fälle mit genügender Genauigkeit aus der geometrischen Beziehung zu

$$z_L = \frac{F_L}{0,866 t^2}, \quad (17.9)$$

wobei F_L die mit Löchern versehene Bodenfläche gemäß *Bild 17.5* und t die Lochteilung bedeuten. Häufig wird w_L mit der Geschwindigkeit

$$w_s = \frac{\dot{V}_G}{d_s^2 \pi/4} \quad (17.10)$$

verglichen. w_s bedeutet eine hypothetische Anströmgeschwindigkeit für den Boden, die man erhält, wenn \dot{V}_G durch die gesamte Querschnittsfläche F_s der Säule dividiert wird. Die wahre Anströmgeschwindigkeit ist natürlich gemäß *Bild 17.5* durch $\dot{V}_G/(F_s - 2F_{ii})$ gegeben; sie ist etwas größer als w_s . Für das Geschwindigkeitsverhältnis erhält man mit den Gleichungen (17.8) bis (17.10) die Beziehung

$$\frac{w_s}{w_L} = \varphi F_L/F_s, \quad (17.11)$$

in der φ das örtliche Lochflächenverhältnis gemäß Gl.(17.1) ist.

Für die in Gl.(17.7) auftretenden Beiwerte für den Kontraktions- und den Erweiterungsverlust gelten nach ECK [17.13] die aus einer Betrachtung der Impulsverluste folgenden Beziehungen:

$$\zeta_{tk} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2, \quad (17.12)$$

$$\zeta_{te} = (1 - \varphi)^2. \quad (17.13)$$

Für das Flächenverhältnis φ gilt die bereits genannte Gl.(17.1). Über die Größe der Kontraktionszahl α liegen im Schrifttum sehr unterschiedliche Angaben vor.

Die Potentialtheorie liefert für α bei Annahme einer Einlochplatte und unbegrenzter Ausdehnung des Strömungsfeldes vor und hinter der Platte den konstanten Zahlenwert 0,611. Mittels einer verfeinerten Berechnungsmethode kamen HUGHMARK und O'CONNEL [17.14] zu dem Ergebnis, daß α eine Funktion des Verhältniswertes d_L/s ist. So ist z. B. $\alpha = 0,815$ für $d_L/s = 1$ und 0,605 für $d_L/s = 1/10$. Die Anwendung dieser Ergebnisse auf Mehrlochplatten, d. h. Siebböden, ist noch nicht gesichert. Experimentell ermittelte Werte von ZELFEL [17.12] ließen erkennen, daß α für $d_L/s > 1$ eine Funktion des Teilungsverhältnisses t/d_L ist. Nach erneuten experimentellen Untersuchungen von MOSER [17.15] läßt sich die Kontraktionszahl α bei Siebplatten mit guter Genauigkeit mittels folgender Beziehung berechnen:

$$\alpha = 0,55 + 0,45 \varphi^6. \quad (17.14)$$

Die umfangreichsten Untersuchungen zur Bestimmung des Reibungsbeiwertes ζ_{tr} hat ZELFEL [17.12] durchgeführt. Er stellte fest, daß der Reibungsbeiwert eine Funktion der Siebbodenkennzahl

$$K_s \equiv Re_L \left(\frac{d_L}{s} \right) \left(\frac{s}{t} \right)^{0,7} z_L^{0,25} \quad (17.15)$$

ist. Neben den bereits bekannten Größen ist Re_L die für die Strömung durch die Löcher maßgebende Reynoldszahl:

$$Re_L \equiv \frac{w_L d_L}{\nu_G}. \quad (17.16)$$

Mit ν_G wird die kinematische Viskosität des Gases bezeichnet. Die Versuche von ZELFEL wurden mit Luft durchgeführt. Der Durchmesser der Säule betrug 180 mm. Verändert wurden bei den Versuchen der Lochdurchmesser d_L zwischen 2,02 und 6,06 mm, die Lochteilung t zwischen 8 und 20 mm, die Lochzahl zwischen 37 und 433, die Dicke der Lochplatte zwischen 2,03 und 12,03 mm und das örtliche Flächenverhältnis φ zwischen 0,0135 und 0,1254. Bei später durchgeführten Versuchen von MOSER wurde für das Flächenverhältnis ein Wert von 0,696 erreicht, der unter praktischen Bedingungen wahrscheinlich der größtmögliche ist. MOSER führte seine Versuche ebenfalls mit Luft durch. In einem Rohr von 1674 mm Länge und 62 mm lichter Weite befanden sich die auswechselbar angeordneten Siebplatten. Alle verwendeten Platten hatten eine Dicke von $s = 1$ mm. Der Lochdurchmesser d_L wurde zwischen 2,49 mm und 7,88 mm, die Teilung t zwischen 7,9 mm und 9,0 mm und die Lochzahl z_L zwischen 43 und 56 verändert. Die Gasgeschwindigkeit w_L änderte sich zwischen 0,2 m/s und 90 m/s.

Einige von MOSER erzielten Meßergebnisse sind in *Bild 17.10* dargestellt. Der Widerstandsbeiwert ζ_t ist über der Siebbodenkennzahl K_s aufgetragen. Mit zunehmenden Werten von K_s sinkt der Widerstandsbeiwert zunächst ab und nähert sich dann einem konstanten Wert. Die Meßwerte lassen erkennen, daß der Widerstandsbeiwert ab einem bestimmten Wert der Kennzahl K_s , der vom Flächen-

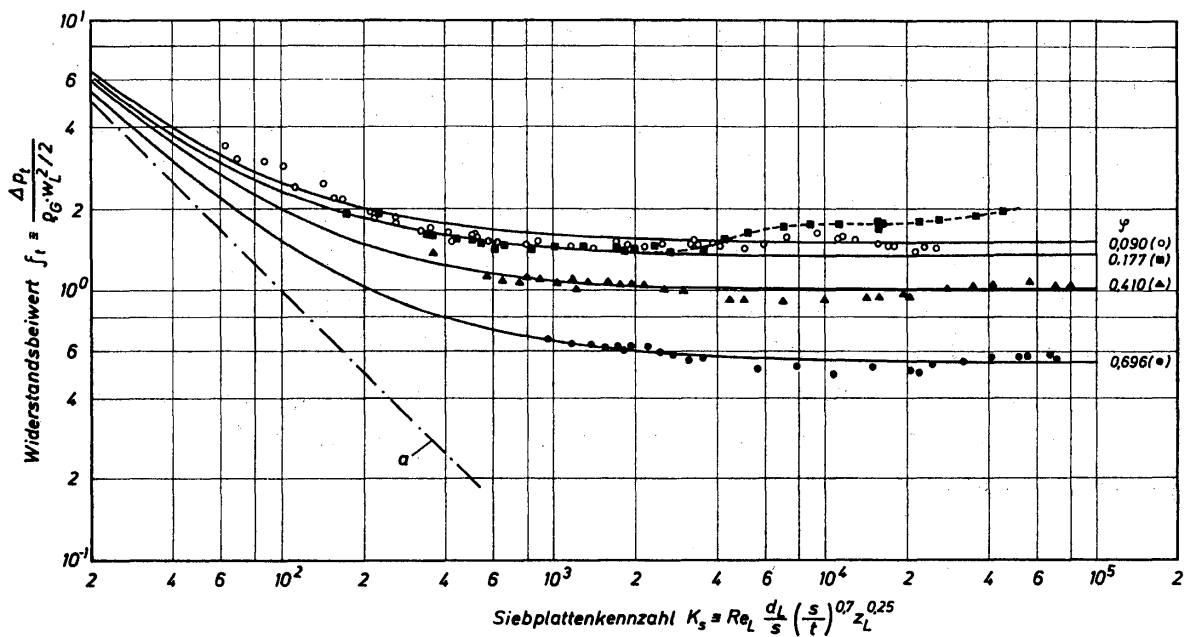


Bild 17.10. Widerstandsbeiwert von Siebböden. Die eingetragenen Symbole kennzeichnen Meßwerte. Die durchgezogenen Kurven wurden nach Gl. (17.18) berechnet

verhältnis φ abhängt, wieder leicht ansteigt. Nach Durchlaufen eines Maximums scheinen sich die Meßwerte jedoch wieder einem von K_s unabhängigen Endwert zu nähern. Dieser Verlauf der Meßwerte erinnert an den für den Widerstand von Kugeln unterhalb der kritischen Reynoldszahl (siehe *Bild 5.2*). Die örtlichen Minima und Maxima sind für größere Werte von φ nur sehr schwach, für kleinere Werte von φ aber offensichtlich etwas stärker ausgeprägt. Der durch die Meßwerte belegte Kurvenverlauf läßt sich in etwas vereinfachter Form wie folgt erklären: Im Bereich kleiner Werte von K_s wird der Widerstand von Siebplatten vornehmlich durch Reibung verursacht. Mit steigenden Werten von K_s sinkt der Reibungsanteil am Gesamtwiderstand und der durch Strahlvermischung bedingte Verlustanteil steigt. Im Bereich des konstanten Widerstandsbeiwertes gleichen sich der sinkende Reibungsanteil und der steigende Verlustanteil durch Strahlvermischung gerade aus. Im Bereich sehr hoher Werte von K_s steigt sodann der Verlustanteil durch Strahlvermischung stärker an, als der Reibungsanteil absinkt. (Die Verlustanteile durch Kontraktion und Querschnittserweiterung sind dabei als unverändert angesehen worden.) Diese Erklärung wurde durch Beobachtung der Strömung hinter Lochplatten, die in einem offenen Strömungskanal angeordnet waren, bestätigt gefunden. Dabei wurde ferner festgestellt, daß der Anstieg des Widerstandsbeiwertes dann zu erwarten ist, wenn das Verhältnis $s/d_L < 1$ ist. Für $s/d_L < 1$ tritt der Anstieg offenbar erst bei wesentlich höheren Werten von K_s oder gar nicht auf. Hierauf weisen auch Versuchsergebnisse von ZELFEL [17.12] und IDELJCIK [17.16] hin. In gesonderten Versuchen hat MOSER ferner nachgewiesen, daß der Anstieg keinesfalls auf Plattenschwingungen zurückgeführt werden kann.

Für Werte von K_s , die unterhalb des Wiederanstieges des Widerstandsbeiwertes liegen, gilt nach MOSER für den Reibungswiderstand die Beziehung

$$\zeta_{tr} = \frac{100}{K_s}. \quad (17.17)$$

Damit ergibt sich dann das Widerstandsgesetz, welches gemäß Gl. (17.7) alle drei Verlustanteile enthält:

$$\zeta_t = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + (1 - \varphi)^2 + \frac{100}{K_s}. \quad (17.18)$$

Dieses empirische Gesetz gilt von $K_s = 0$ bis zu jenem Wert von K_s , ab dem der Widerstandsbeiwert wieder ansteigt. Zur Berechnung von φ , α und K_s sind die Gleichungen (17.1), (17.14) und (17.15) heranzuziehen. Die in *Bild 17.7* durch die Meßwerte gelegten ausgezogenen Kurven wurden nach Gl. (17.18) berechnet. Die strichpunktierte Kurve *a* gibt Gl. (17.17) wieder. Man darf erwarten, daß die in der technischen Praxis auftretenden üblichen Bedingungen durch Gl. (17.18) erfaßt werden. Der Bereich des erneuten Anstiegs des Widerstandsbeiwertes dürfte nur in Ausnahmefällen von Bedeutung sein.

Im Bereich des konstanten Widerstandsbeiwertes ergibt sich die einfache Berechnungsgleichung

$$\zeta_t = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + (1 - \varphi)^2. \quad (17.19)$$

Diese Gleichung dürfte insbesondere für Siebplatten mit $s/d_L > 1$ eine gewisse Bedeutung haben.

Mit Hilfe der Gleichungen (17.18) und (17.19) läßt sich der Druckverlust des trockenen Siebbodens für alle in der Praxis auftretenden Bedingungen berechnen. Die mitgeteilten Gleichungen stimmen innerhalb vergleichbarer Bereiche mit Angaben von RYLEK und STANDART [17.1], MERSMANN [17.11], ZELFEL [17.12], IDELJCIK [17.16] und BLECHSCHMIDT [17.17] recht gut überein. Die Gleichungen gelten für die Gasströmung durch Bohrungen mit scharfen Kanten. Werden die Kanten stark abgerundet, wie es in *Bild 17.5* in einem Beispiel angedeutet ist, dann sinkt der Druckverlust je nach Krümmungsradius um 10 bis 40%, wie TELLER, CHENG und DAVIES [17.18] nachwiesen. Die weiteren Versuche zeigten, daß die Neigung zum «Durchregnen» bei Böden mit abgerundetem Locheintritt wesentlich geringer ist als bei solchen mit scharfkantigem Eintritt. Bei der Weiterentwicklung von Siebböden wird man vornehmlich an eine strömungstechnisch günstigere Gestaltung denken müssen.

17.323 Druckverlust zur Überwindung des hydrostatischen Druckes

Der hydrostatische Druck $\Delta p_{fh} = g \rho_f h_f$, der von der Gasströmung überwunden werden muß, wird mittels des Widerstandsbeiwertes

$$\zeta_{fh} \equiv \frac{\Delta p_{fh}}{\rho_G w_L^2 / 2} = \frac{g \rho_f h_f}{\rho_G w_L^2 / 2} \quad (17.20)$$

in eine geeignete dimensionslose Form gebracht. Mit ρ_G und w_L werden wieder die Dichte und die Geschwindigkeit des Gases im Loch bezeichnet. Aus zahlreichen Versuchsergebnissen ermittelte ZELFEL [17.12] folgende empirische Gleichung für den Widerstandsbeiwert:

$$\zeta_{fh} = \frac{16 K_v^{1/3} (1 + 9 h_{wa}/l_w)}{(We z_L^{1/2})^{1,10}} \quad (17.21)$$

Es bedeuten h_{wa} und w_w die Höhe und die Länge des Ablaufwehrs sowie z_L die Zahl der Löcher im Siebboden gemäß Gl.(17.9). Ferner ist

$$K_v \equiv \frac{\dot{V}_f/F}{(g \nu_f)^{1/3}} \frac{\rho_f}{\rho_G} \quad (17.22)$$

eine Kennzahl, die als wichtigste Größe den Volumstrom \dot{V}_f der Flüssigkeit enthält, die quer über den Boden geleitet wird. Weiterhin bedeuten F_L die gelochte Bodenfläche gemäß *Bild 17.5*, ν_f und ρ_f kinematische Viskosität und Dichte der Flüssigkeit sowie ρ_G Dichte des Gases. Mit We wird in Gl.(17.21) eine Weberzahl mit folgender Definition bezeichnet:

$$We \equiv \frac{w_L^2 \rho_G d_L}{\sigma} \quad (17.23)$$

Hierin ist σ die Oberflächenspannung. Aus Gl.(17.21) läßt sich unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen für ζ_{fh} , K_v und We folgende Gleichung für h_f entwickeln:

$$h_f = 8 \left(\frac{\pi}{4} \right)^{0,2} \frac{(\dot{V}_f/F_L)^{1/3}}{\dot{V}_G^{0,2}} \frac{\sigma^{1,1}}{\rho_f^{2/3} \rho_G^{0,433} g^{10/9} \nu_f^{1/8}} \frac{(1 + 9 h_{wa}/l_w)}{d_L^{0,7} z_L^{0,35}} \quad (17.24)$$

Die Flüssigkeitshöhe h_f wird in entscheidender Weise durch die Höhe des Ablaufwehrs h_{wa} beeinflusst. Mit zunehmendem Volumstrom der Flüssigkeit wird h_f größer ($h_f \sim \dot{V}_f^{1/3}$) und mit zunehmendem Volumstrom des Gases geringer ($h_f \sim 1/\dot{V}_G^{1/5}$). Nicht zu große Änderungen in den Volumströmen haben nur geringfügige Änderungen von h_f zur Folge.

Die Versuche von ZELFEL wurden allein mit dem System Wasser/Luft durchgeführt. Aus diesem Grunde ist Vorsicht bei der Anwendung von Gl.(17.21) geboten, wenn die Flüssigkeit/Gas-Systeme zum Schäumen neigen. Abgesehen von den Stoffwerten wurden alle anderen Größen jedoch in weiten Grenzen geändert.

Überschreitet $We z_L^{1/2}$ den Wert 320, so wird, wie ZELFEL beobachtete, der Siebboden vom Gasstrom trocken geblasen. Dieser Wert stellt somit eine obere Belastungsgrenze für den Siebboden dar. Die maximale Geschwindigkeit des Gases im Loch ist durch

$$w_{L_{\max}} = 17,9 \left(\frac{\sigma}{d_L \sqrt{z_L} \rho_G} \right)^{1/2} \quad (17.25)$$

gegeben.

Über die Höhe h_s , der auf dem Boden befindlichen Sprudelschicht macht ZELFEL lediglich die Angabe, daß sie etwa doppelt so groß ist wie die nach Gl.(17.21) berechnete Höhe h_f der Flüssigkeitsschicht. Versuche von HARADA, ADACHI, EGUCHI und NAGATA (17.19) zeigten, daß h_s mit zunehmender Gasgeschwindigkeit ansteigt, ein Maximum durchläuft, wieder etwas abfällt und dann einem konstanten Endwert zustrebt. Der Endwert hängt dabei von der Wehrhöhe ab. Weitere wertvolle Informationen über h_s enthält die Arbeit von MERSMANN [17.11].

17.324 Druckverlust beim Durchströmen der Sprudelschicht

Wie bereits erläutert, erfaßt der Druckverlust Δp_σ alle diejenigen Verluste, die mit der Bildung, Bewegung und Auflösung der Blasen bzw. Gasstrahlen verbunden sind. Bezieht man den Druckverlust wieder auf den Staudruck, der mit der im Loch auftretenden Gasgeschwindigkeit w_L gebildet wird, so erhält man den Widerstandsbeiwert

$$\zeta_\sigma \equiv \frac{\Delta p_\sigma}{\rho_G w_L^2 / 2}. \quad (17.26)$$

Aus Versuchsergebnissen ermittelte ZELFEL folgende Gleichungen für ζ_σ :

$$\zeta_\sigma = \frac{4,2}{We_a^{1,12}} \quad \text{für } We_a \leq 3,6, \quad (17.27)$$

$$\zeta_\sigma = \frac{2,85}{We_a^{0,835}} \quad \text{für } We_a \geq 3,6. \quad (17.28)$$

Mit We_a wird die folgendermaßen definierte Weberzahl bezeichnet:

$$We_a \equiv \frac{w_L^2 \rho_G}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_f g}}. \quad (17.29)$$

Bemerkenswert ist hierbei, daß die Weberzahl nicht den Lochdurchmesser d_L als charakteristische Länge enthält. Es erwies sich als sinnvoll, als charakteristische Länge die Laplacesche Konstante $a = (2\sigma/\rho_f g)^{1/2}$ (daher der Index a für die Weberzahl) einzuführen, wovon zur Vereinfachung jedoch der Zahlenwert $2^{1/2}$ fortgelassen wurde. Somit ist also Δp_σ unabhängig vom Lochdurchmesser. Der Wert der Laplaceschen Konstanten liegt für viele Flüssigkeiten in der Größenordnung von 0,003 m.

Die Versuchsergebnisse zeigten, daß Δp_σ unabhängig von dem Volumstrom \dot{V}_f der Flüssigkeit ist. Die Versuche wurden wiederum nur mit dem System Luft/Wasser durchgeführt, so daß Vorsicht bei Anwendung der Gleichungen (17.27) und (17.28) zur Berechnung des Druckverlustes bei anderen Gas/Flüssigkeitssystemen geboten ist.

17.33 Belastungsgrenzen

Für den Betrieb eines Siebbodens gibt es eine untere und eine obere Belastungsgrenze. Die untere Belastungsgrenze wird durch einen Druck festgelegt, der so groß sein muß, daß die Flüssigkeit nicht durch die Löcher durchzuregnen beginnt. Die obere Belastungsgrenze wird durch eine Geschwindigkeit gekennzeichnet, bei welcher der Boden trocken geblasen wird oder Flüssigkeitstropfen in zu großer Zahl vom Gas zum nächsten Boden mitgerissen werden. Auf beide Belastungsgrenzen wird im folgenden eingegangen

17.331 Untere Belastungsgrenze

Damit ein Siebboden nicht durchregnet, muß der gesamte Druckverlust Δp größer sein als ein Mindestwert Δp_{\min} :

$$\Delta p > \Delta p_{\min}.$$

Der gesamte Druckverlust läßt sich unter Berücksichtigung von Gl.(17.2) nach der Beziehung

$$\Delta p = \frac{\rho_G w_L^2}{2} (\zeta_f + \zeta_t + \zeta_\sigma) \quad (17.30)$$

berechnen. Hierin ist für die Gasgeschwindigkeit w_L im Loch ein kritischer Wert $w_{L_{kr}}$ einzuführen, bei dem sich bereits eine gleichmäßige Sprudelschicht aufbaut. ZELFEL beobachtete, daß das gerade bei einer kritischen Weberzahl mit $We_{kr} = 1$ der Fall ist. Hieraus ergibt sich dann:

$$w_{L_{kr}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_G d_L}}. \quad (17.31)$$

Mittels dieser kritischen Gasgeschwindigkeit wird der gesamte Druckverlust Δp berechnet; dieser muß größer sein als Δp_{\min} .

Für den Mindestdruckverlust leitete ZELFEL folgende theoretische Näherungsgleichung her:

$$\Delta p_{\min} = (h_f + s) g \rho_f + g \rho_f \frac{d_L}{3} \left[1 + \frac{1}{16} \left(\frac{d_L}{a} \right)^2 \right] - \frac{4\sigma}{d_L}. \quad (17.32)$$

Mit a wird hierin die Laplacesche Konstante $(2\sigma/g\rho_f)^{1/2}$ bezeichnet. Gl.(17.32) wird durch Meßwerte sehr gut bestätigt. Sollte Δp nicht größer sein als Δp_{\min} , dann muß die Rechnung mit einem größeren Wert für die Gasgeschwindigkeit als $w_{L_{kr}}$ wiederholt werden, bis die Druckbedingung erfüllt wird.

17.332 Obere Belastungsgrenze

Nach ZELFEL ist die obere Belastungsgrenze erreicht, wenn die Gasgeschwindigkeit den Wert $w_{L_{\max}}$ erreicht hat, bei dem der Boden trocken geblasen wird. $w_{L_{\max}}$ läßt sich nach Gl.(17.25) berechnen. Mit Gl.(17.11) erhält man die im

Querschnitt der leeren Säule zwischen zwei Böden auftretende und maximal zulässige Geschwindigkeit:

$$w_{s_{\max}} = 17,9 \varphi \frac{F_L}{F_s} \sqrt{\frac{\sigma}{d_L \rho_G \sqrt{z_L}}}. \quad (17.33)$$

Mit φ wird das durch Gl.(17.1) definierte Flächenverhältnis bezeichnet.

Als eine weitere obere Belastungsgrenze wird eine Geschwindigkeit $w'_{s_{\max}}$ bezeichnet, bei welcher so viel Flüssigkeitstropfen bis zum nächsten Boden mitgerissen werden, daß die Austauschwirkung der Säule beeinträchtigt wird. Diese Geschwindigkeit ist eine Funktion des Bodenabstandes h . Eine der bewährtesten empirischen Gleichungen ist die von SOUDERS und BROWN, zitiert von KNEULE und ZELFEL [17.7]:

$$w'_{s_{\max}} = K_w \sqrt{\frac{\rho_f}{\rho_G} - 1}. \quad (17.34)$$

Mit K_w wird eine Größe bezeichnet, die aus *Bild 17.11*, abhängig von der Oberflächenspannung σ und dem Bodenabstand h , entnommen werden kann. Die nach Gl.(17.34) berechnete Geschwindigkeit ist erfahrungsgemäß etwas zu niedrig, so daß sie um 20 bis 30% überschritten werden darf. Gl.(17.34) hat den großen Vorteil, daß sie die obere Grenzgeschwindigkeit mit dem Bodenabstand h , eine der wichtigsten konstruktiven Größen, verknüpft. $w'_{s_{\max}}$ muß stets kleiner sein als $w_{s_{\max}}$ nach Gl.(17.33).

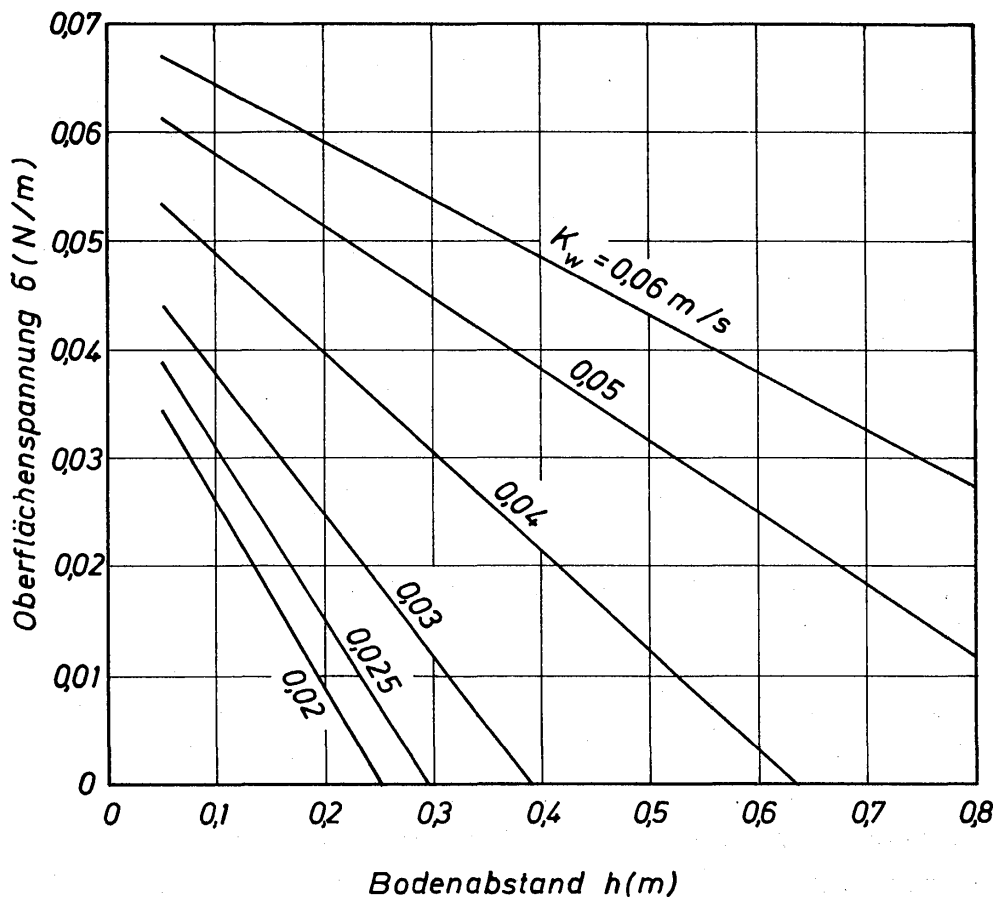


Bild 17.11. Zusammenhang zwischen dem in Gl.(17.34) auftretenden Faktor k_w , der Oberflächenspannung σ und dem Bodenabstand h

17.4 Glocken- und Ventilböden

17.41 Beschreibung und allgemeine Hinweise

Die Glocke ist eine Vorrichtung, durch die das Gas möglichst gleichmäßig mit der Flüssigkeit in Berührung gebracht werden soll. Man unterscheidet zwischen starren und beweglichen Glocken. Die beweglichen Glocken werden auch Ventile genannt. Man spricht daher von Glockenböden, wenn auf den Böden starre Glocken angeordnet sind, und von Ventilböden, wenn die Böden mit Ventilen versehen sind. Die Form und günstigsten Abmessungen der Glocken und Ventile wurden in den Abschnitten 17.22 und 17.24 bereits erörtert. In *Bild 17.12* ist die Anordnung der Glocken oder Ventile auf einem Boden angegeben. Die Aufteilung des Glocken- bzw. Ventilbodens in die mit Glocken bzw. Ventilen versehene Fläche und in die für Überlaufbecher vorzusehenden Flächen erfolgt nach den gleichen Richtlinien, die bereits für Siebböden angegeben wurden. Hiernach ist die Wehrlänge $l_w \approx d_s/1,4$, wenn d_s der Säulendurchmesser ist. Die Glocken oder Ventile werden in den Eckpunkten gleichseitiger Dreiecke angeordnet. Das Flächenverhältnis $\varphi = 0,907/(t/d_k)^2$ beträgt etwa 10%.

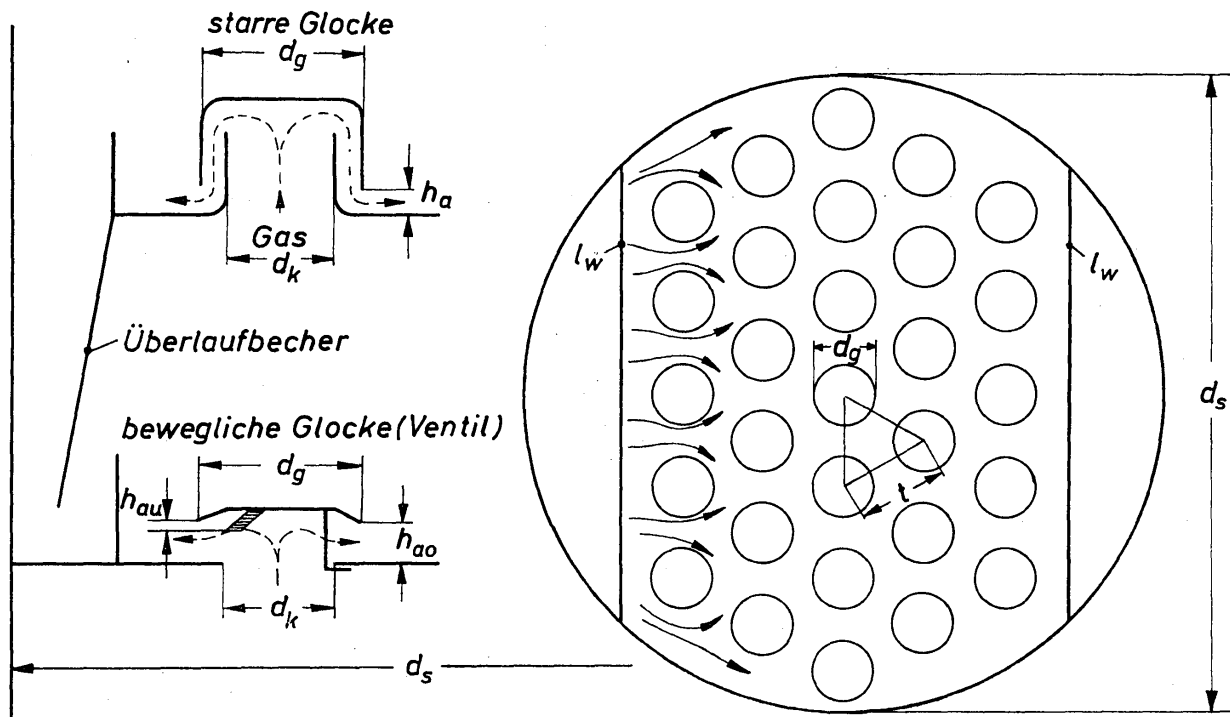


Bild 17.12. Bezeichnungen bei Glocken- und Ventilböden

Der Unterschied zwischen einem Glocken- bzw. Ventilboden und einem Siebboden besteht darin, daß bei ersteren das Gas parallel zur Bodenfläche in die Flüssigkeit eingeleitet wird. Reibungs- und Auftriebskräfte sorgen dann dafür, daß mit zunehmendem Abstand vom Rand der Kappe immer mehr Teilströme des Gases in die senkrechte Richtung umgelenkt werden und dann die Flüssigkeitsschicht durchdringen. Der äußerste Teilstrom erfährt seine Umlenkung auf dem Durchmesser d_w , der somit den Wirkungsbereich der Glocke kennzeichnet.

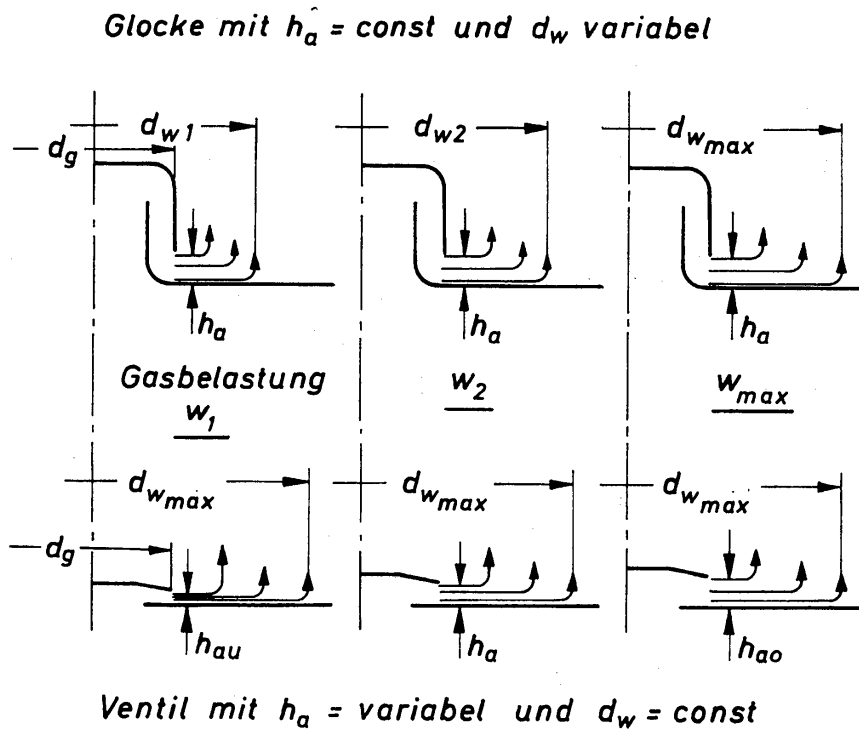


Bild 17.13. Zur Erläuterung des Wirkungsbereiches einer Glocke und eines Ventils in Abhängigkeit von der Gasbelastung w

Da bei einer starren Glocke die Austrittshöhe h_a für die Gasstrahlen konstant ist, vergrößert sich der Durchmesser d_w des Wirkungsbereiches mit zunehmendem Gasstrom. Der größte Wirkungsbereich $d_{w\max}$ wird dann bei der maximalen Gasbelastung erreicht. In *Bild 17.13* ist dieser Vorgang skizziert. Ändert sich jedoch mit zunehmender Gasbelastung die Austrittshöhe h_a , wie es beim Ventil der Fall ist, dann läßt sich unter idealen Bedingungen ein belastungsunabhängiger Wirkungsbereich erzielen. Hierin darf man den Vorteil des Ventils im Vergleich zur starren Glocke sehen. Der Durchmesser $d_{w\max}$ des maximalen Wirkungsbereiches ist bei günstig ausgelegten Böden etwa 1,4 mal so groß wie der Glocken- bzw. Ventildurchmesser d_g .

Mangelnder Einblick in die auf einem Glocken- bzw. Ventilboden ablaufenden Vorgänge haben zur Entwicklung einer sehr großen Zahl von Glocken- und Ventilformen geführt. Optimale Formen gibt es heute noch nicht. Die Form der Glocken und Ventile ist für zwei Vorgänge von ausschlaggebender Bedeutung. Diese sind die durch einen Austauschgrad gekennzeichnete Stofftrennung (Trennwirkung) und die für den Druckverlust maßgebende Strömung durch die Glocke bzw. durch das Ventil. Bedeutsam für die Trennwirkung ist die Art, wie das Gas in die Flüssigkeit eingeleitet wird. Wie bereits erwähnt, muß die Einleitung so erfolgen, daß sich ein großer Wirkungsbereich ergibt. Darüber hinaus soll das Gas aber auch so in die Flüssigkeit geführt werden, daß es sich in möglichst viele, kleine Blasen auflöst. Dadurch erzielt man die für eine gute Trennwirkung maßgebende Phasengrenzfläche. Zahlreiche experimentelle Untersuchungen scheinen darauf hinzuweisen, daß sich die Trennwirkungen, die man mit Glocken und Ventilen von sehr unterschiedlicher Form erreicht, nur noch wenig voneinander unter-

scheiden. Aus diesem Grunde ist es verständlich, daß man sich in neuerer Zeit vornehmlich damit beschäftigt, Glocken- bzw. Ventilformen zu entwickeln, die einen geringen Druckverlust verursachen. Diese Entwicklungsarbeit wird wesentlich erleichtert, wenn man mit den grundlegenden Strömungsproblemen vertraut ist. Daher wird im nächsten Abschnitt der Strömungswiderstand eines einfachen Glockenmodells erörtert. Erst im Anschluß daran wird auf die Berechnung des Druckverlustes in bisher üblichen Glocken und Ventilen eingegangen.

17.42 Untersuchungen an einem Glockenmodell

Umfangreiche Untersuchungen über den Druckverlust, den das in *Bild 17.14* dargestellte Glockenmodell verursacht, hat KUTZER [17.20] durchgeführt. Das Modell besteht aus einem Kamin und einer darüber befindlichen kreisförmigen Deckplatte. Das Modell stellt die einfachste Form einer Flachglocke oder eines Ventils dar. Wie sich später noch zeigen wird, erfaßt dieses Modell aber auch alle entscheidenden Eigenschaften der Zylinderglocke.

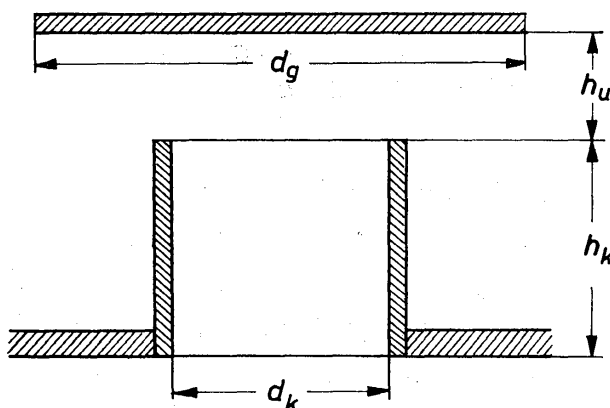


Bild 17.14
Abmessungen des untersuchten
Glockenmodells

Bei der Durchströmung des Modells treten innerhalb des Kamins und im Verlauf der durch die Deckplatte verursachten Umlenkung Verluste auf. Um beide Verluste erfassen zu können, führte KUTZER getrennte Versuche für den Kamin ohne und mit Deckplatte durch und stellte die Ergebnisse in Form von Widerstandsgesetzen dar.

17.421 Widerstandsbeiwert von Kaminen ohne Deckplatte

Die von Luft durchströmte Versuchsanordnung bestand aus einem senkrechten Rohr, dessen Länge 2600 mm und dessen Durchmesser $d_s = 180$ mm betrug, in das Kamine verschiedener Abmessungen mit ihren Bodenplatten eingesetzt werden konnten. Die Abmessungen der Kamine sind in Tabelle 17.2 angegeben. Durchmesser und Höhe wurden in weiten Grenzen geändert. Mit φ wird in Tabelle 17.2 das Flächenverhältnis bezeichnet, welches gleich dem Quadrat des Verhältnisses von Kamin- zu Säulendurchmesser ist.

Zur Darstellung der Versuchsergebnisse wurde der Widerstandsbeiwert

$$\zeta_k \equiv \frac{\Delta p_k}{\rho w_k^2 / 2} \quad (17.35)$$

Tabelle 17.2: Abmessungen der untersuchten Kamine ohne Deckplatte

Nenn Durchmesser d'_k (mm)	Gemessener Durchmesser d_k (mm)	Kaminhöhe h_k (mm)	h_k/d_k	$\varphi = (d_k/d_s)^2$
10	10,05	12,0	1,2	0,00309
	10,06	16,0	1,6	
	10,04	20,0	2,0	
	10,10	40,0	4,0	
	10,07	60,0	6,0	
	9,85	100,0	10,0	
	9,97	200,0	20,0	
20	19,96	12,0	0,6	0,01235
	19,94	20,0	1,0	
	19,96	40,0	2,0	
	19,97	80,0	4,0	
	19,84	150,0	7,5	
	20,16	200,0	10,0	
	19,96	250,0	12,5	
30	29,94	15,0	0,5	0,0278
	29,96	30,0	1,0	
	29,95	60,0	2,0	
	29,97	120,0	4,0	
	29,96	200,0	6,67	
	29,95	250,0	8,33	
40	39,98	2,0	0,05	0,0494
	39,99	4,0	0,1	
	39,96	8,0	0,2	
	40,00	16,0	0,4	
	39,93	20,0	0,5	
	39,96	30,0	0,75	
	39,97	40,0	1,0	
	40,00	80,0	2,0	
	39,93	160,0	4,0	
	39,97	250,0	6,25	
	39,99	762,0	19,0	
	39,99	1095,0	27,4	
50	49,88	20,0	0,4	0,0772
	49,89	40,0	0,8	
	49,93	60,0	1,2	
	49,91	100,0	2,0	
	49,92	200,0	4,0	
	50,00	250,0	5,0	
60	50,01	3,0	0,05	0,1111
	60,00	6,0	0,1	
	59,97	12,0	0,2	
	59,99	24,0	0,4	

definiert. Es bedeuten Δp_k Druckverlust, ρ Dichte der Luft und w_k mittlere Luftgeschwindigkeit im Kamin. Es zeigte sich, daß der Widerstandsbeiwert oberhalb einer Reynoldszahl $Re_k \equiv w_k d_k/\nu$ von etwa $4 \cdot 10^4$ einen konstanten Wert annimmt, der nur noch von der bezogenen Höhe h_k/d_k abhängt. Zur Darstellung des Widerstandsbeiwertes in Abhängigkeit von h_k/d_k wurde ζ_k auf $\varphi = 0$ umgerechnet. Die Umrechnung geht aus Abschnitt 17.322 hervor. Der für $\varphi = 0$ geltende Widerstandsbeiwert wird mit ζ_{k0} bezeichnet. Er ist in *Bild 17.15* über h_k/d_k aufgetragen.

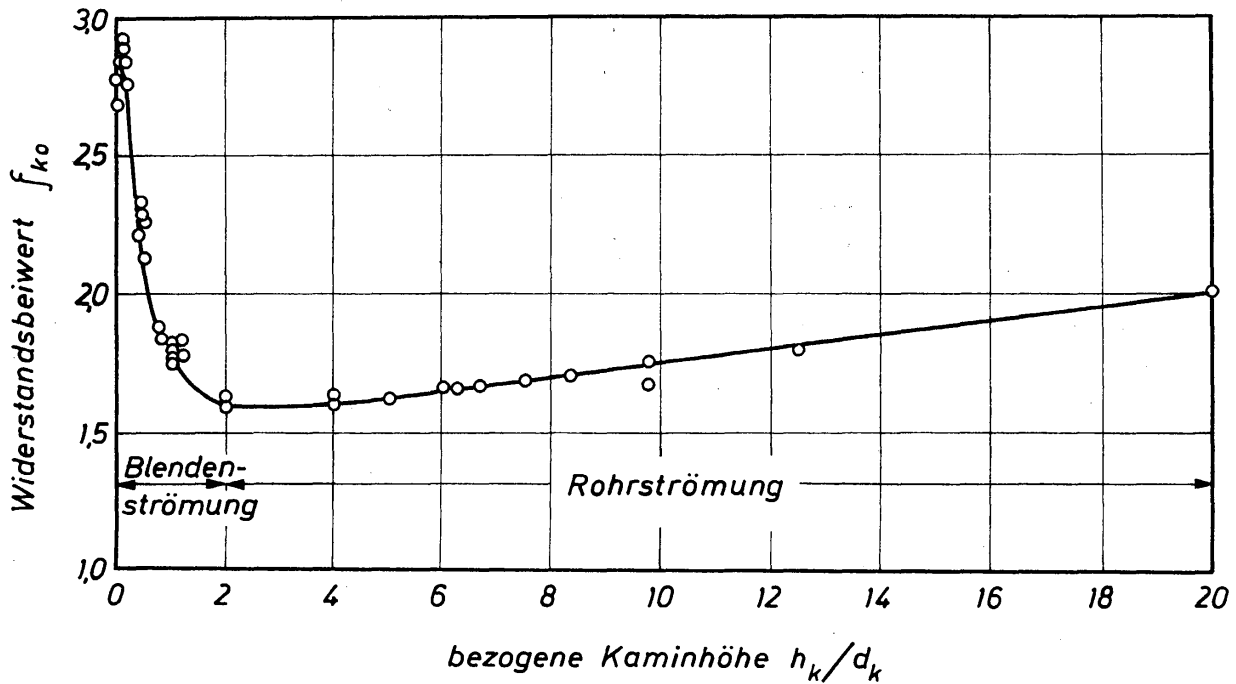


Bild 17.15. Widerstandsbeiwert von Kaminen; Kaminabmessungen sind in Tabelle 17.2 zusammengestellt

Mit zunehmenden Werten der bezogenen Kaminhöhe h_k/d_k wird der Widerstandsbeiwert zunächst kleiner, durchläuft ein bei $h_k/d_k = 2$ liegendes Minimum und steigt dann wieder an. Bei $h_k/d_k = 0$ stimmt ζ_{k0} näherungsweise mit Werten überein, die von TIETJENS [17.21] und HERNING [17.22] zu 2,68 und 2,77 angegeben werden.

Der Strömungswiderstand der Kamine setzt sich im wesentlichen aus zwei Anteilen, dem Druckwiderstand und dem Reibungswiderstand, zusammen. Im Bereich $0 \leq h_k/d_k \leq 2$ überwiegt der Druckwiderstand, und im Bereich $2 \leq h_k/d_k < \infty$ überwiegt der Reibungswiderstand. Es ist daher gerechtfertigt, die beiden Bereiche durch die Begriffe «Blendenströmung» und «Rohrströmung» zu kennzeichnen. Für beide Bereiche hat KUTZER Widerstandsgesetze aufgestellt, die hier jedoch nicht mitgeteilt werden sollen.

Von praktischer Bedeutung dürfte vornehmlich der Bereich der Blendenströmung sein. Hierbei ist der Druckwiderstand von ausschlaggebender Bedeutung, so daß der Druckverlust dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Geringste Kaminverluste ergeben sich bei $h_k/d_k = 2$.

17.422 Widerstandsbeiwert von Kaminen mit Deckplatte

In einer großen Zahl von Versuchsreihen ermittelte KUTZER [17.20] den Widerstand von Kaminen mit Deckplatte. Dabei sollte insbesondere der Einfluß des Plattendurchmessers d_g und der Umlenkhöhe h_u geklärt werden. Die bei den Versuchen verwendeten Anordnungen gehen aus Tabelle 17.3 hervor. Zur Darstellung der Meßwerte wurde der Widerstandsbeiwert

$$\zeta_{kp} \equiv \frac{\Delta p_{kp}}{\rho w_k^2 / 2} \quad (17.36)$$

verwendet. Mit Δp_{kp} wird der Druckverlust der Anordnung «Kamin mit Platte» bezeichnet.

Tabelle 17.3: Abmessungen der untersuchten Kamine mit Deckplatte

d_k (mm)	20			40					60		
h_k (mm)	20	40	200	4	16	30	80	250	6	24	
h_k/d_k	1,0	2,0	10	0,1	0,4	0,75	2,0	6,25	0,1	0,4	
d_g (mm)	60	40		56		80			84		
d_g/d_k	3,0	2,0		1,4		2,0			1,4		
h_u (mm)	1,0	1,0	1,0	1,0	—	—	1,0	1,0	1,0	—	—
	1,5	1,5	1,5	1,5	—	—	1,5	1,5	1,5	—	—
	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	—	—
	—	3,0	—	—	—	—	—	3,0	—	3,0	3,0
	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6,0	6,0
	8,0	8,0	8,0	8,0	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0	—	—
	—	—	—	—	12,0	12,0	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	14,0	14,0	—	—	—	13,5	13,5
	—	16,0	—	—	16,0	16,0	16,0	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18,0	18,0
	—	—	—	—	20,0	20,0	—	—	—	21,0	21,0
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24,0	24,0
	—	32,0	32,0	—	—	—	30,0	30,0	30,0	30,0	30,0
—	—	—	—	—	—	40,0	40,0	40,0	—	—	
50,0	—	50,0	50,0	—	—	50,0	50,0	50,0	—	—	

Die Versuchsergebnisse zeigten, daß der Plattendurchmesser d_g nur bei sehr kleinen Umlenkhöhen, $h_u \leq 1$ mm, einen schwachen Einfluß auf den Widerstandsbeiwert ausübt. Für die in der Praxis üblichen Bedingungen ist dieser Einfluß vernachlässigbar klein. Ferner ergab sich das zu erwartende Ergebnis, daß der Widerstandsbeiwert unabhängig von der Reynoldszahl ist. Schließlich lieferte eine Analyse der Meßwerte den wichtigen Hinweis, daß der Widerstandsbeiwert ζ_{kp}

nicht von der Umlenkhöhe h_u an sich, sondern von der Umlenkfläche $F_u = d_k \pi h_u$ abhängt. Somit ist es also zweckmäßig, den Widerstandsbeiwert als Funktion der Verhältniswerte $F_u/F_k = 4 h_u/d_k$ und h_k/d_k darzustellen.

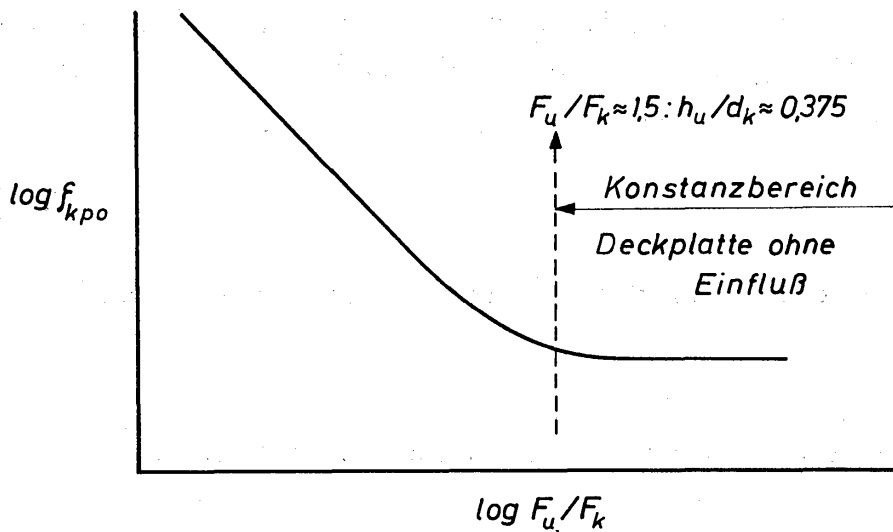


Bild 17.16. Qualitative Darstellung des Widerstandsbeiwertes von Kaminen mit Deckplatte, abhängig vom Flächenverhältnis F_u/F_k für einen Wert von h_k/d_k

In Bild 17.16 ist der auf $\varphi = 0$ umgerechnete Widerstandsbeiwert ζ_{kpo} (wegen Umrechnung siehe Abschnitt 17.322) in qualitativer Form über dem Flächenverhältnis F_u/F_k für einen Wert von h_k/d_k aufgetragen. Mit zunehmenden Werten für F_u/F_k nimmt ζ_{kpo} sehr schnell ab und nähert sich einem festen Endwert, der mit dem Widerstandsbeiwert ζ_{ko} für die Anordnung «Kamin ohne Deckplatte» übereinstimmt. Der Übergang in den Konstanzbereich liegt etwa bei $F_u/F_k = 1,5$ und somit bei $h_u/d_k = 0,375$. Im Bereich $F_u/F_k \leq 1,5$ liegen die Kurvenzüge für verschiedene Werte von h_k/d_k sehr dicht beieinander. Erst beim Übergang in den Konstanzbereich fächern die Kurven für $h_k/d_k = \text{const}$ etwas stärker auf. Die Endwerte sind aus Bild 17.15 zu entnehmen. Die Ergebnisse von KUTZER werden durch Untersuchungen von NORMAN und GROCOTT [17.23] weitgehend bestätigt. KUTZER ergänzte die experimentellen Untersuchungen durch eine theoretische Betrachtung der Strahlumlenkung an der Deckplatte und durch eine sorgfältige qualitative Analyse der Kontraktion und Expansion des Fluids innerhalb des Kamins und deren Auswirkungen auf die Strahlumlenkung.

17.423 Schlußfolgerungen aus den Modelluntersuchungen

Den experimentellen und theoretischen Untersuchungen von KUTZER [17.20] zufolge ist die häufig im Schrifttum erwähnte Regel, wonach alle Querschnitte in einer Glocke gleich groß sein sollten, nicht allgemein gültig. Sie sollte durch folgende Hinweise ersetzt werden:

große Kaminhöhen mit	$h_k/d_k \geq 2$:	$F_u/F_k \approx 1,5$ bis $2,0$:	Zylinderglocke,
mittlere Kaminhöhen mit	$h_k/d_k < 2$:	$F_u/F_k \approx 1,2$ bis $1,5$:	Flachglocke,
kleine Kaminhöhen mit	$h_k/d_k \leq 1$:	$F_u/F_k \approx 1$:	Ventil.

Weitere wichtige Aussagen lieferten die Untersuchungen für die Form des Kamineintritts. Ein scharfkantiger Einlauf führt zu einer starken Strahleinschnürung. Beginnt der Strahl noch auf der Strecke $h_k + h_u$ von der Einschnürung in die Expansion überzugehen, dann stößt der Gasstrahl teilweise nicht mehr senkrecht auf die Platte, und der Umlenkverlust ist verhältnismäßig gering. Im Gegensatz dazu führt ein abgerundeter Einlauf zu einer sehr gleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung, wobei der Gasstrahl senkrecht auf die Glocken- bzw. Ventilkappe stößt. Die Umlenkverluste sind in diesem Falle größer als bei scharfkantigem Kamineintritt. Auf Grund der Umlenkverluste sollte man also bei großen Kaminhöhen einen abgerundeten und bei kleinen Kaminhöhen einen scharfkantigen Kamineintritt vorsehen. Berücksichtigt man aber gleichzeitig die Kaminverluste, dann wird sich auch bei kleinen Kaminhöhen ein abgerundeter Einlauf empfehlen. Beim Ventil wird zudem ein abgerundeter Kamineintritt eine Strömung gewährleisten, die zu einer verhältnismäßig ruhigen Stellung der Ventilkappe führt.

17.43 Druckverlust von Glockenböden

In einer bereits erwähnten Arbeit über Glocken- und Ventilböden hat KUTZER [17.3] die zur Berechnung des Druckverlustes entwickelten Verfahren von ROBINSON und GILLILAND [17.24], von COULSON und RICHARDSON [17.25], von KASSATKIN und RAMM [17.26], von DAVIES [17.27], von BOLLES [17.4], von VAN HECKE [17.28], von WELCH [17.29], von HOPPE [17.30], von EDULJEE [17.31] sowie das von ihm selbst entwickelte zusammengestellt und ausführlich erörtert. Die ersten drei Verfahren sind nicht allgemein anwendbar, da bei ihnen vorausgesetzt wird, daß alle Querschnittsflächen in einer Glocke gleich groß sind. Die verbleibenden sieben Verfahren benutzte KUTZER zur Berechnung des Druckverlustes von drei Glockenböden. Diese unterschieden sich sowohl in ihren geometrischen Abmessungen als auch in den Dampf- und Flüssigkeitsbelastungen.

Tabelle 17.4: Nach sieben Verfahren berechnete Gesamtdruckverluste Δp , bezogen auf den jeweiligen Mittelwert Δp_m des Bodens

	DAVIES	BOLLES	VANHECKE	WELCH	HOPPE	EDULJEE	KUTZER
1. Boden	1,05	1,17	1,30	0,93	0,82	0,81	1,05
2. Boden	1,06	1,21	1,22	0,73	0,82	1,08	0,87
3. Boden	0,94	1,07	1,05	1,04	0,80	1,16	0,92

Die Rechnungen führten zu folgenden Ergebnissen: Der Verhältniswert aus dem nach jedem Verfahren berechneten Druckverlust Δp und dem aus fünf Werten bestimmten Mittelwert Δp_m ist in Tabelle 17.4 angegeben. Er schwankt zwischen 0,81 und 1,30 für den ersten Boden, zwischen 0,73 und 1,22 für den zweiten Boden und zwischen 0,80 und 1,16 für den dritten Boden. Bei der Mittelwertbildung blieben jeweils der höchste und der niedrigste Wert unberücksichtigt. Die Schwan-

Tabelle 17.5: Angaben zu den untersuchten Zylinderglocken gemäß Bild 17.2 (Abmessungen in mm)

d_k	20							40						
h_k	h_u	h_g	h_a	F_u/F_k	F_r/F_k	F_a/F_k	ζ_t	h_u	h_g	h_a	F_u/F_k	F_r/F_k	F_a/F_k	ζ_t
= 1 d_k	4,0	14	4	0,8	2,04	1,6	5,307	8,0	28	8	0,8	2,11	1,6	5,927
		0	-	0,8	-	-	4,255		-	-	-	-	-	-
	6,0	14	6	1,2	2,04	2,4	2,989	12,0	28	12	1,2	2,11	2,4	3,322
= 2 d_k	8,0	14	8	1,6	2,04	3,2	2,191	16,0	28	16	1,6	2,11	3,2	2,339
		0	-	1,6	-	-	1,926		-	-	-	-	-	-
	4,0	26	6	0,8	2,04	2,4	3,995	8,0	52	12	0,8	2,11	2,4	4,111
22		10	4,0			3,880	44		20	4,0			3,889	
18		14	5,6			3,823	36		28	5,6			3,907	
14		16	7,2			3,897	28		36	7,2			3,953	
0	-	-	-	4,659	-	-	-	-	-	-	-	-		
6,0	26	8	1,2	2,04	3,2	2,266	12,0	52	16	1,2	2,11	3,2	2,227	
	22	12			4,8	2,191		44	24			4,8	2,128	
	18	16			6,4	2,174		36	32			6,4	2,137	
	14	20			8,0	2,260		28	40			8,0	2,166	
8,0	26	10	1,6	2,04	4,0	1,754	16,0	52	20	1,6	2,11	4,0	1,670	
	22	14			5,6	1,702		44	18			5,6	1,638	
	18	18			7,2	1,747		36	36			7,2	1,614	
	14	22			8,8	1,723		28	44			8,8	1,616	
0	-	-	-	2,140	-	-	-	-	-	-	-	-		

kungsbreite ist für die drei Böden nicht sehr unterschiedlich. Der nach dem Verfahren von HOPPE berechnete Druckverlust ist im allgemeinen niedrig, und der nach dem Verfahren von VAN HECKE berechnete ist im allgemeinen hoch im Vergleich zum Mittelwert. Verhältnismäßig geringe positive als auch negative Abweichungen vom Mittelwert lieferten die Verfahren von DAVIES und KUTZER. Diese beiden Berechnungsverfahren, die in den Einzelheiten recht unterschiedlich sind, werden in den folgenden Abschnitten erörtert.

17.431 Berechnungsgleichungen von Kutzer

Der beim Durchströmen eines Glockenbodens insgesamt auftretende Druckverlust Δp wird in zwei Anteile zerlegt: Der erste Anteil ist der sogenannte «trockene Druckverlust» Δp_t , der beim Durchströmen eines trockenen Bodens auftritt. Der zweite Anteil ist dann der zusätzliche «nasse Druckverlust», der durch die Anwesenheit der Flüssigkeit auf dem Boden bedingt ist:

$$\Delta p = \Delta p_t + \Delta p_f. \quad (17.37)$$

Der nasse Druckverlust setzt sich wiederum aus zwei Anteilen, nämlich Δp_σ und Δp_{sp} zusammen. Mit Δp_σ bezeichnet man den Druckverlust, der durch die Blasenbildung bedingt ist und daher von der Oberflächenspannung σ abhängt. Δp_{sp} ist derjenige Druckverlust, der beim Durchströmen der Sprudelschicht von der Höhe h_{sp} auftritt. Da sich das Volumen der Sprudelschicht aus einem Flüssigkeitsanteil und einem Gasanteil zusammensetzt, muß ihre Schichthöhe h_{sp} größer sein als die Schichthöhe h_f der reinen Flüssigkeit.

Für den gesamten Druckverlust gilt somit bei Berücksichtigung aller Anteile die Beziehung:

$$\Delta p = \Delta p_t + \Delta p_\sigma + \Delta p_{sp}. \quad (17.38)$$

Für diese drei Druckverlustanteile hat KUTZER [17.20] Berechnungsgleichungen aufgestellt, die im folgenden mitgeteilt werden.

17.4311 Der trockene Druckverlust bei Zylinder- und Flachglocken

Zur Untersuchung des trockenen Druckverlustes verwendete KUTZER Zylinderglocken, deren Form in *Bild 17.2* dargestellt und in Abschnitt 17.22 beschrieben ist. Die Abmessungen der verwendeten Glocken enthält Tabelle 17.5. Der Glockendurchmesser d_g war in allen Fällen gleich $2 d_k$. Verändert wurden der Kamin Durchmesser d_k , die Kaminhöhe h_k , die Umlenkhöhe h_u , die Höhe h_g der Glockenkappe und die Austrittshöhe h_a .

Zur Darstellung der Versuchsergebnisse wurde der Widerstandsbeiwert

$$\zeta_t \equiv \frac{\Delta p_t}{\rho_G w_k^2 / 2} \quad (17.39)$$

verwendet. Es bedeuten ρ_G die Dichte des Gases und w_k die mittlere Gasgeschwindigkeit im Kamin, die folgendermaßen berechnet wird:

$$w_k = \frac{\dot{V}_G}{z_g d_k^2 \pi / 4} \quad (17.40)$$

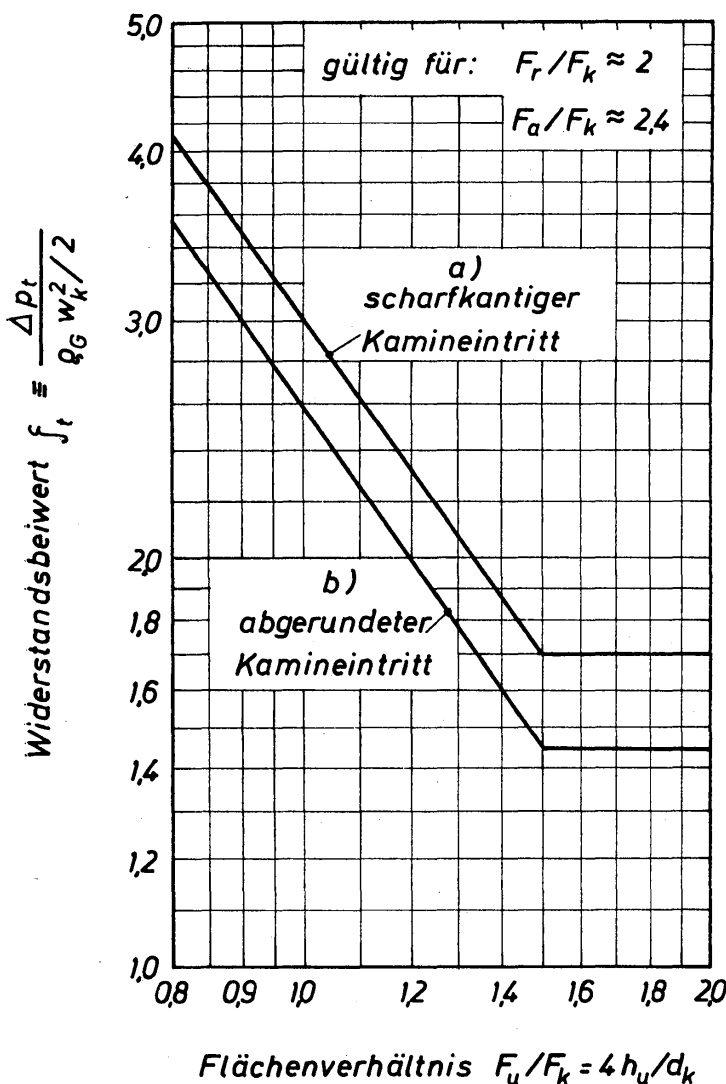
Mit \dot{V}_G wird der Volumstrom des Dampfes bzw. des Gases und mit z_g die Zahl der auf dem Boden angeordneten Glocken bezeichnet.

Die Versuchsergebnisse zeigten im untersuchten Bereich der Reynoldszahl $Re_k \equiv w_k d_k / \nu_G = 5 \cdot 10^3$ bis 10^5 einen so geringen Einfluß von Re_k auf ζ_t ($\zeta_t \sim Re_k^{-0,045}$), daß er vernachlässigt werden kann. Darüber hinaus wurde festgestellt, daß die Glockenhöhe h_g und die Austrittshöhe h_a keinen nennenswerten Einfluß auf den Widerstandsbeiwert ausüben. Der Einfluß von h_a ist indes nur zu vernachlässigen, wenn das Austrittsquerschnittsverhältnis $F_a/F_k \geq 2,4$ ist. Der Widerstandsbeiwert wird daher nur noch von den beiden geometrischen Verhältniswerten h_k/d_k und $F_u/F_k = 4 h_u/d_k$ beeinflusst. Dieses sind aber auch die beiden einzigen Einflußgrößen, die bei der Untersuchung des Strömungswiderstandes des in Abschnitt 17.42 beschriebenen Glockenmodells auftraten. Dadurch wird also nochmals die Bedeutung der Modelluntersuchungen hervorgehoben.

Für Zylinderglocken mit $h_k/d_k \geq 2$, $F_r/F_k \approx 2$, $F_a/F_k \approx 2,4$ und scharfkantigem Kamineintritt gibt KUTZER folgende Gleichungen an:

$$\zeta_t = 3 (F_u/F_k)^{-1,45} \quad \text{gültig für } F_u/F_k \leq 1,5, \quad (17.41)$$

$$\zeta_t = 1,7 \quad \text{gültig für } 1,5 \leq F_u/F_k \leq 2,0. \quad (17.42)$$



Diese beiden Gleichungen sind in Bild 17.17 als Linienzug a wiedergegeben.

Bild 17.17
Widerstandsbeiwerte von
Zylinderglocken mit scharfkantigem
und abgerundetem Kamineintritt

Bei abgerundetem Kamineintritt entfällt der Kontraktionsverlust und der Widerstand wird kleiner. Für diesen Fall empfiehlt KUTZER folgende Gleichungen:

$$\zeta_t = 2,6 (F_u/F_k)^{-1,45} \quad \text{gültig für } F_u/F_k \leq 1,5, \quad (17.43)$$

$$\zeta_t = 1,45 \quad \text{gültig für } 1,5 \leq F_u/F_k \leq 2,0. \quad (17.44)$$

Da bei abgerundetem Kamineintritt bereits unmittelbar hinter dem Eintrittsquerschnitt eine Parallelströmung auftritt, kann die Bedingung $h_k/d_k \geq 2$ entfallen. In *Bild 17.17* sind die beiden letzten Gleichungen durch Linienzug *b* wiedergegeben.

Weitere Untersuchungen von KUTZER betrafen Flachglocken mit scharfkantigem Kamineintritt und mit $h_k/d_k < 1$, für die das Widerstandsgesetz

$$\zeta_t = f(F_u/F_k, h_k/d_k) \quad (17.45)$$

in *Bild 17.18* angegeben ist. Der Einfluß von h_k/d_k wird erst oberhalb von $F_u/F_k = 1$ spürbar. Mit häufig ausreichender Genauigkeit läßt sich daher für $F_u/F_k \leq 1$ auch das Näherungsgesetz

$$\zeta_t = 3 (F_u/F_k)^{-1,65} \quad (17.46)$$

zur Berechnung des trockenen Druckverlustes von Flachglocken verwenden.

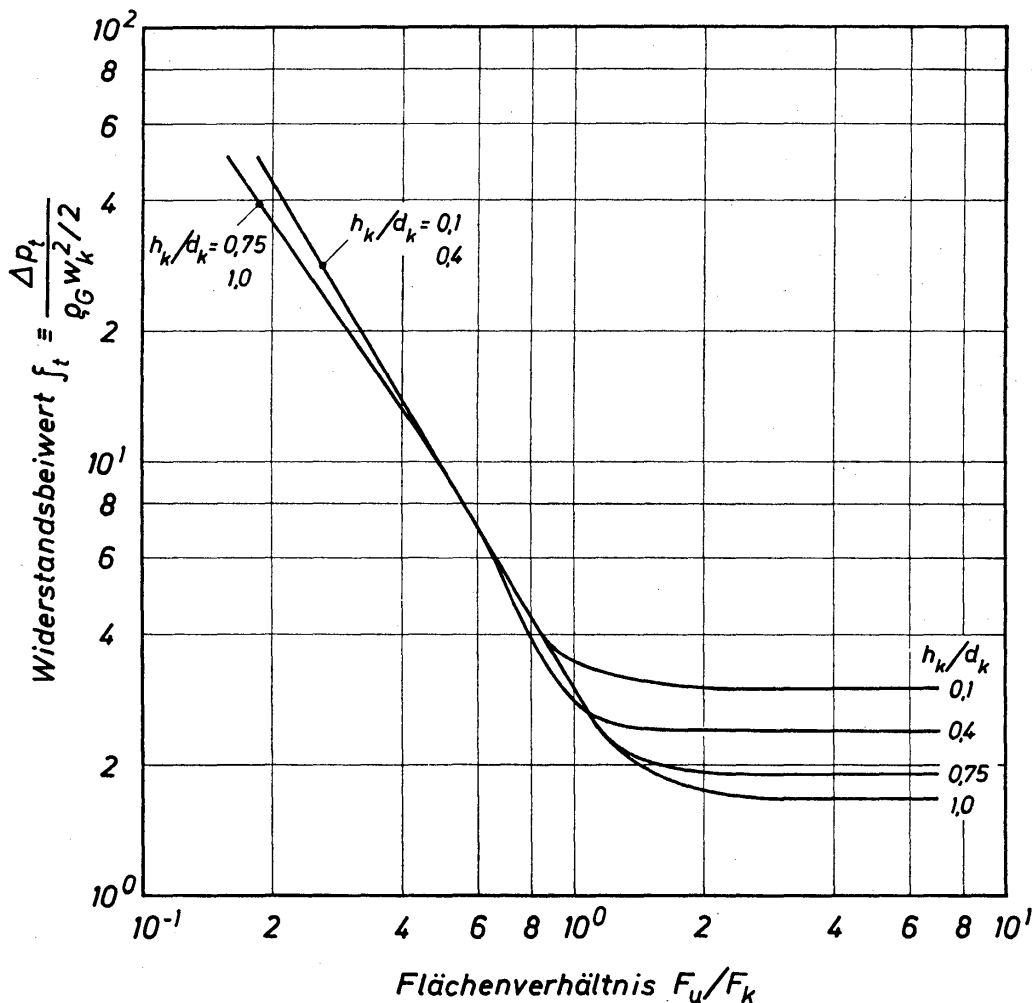


Bild 17.18. Widerstandsbeiwert von Flachglocken mit scharfkantigem Kamineintritt

17.4312 Der nasse Druckverlust bei Zylinder- und Flachglocken

Der nasse Druckverlust Δp_f setzt sich gemäß den Gleichungen (17.37) und (17.38) aus den beiden Anteilen Δp_σ und Δp_{sp} zusammen. Für den bei der Blasenbildung auftretenden Druckverlust empfiehlt KUTZER die Näherungsgleichung:

$$\Delta p_\sigma = \frac{4 \sigma}{d_g - d_{ka}} \quad (17.47)$$

Es bedeuten σ Oberflächenspannung, d_g innerer Durchmesser der Glockenkappe und d_{ka} äußerer Durchmesser des Kamins. Da der Druckverlustanteil Δp_σ im allgemeinen sehr klein ist im Vergleich zu Δp_{sp} , ist die Verwendung der sehr groben Näherungsgleichung (17.47) zu seiner Berechnung absolut zulässig.

Zur Berechnung des Druckverlustes Δp_{sp} , der beim Durchströmen der Sprudelschicht mit der Höhe h_{sp} auftritt, geht man von der Beziehung

$$\Delta p_{sp} = \zeta_{sp} (h_f - h_a) \rho_f g \quad (17.48)$$

aus. Hierin bedeuten ζ_{sp} den Widerstandsbeiwert der Sprudelschicht, der häufig auch Begasungsfaktor genannt wird, h_f die Höhe der reinen Flüssigkeit auf dem Boden, h_a die Austrittshöhe, ρ_f die Flüssigkeitsdichte und g die Erdbeschleunigung. Die Größe $(h_f - h_a) \rho_f g$ ist der hydrostatische Flüssigkeitsdruck, den das Gas bzw. der Dampf überwinden muß. Der tatsächlich auftretende Druckverlust ist indes kleiner als der hydrostatische Druck. Denn der Widerstandsbeiwert bzw. Begasungsfaktor ζ_{sp} ist stets kleiner als 1. Nur bei verschwindendem Gasdurchfluß ist $\zeta_{sp} = 1$ und somit $\Delta p_{sp} = (h_f - h_a) \rho_f g$.

Zur Bestimmung von ζ_{sp} führte KUTZER zahlreiche Versuche durch, wobei die Zylinderglocken die in Tabelle 17.6 angegebenen Abmessungen aufwiesen. Verändert wurde insbesondere die Austrittshöhe h_a , und zwar zwischen 7,9 mm und 23,9 mm. Als Gas/Flüssigkeit-Systeme wurden Luft/Wasser, Luft/Glycerin und Luft/Paraffinöl verwendet. Die Höhe h_f der reinen Flüssigkeit betrug bei den verschiedenen Versuchsreihen 25, 32, 40, 60, 80 und 100 mm. Damit ergaben sich insgesamt 54 Meßreihen mit jeweils 17 bis 19 Meßpunkten.

Tabelle 17.6: Abmessungen (in mm) der bei den Versuchen verwendeten Zylinderglocken, Bezeichnungen in *Bild 17.2*

$h_k = 40$	$d_k = 20$	$d_g = 40$
$h_g = 26$	$h_u = 6$ $h_u = 8$	$h_a = 7,9$ $h_a = 9,9$
$h_g = 14$	$h_u = 6$ $h_u = 8$	$h_a = 21,9$ $h_a = 23,9$

Aus den Meßwerten ergibt sich folgende Beziehung für den Widerstandsbeiwert:

$$\zeta_{sp} = \frac{1}{(1 + 7,2 \cdot 10^3 K_{sp})^{1/4}} \quad \text{für } 0 \leq K_{sp} \leq 10^{-3}. \quad (17.49)$$

Mit K_{sp} wird eine für die Sprudelschicht maßgebende Kennzahl bezeichnet. Ihre Definition lautet:

$$K_{sp} \equiv \frac{w_k}{\rho_f g} \left(\frac{\sigma \rho_G}{h_f} \right)^{1/2} \frac{h_a d_g}{d_s^2}. \quad (17.50)$$

Mit d_s wird hierin der Säulendurchmesser bezeichnet. Der Ausdruck $h_a d_g/d_s^2$ ist proportional dem Flächenverhältnis F_a/F_s , wobei F_a den Austrittsquerschnitt einer Glocke und F_s die Querschnittsfläche der Säule bedeuten.

Unter den in der Praxis üblichen Bedingungen ist K_{sp} fast immer kleiner als 10^{-3} . Für $0 < K_{sp} \lesssim 3 \cdot 10^{-5}$ ist ζ_{sp} mit ausreichender Genauigkeit gleich 1 zu setzen. Abweichungen treten erst für $K_{sp} > 3 \cdot 10^{-5}$ auf. Ist $K_{sp} \geq 2 \cdot 10^{-4}$, dann liefert die einfache Beziehung

$$\zeta_{sp} = \frac{1}{(10^4 K_{sp})^{1/4}} \quad \text{für } 2 \cdot 10^{-4} \leq K_{sp} \leq 10^{-3} \quad (17.51)$$

sogar noch genauere Werte als Gl.(17.49).

Die Gleichungen (17.49) bis (17.51) zeigen, daß der Widerstandsbeiwert, ausgehend von $\zeta_{sp} = 1$, mit zunehmender Gasgeschwindigkeit w_k im Kamin stetig kleiner wird. Gleichzeitig beginnt sich mit steigender Gasgeschwindigkeit immer mehr Gas in Form von Blasen in der Sprudelschicht anzusammeln, deren Höhe h_{sp} daher stetig ansteigen muß. Die Sprudelschichthöhe h_{sp} muß ebenfalls eine Funktion der Kennzahl K_{sp} sein. Aus den Meßwerten von KUTZER ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{h_{sp}}{h_f} = [1 + 2,55 \cdot 10^5 K_{sp}]^{1/4} \quad \text{für } 0 \leq K_{sp} \leq 2 \cdot 10^{-3}. \quad (17.52)$$

Der höchste bei den Versuchen aufgetretene Wert für K_{sp} war $2 \cdot 10^{-3}$; bei dem ist $h_{sp}/h_f = 4,75$. Ein in der Praxis häufig beobachteter Wert für h_{sp}/h_f ist 2. Hierfür wird $K_{sp} = 5,9 \cdot 10^{-5}$, und mittels Gl.(17.49) wird $\zeta_{sp} = 0,914$.

Zwischen dem Widerstandsbeiwert ζ_{sp} und der bezogenen Sprudelschichthöhe h_{sp}/h_f erhält man mit den Gleichungen (17.49) und (17.52) den Zusammenhang:

$$\zeta_{sp} = \frac{1}{[1 + 2,82 \cdot 10^{-2} (\{h_{sp}/h_f\}^4 - 1)]^{1/4}}. \quad (17.53)$$

Hieraus erkennt man, daß $\zeta_{sp} \sim 1/(h_{sp}/h_f)$ wird, wenn h_{sp}/h_f sehr große Werte annimmt, die für den praktischen Betrieb von Bodenkolonnen aber kaum noch von Interesse sind.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß nach KUTZER die zur Berechnung des nassen Druckverlustes mitgeteilten Gleichungen nicht nur für Zylinder- und Flachglocken gelten, sondern auch für Ventile.

17.432 Berechnungsgleichungen von Davies

DAVIES [17.27] teilt den trockenen Druckverlust

$$\Delta p_t = \Delta p_k + \Delta p_{ur} + \Delta p_a \quad (17.54)$$

in drei Anteile auf, wovon Δp_k den Verlust im Kamin, Δp_{ur} den Verlust im Umlenk- und im Ringquerschnitt sowie Δp_a den Verlust im Austrittsquerschnitt erfaßt. Die Bezeichnungen sind in *Bild 17.2* und Abschnitt 17.22 erläutert worden. Für diese drei Anteile gelten folgende Formeln:

$$\Delta p_k = 11,524 d_k (\varrho_G^{1/2} w_k)^{2,09} [\text{N/m}^2] \quad \text{für } F_u > F_k, \quad (17.55)$$

$$\Delta p_k = 10,211 d_k \sqrt{F_k/F_u} (\varrho_G^{1/2} w_k)^{2,10} [\text{N/m}^2] \quad \text{für } F_u > F_k, \quad (17.56)$$

$$\Delta p_{ur} = 1,932 [\varrho_G^{1/2} w_k 2 F_k^2 / (F_g F_m)]^{1,71} [\text{N/m}^2], \quad (17.57)$$

$$\Delta p_a = 11,055 [(\varrho_G d_g)^{1/2} w_k F_k / F_a]^{1,73} [\text{N/m}^2]. \quad (17.58)$$

In Gl.(17.57) bedeuten F_g die innere Querschnittsfläche der Glockenkappe und F_m die kleinere der Flächen F_u und F_r . Zur Auswertung der obigen Gleichungen ist das physikalische Maßsystem mit den Grundeinheiten m, kg, s zu verwenden. Den Druckverlust erhält man dann in der Einheit N/m^2 ($1 \text{ N} = 1 \text{ Newton} = 1 \text{ kg m/s}^2$). Zwischen dem in mm WS (Wassersäule) und in N/m^2 ausgedrückten Druckverlust besteht der Zusammenhang: $1 \text{ mm WS} = 9,81 \text{ N/m}^2$.

Bei Anwesenheit von Flüssigkeit auf dem Boden berechnet DAVIES unmittelbar den Gesamtdruckverlust Δp , der sich jedoch wie folgt aus zwei Anteilen zusammensetzt:

$$\Delta p = \Delta p_0 + (h_{fo} + 0,5 \Delta h) g \varrho_f / \varrho_w \quad [\text{N/m}^2]. \quad (17.59)$$

Hierin werden mit h_{fo} die mittlere Flüssigkeitshöhe über dem Glockenrand (bei gezacktem oder geschlitztem Glockenrand: über der Zacken- oder Schlitzoberkante), mit Δh das Flüssigkeitsgefälle gemäß *Bild 17.5*, mit g die Erdbeschleunigung, mit ϱ_f die Flüssigkeitsdichte und mit ϱ_w die Dichte von Wasser bei gleicher Temperatur bezeichnet. Ferner wird mit Δp_0 der Anteil des gesamten Druckverlustes bezeichnet, wenn für die Flüssigkeit nur die Höhe vom Boden bis zum Glockenrand bzw. bis zur Zacken- oder Schlitzoberkante eingeführt wird. Der Anteil Δp_0 wird im englischen und amerikanischen Schrifttum häufig «zero seal pressure drop» genannt.

Zur Berechnung von Δp_0 gibt DAVIES die Gleichung

$$\Delta p_0 = \frac{\Delta p_t}{C_0} \quad (17.60)$$

an, wobei

$$C_0 = f \left(\frac{\dot{V}_G}{F_a} \sqrt{\frac{\varrho_G F_a}{\varrho_f F_r}} \right) \quad (17.61)$$

eine Funktion des Volumstromes \dot{V}_G des Gases, der Dichten ρ_G und ρ_f des Gases und der Flüssigkeit sowie der Querschnittsflächen F_a und F_r ist. In *Bild 17.19* ist C_0 angegeben.

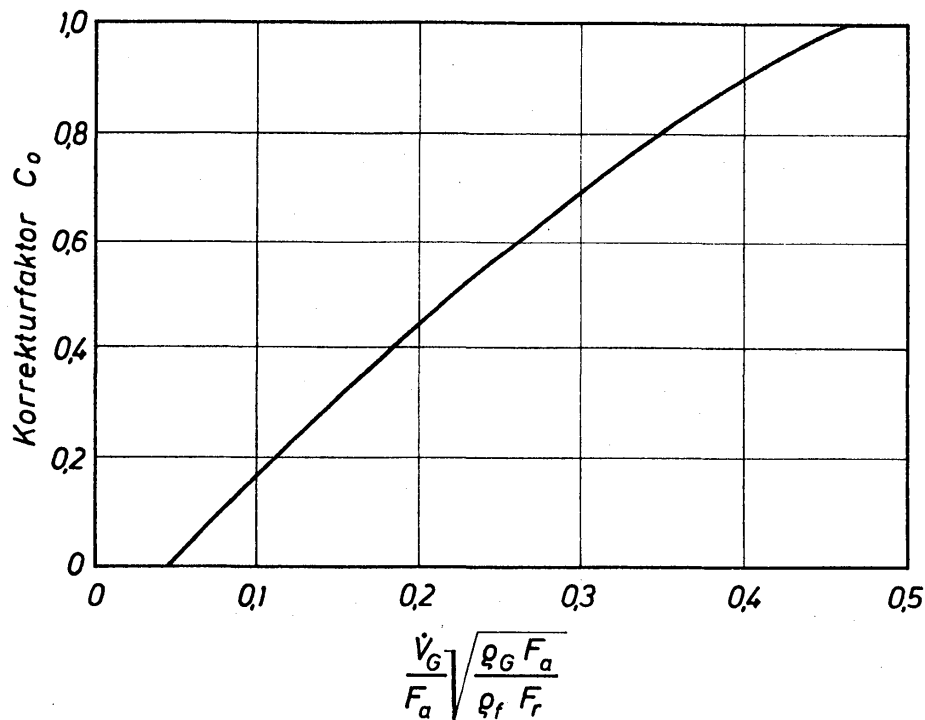


Bild 17.19. Korrekturfaktor C_0 zur Berechnung des Druckverlustes Δp_0 gemäß Gl. (17.60)

17.44 Druckverlust von Ventilböden

Verfahren zur Berechnung des gesamten Druckverlustes von Ventilböden haben DYTNERSKII, KASSATKIN, KOCHERGIN und GERVITS [17.32], HOPPE [17.33] und KUTZER [17.20] entwickelt. Bei einem Vergleich dieser Verfahren stellte KUTZER [17.3] fest, daß sie für den trockenen Druckverlust etwa gleich große Werte liefern. Beim nassen Druckverlust sind die nach dem Verfahren von KUTZER berechneten Werte aber teilweise doppelt so groß wie die nach den anderen Verfahren berechneten. Welches der drei Verfahren das zuverlässigste ist, läßt sich noch nicht mit Sicherheit sagen. Aus diesem Grunde sollen in den folgenden Abschnitten die von HOPPE und KUTZER mitgeteilten Berechnungsverfahren erörtert werden.

17.441 Allgemeine Beschreibung

Die durch den Aufbau des Ventils bedingte Wirkungsweise hat einen ausgeprägten Einfluß auf die Abhängigkeit des Druckverlustes von der Gasgeschwindigkeit. Der Aufbau des Ventils ist in Abschnitt 17.24 bereits eingehend beschrieben worden. Es unterscheidet sich von einer Glocke durch die beweglich angeordnete Ventilkappe. Innerhalb eines bestimmten Bereiches der Gasbelastung ist daher die Austrittshöhe veränderlich.

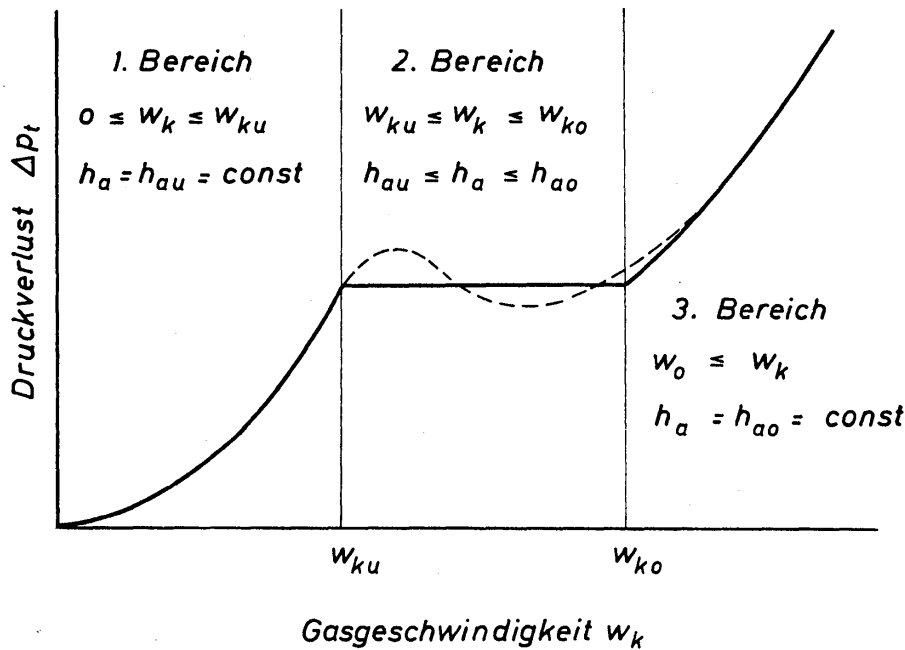


Bild 17.20. Zur Erläuterung des Druckverlustes von Ventilböden

In *Bild 17.20* ist der trockene Druckverlust abhängig von der Gasgeschwindigkeit im Kamin w_k in schematisierter Form dargestellt. Die Druckverlustkurve läßt sich in drei Bereiche unterteilen. Im 1. Bereich ruht die Ventilkappe mit den Nocken auf der Bodenplatte, die Öffnungshöhe ist konstant und somit gleich h_{au} . Die Massenkraft $m_g g$ der Ventilkappe ist so groß, daß die Kappe vom Gasstrom noch nicht abgehoben werden kann. Mit m_g wird die Masse der Kappe und mit g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Erst bei Erreichen der Grenzgeschwindigkeit w_{ku} besteht Gleichgewicht zwischen der Massenkraft der Kappe und der Druckkraft des Gases. Die Grenzgeschwindigkeit w_{ku} ist daher von der Masse der Kappe abhängig.

Wird die untere Grenzgeschwindigkeit w_{ku} überschritten, dann hebt der Gasstrom die Ventilkappe vom Boden ab. Die Austrittshöhe h_a wird also größer als h_{au} . Da die Ventilkappe im Gasstrom schwebt, müßte der Druckverlust konstant bleiben. Tatsächlich ändert sich jedoch der Druckverlust näherungsweise entsprechend der gestrichelten Kurve in *Bild 17.20*. Die obere Grenze des zweiten Bereiches ist erreicht, wenn der Gasstrom die Kappe so weit angehoben hat, daß die Öffnungshöhe h_a den maximalen Wert h_{ao} angenommen hat. Die Gasgeschwindigkeit ist dann gleich w_{ko} .

Im dritten Bereich ist die Öffnungshöhe mit $h_a = h_{ao}$ und somit auch der Austrittsquerschnitt mit $F_a = F_{ao} = d_g \pi h_{ao}$ konstant. Der Druckverlust ändert sich folglich wieder mit dem Quadrat der Geschwindigkeit w_k .

17.442 Berechnungsgleichungen von Kutzer

Der beim Durchströmen von Ventilen insgesamt auftretende Druckverlust Δp setzt sich gemäß Gl. (17.37) additiv aus einem trockenen und einem nassen Druckverlust zusammen. In zahlreichen Versuchen mit Ventilen unterschiedlicher Abmessungen hat KUTZER festgestellt, daß der trockene Druckverlust Δp_t im ersten

und im dritten Belastungsbereich mittels der für Flachglocken bereits erörterten Gl.(17.45) berechnet werden kann.

Für den zweiten Bereich, in dem die Ventilkappe vom Gasstrom in Schwebelage gehalten wird, folgt aus dem Gleichgewicht von Massen- und Druckkraft der Druckverlust zu

$$\Delta p'_{t_2} = \frac{m_g g}{F_k}. \quad (17.62)$$

Aus den experimentellen Untersuchungen ergab sich, daß der so berechnete Druckverlust etwas zu klein ist und mit dem Faktor 1,1 multipliziert werden muß. Als Berechnungsgleichung erhält man also:

$$\Delta p_{t_2} = 1,1 \frac{m_g g}{F_k}. \quad (17.63)$$

Mit m_g wird die Masse der Ventilkappe mit Stegen und Nocken, mit g die Erdbeschleunigung und mit $F_k = d_k^2 \pi/4$ der Kaminquerschnitt bezeichnet.

Der Betrieb von Ventilböden soll nach Möglichkeit innerhalb des zweiten Belastungsbereiches erfolgen. Aus diesem Grunde müssen also die untere und die obere Grenzgeschwindigkeit bekannt sein. Beide Grenzgeschwindigkeiten erhält man aus Gl.(17.63), wenn man für Δp_{t_2} den aus Gl.(17.45) berechneten Wert $\zeta_t \rho_G w_k^2/2$ einführt:

$$w_{ku} \text{ bzw. } w_{ko} = \sqrt{\frac{2 m_g g}{\rho_G F_k} \frac{1}{\zeta_t}}. \quad (17.64)$$

Hierin ist ζ_t der Widerstandsbeiwert gemäß *Bild 17.18*, der vom Flächenverhältnis F_u/F_k und von der bezogenen Kaminhöhe h_k/d_k abhängt. Das Verhältnis h_k/d_k ist bei einem gegebenen Ventil unveränderlich. Veränderlich ist beim Betrieb von Ventilböden die Umlenkfläche F_u . An der unteren Grenze mit $w_k = w_{ku}$ ist daher $(F_u/F_k)_u \approx 4 h_{au}/d_k$ und an der oberen Grenze mit $w_k = w_{ko}$ ist $(F_u/F_k)_o \approx 4 h_{ao}/d_k$.

Da bei den praktisch üblichen Ventilen an der unteren Belastungsgrenze $(F_u/F_k)_u$ stets kleiner als 1 ist, läßt sich für den Widerstandsbeiwert ζ_t Gl.(17.46) zur Berechnung von w_{ku} verwenden. Für die untere Grenzgeschwindigkeit ergibt sich dann die Beziehung:

$$w_{ku} = \sqrt{0,67 \frac{m_g g}{\rho_G} \frac{(F_u/F_k)_u^{1,65}}{F_k}}. \quad (17.65)$$

An der oberen Belastungsgrenze ist $(F_u/F_k)_o$ praktisch immer größer als 1. Gemäß *Bild 17.18* ist ζ_{to} dann unabhängig vom Flächenverhältnis und nur noch eine Funktion der bezogenen Kaminhöhe h_k/d_k . Da h_k/d_k bei den praktisch üblichen Ventilen gleich oder kleiner als 0,1 ist, darf $\zeta_{to} = 3$ gesetzt werden. Somit folgt also für die obere Grenzgeschwindigkeit w_{ko} die Beziehung:

$$w_{ko} = \sqrt{0,67 \frac{m_g g}{\rho_G F_k}}. \quad (17.66)$$

Bildet man das Verhältnis aus oberer und unterer Grenzgeschwindigkeit, so erhält man ein Maß für die Breite des günstigsten Belastungsbereiches von Ventilböden. Mit den Gleichungen (17.65) und (17.66) ergibt sich das Geschwindigkeitsverhältnis zu

$$\frac{w_{ko}}{w_{ku}} = \left(\frac{F_k}{F_u} \right)^{0,825} = \left(\frac{1}{4} \frac{d_k}{h_{au}} \right)^{0,825} \quad (17.67)$$

Der günstigste Belastungsbereich läßt sich also nur durch Vergrößern von d_k/h_{au} ausweiten. Ein üblicher Wert für d_k/h_{au} ist 21, dann wird $w_{ko}/w_{ku} \approx 4$.

Der nasse Druckverlust $\Delta p_f = \Delta p_\sigma + \Delta p_{sp}$ läßt sich bei Ventilböden mit den für Glockenböden mitgeteilten Gleichungen in Abschnitt 17.4312 berechnen. Für Δp_σ gilt Gl.(17.47) und für Δp_{sp} Gl.(17.48) mit Gl.(17.49).

17.443 Berechnungsgleichungen von Hoppe

Die von HOPPE zur Aufstellung der Druckverlustgleichungen verwendeten Meßwerte stammen aus Versuchen an Kolonnen, deren Durchmesser $d_s = 0,6$ m, 0,8 m und 1,2 m betragen. Der Bodenabstand war in allen Fällen 0,5 m. Der Durchmesser der Ventilkappen wurde zwischen $d_g = 47,5$ mm und $d_g = 100$ mm und der Durchmesser der Löcher zwischen $d_k = 30$ mm und $d_k = 70$ mm geändert. Das Durchmesser Verhältnis d_g/d_k lag in den meisten Fällen in der Nähe von 1,4. Die Wehrhöhe h_w , durch die der Flüssigkeitsstand auf dem Boden weitgehend festgelegt wird, wurde bei den Versuchen zwischen 30 mm und 75 mm verändert. Ferner änderte HOPPE den auf die Wehrlänge l_w bezogenen Volumstrom der Flüssigkeit zwischen 2,8 m³/m h und 18,5 m³/m h. Als Mindestwerte für die Masse m_g der Ventilkappen werden bei Kappendurchmessern von $d_g = 50$ mm, 75 mm und 100 mm 35 g, 80 g und 140 g empfohlen.

Für den Druckverlust des trockenen Bodens teilte HOPPE in den drei Bereichen Gleichungen mit, die sich in folgender Form schreiben lassen:

$$\zeta_{t_1} = K_1, \quad (17.68)$$

$$\zeta_{t_2} = K_{21} \frac{m_g g / F_k}{\rho_G w_k^2 / 2} + K_{22}, \quad (17.69)$$

$$\zeta_{t_3} = K_3. \quad (17.70)$$

Hierin ist der Widerstandsbeiwert ζ_{ti} ($i = 1$ bis 3) wie folgt definiert:

$$\zeta_{ti} \equiv \frac{\Delta p_{ti}}{\rho_G w_k^2 / 2}. \quad (17.71)$$

Mit K_1 bis K_3 werden die folgenden Funktionen von Flächenverhältnissen bezeichnet:

$$K_1 = 6,9 \left(\frac{F_k}{F_{au}} \right)^{1,2}, \quad (17.72)$$

$$K_{21} = 1,342 \cdot 10^{-2} \left(\frac{F_a}{F_k} \right)^{2,49} \cdot e^{5,91 (F_k/F_a)}, \quad (17.73)$$

$$K_{22} = 1,84 \left(\frac{F_k}{F_{ao}} \right)^{2,95}, \quad (17.74)$$

$$K_3 = 4,24 \left(\frac{F_k}{F_{ao}} \right)^{0,8}. \quad (17.75)$$

Mit $F_k = d_k^2 \pi / 4$ wird die Querschnittsfläche des Kamins bezeichnet, mit $F_{au} = d_g \pi h_{au}$ die Austrittsfläche unter dem Rand der Ventilkappe bei unterster Ventilstellung, mit $F_a = d_g \pi h_a$ die bei beliebiger Ventilstellung und mit $F_{ao} = d_g \pi h_{ao}$ die bei oberster Ventilstellung.

Der Übergang vom ersten zum zweiten Bereich erfolgt bei der Geschwindigkeit

$$w_{ku} = \left(\frac{K_{21}}{K_1} \frac{2 m_g g}{F_k \varrho_G} \right)^{1/2} \quad (17.76)$$

und vom zweiten zum dritten Bereich bei der Geschwindigkeit

$$w_{ko} = \left(\frac{K_{21}}{K_3 - K_{22}} \frac{2 m_g g}{F_k \varrho_G} \right)^{1/2}. \quad (17.77)$$

Mittels dieser Gleichungen läßt sich feststellen, in welchem der drei Bereiche der Betriebspunkt des Ventilbodens liegt und mit welchem der drei Widerstandsgesetze der Druckverlust zu berechnen ist.

Das Widerstandsgesetz für den dritten Bereich läßt sich mit dem für Siebböden bei hohen Werten der Reynoldszahl vergleichen. Für Siebböden ergibt sich dann $\zeta_t \approx 1,6$. Für Ventilböden erhält man mit $F_k/F_{ao} = 1$ den Beiwert $\zeta_{ts} = 4,24$. Der Widerstandsbeiwert von Ventilböden ist also etwa 2,5 mal so groß wie der von Siebböden.

Zur Berechnung des durch die Flüssigkeit bedingten zusätzlichen Druckverlustes Δp_f gibt HOPPE eine Gleichung an, die sich in der folgenden Form schreiben läßt:

$$\frac{\Delta p_f}{g \varrho_f h_w} = 2,73 \left(\frac{d_s}{d_k \sqrt{z_g}} \right)^{1/2} \frac{Fr_F^{0,175}}{h_w^{0,15}}. \quad (17.78)$$

Hierin bedeuten d_s den Säulendurchmesser, h_w die Wehrhöhe, ϱ_f die Flüssigkeitsdichte, z_g die Zahl der Ventile auf dem Boden und

$$Fr_F = \frac{\dot{V}_F^2}{g L} \quad (17.79)$$

eine Froudezahl mit

$$\dot{V}_F = \frac{\dot{V}_f}{F_s - 2 F_{\ddot{u}}}. \quad (17.80)$$

\dot{V}_f ist der Volumstrom der Flüssigkeit, F_s der Säulenquerschnitt, $F_{\ddot{u}}$ die Querschnittsfläche eines Überlaufbeckers (siehe *Bild 17.5*) und L der Abstand zwischen den beiden Wehren. Bei der Auswertung von Gl.(17.78) ist zu beachten, daß sie nicht dimensionsrichtig ist; zur Berechnung von $h_w^{0,15}$ ist h_w in m einzusetzen. HOPPE hat zahlreiche Meßwerte mit den angegebenen Gleichungen ver-

glichen. Die maximale Abweichung des gemessenen vom berechneten Druckverlust beträgt nicht mehr als $\pm 10\%$.

Der Vorteil der von HOPPE mitgeteilten Gleichungen besteht darin, daß sie aus den Ergebnissen von Versuchen an halbtechnischen Anlagen entwickelt wurden. Andererseits scheint ihr Aufbau nicht immer sinnvoll zu sein. Das kommt beispielsweise auch darin zum Ausdruck, daß man bei der Berechnung von w_{ko}/w_{ku} erheblich zu große Werte erhält, die mit Versuchsergebnissen von KUTZER nicht übereinstimmen. Darüber hinaus ist w_{ko}/w_{ku} proportional h_{au}/d_k , wohingegen Gl. (17.67) von KUTZER die umgekehrte Proportionalität zeigt. Weitere Versuche zur Klärung der Druckverlustgesetze für Ventilböden sind daher erwünscht.

Schrifttum

- [17.1] M. RYLEK und G. STANDART, The hydraulics of sieve trays, *Int. Chem. Eng.* 4 (1964) 4, 711–47
- [17.2] W. DIERY, *Berechnung und Entwurf von Glockenböden*, Dipl.-Arbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik, Technische Hochschule München 1960, Band I, II und III
- [17.3] H. KUTZER, *Glockenböden – Ventilböden, Unterlagen für Konstruktion und Berechnung*, unveröffentlichter Bericht des Lehrstuhls für Verfahrenstechnik und Laboratorium für verfahrenstechnische Grundvorgänge der Technischen Hochschule München
- [17.4] W. L. BOLLES, Optimum bubble-cap tray design, *Petroleum Processing* 11 (1956) 2, 64–80; 3, 82–95; 4, 72–9; 5, 109–20
- [17.5] ● K. HOPPE und M. MITTELSTRASS, *Grundlagen der Dimensionierung von Kolonnenböden*, Band 61 der Technischen Fortschrittsberichte, Verlag Steinkopff, Dresden 1967
- [17.6] R. KOCH und J. KUZNIOR, Hydraulic calculation of a weir sieve tray, *Int. Chem. Eng.* 6 (1964) 4, Part 1 S. 618–25, Part 2 S. 626–30
- [17.7] F. KNEULE und E. ZELFEL, Zur Berechnung von Siebböden, *Wärme* 70 (1963/64) 1, 6–14
- [17.8] ● E. KIRSCHBAUM, *Destillier- und Rektifizierteknik*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1969
- [17.9] V. P. PAVLOV, Determination of the total resistance of a bubbler sieve plate, *Int. Chem. Eng.* 4 (1964) 4, 680–4
- [17.10] T. HOBLER, R. KRUPCIZKA und J. CZAJKA, Study of flow on slotted trays and sieve plates, *Int. Chem. Eng.* 4 (1964) 3, 395–9
- [17.11] A. MERSMANN, Druckverlust und Schaumhöhen von gasdurchströmten Flüssigkeitsschichten auf Siebböden, *VDI-Forschungsh.* 491, VDI-Verlag, Düsseldorf 1962
- [17.12] E. ZELFEL, *Experimentelle Untersuchungen des Druckverlustes an Siebböden*, Diss. Technische Hochschule München 1966
- [17.13] ● B. ECK, *Technische Strömungslehre*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960
- [17.14] G. A. HUGHMARK und H. E. O'CONNELL, Design for perforated plate fractionating towers, *Chem. Eng. Progr.* 53 (1957) 3, 127–32
- [17.15] H. A. MOSER, *Untersuchung des Druckverlustes von dünnen Lochplatten*, Diplomarbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin 1969
- [17.16] I. J. IDELJCIK, Die Berechnung des hydraulischen Widerstands trockener Siebböden und Trennwände, *Chimiceskaja Promyslennost (Chem. Ind.)* (russisch) 1960, 3, 247

- [17.17] K. BLECHSCHMIDT, Ein Beitrag zur Berechnung von Siebböden, *Chem. Tech.* 13 (1961) 10, 567-77
- [17.18] A. J. TELLER, S. I. CHENG und H. A. DAVIES, Protruded sieve-tray performance, *AIChE J.* 9 (1963) 3, 407-10
- [17.19] M. HORADA, H. ADACHI, W. EGUCHI und S. NAGATA, Studies of fluid mixing on sieve plates, *Int. Chem. Eng.* 4 (1964) 1, 165-73
- [17.20] H. KUTZER, *Experimentelle Untersuchung der Strömungsvorgänge in Glocken- und Ventilböden*, Dissertation, Technische Hochschule München 1968
- [17.21] ● O. TIETJENS, *Strömungslehre*, 1. Band, S. 291, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960
- [17.22] ● F. HERNING, *Grundlagen und Praxis der Mengenstrommessung*, S. 66, VDI-Verlag, Düsseldorf 1959
- [17.23] W. S. NORMAN und G. J. GROCOTT, Factors affecting the performance of valve plates, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 39 (1961) 6, 305-12
- [17.24] ● C. S. ROBINSON und E. R. GILLILAND, *Elements of Fractional Distillation*, McGraw-Hill, 1950
- [17.25] ● J. M. COULSON und J. F. RICHARDSON, *Chemical Engineering*, Vol. II, Pergamon Press, 1962
- [17.26] ● A. G. KASSATKIN, *Chemische Verfahrenstechnik*, Band II, Verlag Technik, Berlin 1952
- [17.27] J. A. DAVIES, Bubble trays, design and layout, *Petroleum Refiner* 29 (1950) Part I: 8, S. 93-8; Part II: 9, S. 121-30
- [17.28] F. VAN HECKE, Pressure drop through bubble caps, *Chem. Eng.* 12 (1962) 11, 233-8
- [17.29] H. T. WELCH, Pressure drop through bubble caps, *Petroleum Refiner* 37 (1958) 8, 127-32
- [17.30] K. HOPPE, Vergleichende hydraulische Untersuchungen an Austauschböden, *Chem. Techn.* 17 (1965) 9, 527-33
- [17.31] H. E. EDULJEE, Design of bubble-cap distillation plates, Part I: Hydraulic behaviour, *Brit. Chem. Eng.* 9 (1964) 12, 820-6
- [17.32] Y. DYTNERSKII, A. G. KASSATKIN, N. V. KOCHERGIN und V. M. GERVITS, Calculating the hydraulics and mass transfer on valve plates, *Int. Chem. Eng.* 5 (1965) 1, 95-101
- [17.33] K. HOPPE, Druckverlust und Stoffaustausch in Ventilböden, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 11, 659-66

18 Gas-Flüssigkeits-Strömungen in Blasensäulen

18.1 Allgemeine Beschreibung

Die Blasensäule besteht im wesentlichen aus einem senkrecht angeordneten zylindrischen Gefäß, in dem Gasblasen durch eine Flüssigkeitsschicht aufsteigen. Das Gas wird über eine Verteilervorrichtung von unten in die Säule eingeleitet. Als Verteiler kommen grundsätzlich alle Vorrichtungen in Frage, mittels derer sich Blasen oder auch dünne Gasstrahlen erzeugen lassen. Vornehmlich werden Lochplatten, daraus abgeleitete Viellochdüsen und poröse Platten verwendet. Der Vorteil der Lochplatten besteht darin, daß man bei nicht zu hohen Gasbelastungen den Durchmesser der sich am Lochrand bildenden Blasen vorausberechnen kann. Hierauf wurde in Kapitel 6 bereits eingegangen.

Während die Gasphase die Säule stets kontinuierlich durchströmt, wird für die Flüssigkeitsphase sowohl die kontinuierliche als auch die diskontinuierliche Betriebsweise angewendet. Bei diskontinuierlicher Betriebsweise wechselt man die Flüssigkeit in größeren Zeitabständen aus. Wird die Flüssigkeit kontinuierlich durch die Säule geleitet, so kann sie sich sowohl im Gleichstrom als auch im Gegenstrom zur Gasphase bewegen. Diese beiden Möglichkeiten sind in *Bild 18.1 a* und *b* angedeutet. Ein Gleichstrom beider Phasen läßt sich auch dann erreichen, wenn

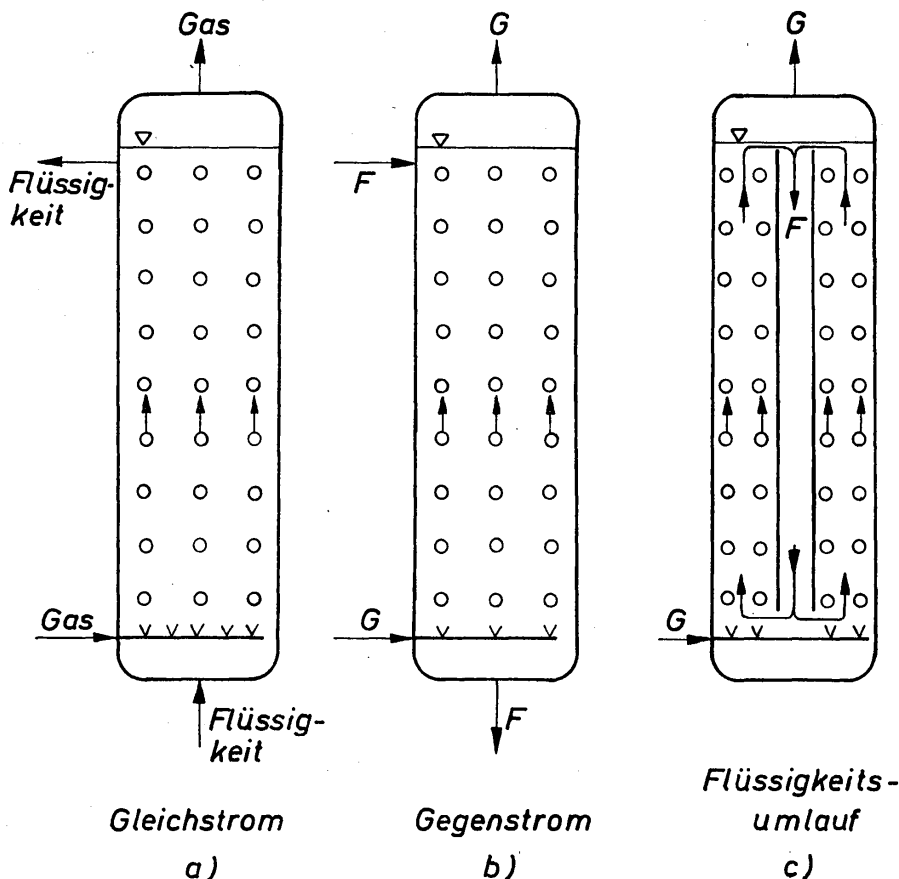


Bild 18.1
Beispiele für die Gas-
und Flüssigkeitsführung
in Blasensäulen

die Flüssigkeit für längere Zeit in der Säule bleibt. In diesem Falle wird die mit den Blasen aufsteigende Flüssigkeit durch einen gesonderten Strömungskanal wieder zurückgeführt. Eine von vielen Möglichkeiten für die Ausbildung einer Blasensäule mit kontinuierlichem Flüssigkeitsumlauf ist in *Bild 18.1c* dargestellt. Gas und Flüssigkeit bewegen sich gemeinsam in einem Ringkanal nach oben. Nach Trennung beider Phasen strömt die Flüssigkeit in dem konzentrisch angeordneten Umlaufrohr wieder zum Säulenboden.

Die gleichmäßige und störungsfreie Strömung durch die Säule setzt eine gleichmäßige Verteilung beider Phasen in der Säule voraus. Örtliche und zeitliche Schwankungen in der Phasenverteilung sollen nach Möglichkeit ausgeschlossen werden. Bei sehr kleinen Gas- und Flüssigkeitgeschwindigkeiten ist die gleichmäßige Phasenverteilung fast immer gewährleistet, so daß sich auch ein störungsfreier Durchfluß für beide Phasen einstellt.

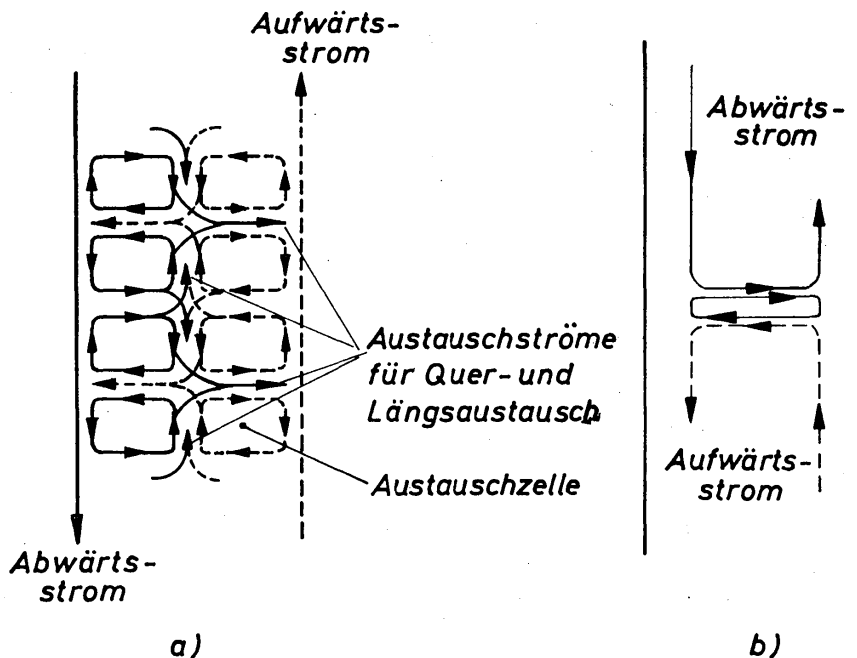


Bild 18.2
Zur Erläuterung
instabiler Bewegungs-
zustände und
Austauschvorgänge

Bei erhöhtem Gasdurchsatz kommt es jedoch sehr leicht zu Störungen in der Phasenverteilung und somit auch im Durchfluß. Diese Störungen sollen an Hand von *Bild 18.2* erläutert werden. Als Beispiel wurde der Gegenstrom von Gas und Flüssigkeit gewählt. Der von außen aufgezwungene Flüssigkeitsstrom ist nach unten gerichtet und in *Bild 18.2a* durch eine ausgezogene Linie dargestellt. Durch die aufsteigenden Gasblasen wird ein nach oben gerichteter Flüssigkeitsstrom hervorgerufen, der in *Bild 18.2a* durch eine gestrichelte Linie angedeutet ist. Somit bewegen sich also zwei Flüssigkeitsströme in entgegengesetzter Richtung durch die Säule. Der von den Blasen hervorgerufene Strom wird bei Erreichen der Flüssigkeitsoberfläche umgelenkt und führt somit einen Kreislauf innerhalb der Säule aus. Da sich beide Ströme in ständiger Berührung befinden, ist dieses Strömungssystem instabil. Es treten Schwankungsbewegungen sowohl in Quer- richtung als auch in Längsrichtung auf. Der Kreislauf der Flüssigkeit ist in viele kleine Kreisläufe unterteilt, so daß sich, schematisiert, die in *Bild 18.2a* skiz-

zierten Austauschzellen bilden. In jede Zelle treten Austauschströme ein, die den Massenaustausch zwischen dem Aufwärts- und dem Abwärtsstrom bewirken. Die Austauschströme rufen einen lebhaften Quer- und Längsaustausch hervor. Bereits kleine Störungen können zu einem Zusammenbruch der Austauschzellen führen. Tritt ein solcher Zusammenbruch ein, dann wird kurzzeitig eine Umlenkung des Abwärts- und des Aufwärtsstromes hervorgerufen, die in *Bild 18.2b* angedeutet ist. Das heißt also, daß unter solchen Bedingungen der normale Durchfluß zum Erliegen kommt. Es kann sich eine Dichteschichtung ausbilden, bei der das System mit der geringeren Dichte demjenigen mit der größeren überlagert ist. Der umgelenkte Abwärtsstrom verarmt, und der Aufwärtsstrom wird reich an Blasen. Auch ein derartiges System ist instabil, so daß sich unter dem Einfluß stets vorhandener Störungen nach kurzer Zeit wieder der normale Durchfluß mit geordneten Austauschzellen einstellt. Auf Grund dieser Vorstellung kann man annehmen, daß die Bewegung der gasförmigen und flüssigen Phase in einer Blasensäule durch eine Folge instabiler Strömungszustände führt. Hierauf ist es zumindest teilweise zurückzuführen, daß sich viele Untersuchungsergebnisse widersprechen und die Forschung bislang die Probleme der Blasensäule noch nicht lösen konnte. Die hier erörterte Vorstellung über die Struktur einer Blasensäule steht mit Beobachtungen bzw. mit der Deutung verschiedener Versuchsergebnissen von TOWELL, STRAND und ACKERMAN [18.1] sowie DE NEVERS [18.2] in Einklang.

Mittels der in *Bild 18.2a* dargestellten Austauschzellen läßt sich ein Vorgang erklären, der für den technischen Einsatz von Blasensäulen von ausschlaggebender Bedeutung ist. Der in den Austauschzellen ablaufende Massenaustausch hat zur Folge, daß sich örtliche Unterschiede in Temperaturen und Konzentrationen sehr schnell ausgleichen. Die Blasensäule zeichnet sich also dadurch aus, daß die Temperatur und die Konzentration über den Strömungsquerschnitt nahezu konstant sind. Der Queraustausch ist für alle Wärme- und Stoffübergangsvorgänge ohne und mit chemischen Reaktionen immer vorteilhaft. Durch die Serie von Austauschzellen, die in *Bild 18.2a* angedeutet ist, wird gleichzeitig aber auch ein Massenaustausch in Längsrichtung der Säule erzwungen. Dieser Längsaustausch ist im Gegensatz zum Queraustausch oft von Nachteil. Nur bei gewissen chemischen Umsetzungen ist der Austausch in Längsrichtung ebenfalls vorteilhaft oder zumindest nicht störend. Man bemüht sich, den Längs- und Queraustausch durch Mischungskoeffizienten zu erfassen, für die aber noch keine allgemein gültigen Gleichungen bekannt sind [18.3].

Die hervorragenden Austauschbedingungen in Querrichtung und die einfache Bauweise haben dazu geführt, daß die Blasensäule insbesondere als chemischer Reaktor häufig verwendet wird. KÖLBEL, HAMMER und LANGEMANN [18.4] sprechen von einer universellen Anwendbarkeit der Blasensäule als Reaktor. Den großen Vorteilen stehen indes auch gewichtige Nachteile gegenüber, die sich aus den instabilen Strömungszuständen ergeben. Es wird noch sehr viel Forschungsarbeit geleistet werden müssen, um herauszufinden, unter welchen Bedingungen ein störungsfreier Betrieb gewährleistet ist. Die bereits gebauten Blasensäulen

haben Durchmesser bis zu einigen Metern und Höhen bis zu 30 Metern. Mit zunehmendem Bauvolumen der Blasensäule werden die durch Instabilitäten ausgelösten räumlichen Strömungen immer unübersichtlicher. Das Ziel der Forschung sollte daher darin bestehen, Unterlagen für die Entwicklung von Blasensäulen mit höchster Leistung je Volumeinheit zu erarbeiten.

Um eine Blasensäule berechnen zu können, muß zunächst einmal bekannt sein, unter welchen Bedingungen sich von den vielen Möglichkeiten der Phasenverteilungszustände gerade die Blasenströmung einstellt [18.5]. Die verschiedenen Phasenverteilungszustände sind bereits in Abschnitt 15.12 beschrieben worden. Gemäß *Bild 15.4* muß man erwarten, daß sich bei zu hoher Gasbelastung die Kolbenströmung einstellt. Bei großen Säulendurchmessern wandeln sich die Gaskolben zu großen Suspensionsblasen um, in denen ein großes Gasvolumen mit mehr oder weniger Flüssigkeit gemischt ist. Die Bewegung solcher Suspensionsblasen führt zu pulsierenden Betriebszuständen. Die obere Grenze für die Gasbelastung sollte also stets so gewählt werden, daß der Betriebszustand genügend weit vom Übergang zur Kolbenströmung entfernt ist. Wie bereits in Abschnitt 15.12 betont wurde, läßt sich die Grenze zwischen Blasen- und Kolbenströmung bislang noch nicht genau angeben.

Die für den Ingenieur wichtigsten strömungstechnischen Größen zur Dimensionierung von Blasensäulen sind der volumetrische Gasgehalt bzw. die Höhe der Blasenschicht, die Phasengrenzfläche der Blasenschicht und der Druckverlust. Auf diese Größen wird in den weiteren Abschnitten eingegangen. Es ist notwendig, zuvor noch auf den Unterschied zwischen einer Blasenschicht und einer Schaumschicht hinzuweisen. Eine Blasenschicht bricht unmittelbar nach Abschalten des Gasdurchflusses zusammen; zurück bleibt die reine Flüssigkeit. Die Schaumschicht bleibt hingegen auch nach Abschalten des Gasdurchflusses noch über eine mehr oder weniger lange Zeit erhalten. Da eine klare Unterscheidung bislang noch nicht möglich ist, wird hier dem Vorschlag von MERSMANN [18.6] gefolgt, der von Schaumschichten spricht, wenn das Gas durch ein flüssiges Mehrstoffgemisch strömt. Den Schaumschichten ist ein gesonderter Abschnitt gewidmet.

Schließlich wird noch ein Problem behandelt, welches sich aus der Verwendung der Blasensäule als chemischer Reaktor ergab. Bei der Durchführung bestimmter katalytischer Gasreaktionen wird ein feinkörniger Katalysator in der Blasenschicht in Schwebelage gehalten. Hierbei liegt also ein dreiphasiges System vor.

18.2 Volumetrischer Gasgehalt und Höhe der Blasenschicht

Die Höhe h_s einer Blasenschicht hängt von der Schichthöhe h_f der Flüssigkeit und dem in der Blasenschicht befindlichen Gasvolumen V_G ab. Letzteres läßt sich bei gegebenem Säulenquerschnitt durch die «Höhe» h_G des Gases ausdrücken. Findet kein Flüssigkeitsdurchlauf durch die Säule statt, so ist h_f als gegebene Größe anzusehen; nur die Höhe h_G bzw. der Gasgehalt sind zu bestimmen. Der Gasgehalt c_G hängt von den Betriebsbedingungen ab. Er wird wie folgt definiert:

$$c_G \equiv \frac{V_G}{V_s} = \frac{V_G}{V_f + V_G}. \quad (18.1)$$

Mit V_s wird das Volumen der Blasenschicht bezeichnet, V_G und V_f sind die Volumina des in der Schicht befindlichen Gases und der Flüssigkeit. Der durch Gl. (18.1) definierte Gasgehalt ist ein Mittelwert für die gesamte Schicht. Um die Verbindung mit der Schichthöhe h_s herstellen zu können, wird zunächst die bezogene Höhe

$$h_s^* \equiv \frac{h_s}{h_f} \quad (18.2)$$

definiert. Berücksichtigt man $V_s = h_s d_s^2 \pi / 4$, $V_G = h_G d_s^2 \pi / 4$ und $V_f = h_f d_s^2 \pi / 4$, dann ergibt sich zwischen dem mittleren Gasgehalt c_G und der bezogenen Schichthöhe h_s^* folgender Zusammenhang:

$$c_G = 1 - \frac{1}{h_s^*}. \quad (18.3)$$

Aus den Gleichungen (18.1) und (18.3) folgt, daß der Flüssigkeitsgehalt

$$c_f \equiv \frac{V_f}{V_s} = \frac{V_f}{V_G + V_f} \quad (18.4)$$

mit dem Gasgehalt und der bezogenen Schichthöhe wie folgt zusammenhängt:

$$c_f = 1 - c_G = \frac{1}{h_s^*}. \quad (18.5)$$

Zahlreiche Messungen haben erkennen lassen, daß sich der Gasgehalt über die Höhe der Blasenschicht ändert. Nähere Auskünfte über den Gasgehalt einer Schicht erhält man also mittels des örtlichen Gasgehalts c'_G , definiert durch

$$c'_G \equiv \frac{\Delta V_G}{\Delta V_s} = \frac{\Delta V_G}{\Delta V_f + \Delta V_G}. \quad (18.6)$$

Zum Verständnis der Vorgänge in einer Blasenschicht müssen sowohl der örtliche als auch der mittlere Gasgehalt einer Blasenschicht oder deren bezogene Höhe bekannt sein. Auf diese Größen wird anschließend eingegangen.

18.21 Örtlicher Gasgehalt einer Blasenschicht

Der örtliche Gasgehalt c'_G ändert sich mit dem Abstand y vom Gasverteiler. In den *Bildern 18.3* und *18.4* sind einige von LANGEMANN und KÖLBEL [18.7] mitgeteilte Meßergebnisse für c'_G wiedergegeben. Die Versuche wurden an einer Blasensäule durchgeführt, die einen Innendurchmesser von $d_s = 92$ mm und eine Höhe von 5,20 m hatte. Als Gasverteiler diente eine Metallsinterplatte. Die verwendete Flüssigkeit war ein Mineralöl und das Gas war Kohlendioxid. Die *Bilder 18.3a* und *b* unterscheiden sich allein durch die Höhe der Gasgeschwindigkeit.

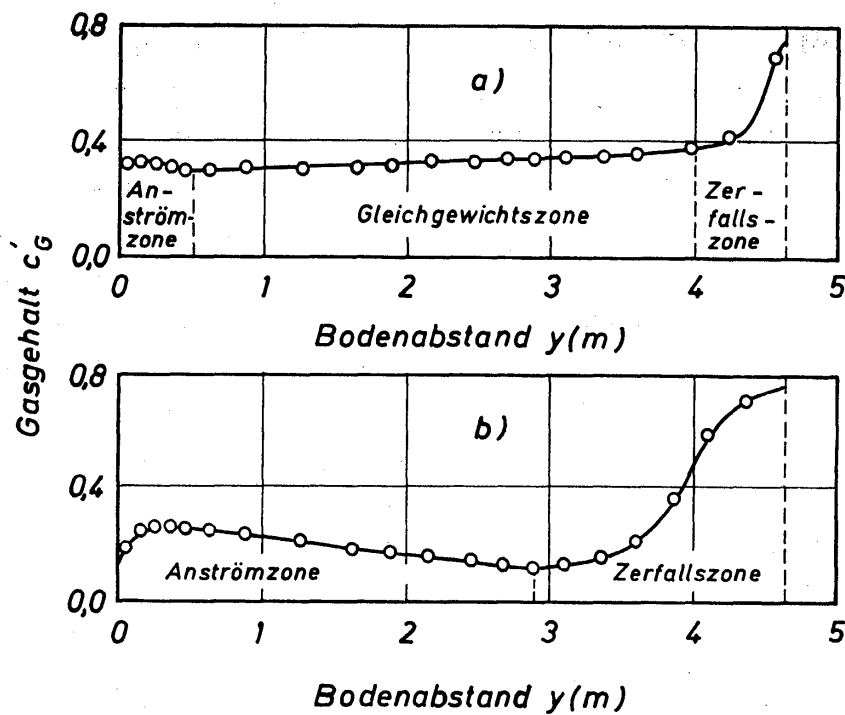


Bild 18.3. Abhängigkeit des örtlichen Gasgehaltes vom Bodenabstand für zwei verschiedene Gasgeschwindigkeiten; nähere Angaben im Text

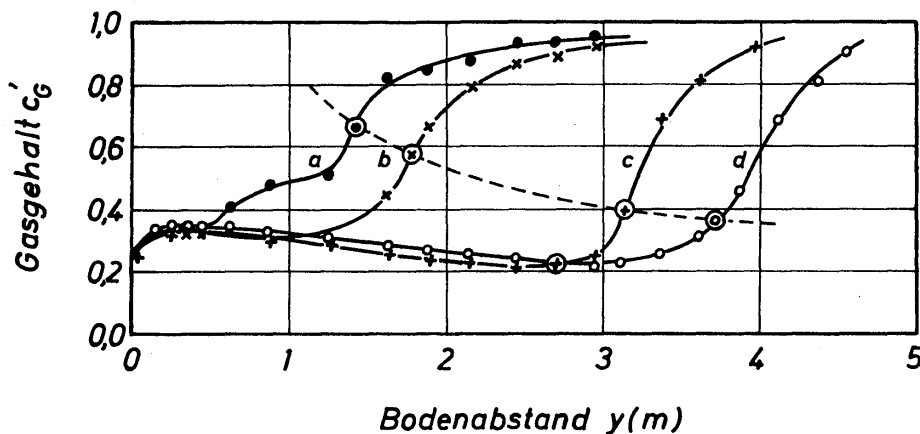


Bild 18.4. Abhängigkeit des örtlichen Gasgehaltes vom Bodenabstand für verschiedene Höhen h_f der Flüssigkeitsschicht; Kurve a: $h_f = 1,05$ m; Kurve b: $h_f = 1,40$ m; Kurve c: $h_f = 2,52$ m; Kurve d: $h_f = 2,97$ m; weitere Angaben im Text

Als maßgebende Geschwindigkeit wurde die auf den gesamten Querschnitt der Säule bezogene gewählt. *Bild 18.3a* gilt für eine Geschwindigkeit von 0,18 m/s und *Bild 18.3b* für eine Geschwindigkeit von 0,07 m/s.

Aus *Bild 18.3a* geht hervor, daß die Kurve für den örtlichen Gasgehalt drei Abschnitte aufweist, und zwar die Anströmzone, die Gleichgewichtszone und die Zerfallszone. Die in diesen drei Zonen ablaufenden Vorgänge sollen im folgenden gedeutet werden.

Die Anströmzone besteht aus zwei Abschnitten. Der erste Abschnitt weist einen steigenden und der zweite Abschnitt einen fallenden Gasgehalt auf. Innerhalb des ersten Abschnittes wird die Steiggeschwindigkeit der Blasen geringer. Unmittelbar nach Ablösung von den Öffnungen des Gasverteilers besitzen die Gas-

blasen eine Geschwindigkeit, die größer ist als diejenige, die durch das Gleichgewicht der Kräfte bei stationärer Bewegung einer Einzelblase festgelegt ist. Die Aufstiegs geschwindigkeit wird zunächst so lange verzögert, bis etwa die Gleichgewichtsgeschwindigkeit der Einzelblase erreicht ist. Von einer Einzelblase wird hier gesprochen, wenn die Bewegung einer Blase von benachbarten Blasen unbeeinflusst bleibt. Dieser Einfluß macht sich jedoch mit abnehmender Geschwindigkeit in zunehmendem Maße bemerkbar. Die Blase gerät dabei in den Schwarmverband vieler Blasen. Wie in Kapitel 7 ausführlich erörtert wurde, ist die Aufstiegs geschwindigkeit der im Schwarm befindlichen Blasen wesentlich niedriger als die der Einzelblasen. Das heißt, daß die Blasenbewegung weiterhin verzögert wird. Die Geschwindigkeit erreicht ein Minimum, wenn sich die Blase den Bedingungen der Schwarmbewegung angepaßt hat. Dabei erreicht der örtliche Gasgehalt einen maximalen Wert. Der erste Abschnitt der Anströmzone liegt also im Bereich der instationären, verzögerten Blasenbewegung. Der Blasendurchmesser bleibt während der verzögerten Bewegung unverändert. Es ist anzunehmen, daß die Ausdehnung des ersten Abschnittes durch die Art des Gasverteilers beeinflußt wird.

Im zweiten Abschnitt der Anströmzone, der in *Bild 18.3b* sehr lang ist, nimmt der Gasgehalt von dem örtlichen Maximum auf ein örtliches Minimum ab. Wie bereits gesagt wurde, hat sich die Blase am Ende des ersten Abschnittes in den Blasenschwarm eingeordnet. Der Blasendurchmesser blieb dabei unverändert. Im zweiten Abschnitt ändert sich nun der Durchmesser. In Kapitel 7 war ausgeführt worden, daß im Blasenschwarm sehr hohe Impulsströme auftreten. Die dadurch ausgelösten Schwankungsbewegungen lassen die Blasen zusammenstoßen, wobei die Oberflächenspannungskräfte überwunden werden und die Blasen zusammenwachsen können. Anschließend Teilungsvorgänge sind möglich. Als Ergebnis eines Anpassungsvorganges an die Bedingungen der neuen Umgebung entstehen Blasen mit einem neuen Durchmesser, der *Bild 18.3* zufolge etwas größer ist als der ursprüngliche. Die größeren Blasen haben eine größere Aufstiegs geschwindigkeit. Ihre Verweilzeit in der betrachteten Schicht wird somit geringer. Die Folge ist ein Absinken des örtlichen Gasgehaltes bis auf das bereits genannte Minimum. In der Anströmzone paßt sich also die Blase den besonderen Bedingungen der Schwarmbewegung an. Sie durchläuft dabei einen Verzögerungsabschnitt und einen Beschleunigungsabschnitt. Während der Verzögerung bleibt der Blasendurchmesser konstant; während der Beschleunigung vergrößert sich der Durchmesser durch Koaleszenz.

In der anschließenden Gleichgewichtszone dehnt sich die Blase mit abnehmendem hydrostatischen Druck aus. Obgleich die Steiggeschwindigkeit dabei etwas zunimmt, vergrößert sich der Gasgehalt ein wenig.

Innerhalb der Zerfallszone steigt der Gasgehalt schließlich steil an. Dieser Anstieg ist dadurch bedingt, daß die Blasen erst dann zerfallen können, wenn die Flüssigkeitsschalen, von denen die Blasen umschlossen werden, durch Zurückfließen der Flüssigkeit so dünn geworden sind, daß sie vom Innendruck der Blasen zerstört werden können.

Verringert man unter sonst gleichen Bedingungen die Gasgeschwindigkeit auf 0,07 m/s, so ergibt sich für den örtlichen Gasgehalt der in *Bild 18.3b* gezeigte Verlauf. Hierbei entfällt der mittlere Gleichgewichtsbereich. Die Anströmzone geht unmittelbar in die Zerfallszone über. Die Anströmzone ist im wesentlichen durch eine Abnahme des Gasgehalts, also durch Koaleszenz der Blasen, gekennzeichnet. Die große Ausdehnung der Anströmzone weist darauf hin, daß bei sehr kleinen Gasgeschwindigkeiten, die zur Bildung kleiner Blasen führen, die Anpassung der Blasen an die Bedingung der neuen Umgebung wesentlich längere Zeit benötigt. Kleine Blasen neigen auf Grund der großen Oberflächenspannungskraft weniger zum Koaleszieren als große.

Vergleicht man die Gasgehaltskurven in den *Bildern 18.3a* und *b*, so stellt man fest, daß sich der Gasgehalt in der Anströmzone bei einer Gasgeschwindigkeit von 0,18 m/s (*Bild 18.3a*) nur sehr wenig, bei einer Gasgeschwindigkeit von 0,07 m/s (*Bild 18.3b*) aber sehr stark ändert. Änderungen im Gasgehalt wurden mit Änderungen des Blasendurchmessers in Zusammenhang gebracht. Wünscht man also in einer Blasensäule eine allein vom hydrostatischen Druck abhängige Gaskonzentration, so muß man dafür sorgen, daß sich die Blasengröße nicht durch Koaleszenz oder Zerfall ändert. Das heißt, daß sich am Gasverteiler Blasen bilden müssen, die sich ohne wesentliche Durchmesseränderung den Bedingungen der Schwarmbewegung anpassen können. *Bild 18.3a* zufolge sollte man annehmen, daß sich derartige Blasen tatsächlich erzeugen lassen. Möglich ist das natürlich nur bei ganz bestimmten Betriebsbedingungen, also vornehmlich bei einer bestimmten Gasgeschwindigkeit. Ändert sich während des Betriebes die Gasbelastung, dann muß man einen örtlich veränderlichen Gasgehalt erwarten.

Die in *Bild 18.4* dargestellten Kurven gelten für eine Gasgeschwindigkeit von 0,06 m/s. Verändert wurde die Flüssigkeitshöhe h_f ; Kurve *a*: $h_f = 1,05$ m; Kurve *b*: $h_f = 1,40$ m; Kurve *c*: $h_f = 2,52$ m; Kurve *d*: $h_f = 2,97$ m. Bei allen vier Kurven geht die Anströmzone unmittelbar in die Zerfallszone über. Die Anströmzone ist um so kürzer, je niedriger die Flüssigkeitshöhe ist. Zum Vergleich ist in *Bild 18.4* als gestrichelte Kurve der mittlere Gasgehalt eingetragen. Daraus erkennt man, daß der mittlere Gasgehalt lediglich die Höhe der Blasenschicht zu kennzeichnen vermag, über die Struktur der Blasenschicht liefert er aber keine brauchbare Aussage. Eine solche Aussage ist insbesondere bei Verwendung der Blasensäule als chemischer Reaktor aber sehr erwünscht. Bisher ist es noch nicht gelungen, Gesetzmäßigkeiten für den örtlichen Gasgehalt aufzustellen. Man weiß auch noch nicht, in welcher Weise der Gasverteiler selbst die Ausdehnung und die Vorgänge in der Anströmzone beeinflusst.

18.22 Höhe einer Blasenschicht

Der mittlere Gasgehalt c_G und die bezogene Höhe $h_s^* \equiv h_s/h_f$ sind durch Gl. (18.3) miteinander verknüpft. REUSS [18.8] hat den Versuch unternommen, die im Schrifttum vorhandenen Meßwerte für h_s in dimensionsloser Form einheitlich darzustellen. Von den verfügbaren Meßwerten konnten nur die von MERSMANN

Tabelle 18.1: Angaben zu den Meßwerten in Bild 18.5

Verfasser	d_s mm	d_L mm	z	h_f mm	System Flüssigkeit/Gas	Reihe und Symbol
MERSMANN [18.6]	75,6	0,29	121	20	Wasser/Luft	1 ▲
				40		2 ○
				70		3 ◊
				100		4 *
				150		5 ■
				200		6 □
				20	Äthylalkohol/Luft	7 ▣
				40		8 ▤
				70		9 ⊠
				100		10 ⊡
				150		11 ⊢
				200		12 ⊣
				20	n-Octylalkohol/Luft	13 ⊞
				40		14 ⊟
				70		15 ◆
				100		16 ⊠
				150		17 ⊡
				200		18 ⊣
	77,5	0,50	91	20	Wasser/Luft	19 ⊙
				40		20 +
				70		21 ⊙
				100		22 ⊙
				150		23 ⊙
				200		24 ⊙
HARADA, ADACHI, EGUCHI und NAGATA [18.9]	100 × 100	2,0		35	Wasser/Luft	25 ⊕
				50		26 ⊙
				80		27 ●
MUKHLENOV [18.10]	86	2,0		20	Wasser/Luft	28 △
				40		29 ■
				60		30 ∪
				80		31 □
WEST, GILBERT und SHIMIZU [18.11]	81,4 × 89,2	3,18	19	Wasser/Luft	32 ▽	
			19		33 ⊠	
			19		34 ▽	
			83		35 ○	
			83		36 ⊞	

[18.6], HARADA, ADACHI, EGUCHI und NAGATA [18.9], MUKHLENOW [18.10] sowie WEST, GILBERT und SHIMIZU [18.11] verwendet werden, da nur für diese alle notwendigen Angaben vorhanden waren. Mittels der Dimensionsanalyse stellte REUSS die für die bezogene Schichthöhe h_s^* maßgebenden Kennzahlen auf. Für die Korrelation der Meßwerte erwies sich die folgende Funktion als gut geeignet:

$$h_s^* = f[Fr^{0,6} K_F^{0,07} (d_L/h_f)^{0,42}]. \quad (18.7)$$

Hierin treten als Kennzahlen die Froudezahl

$$Fr \equiv \frac{w_s^2}{g d_L}, \quad (18.8)$$

die Flüssigkeitskennzahl

$$K_F \equiv \frac{\rho \sigma^3}{g \eta^4} \quad (18.9)$$

und das Verhältnis d_L/h_f auf. Mit

$$w_s = \frac{\dot{V}_G}{d_s^2 \pi/4} \quad (18.10)$$

wird die Gasgeschwindigkeit in der leeren Säule bezeichnet. Es bedeuten \dot{V}_G Volumstrom des Gases, d_s Säulendurchmesser, d_L Durchmesser der im Siebboden befindlichen Löcher, g Erdbeschleunigung, ρ Flüssigkeitsdichte, η dynamische Viskosität der Flüssigkeit und σ Oberflächenspannung. Unberücksichtigt blieben in Gl. (18.7) die Verhältnisse d_s/d_L und t/d_L , wobei d_s der Säulendurchmesser und t die Lochteilung ist. Die verfügbaren Meßwerte ließen keinen Einfluß dieser Verhältnisse erkennen. Damit ist nicht gesagt, daß sie keinen Einfluß ausüben können. Man darf aber erwarten, daß der Einfluß des Kolonnendurchmessers bei kleineren Abmessungen gering oder vernachlässigbar ist. Überschreitet der Kolonnendurchmesser jedoch einen noch nicht bekannten Wert, dann ist ein Einfluß denkbar, da sich in sehr großen Kolonnen räumliche Strömungen ausbilden können, die in kleinen Kolonnen wegen der großen Reibungskräfte nicht auftreten. Man wird die Gültigkeit der erzielten Ergebnisse daher auf Kolonnen mit nicht zu großen Durchmessern beschränken müssen. Die Teilung t wird im allgemeinen bedeutungslos sein, da sie bei üblichen Siebböden wesentlich größer ist als der Lochdurchmesser und somit eine gegenseitige Behinderung der Blasen während der Bildung weitgehend ausgeschlossen wird.

Die Meßwerte sind in *Bild 18.5* dargestellt. Nähere Angaben zu diesen Meßwerten enthält Tabelle 18.1. Hiernach lag der bei den Versuchen verwendete Säulendurchmesser d_s zwischen 75 und 100 mm, der Lochdurchmesser zwischen 0,29 und 3,18 mm, die Lochzahl z zwischen 19 und 121 und die Flüssigkeitshöhe h_f zwischen 20 und 200 mm. Als Gas wurde in allen Fällen Luft, und als Flüssigkeiten wurden Wasser und verschiedene Alkohole verwendet.

Für die Abhängigkeit der bezogenen Schichthöhe h_s ergeben sich gemäß *Bild 18.5* drei Bereiche. Bei kleinen Gasgeschwindigkeiten in der Säule, d. h. bei kleinen

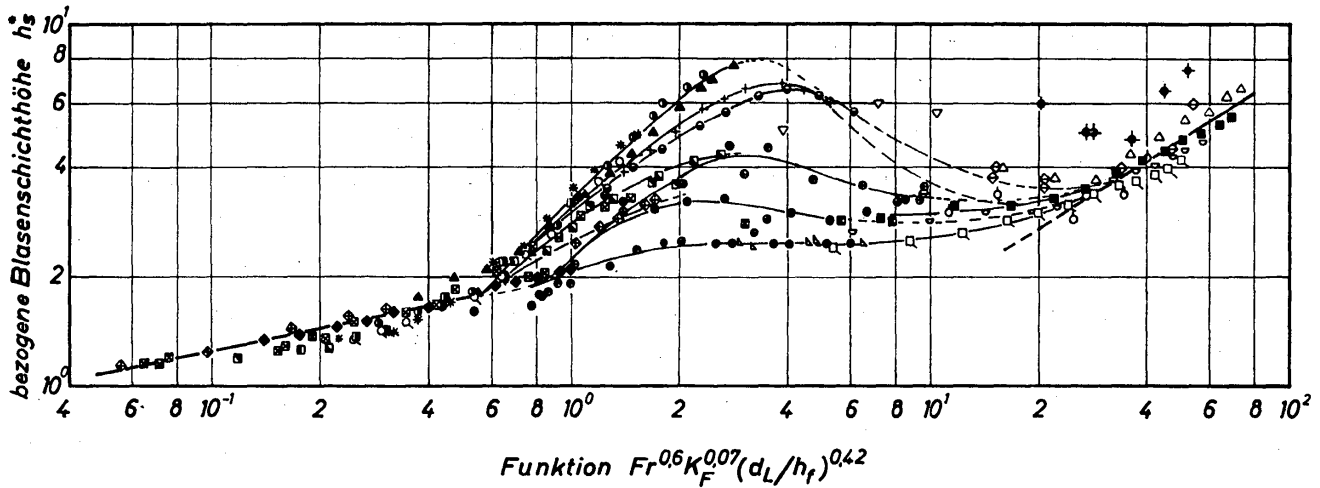


Bild 18.5. Meßwerte für die bezogene Höhe h_s^* von Blasenschichten; Angaben über die Meßwerte sind in Tabelle 18.1 zusammengestellt

Werten der Froudezahl, steigen die Blasen mit nur geringer gegenseitiger Behinderung auf. Der Anstieg der bezogenen Schichthöhe ist daher auch nur gering. Alle Meßwerte werden durch einen Kurvenzug ausgeglichen. Nach Überschreiten einer bestimmten Gasgeschwindigkeit bildet sich eine Blasenschicht mit sehr dichter Packung der Blasen. In diesem Bereich ergibt sich eine Kurvenschar. Die bezogene Schichthöhe steigt teilweise sehr stark an, durchläuft ein Maximum und fällt dann wieder ab. Der Abfall ist darauf zurückzuführen, daß einzelne in der Schicht befindliche Blasen zerplatzen. Im Bereich sehr hoher Geschwindigkeiten ordnen sich die Meßwerte schließlich wieder um eine einzige Ausgleichskurve. Auf diese drei Bereiche soll im folgenden näher eingegangen werden.

Im unteren Bereich, der sich bis zur oberen Grenze

$$Fr^{0,6} K_F^{0,07} (d_L/h_f)^{0,42} \approx 0,7 \quad (18.11)$$

erstreckt, verfügen die Blasen zunächst über eine große Bewegungsfreiheit. Mit Annäherung an die obere Grenze wird die Packungsdichte stetig größer, so daß der Gasgehalt c_G etwa den Wert 0,5 erreicht, woraus h_s^* zu 2,0 folgt. Der Gasgehalt $c_G = 0,6$ entspricht etwa dem Wert für die dichteste Packung von Kugelblasen. Hierbei ist die Blasenbeweglichkeit aber weitgehend aufgehoben. Mit $c_G = 0,5$ ergibt sich für die Blasen also noch eine begrenzte Bewegungsmöglichkeit. Die zunehmende Packungsdichte ist darauf zurückzuführen, daß mit ansteigender Gasgeschwindigkeit mehr Blasen erzeugt werden. Je mehr Blasen in der Schicht sind, desto geringer wird den Schwarmgesetzen zufolge die Steiggeschwindigkeit der Blasen. Im unteren Bereich werden alle Meßwerte durch eine einzige Kurve ausgeglichen, für die folgende Gleichung gilt:

$$h_s^* = 2 [Fr^{0,6} K_F^{0,07} (d_L/h_f)^{0,42}]^{0,22}. \quad (18.12)$$

Hieraus ergibt sich, daß die bezogene Schichthöhe h_s mit zunehmender Gasgeschwindigkeit w_s steigt, mit zunehmendem Lochdurchmesser d_L und mit zunehmender Flüssigkeitshöhe h_f jedoch kleiner wird. Ferner führt unter sonst gleichen Bedingungen eine Vergrößerung der Oberflächenspannung zu einer Er-

höhung von h_s^* und eine Vergrößerung der dynamischen Viskosität zu einer Erniedrigung der Schichthöhe h_s^* .

Im mittleren Bereich, oberhalb der durch Gl.(18.11) festgelegten Grenze, steigt die bezogene Schichthöhe weiter an. Da aber bereits an der Grenze nahezu die dichteste Kugelpackung erreicht war, kann die größere Schichthöhe und der größere Gasgehalt nur durch eine Formänderung der Blasen erreicht werden. Beobachtungen zeigen, daß die Blasen eine polyederähnliche Gestalt annehmen. Diese Blasenstruktur wird von MANEGOLD [18.12] ausführlich beschrieben. Polyederblasen entstehen zuerst im oberen Bereich der Blasenschicht. Mit zunehmender Gasgeschwindigkeit füllen sie schließlich die gesamte Schicht aus. Die Schichthöhe h_s^* ist im mittleren Bereich um so größer, je kleiner die Flüssigkeitshöhe h_f bei konstantem Lochdurchmesser und je kleiner der Lochdurchmesser d_L bei konstanter Flüssigkeitshöhe ist. Diese Abhängigkeit läßt sich aus *Bild 18.5* zwar entnehmen, den eingezeichneten Kurven konnten aber keine dimensionsfreien Parameter eindeutig zugeordnet werden. Auf der obersten Kurve liegen z. B. die Meßwerte der Meßreihe 1 mit $h_f = 20$ mm und $d_L = 0,29$ mm und auf der untersten Kurve die Meßwerte der Reihe 27 mit $h_f = 80$ und $d_L = 2,0$ mm. Die in *Bild 18.5* gewählte Darstellung ist für den mittleren Bereich also noch unbefriedigend.

Nach Überschreiten des Maximums wird die Schichthöhe mit zunehmender Gasgeschwindigkeit wieder kleiner. Dabei setzt eine entscheidende Änderung in der Blasenstruktur ein. In der Nähe des Maximums von h_s^* zerplatzen die Blasen bereits im Innern der Schicht und nicht nur an der Oberfläche. Es bilden sich neue, kleinere Polyederblasen, die den Druckbeanspruchungen wieder gewachsen und somit stabil sind. Hierbei entsteht eine größere Phasengrenzfläche je Volumeneinheit. Dieser zu kleineren Polyederblasen führende Vorgang ist beendet, wenn die obere Grenze des mittleren Bereiches erreicht wird. Sie liegt etwa bei

$$Fr^{0,6} K_F^{0,07} (d_L/h_f)^{0,42} = 30. \quad (18.13)$$

Oberhalb dieser Grenze liegt der obere Bereich. Alle Meßwerte werden wieder durch eine einzige Kurve ausgeglichen, für die sich folgende Gleichung angeben läßt:

$$h_s^* = 0,5 [Fr^{0,6} K_F^{0,07} (d_L/h_f)^{0,42}]^{0,6}. \quad (18.14)$$

Die in diesem Bereich liegenden Meßwerte gelten nur für das System Wasser/Luft. Weitere Meßwerte für andere Flüssigkeit/Gas-Systeme wären erwünscht. Die im oberen Bereich auftretende Blasenschicht ist sehr stabil, da sie aus sehr kleinen Polyederblasen besteht.

18.3 Phasengrenzfläche in der Blasenschicht

Die in der Blasenschicht vorhandene Phasengrenzfläche läßt sich sehr einfach berechnen, wenn man kugelförmige Blasen mit einheitlichem Durchmesser d_p annehmen darf. Nach Beobachtungen von MERSMANN [18.6] ist diese Annahme im unteren Bereich gerechtfertigt. Für die Phasengrenzfläche A_g ergibt sich dann:

$$A_g = 6 \frac{h_f d_s^2 \pi/4}{d_p} (h_s^* - 1). \quad (18.15)$$

Hierin stellt $h_f d_s^2 \pi/4$ das in der Blasenschicht befindliche Flüssigkeitsvolumen dar. Da Gl.(18.15) nur für den unteren Bereich gilt, ist zur Berechnung von h_s^* Gl.(18.12) heranzuziehen. Hiernach ist h_s^* eine sehr schwache Funktion der Flüssigkeitshöhe h_f , denn es gilt $h_s^* \sim 1/h_f^{0,0924}$. Somit ist die Phasengrenzfläche mit guter Näherung eine lineare Funktion des Flüssigkeitsvolumens. Aus *Bild 18.5* entnimmt man, daß sich h_s^* im unteren Bereich nur zwischen $h_s^* = 1$ und $h_s^* \approx 2$ ändert. Also ist $h_s^* - 1$ stets kleiner als 1. Man darf Gl.(18.15) daher so interpretieren, daß der Ausdruck $6 \pi h_f d_s^2 / (4 d_p)$ einen maximalen Wert der Phasengrenzfläche A_g angibt, der durch $(h_s^* - 1)$ korrigiert wird.

Die Berechnung der Phasengrenzfläche ist indes nur möglich, wenn der Blasendurchmesser d_p bekannt ist. Nach Angaben von MERSMANN ist es zulässig, d_p mittels der in Abschnitt 6.21 mitgeteilten Gl.(6.20) zu berechnen. Hiernach wird der Blasendurchmesser mit zunehmender Gasgeschwindigkeit größer. Die Anwendung der genannten Gleichung setzt voraus, daß sich die Blasen an den Öffnungen sorgfältig bearbeiteter Düsen oder in Siebplatten befindlicher Bohrungen bilden. Bei weniger sorgfältig hergestellten Verteilvorrichtungen, wie sie insbesondere in großen Säulen verwendet werden, hängt der Durchmesser der Blasen vor allem von der Leistung N ab, mit der das Gas der Säule zugeführt wird. Zu diesem Schluß kamen TOWELL, STRAND und ACKERMANN [18.1] in Anlehnung an Überlegungen von CALDERBANK [18.13] über die Blasengröße in Rührgefäßen. Die Gültigkeit der mitgeteilten Gleichung für den Blasendurchmesser innerhalb des hier interessierenden unteren Bereiches ist noch nicht geklärt. Bedeutsam ist, daß dieser Gleichung zufolge der Blasendurchmesser mit zunehmender Gasgeschwindigkeit im Gegensatz zu Gl.(6.20) kleiner wird.

18.4 Druckverlust der Gasströmung

Zur Berechnung des gesamten Druckverlustes Δp nimmt man an, daß er sich in drei Anteile zerlegen läßt:

$$\Delta p = \Delta p_f + \Delta p_t + \Delta p_\sigma. \quad (18.16)$$

Hierin bedeutet Δp_t den Druckverlust des Gases bei der Strömung durch den Gasverteiler und Δp_σ den Druckverlust, den das Gas auf dem Wege durch die Blasenschicht erleidet. Ist der Gasverteiler ein gelochter Siebboden, dann läßt sich Δp_t mittels der in Abschnitt 17.222 angegebenen Gleichungen berechnen. Für Δp_σ gelten die in Abschnitt 17.224 mitgeteilten Gleichungen. Ferner bedeutet

$$\Delta p_f = g \cdot \rho_f \cdot h_f \quad (18.17)$$

denjenigen Druckverlustanteil des Gases, der zur Überwindung des hydrostatischen Druckes der auf dem Boden befindlichen Flüssigkeit unvermeidbar ist. Mit h_f wird die Höhe der reinen Flüssigkeitsschicht bezeichnet, die bei absatzweisem Betrieb der Flüssigkeitssäule als bekannt angesehen werden darf.

18.5 Verhalten von Schaumschichten

Von Schaumschichten wird, wie bereits früher vermerkt, dann gesprochen, wenn ein Gas durch ein Gemisch von Flüssigkeiten strömt. Neben den Einflußgrößen, die das Verhalten von Blasenschichten beschreiben, tritt bei Schaumschichten zusätzlich die Konzentration c auf. Für ein Flüssigkeitsgemisch, bestehend aus den Komponenten 1 und 2, gilt:

$$c = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (18.18)$$

Mit m_1 und m_2 werden die Massen der beiden flüssigen Komponenten bezeichnet. MERSMANN [18.6] hat in seiner Untersuchung über das Verhalten von gasdurchströmten Flüssigkeitsschichten auch die Schaumhöhen h gemessen. Die verwendeten Gemische waren wässrige Lösungen von ein-, zwei- und dreiwertigen Alkoholen. Als Beispiel für die Ergebnisse ist in *Bild 18.6* die bezogene Schichthöhe $h_s^* = h_s/h_f$ für das Gemisch Wasser/*n*-Propylalkohol, abhängig von der Konzentration c , dargestellt. Bei den Versuchen betrug die Luftgeschwindigkeit 0,0586 m/s und die Flüssigkeitshöhe $h_f = 40$ mm. Die durch eine Kurve ausgeglichenen Meßwerte lassen eine starke Abhängigkeit von der Konzentration erkennen. Mit zunehmender Konzentration an *n*-Propylalkohol steigt h_s^* zunächst sehr langsam und ab $c = 0,0085$ stark mit der Konzentration an. Bei $c = 0,085$ durchläuft die Schichthöhe ein erstes Maximum, fällt dann wieder ab und erreicht bei $c = 0,19$ ein Minimum. Nach erneutem Anstieg durchläuft die Schichthöhe bei $c = 0,25$ ein zweites Maximum und fällt erst dann auf den Wert ab, der sich für reinen *n*-Propylalkohol unter den Versuchsbedingungen ergibt. Innerhalb des untersuchten Konzentrationsbereiches ändert sich h_s^* im Verhältnis 1 : 13.

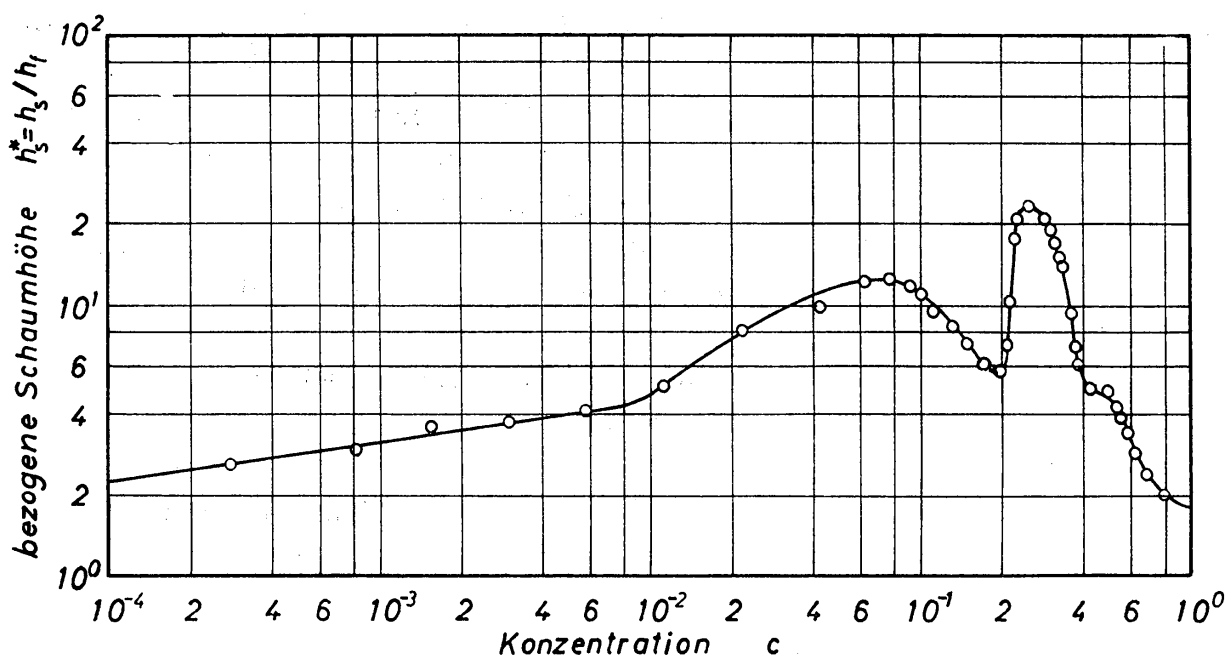


Bild 18.6. Abhängigkeit der bezogenen Schaumhöhe h_s^* von der Konzentration c für die wässrige Lösung von *n*-Propylalkohol

In den Konzentrationsbereichen zwischen $c = 0$ und $c = 0,085$ sowie zwischen $c = 0,25$ und $c = 1$ beobachtete MERSMANN Schaumschichten, die aus sich gegenseitig berührenden Blasen bestanden. Die Blasen stiegen ohne Querbewegung und ohne sich zu vereinigen auf. Im unteren Säulenbereich trat Kugelschaum und im oberen Säulenbereich Polyederschaum auf. Eine sehr ungleichmäßige Struktur wies die Schaumschicht dagegen in dem Konzentrationsbereich zwischen $c = 0,085$ und $c = 0,25$ auf. In diesem Bereich traten im Innern der Schaumschicht abwechselnd Vereinigungen und Auflösungen von Blasen auf. Dabei wurden zeitliche Schwankungen der Schichthöhe beobachtet. Die anderen untersuchten wässerigen Lösungen einwertiger Alkohole zeigten grundsätzlich ein gleichartiges Verhalten. Ein wesentlich einfacherer Kurvenverlauf für die Schaumhöhe ergab sich für wässrige Lösungen von zwei Glykolen und von Glycerin. Hierbei stieg die Schaumhöhe mit der Konzentration nur sehr wenig an, durchlief ein schwach ausgebildetes Maximum und fiel dann auf den für den reinen Stoff zutreffenden Wert ab. Weitere Untersuchungen von MERSMANN betrafen die Einflüsse der Gasgeschwindigkeit und der Flüssigkeitshöhe h_f .

Die physikalischen Ursachen der Schaumbildung sieht MANEGOLD [18.12] in einem steilen Konzentrationsgefälle zwischen der Oberflächenschicht um die Blasen und der Lösung sowie in der Heterogenität der Oberflächenschicht in bezug auf die Molekülarten, die diese Schicht bilden. MERSMANN hat sich im Rahmen seiner Arbeit mit der theoretischen Bestimmung des Konzentrationsgefälles beschäftigt. Er war in der Lage, die Änderungen der Schichthöhe h_s mit der Konzentration theoretisch zu begründen.

18.6 Verhalten von Blasenschichten mit suspendierten Feststoffpartikeln

Blasenschichten mit suspendiertem, feinkörnigem Feststoff sind ein dreiphasiges System, in dem sich im allgemeinen Gas und Flüssigkeit im Gleichstrom durch die Säule bewegen. Bei gleichmäßiger Verteilung des Gases in Form kleiner Blasen befinden sich die festen Partikeln nur in der Flüssigkeit. Dieser wird durch den Gasstrom Energie zugeführt, die zur Suspendierung der Partikeln dient. Dabei folgen die Partikeln der Flüssigkeitsbewegung, die durch die Austauschzellen erzwungen wird, worüber in Zusammenhang mit *Bild 18.2* berichtet wurde. Somit bewegt sich also jede Partikel im Verlauf der Suspendierung durch das gesamte Säulenvolumen.

Wie ebenfalls schon erwähnt wurde, ändert sich bei größerem Gasdurchsatz der Verteilungszustand der fluiden Phasen. Die Gasströmung geht von der Blasenströmung zur Kolbenströmung über. Es bilden sich also größere Volumelemente des Gases. Unter diesen Bedingungen ist es möglich, daß sich die festen Partikeln abwechselnd in der gasförmigen und in der flüssigen Phase befinden. Sollen die Partikeln in jeder Phase im Schwebestand gehalten werden, dann folgt bei Annahme eines konstanten Widerstandsbeiwertes für die Partikeln, daß das Produkt $w_r^2 \rho$ für beide Phasen gleich groß ist. Da die Dichte ρ der Flüssigkeit etwa 900 mal größer ist als die des Gases, muß die Relativgeschwindigkeit w_r des

Gases 30 mal größer sein als die der Flüssigkeit. Ein solcher Wert des Geschwindigkeitsverhältnisses läßt sich in technischen Anlagen nicht verwirklichen, abgesehen davon, daß der Gasstrom die Flüssigkeit nahezu vollständig verdrängen würde. Das bedeutet aber, daß Partikeln, die in den Gasstrom geraten, absinken. Erst nach Übergang in die flüssige Phase werden die Partikeln wieder hochgerissen. Die auf diese Weise erzielte ungleichmäßige Suspendierung sollte nach Möglichkeit vermieden werden. Das setzt jedoch voraus, daß die Form der Phasenverteilungszustände bekannt ist. Wie bereits in Kapitel 15 ausgeführt wurde, lassen sich noch keine verbindlichen Aussagen über die Grenzen der Phasenverteilungszustände machen. Dieser Mangel ist um so schwerwiegender, als der Rohrdurchmesser hierbei eine große Rolle spielt. Die Ergebnisse von Untersuchungen an Rohren mit kleinem Durchmesser lassen sich daher nur mit Vorbehalten auf Rohre mit großem Durchmesser übertragen. Weitere Untersuchungen sind zur Klärung dieses Problems dringend notwendig.

Trotz dieses Mangels und der daraus folgenden technischen Schwierigkeiten wird die Blasensäule mit suspendiertem Feststoff gerne als chemischer Reaktor für katalytische Prozesse verwendet. Bei katalytischen Reaktionen in der Gasphase dient die anwesende Flüssigkeit vor allem dazu, die bei der Reaktion frei werdende oder verbrauchte Wärme zu transportieren. Dieser Transport erfolgt wegen der hervorragenden Austauschbedingungen bei sehr kleinen Temperaturgradienten. Somit lassen sich in Blasensäulen katalytische Reaktionen nahezu isotherm durchführen. Auch bei katalytischen Reaktionen in der flüssigen Phase wird das Gas insbesondere zur Erzielung der erwähnten guten Austauschbedingungen zugegeben.

Das Volumen der Blasenschicht V_s setzt sich beim dreiphasigen System aus dem Gasvolumen V_G , dem Flüssigkeitsvolumen V_f und dem Partikelvolumen V_p zusammen. Bezieht man das Volumen einer jeden Phase auf das Volumen V_s , so erhält man die mittleren volumetrischen Anteile:

$$c_G \equiv \frac{V_G}{V_s} = \frac{V_G}{V_G + V_f + V_s}, \quad (18.19)$$

$$c_f \equiv \frac{V_f}{V_s} = \frac{V_f}{V_G + V_f + V_s}, \quad (18.20)$$

$$c_p \equiv \frac{V_p}{V_s} = \frac{V_p}{V_G + V_f + V_s}. \quad (18.21)$$

Für die Volumanteile besteht die Bedingung:

$$c_G + c_f + c_p = 1. \quad (18.22)$$

Umfangreiche Untersuchungen über das Verhalten von Blasenschichten mit suspendiertem Feststoff führten insbesondere ROY, GUHA und RAO [18.14] sowie MACH [18.15] durch. ROY, GUHA und RAO bestimmten für eine Blasenschicht ohne Flüssigkeitsdurchfluß diejenige Gasgeschwindigkeit, bei welcher alle Fest-

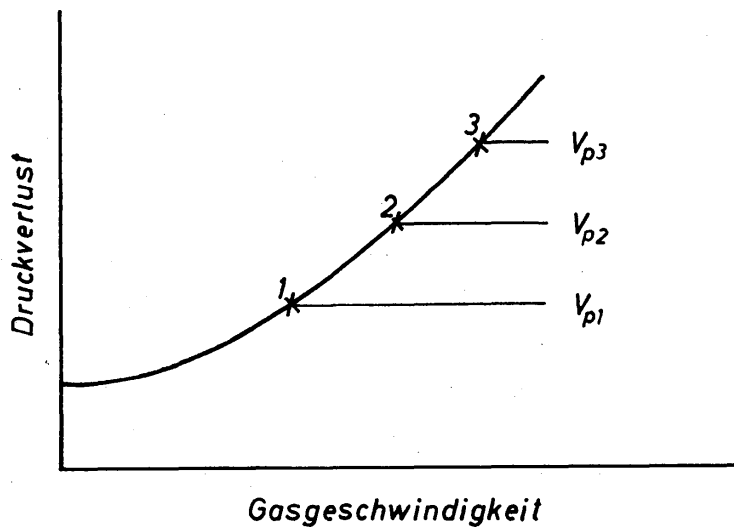


Bild 18.7. Abhängigkeit des Druckverlustes in Blasensäulen von der Gasgeschwindigkeit für drei Werte des in der Säule befindlichen Partikelvolumens V_p

stoffpartikeln suspendiert waren. Zu dem Zweck wurde der insgesamt auftretende Druckverlust abhängig von der Gasgeschwindigkeit gemessen. Diese Abhängigkeit soll an Hand der qualitativen Darstellung in *Bild 18.7* erörtert werden. Bei unveränderlichem Flüssigkeitsvolumen V_f und Partikelvolumen V_{p1} steigt der Druckverlust mit der Gasgeschwindigkeit stetig an, bis der Punkt 1 erreicht wird. In diesem Punkt sind alle Partikeln suspendiert. Wird die Gasgeschwindigkeit weiter erhöht, dann bleibt der Druckverlust zunächst konstant. Er steigt erst wieder an, wenn sich der Phasenverteilungszustand ändert. Erhöht man das in der Säule befindliche Partikelvolumen, dann erhöht sich auch die zur Suspendierung aller Partikeln erforderliche Gasgeschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit wurde von ROY, GUHA und RAO unter vielfältigen Bedingungen gemessen. MACH [18.15] hat ähnliche Versuche zur Bestimmung der Bedingungen durchgeführt, unter denen bei gleichzeitigem Durchfluß von Gas und Flüssigkeit die Feststoffpartikeln vollständig suspendiert werden. Zur Darstellung der Versuchsergebnisse führte MACH die folgendermaßen definierten Froudezahlen für die gasförmige und die flüssige Phase ein:

$$Fr_{G,e} \equiv \frac{w_G^2}{g d_p} \frac{\rho_G}{\rho_p - \rho_G}, \quad (18.23)$$

$$Fr_{f,e} \equiv \frac{w_f^2}{g d_p} \frac{\rho_f}{\rho_p - \rho_f}. \quad (18.24)$$

Hierin bedeuten g Erdbeschleunigung, d_p Partikeldurchmesser, ρ_p Partikeldichte, ρ_f Flüssigkeitsdichte, ρ_G Gasdichte, w_G Gasgeschwindigkeit und w_f Flüssigkeitsgeschwindigkeit. Beide Geschwindigkeiten ergeben sich aus den jeweiligen Volumströmen \dot{V}_G und \dot{V}_f , wenn diese durch die Querschnittsfläche der Säule dividiert werden. In den *Bildern 18.8a* und *b* sind einige Ergebnisse der von MACH durchgeführten Versuche zur Suspendierung von Stahlkugeln mit den Durchmessern

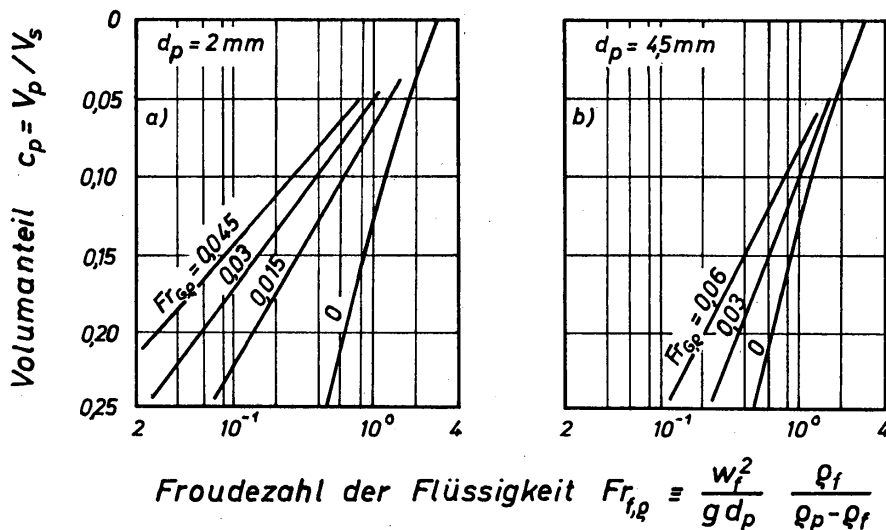


Bild 18.8. Abhängigkeit des Volumanteils der Partikeln von der Froudezahl der Flüssigkeit $Fr_{f,q}$ für einige Werte der Froudezahl des Gases $Fr_{G,q}$ bei der Suspendierung von Stahlkugeln in Blasenschichten; Bild 18.8a für Kugeln mit $d_p = 2$ mm, Bild 18.8b für Kugeln mit $d_p = 4,5$ mm

$d_p = 2$ mm und 4,5 mm wiedergegeben. Aufgetragen ist jeweils der Volumanteil der Partikeln c_p bei vollständiger Suspendierung, abhängig von der Froudezahl der Flüssigkeit, für einige Werte der Froudezahl des Gases. Je größer die Froudezahl des Gases ist, desto kleiner wird bei vorgeschriebener Partikelkonzentration c_p die Froudezahl der Flüssigkeit.

Schrifttum

- [18.1] G. D. TOWELL, C. P. STRAND und G. H. ACKERMAN, Mixing and mass transfer in large diameter bubble columns, *AIChE, International Chemical Engineers Symposium Series No. 10* (1965) 97–105 (Institution of Chemical Engineers, London)
- [18.2] N. DE NEVERS, Bubble driven fluid circulations, *AIChE J.* 14 (1968) 2, 222–6
- [18.3] H. LANGEMANN und C. TAUBERT, Axiale und radiale Durchmischung der Flüssigphase in Blasensäulen-Reaktoren, *Verfahrenstechn.* 2 (1968) 8, 329–34
- [18.4] H. KÖLBEL, H. HAMMER und H. LANGEMANN, Zur Reaktionstechnik von Blasensäulen-Reaktoren, *Chemiker-Ztg. Chemische Apparatur* 92 (1968) 16, 581–90
- [18.5] J. M. HEUSS, C. J. KING und C. R. WILKE, Gas-liquid mass transfer in concurrent froth flow, *AIChE J.* 11 (1965) 5, 866–74
- [18.6] A. MERSMANN, Druckverlust und Schaumhöhen von gasdurchströmten Flüssigkeitsschichten auf Siebböden, *VDI-Forschungsh.* 491, VDI-Verlag, Düsseldorf 1962
- [18.7] H. LANGEMANN und H. KÖLBEL, Stationäre und instationäre Konzentrationsverteilungen in Reaktoren mit abschnittsweise unterschiedlichen Eigenschaften, *Verfahrenstechn.* 1 (1967) 1/2, 1–14
- [18.8] M. REUSS, *Sprudelschichten auf Siebböden*, Studienarbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik, Technische Universität Berlin 1965
- [18.9] M. HARADA, M. ADACHI, W. EGUCHI und S. NAGATA, Studies of fluid mixing on sieve plates, *Int. Chem. Eng.* 4 (1964) 1, 165–73
- [18.10] I. P. MUKHLENOV, Investigation of a suspended layer of mobile foam in sieve-plate equipment, *J. Appl. Chem. USSR* 31 (1958) 1, 40–7

- [18.11] F.B. WEST, W.D. GILBERT und T. SHIMIZU, Mechanism of mass transfer on bubble plates, *Ind. Eng. Chem.* 44 (1952) 10, 2470–8
- [18.12] ● E. MANEGOLD, *Schaum*, Straßenbau, Chemie u. Technik, Verlagsgesellschaft, Heidelberg 1953
- [18.13] P. H. CALDERBANK, Physical rate processes in industrial fermentation, I: The interfacial area in gas-liquid contacting with mechanical agitation, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 36 (1958) 443–63
- [18.14] N. K. ROY, D. K. GUHA und M. N. RAO, Suspension of solids in a bubbling liquid. Critical gas flow rates for complete suspension, *Chem. Eng. Sci.* 19 (1964) 3, 215–25
- [18.15] W. MACH, Impulsübergang im Dreiphasen-Fließbett, *Chem.-Ing.-Techn.* 40 (1968) 1045–50

Teil VI

Rühren und Mischen

Der Zweck des Rührens besteht darin, den zeitlichen Ablauf der Ausgleichs- bzw. Transportprozesse in fluiden Systemen zu beschleunigen. Die Systeme können sowohl einphasig als auch mehrphasig sein. Beim Rühren spricht man auch dann von einphasigen Systemen, wenn zwei mischbare Flüssigkeiten mit unterschiedlichen physikalischen und chemischen Eigenschaften durch Rühren gemischt werden sollen. Vor Beginn des Rührens liegt hierbei ein zweiphasiges System vor, das jedoch im Verlauf des Rührens zu einem einphasigen System wird. Von zweiphasigen Systemen spricht man immer dann, wenn die eine Phase in der anderen dispers verteilt ist, beispielsweise in Form von Tropfen wie bei der Extraktion, in Form von Blasen wie bei der Absorption und in Form von festen Partikeln wie bei der Kristallisation.

Gerührt wird in Rühranlagen, die aus einem Rührgefäß und einem Rührer mit Antriebsmotor bestehen. Rühranlagen lassen sich sowohl für den absatzweisen als auch für den kontinuierlichen Betrieb einrichten. Bei kontinuierlichem Betrieb strömen die fluiden Phasen durch das Rührgefäß hindurch. Bevorzugte Anwendung findet bislang noch die absatzweise, also diskontinuierliche Betriebsweise. Rühranlagen werden vornehmlich zur Durchführung von Prozessen eingesetzt, bei denen der Stofftransport die führende Rolle spielt. Das ist zum Beispiel bei den obengenannten Vorgängen wie Extraktion, Kristallisation und Absorption der Fall. Unter den in der Praxis üblichen Bedingungen ist der Stofftransport fast immer mit einem Wärmetransport gekoppelt. Durch das Rühren werden örtliche Konzentrations- und Temperaturunterschiede weitgehend ausgeglichen. Bei günstiger Betriebsweise sind daher Konzentration und Temperatur im Rührgefäß nahezu konstant. Der Ausgleich der Konzentrations- und Temperaturunterschiede erfolgt um so schneller, je größer die örtlichen Geschwindigkeitsunterschiede sind. Somit läßt sich auch in allgemeinerer Form sagen, daß die örtlichen Stoff- und Wärmestromdichten um so größer sind, je größer die örtlichen Impulsstromdichten sind. Darüber hinaus muß zum schnellen Ablauf der Transportprozesse eine möglichst große Phasengrenzfläche vorhanden sein. Somit läßt sich die Aufgabe eines Rührers folgendermaßen gliedern:

- a) Durch den Rührer soll eine möglichst große Phasengrenzfläche erzeugt werden.
- b) Durch den Rührer soll innerhalb des Gefäßvolumens ein dreidimensionales Strömungsfeld mit großen örtlichen Impulsstromdichten erzeugt werden.

Die Größe der vom Rührer erzeugten Phasengrenzfläche hängt von dem Phasenverteilungszustand ab. Einer dieser Zustände ist dadurch gekennzeichnet, daß beide Phasen in Form dünner Schichten vorliegen. Bei zwei weiteren Verteilungszuständen liegt eine der beiden Phasen in Form von dünnen Strahlen oder kleinen Tropfen vor.

Die genannten Aufgaben des Rührers sind rein strömungstechnischer Natur. Da das Rühren ein sehr alter und sehr bedeutsamer verfahrenstechnischer Prozeß ist, sollte man erwarten, daß die Strömung in Rührgefäßen bereits gründlich untersucht worden ist. Das ist aber keineswegs der Fall. Zum Teil ist das sicherlich darauf zurückzuführen, daß die in Rührgefäßen auftretenden dreidimensionalen Strömungen zu den verwickeltsten der gesamten Strömungstechnik gehören. Auch heute noch sind die erforderlichen Untersuchungsmethoden nicht vorhanden. Viele Vorstellungen, die über die Strömungsvorgänge in Rührgefäßen entwickelt wurden, beruhen auf Indizien und nicht auf direkten Messungen. Man muß sich daher mit Angaben über den Leistungsbedarf der Rührer und einigen Aussagen über die Mischzeit begnügen. Diesen Problemen sind die folgenden Ausführungen gewidmet.

19 Rühren Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten

Das vom Rührer im Gefäß erzeugte dreidimensionale Strömungsfeld läßt sich noch nicht theoretisch behandeln. Auch qualitative Beschreibungen über die Strömungsvorgänge sind noch sehr unzuverlässig, da sie vielfach an die Beobachtungsmethode gebunden sind. Man befindet sich nach wie vor im Stadium des Sammelns von Beobachtungsergebnissen und des Entwickelns zuverlässiger Meß- und Beobachtungsverfahren. Der derzeitige Stand des Wissens wird in einer Reihe von Büchern bzw. Buchabschnitten sehr gut dargestellt [19.1 bis 19.5]. Besonders zu erwähnen ist das zweibändige Werk von UHL und GRAY [19.2], in dem bemerkenswerte Versuche zur theoretischen Durchdringung der Vorgänge in Rührgefäßen gemacht wurden. Einige allgemeine Hinweise über die verschiedenen Rührerformen, ihren Einbau in die Rührgefäße und über ihre Einsatzmöglichkeiten findet man in einem Bericht von RAO und VENKATESWARLU [19.6]. In diesem Abschnitt wird vornehmlich auf den Leistungsbedarf der Rührer und die Mischzeit eingegangen. Dabei werden sowohl empirische als auch theoretische Methoden berücksichtigt.

19.1 Allgemeine Beschreibung der Rührer und der Strömungsformen

19.11 Einteilung der Rührer

Die Zahl der verschiedenen Formen für Rührer, die in der Praxis angewendet werden, ist so groß, daß sie nicht alle beschrieben werden können. Die in der Praxis geübte Kontrolle der Leistungsfähigkeit führt zwar dazu, daß fortlaufend Rührertypen ausgeschieden werden. Es scheint zur Zeit jedoch ein gewisses Gleichgewicht zwischen der Zahl der ausscheidenden und der Zahl der neu entwickelten Rührertypen zu bestehen. Erst durch eine weitergehende wissenschaftliche Durchdringung der Rührereigenschaften werden sich die Kriterien ergeben, die das Ausleseverfahren so weit beschleunigen, daß die Zahl der Rührertypen wesentlich herabgesetzt werden kann.

Die heute in der Praxis verwendeten Rührer lassen sich in drei große Gruppen einteilen:

- a) Axialrührer,
- b) Radialrührer und
- c) Tangentialrührer.

Durch die Bezeichnungsweise wird auf die vom Rührer primär erzwungene Strömungsrichtung hingewiesen. Der Axialrührer erzwingt also eine Strömung in axialer, der Radialrührer in seiner unmittelbaren Umgebung eine Strömung in

radialer und der Tangentialrührer eine Strömung in tangentialer Richtung. Beachtet man, daß in einem Rührgefäß die Axialströmung zwangsläufig eine Radialströmung und – umgekehrt natürlich auch – daß die Radialströmung eine Axialströmung zur Folge hat und daß weiterhin jeder Rührer auf Grund seiner Rotation eine Tangentialströmung erzeugt, so führt die Bewegung eines jeden Rührertyps zu einem dreidimensionalen Strömungsfeld. In qualitativer Hinsicht bestehen keine grundlegenden Unterschiede zwischen den erzeugten Strömungsfeldern.

19.111 Axialrührer

In *Bild 19.1* sind zwei Beispiele für Axialrührer angegeben, und zwar der Propellerrührer und der Schraubenrührer. Der Propellerrührer wird vornehmlich dreiblättrig ausgeführt. Sein Durchmesser sei d_r . Die Steigung der Blätter ist in radialer Richtung veränderlich. Als Steigungsmaß gibt man die Ganghöhe h_g an. Hierunter versteht man die Höhe, die ein Blatt – als Teil einer Schraubenfläche angesehen – bei einer Drehung von 360° um die Propellerachse erreicht. Im allgemeinen ist $h_g = d_r$ und $d_r = D/3$, wobei D den Gefäßdurchmesser bedeutet. Die gemäß *Bild 19.1* in einem Kreis abgebildete Oberfläche des Propellers beträgt etwa 30 bis 50% der Kreisfläche. Die Anordnung des Propellers im Gefäß erfolgt so, daß der Bodenabstand e etwa gleich dem Propellerdurchmesser ist.

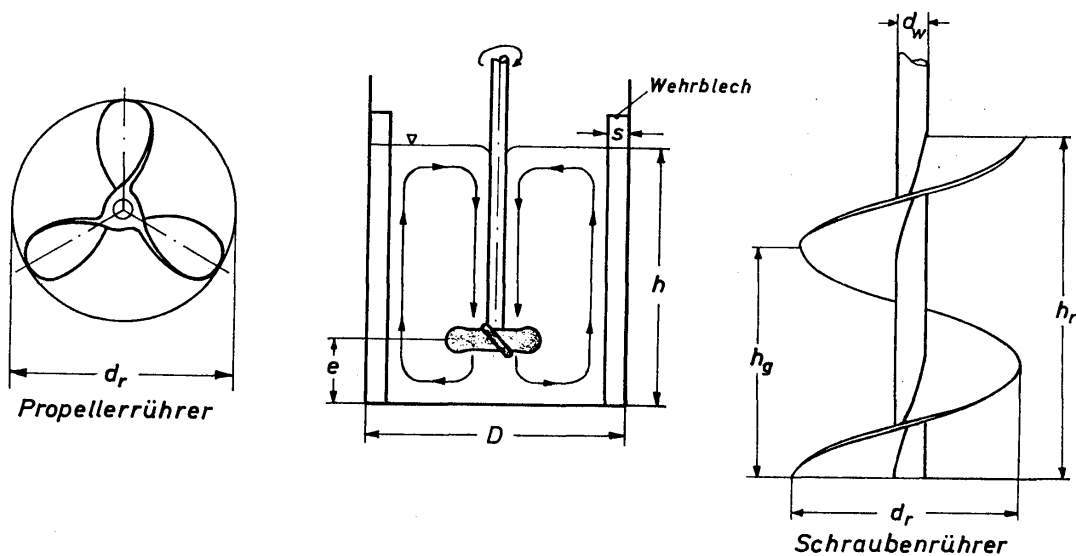


Bild 19.1. Propeller und Schraubenrührer als Beispiele für Axialrührer

Durch den rotierenden Propeller wird eine Strömung in axialer Richtung eingeleitet. Die Strömungsrichtung wird durch die Drehrichtung des Propellers festgelegt. Bei starker Schematisierung ergibt sich die in *Bild 19.1* skizzierte Bewegung der Flüssigkeit im Gefäß. Dieser Bewegung ist natürlich eine Rotation der Flüssigkeitsmasse überlagert. Die Rotation führt zwangsläufig zur Ausbildung einer Flüssigkeitsstrombe, die bei sehr hoher Drehzahl bis zur Propellerebene vordringen kann, so daß Gas in der Flüssigkeit dispergiert wird. Damit das vermieden

wird, muß die Ausbildung einer Trombe verhindert werden. Das kann sehr leicht durch Einbau von Wehrblechen geschehen. Im allgemeinen ordnet man im Gefäß 4 Wehrbleche an, deren Breite s etwa gleich $D/10$ ist. Die Wehrbleche erstrecken sich vom Gefäßboden bis über den Flüssigkeitsspiegel hinaus. Die bei ruhender Flüssigkeit gemessene Füllhöhe h ist im allgemeinen etwa gleich dem Gefäßdurchmesser D .

Ist die Geschwindigkeit des Fluids in Wandnähe bereits sehr niedrig, dann kann es sich als zweckmäßig erweisen, die Wehrbleche nicht unmittelbar an der Gefäßwand zu befestigen, sondern im Abstand s' . Hierdurch läßt sich nicht nur eine höhere Geschwindigkeit in Wandnähe, sondern auch eine verstärkte Verwirbelung der Flüssigkeit erzielen.

Wird mittels eines einzelnen Propellers die gewünschte Mischwirkung nicht erreicht, so ordnet man mehrere Propeller oder ähnliche Förderelemente übereinander an [19.7].

Ein weiterer typischer Axialrührer ist der Schraubenrührer, der ebenfalls in *Bild 19.1* dargestellt ist. Er wird sowohl zentrisch als auch exzentrisch im Gefäß angeordnet. Bei exzentrischer Anordnung ergibt sich eine wesentlich stärkere Durchmischung der Flüssigkeit als bei zentrischer Anordnung. Die Höhe h_r des Rührers darf nur so groß sein, daß noch kein Gas in der Flüssigkeit dispergiert wird. Diese Gefahr ist am geringsten, wenn die Flüssigkeit durch den Schraubenrührer nach oben gefördert wird. In diesem Fall darf die Rührerhöhe h_r gleich der Flüssigkeitsfüllhöhe h sein. Im allgemeinen sind der Durchmesser $d_r = D/3$ und die Ganghöhe $h_g = d_r$. Diese Abmessungen haben sich unter verschiedenen Bedingungen in der Praxis als günstig erwiesen. Sie dürfen aber keineswegs als allgemein verbindlich angesehen werden, da über den Einfluß der Abmessungen auf die Mischwirkung des Rührers noch keine gesicherten Aussagen vorliegen.

Propeller werden zum Rühren von Flüssigkeiten verwendet, deren Viskosität bis etwa $10^3 \text{ kg}/(\text{m s})$ beträgt. Bei noch höherer Viskosität, bis etwa $10^5 \text{ kg}/(\text{m s})$ verwendet man den Schraubenrührer. Der Schraubenrührer läßt sich jedoch auch zum Rühren von Flüssigkeiten mit niedriger Viskosität verwenden, wenn man die Ganghöhe h_g verkleinert und somit die reibende Fläche des Rührers vergrößert.

19.112 Radialrührer

Als Beispiel für einen Radialrührer ist in *Bild 19.2* der am häufigsten verwendete angegeben, den man Turbinenrührer nennt. Er besteht aus einer Kreisscheibe vom Durchmesser d_s , auf der Rechteckscheiben von der Länge l und der Höhe h_r angebracht sind. Der über die äußeren Scheibenkanten gemessene Durchmesser des Rührers ist d_r . Für die Abmessungen und für die Anordnung gelten die gleichen Erfahrungswerte wie für den Propellerrührer: $d_r/D = 1/3$, $e/d_r = 1$, $h/D = 1$ und $s/D = 1/10$. Die Abmessungen der Rechteckscheiben liegen in den folgenden Größenordnungen: $l/d_r = 1/5$ und $h_r/d_r = 1/8$ bis $1/4$. Im allgemeinen werden zur Verhinderung der Trombenbildung vier Wehrbleche vorgesehen, deren Breite

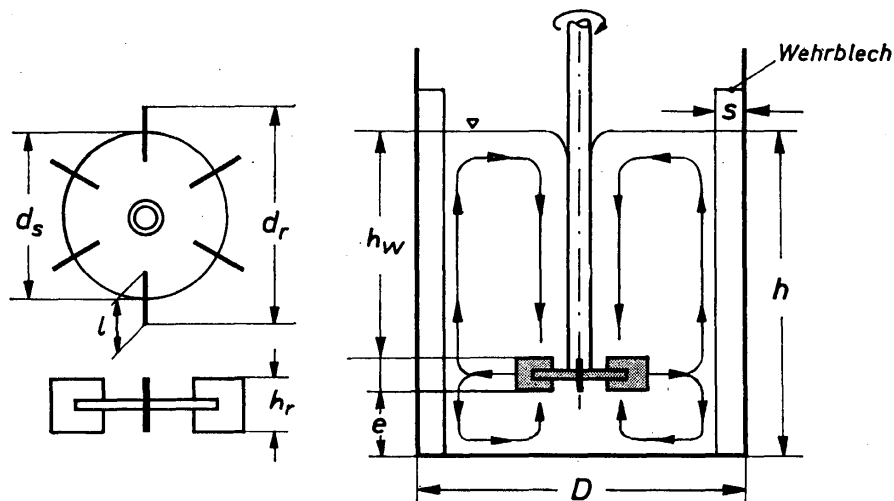


Bild 19.2. Turbinenrührer als Beispiel für Radialrührer

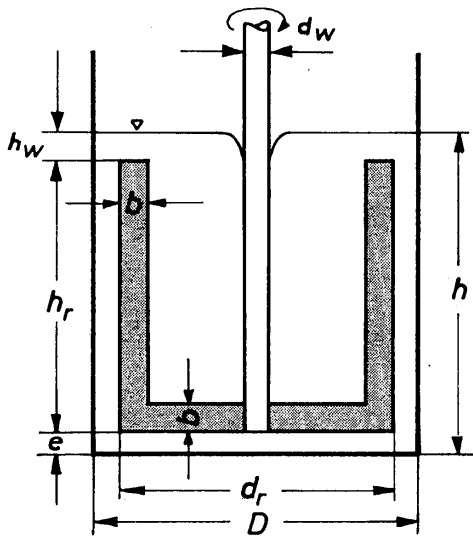
$s = D/10$ ist. Turbinenrührer werden zum Rühren von Flüssigkeiten verwendet, deren Viskosität bis etwa 10^4 kg/(m s) beträgt.

Aus dem in *Bild 19.2* dargestellten Turbinenrührer lassen sich zahlreiche ähnliche Formen ableiten. Oftmals verzichtet man auf die Kreisscheibe und befestigt entsprechend längere Rechteckscheiben als Turbinenblätter unmittelbar an der Welle. Die Turbinenblätter werden häufig auch entgegen der Strömungsrichtung gekrümmt. Durch Verdrehen der Turbinenblätter um ihre Längsachse läßt sich ein stetiger Übergang vom Radial- zum Axialrührer erreichen.

Das vom üblichen Turbinenrührer erzwungene Strömungsfeld ist in *Bild 19.2* in stark schematisierter Form angedeutet. Die Flüssigkeit verläßt den Rührer in radialer Richtung. Beim Auftreffen auf die Gefäßwand wird die Flüssigkeit in zwei Teilströme gespalten, so daß sich die für Radialrührer charakteristischen Wirbel im Gefäß ausbilden. Da dieser Bewegung noch die Rotation überlagert ist, erzwingen die Radialrührer eine sehr verwickelte dreidimensionale Strömung. Die hierüber vorliegenden Kenntnisse lassen noch keine allgemein verbindlichen Aussagen über die günstigste Anordnung des Rührers im Gefäß und über die von ihm erzielte Mischwirkung zu.

19.113 Tangentialrührer

Die einfachste Form von allen Rührern hat der in *Bild 19.3* dargestellte Ankerührer. Er besteht aus zwei parallel zur Rührerwelle angeordneten Stegen, die über einen Quersteg mit der Welle verbunden sind. Der Rührerdurchmesser d_r kann zwischen $D/1,1$ und $D/2$ liegen. Am häufigsten werden jedoch Ankerrührer verwendet, deren Durchmesser nur wenig kleiner ist als der Gefäßdurchmesser. Die Stegbreite b ist etwa $D/10$. Der Bodenabstand e wird fast immer klein gehalten und liegt bei $D/10$. Die Höhe h_r des Rührers ist etwa gleich dem Rührerdurchmesser d_r , so daß sich der Rührer bei allen Betriebsbedingungen mit $h = D$ innerhalb der Flüssigkeit befindet. Ragt der Rührer aus der Flüssigkeit heraus, dann besteht die Gefahr, daß Gas in der Flüssigkeit dispergiert wird. Unter diesen



Bedingungen ist die Mischwirkung des Rührers aber wesentlich größer als im getauchten Zustand. Verwendet wird der Ankerrührer zum Rühren von Flüssigkeiten, deren dynamische Viskosität bis zu $10^3 \text{ kg}/(\text{m s})$ beträgt.

Bild 19.3
Ankerrührer als Beispiel für Tangentialrührer

Der Ankerrührer wird insbesondere dann eingesetzt, wenn in der Nähe der Gefäßwand große Flüssigkeitgeschwindigkeiten erzielt werden sollen. Das ist immer dann erwünscht, wenn zwischen der Gefäßwand und der Flüssigkeit Wärme ausgetauscht werden soll. Da unter diesen Betriebsbedingungen Wehrbleche entfallen müssen, bildet sich bei der Rotation des Ankerrührers im allgemeinen eine schwache Trombe aus. Viele Untersuchungen haben gezeigt, daß sich die Flüssigkeit innerhalb des Zylinders mit dem Rührerdurchmesser d_r nahezu wie ein starrer Körper verhält. Innerhalb dieses Zylinders bewegt sich die Flüssigkeit also annähernd mit der Kreisgeschwindigkeit des Rührers. Somit ist also auch die Durchmischung der Flüssigkeit innerhalb dieses Zylinders nur sehr gering. Hieran ändert sich kaum etwas, wenn man auf den Quersteg statt 2 senkrechter Stege etwa 4 oder auch 6 anordnet. Auch zusätzliche Querstege, die aus dem Ankerrührer einen Gitterrührer werden lassen, führen bezüglich der Wirksamkeit des Rührers keine Änderung herbei. Füllt man die Fläche zwischen den beiden parallelen Stegen des Ankerrührers vollkommen aus, so entsteht als weitere Form des Tangentialrührers der Blattrührer (*Bild 19.4*).

Der Ankerrührer erzeugt von allen Rührern das einfachste Strömungsfeld. Es ist fast ausschließlich von der Umfangsgeschwindigkeit bestimmt. Dreidimensionale Strömungen treten nur in geringem Maße auf.

19.12 Hinweise auf das Strömungsfeld

Die Aufgabe des Rührers besteht meist darin, mehrere Phasen innig zu vermischen. Wie die voraufgegangenen Ausführungen erkennen ließen, läuft der Mischprozeß in einem dreidimensionalen Strömungsfeld ab, das von dem Rührer innerhalb eines Rührgefäßes erzwungen wird. Für die Eigenschaften dieses Strömungsfeldes sind der Rührer und das Gefäß, welches die äußere Berandung des Strömungsfeldes festlegt, von gleich großer Bedeutung. Das ist insbesondere auch daran erkennbar, daß Wehrbleche, die an der Gefäßwand angeordnet sind, die Strömung in ganz entscheidender Weise ändern können.

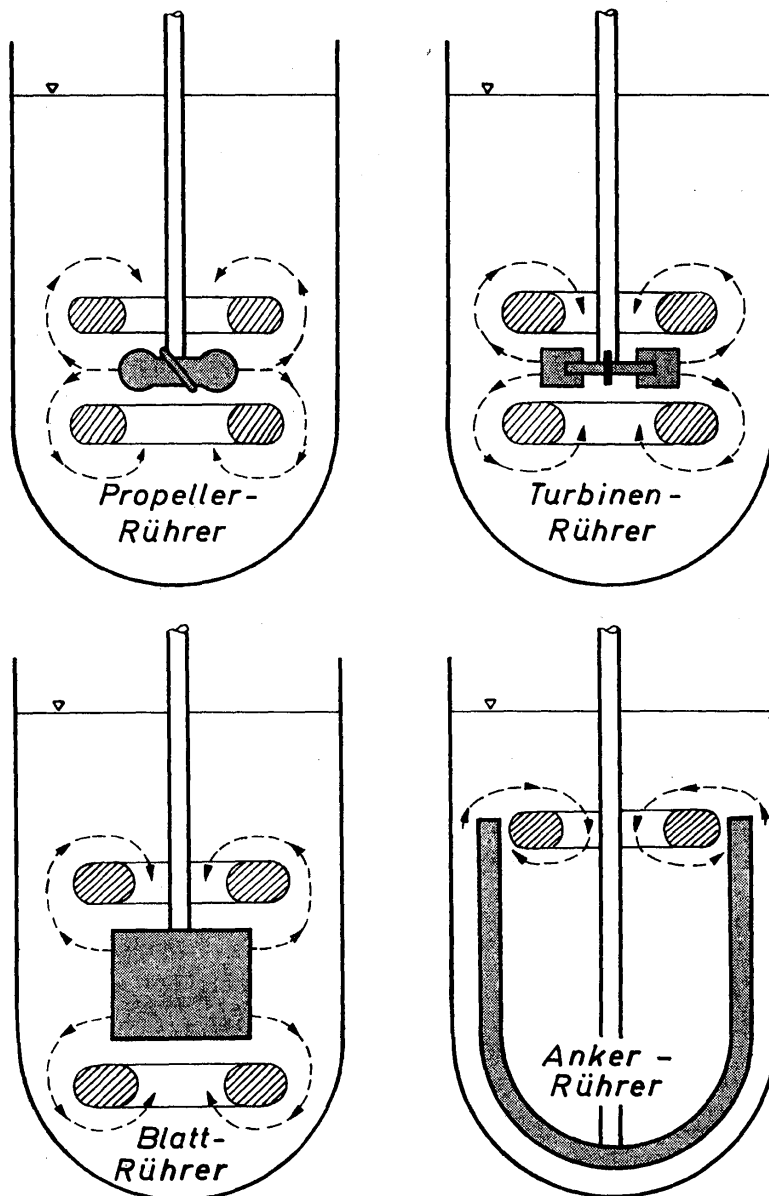


Bild 19.4. Zur Erläuterung der Zonen schlechter Durchmischung (Ringwirbel) bei Propeller-, Turbinen-, Blatt- und Ankerrührer. Die Zeichnungen wurden nach Filmaufnahmen angefertigt, über die ULLRICH und SCHREIBER [19.8] berichteten

Die Analyse der Vorgänge im Rührgefäß führt dazu, daß man dem Rührer zwei Funktionen zuschreibt. Der Rührer soll gleichzeitig Förderorgan und Mischorgan sein. Es besteht kein Zweifel, daß ein gutes Förderorgan kein gutes Mischorgan sein kann. Beide Funktionen kann der Rührer nur im Rahmen eines Kompromisses erfüllen.

Betrachtet man die geschilderten Rührertypen, so stellt man fest, daß sie lediglich ihre Funktion als Förderorgan erfüllen. Dabei ist aber zu beachten, daß die Flüssigkeit innerhalb des Gefäßes im Kreislauf gefördert wird. Das Förderorgan wird nicht dazu benutzt, einen Durchfluß zu erzeugen. Damit ist die Funktion des Förderorgans in ganz wesentlicher Weise eingeschränkt. Der Rührer ist also nur ein Organ für die Kreislaufförderung des Fluids.

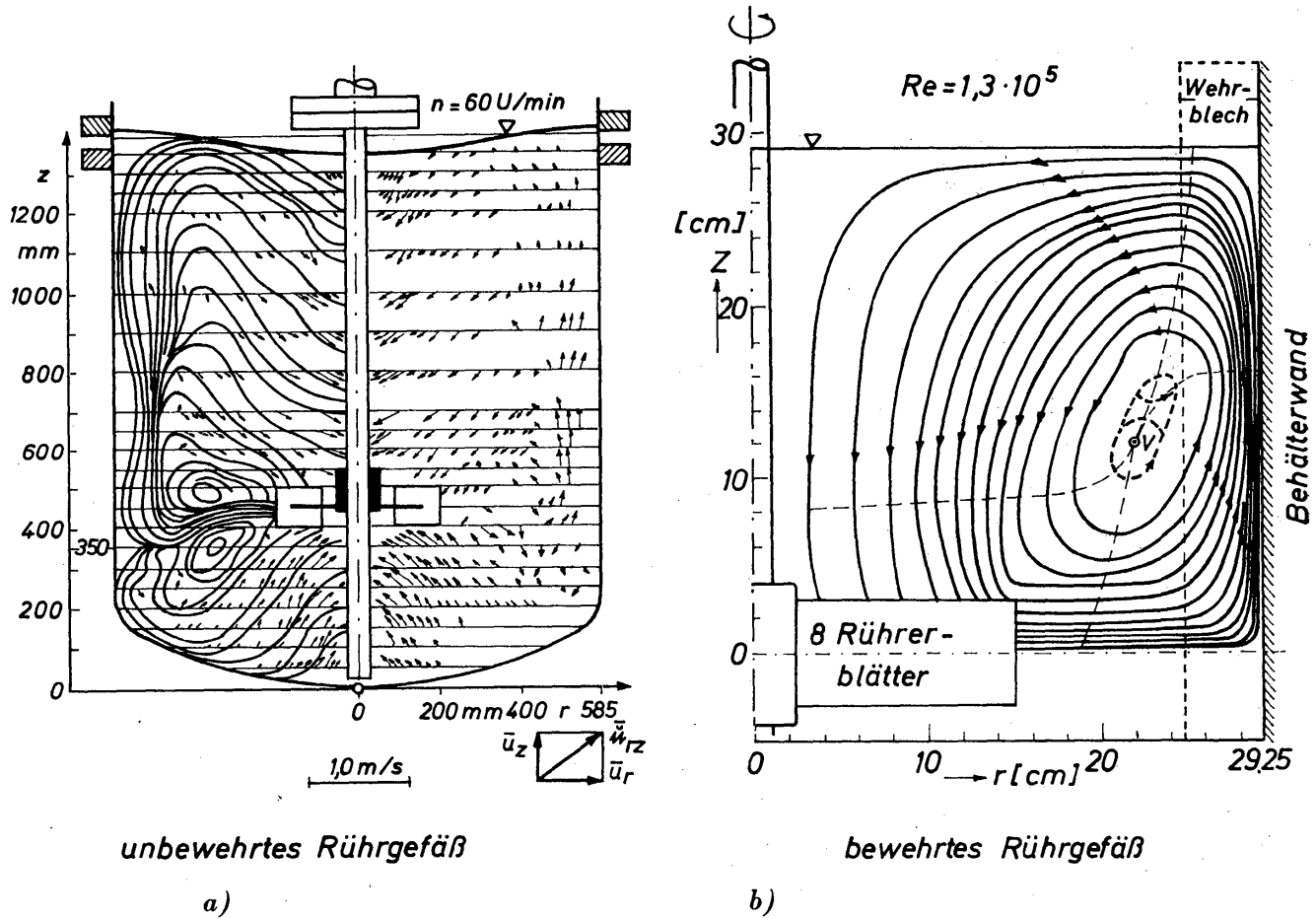
Die Funktion als Mischorgan erfüllt der Rührer nur mittelbar. Das Mischen erfolgt außerhalb des Rührers, innerhalb des vom Rührer erzeugten Strömungsfeldes. Ein zeitlich schneller Ablauf des Mischvorgangs setzt voraus, daß eine

große Grenzfläche zwischen den zu mischenden Phasen besteht und weiterhin die Bedingungen geschaffen sind, die große Impuls-, Wärme- und Stoffströme durch die Phasengrenzfläche hindurch gewährleisten. Damit das der Fall ist, müssen zu beiden Seiten der Phasengrenzfläche große Geschwindigkeitsgradienten vorhanden sein.

Grundsätzlich bestehen keine besonderen Schwierigkeiten, diese Voraussetzungen für einen guten Mischprozeß zu erfüllen. Es ist dann aber notwendig, daß man den Strömungsverlauf genau vorschreiben kann. Das ist jedoch, wie bereits betont wurde, bei dem heutigen Stand der Kenntnisse noch nicht möglich. Wünschenswert wäre es, wenn man aus einem vorgegebenen Strömungsfeld einen Rührer nach Form und Anordnung im Gefäß ableiten könnte, der gerade dieses Strömungsfeld erzwingt. Tatsächlich geht man aber in umgekehrter Weise vor. Man wählt einen Rührer aus und versucht dann nähere Auskünfte über das von ihm erzeugte Strömungsfeld zu erhalten. Hierzu werden im folgenden einige weitere Hinweise gegeben.

Auf einige Beobachtungsergebnisse, über die ULLRICH und SCHREIBER [19.8] auf Grund von Filmaufnahmen berichtet haben, sei an Hand von *Bild 19.4* eingegangen. Die Verfasser filmten den Vorgang des Entfärbens einer Flüssigkeit, die vor Beginn des Versuches schwarz gefärbt worden war, während des Rührens mit verschiedenen Rührertypen. Es zeigte sich, daß in einigen Bereichen des Rührgefäßes die Entfärbung nur sehr langsam fortschreitet. Man kann beobachten, daß in diesen Bereichen Ringwirbel auftreten, in denen die Rotationsgeschwindigkeit zum Wirbelkern hin stark abnimmt. Über gleichartige Beobachtungen hat auch JOHNSON berichtet [19.9]. In *Bild 19.4* sind diese Ringwirbel für den Propeller-, Turbinen-, Blatt- und Ankerrührer durch schraffierte Flächen angedeutet. Bei den ersten drei Rührern treten die Ringwirbel oberhalb und unterhalb der Rührer auf. Die Drehrichtung der Wirbel ist durch Pfeile gekennzeichnet. Die Wirbel entstehen offenbar auf Grund radialer Strömungskomponenten. Besonders bemerkenswert ist die Ausbildung dieser Zonen schlechter Durchmischung beim Propellerrührer, der im wesentlichen eine Axialströmung erzeugt. Bei größeren Umfangsgeschwindigkeiten tritt die Radialströmung, bedingt durch die Zentrifugalkräfte, jedoch immer stärker hervor, so daß sich die Ringwirbel ausbilden können. Überraschung bereitet zunächst auch die Ausbildung des Ringwirbels an den freien Enden des Ankerrührers. Die Beobachtung ergab, daß Flüssigkeit aus dem Spalt zwischen Anker und Gefäßwand herausgedrückt wird, die freie Ankerenden umströmt, dann in den Innenraum vordringt und dabei den Wirbel bildet.

Umfangreiche experimentelle Untersuchungen über die Flüssigkeitsbewegung in Rührgefäßen haben THOMAE [19.10] sowie NAGATA, YAMAMOTO, HASHIMOTO und NARUSE [19.11 und 19.12] durchgeführt. Sie verwendeten bei ihren Versuchen Turbinenrührer von sehr ähnlicher Bauart, so daß die Ergebnisse vergleichbar sind. Darüber hinaus lagen die Reynoldszahlen bei beiden Untersuchungen in der gleichen Größenordnung, und zwar oberhalb von 10^5 . In *Bild 19.5 a* und *b* sind die nach Messungen gezeichneten Stromlinienfelder dargestellt. Sie lassen sehr



a)

b)

Bild 19.5. Experimentell ermittelte Stromlinienfelder bei turbulenter Strömung; a) von THOMAE [19.10], b) von RAGATA, YAMAMOTO, HASHIMOTO und NARUSE [19.11]

deutlich die Bewegung der Flüssigkeit um Wirbelkerne erkennen. Diese liegen in dem von THOMAE mitgeteilten Stromlinienfeld gemäß *Bild 19.5 a* nur wenig von der horizontalen Achse des Turbinenrührers entfernt. Bei dem Stromlinienfeld, das von den japanischen Experimentatoren ermittelt wurde, liegt der Wirbelkern des oberen Feldes gemäß *Bild 19.5 b* verhältnismäßig weit oberhalb der horizontalen Rührerachse. Das ist dadurch bedingt, daß bei diesen Versuchen im Rührgefäß Wehrbleche angeordnet waren. Hierdurch wird die Umfangsgeschwindigkeit in größerem Radialabstand vom Rührer stark herabgesetzt. Es ergibt sich dann ein Stromlinienfeld, das dem bei niedrigeren Werten der Reynoldszahl entspricht. Auf diese Wirkung der Reynoldszahl hat THIELE [19.13] hingewiesen, der das von einem Scheibenrührer erzeugte Stromlinienfeld für den Fall des laminaren Strömungszustandes theoretisch berechnete. Das von THIELE berechnete Stromlinienfeld ist in *Bild 19.6* wiedergegeben. Die Werte des kennzeichnenden Parameters für die Stromlinien sind so gewählt, daß der Volumstrom zwischen zwei benachbarten Stromlinien stets konstant ist. Je geringer der Abstand zwischen zwei benachbarten Stromlinien ist, desto größer ist die mittlere Geschwindigkeit in diesem Bereich. In qualitativer Hinsicht besteht zwischen den theoretisch und experimentell ermittelten Stromlinienfeldern kein wesentlicher Unterschied. Das bedeutet aber, daß sich bezüglich der Strömungsrichtungen sowie der Zonen großer und kleiner Geschwindigkeiten bei laminarer und turbulen-

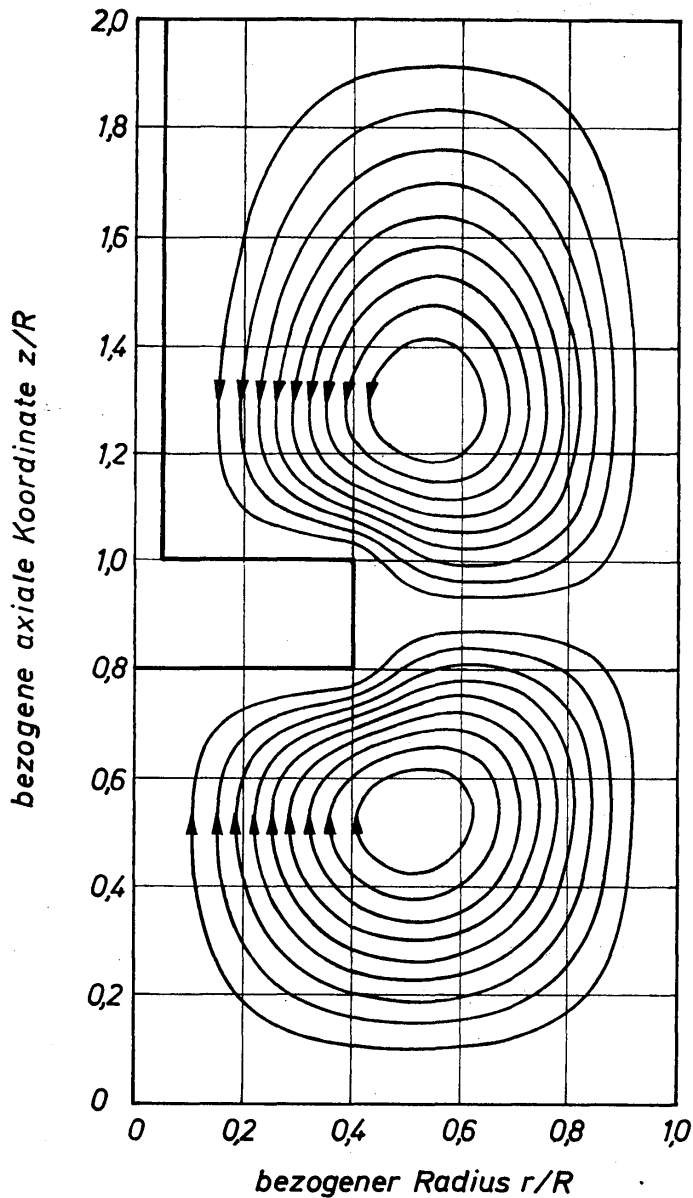


Bild 19.6
Theoretisch berechnetes Stromlinienfeld,
das von einem Scheibenrührer
erzeugt wird, nach THIELE [19.13]

ter Strömung keine wesentlichen Unterschiede ergeben. Der Queraustausch ist bei turbulenter Strömung natürlich wesentlich größer als bei der laminaren. Das läßt sich besonders anschaulich am Turbulenzgrad erkennen, der in der Nähe des äußeren Rührerrandes Werte bis zu etwa 50% erreichen kann. In diesem rührernahen Gebiet liegt nach Untersuchungen von CUTTER [19.14], BOWERS [19.15] und OLDSHUE [19.16] eine näherungsweise isotrope Turbulenz vor. In den rührerfernen Gebieten ist die Turbulenz hingegen nicht isotrop.

19.2 Empirische Gesetze für den Leistungsbedarf beim Rühren Newtonscher Flüssigkeiten

In diesem Abschnitt sollen Angaben über den Leistungsbedarf der drei Gruppen von Rührern zusammengestellt werden. Es handelt sich um rein empirische Gesetzmäßigkeiten, die sich auf der Grundlage von Versuchsergebnissen mittels Kennzahlen darstellen ließen. In einem späteren Abschnitt werden Gesetze für den Leistungsbedarf einiger Rührertypen mitgeteilt, die auf der Grundlage einer Rührertheorie entwickelt wurden.

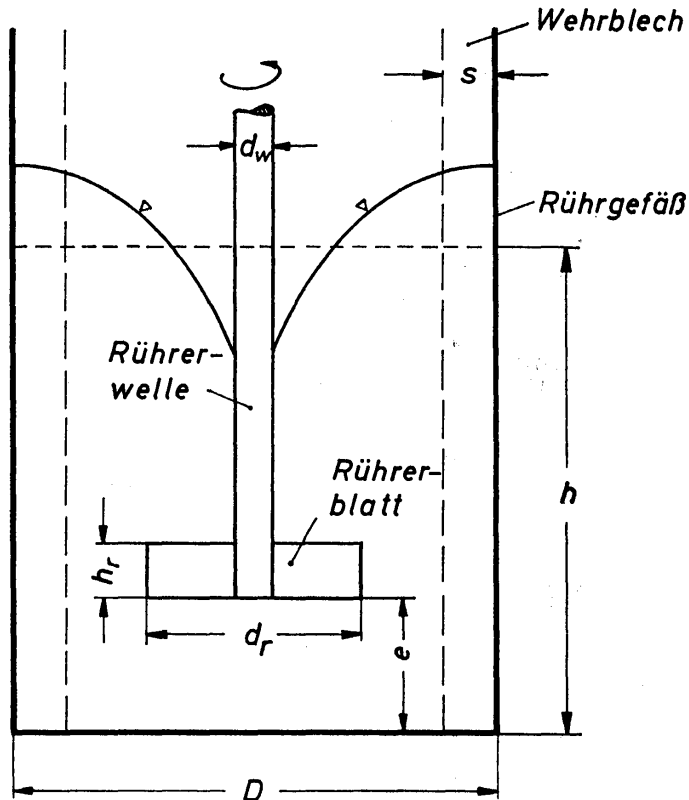


Bild 19.7
Bezeichnungen beim Blattrührer

19.21 Das Ähnlichkeitsgesetz

Bild 19.7 zeigt in schematisierter Form ein zylindrisches Gefäß mit einer Rührvorrichtung, die aus Rührerwelle und Rührerblatt besteht. Das Gefäß ist mit den Flüssigkeiten A und B gefüllt. Bei einer bestimmten Drehzahl n bzw. Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n$ der Rührerwelle verformt sich die Flüssigkeitsoberfläche zu der angedeuteten Trombe. Für den Rührvorgang sind folgende Größen maßgebend:

1. Rührerleistung	N	$\text{kg m}^2/\text{s}^3$
2. Rührerdrehzahl	n	$1/\text{s}$
3. Größter Durchmesser des Rührerblattes	d_r	m
4. Höhe des Rührerblattes	h_r	m
5. Durchmesser der Rührerwelle	d_w	m
6. Abstand des Rührerblattes vom Gefäßboden	e	m
7. Mittlere Höhe des Flüssigkeitsspiegels	h	m
8. Durchmesser des Gefäßes	D	m
9. Breite der Wehrbleche	s	m
10. Viskosität der Flüssigkeit A	η_A	$\text{kg}/(\text{m s})$
11. Viskosität der Flüssigkeit B	η_B	$\text{kg}/(\text{m s})$
12. Dichte der Flüssigkeit A	ρ_A	kg/m^3
13. Dichte der Flüssigkeit B	ρ_B	kg/m^3
14. Erdbeschleunigung	g	m/s^2

Nach den Gesetzen der Ähnlichkeitstheorie ergeben sich aus diesen 14 Einflußgrößen 11 Kennzahlen:

$$1. N^* \equiv \frac{N}{n^3 d_r^5 \varrho_A} \quad \text{Leistungszahl,} \quad (19.1)$$

$$2. Re \equiv \frac{n d_r^2 \varrho_A}{\eta_A} \quad \text{Reynoldszahl,} \quad (19.2)$$

$$3. Fr \equiv \frac{n^2 d_r}{g} \quad \text{Froudezahl,} \quad (19.3)$$

$$4. \frac{\eta_A}{\eta_B} \quad \text{Viskositätsverhältnis,}$$

$$5. \frac{\varrho_A}{\varrho_B} \quad \text{Dichtekennzahl,}$$

$$6. \frac{d_r}{D}$$

$$7. \frac{h_r}{D}$$

$$8. \frac{d_w}{D}$$

$$9. \frac{e}{D}$$

$$10. \frac{h}{D}$$

$$11. \frac{s}{D}$$

} geometrische Verhältnisse.

Hiermit läßt sich die gesuchte Leistungskennzahl N^* , abhängig von den anderen 10 Kennzahlen, darstellen:

$$N^* = f \left(Re; Fr; \frac{\eta_A}{\eta_B}; \frac{\varrho_A}{\varrho_B}; \frac{d_r}{D}; \frac{h_r}{D}; \frac{d_w}{D}; \frac{e}{D}; \frac{h}{D}; \frac{s}{D} \right). \quad (19.4)$$

Der funktionelle Zusammenhang ist, wenn er theoretisch nicht gefunden werden kann, für begrenzte Bereiche der einzelnen Kennzahlen durch das Experiment zu bestimmen. Um aber den Versuchsaufwand zu verringern, wird man sich dazu entschließen müssen, mehrere der aufgeführten Kennzahlen unberücksichtigt zu lassen.

In den meisten Fällen vernachlässigt man die Froudezahl Fr . Das ist gerechtfertigt, wenn sich beim Rühren nur eine vernachlässigbar kleine Trombe ausbildet. Dann wird die Oberfläche also nicht deformiert, und die Erdbeschleunigung entfällt als Einflußgröße. Bildet sich keine Trombe aus, so entfällt weiterhin aber auch der Einfluß des Durchmessers d_w der Rührerwelle und somit auch das geometrische Verhältnis d_w/D .

Wehrbleche sollen die räumliche Strömung so beeinflussen, daß sich keine Trombe ausbildet. Wird also das geometrische Verhältnis s/D als Kennzahl eingeführt, so

ist es im allgemeinen zulässig, die Froudezahl Fr und das Durchmesser Verhältnis d_w/D zu vernachlässigen. Sind jedoch keine Wehrbleche vorhanden, so wird man die beiden genannten Kennzahlen berücksichtigen müssen.

Über die Größe der anderen geometrischen Kennzahlen werden in vielen Fällen Vereinbarungen beachtet. So wird z. B. häufig $h/d = 1$ und $d_r/D = 1/3$ gesetzt. Die Kennzahl h_r/D hängt von der Form des Rührers ab und liegt oftmals in der Größenordnung von $1/15$ bis $1/25$. Ferner ergeben sich für jede Rührerform bestimmte Werte für die Kennzahl e/D , die die Anordnung des Rührers im Gefäß festlegt.

Bei den bisher bekanntgewordenen Rührerversuchen blieben die Stoffwertverhältnisse η_A/η_B und ρ_A/ρ_B unbeachtet, da die Versuche stets mit reinen Flüssigkeiten durchgeführt wurden. Derartige Versuche sind streng genommen von geringerer Bedeutung, da das Rühren eigentlich nur dann angewendet wird, wenn verschiedene Flüssigkeiten gemischt werden sollen. Andererseits ist aber zu beachten, daß sich nach einer gewissen Rührzeit eine mittlere Viskosität für das Flüssigkeitsgemisch einstellt. Wird diese mittlere Viskosität und die mittlere Dichte für die Bildung der Reynoldszahl Re und der Leistungskennzahl N^* verwendet, so wird man sicherlich für einen größeren Abschnitt der erforderlichen Rührzeit mit angenähert richtigen Werten der Kennzahlen rechnen. Dabei ist zu beachten, daß sich die mittlere Viskosität nach wesentlich geringerer Rührzeit einstellt als der gewünschte Mittelwert der Konzentration.

Nach den obigen Ausführungen ist es also häufig zulässig, daß man das Leistungsgesetz für Rührer in der sehr einfachen Form

$$N^* = f(Re) \quad (19.5)$$

darstellt. Von dieser Darstellungsweise wird in den weiteren Abschnitten vornehmlich Gebrauch gemacht.

19.22 Leistungsbedarf für einige Rührertypen

Im folgenden wird der Leistungsbedarf für die wichtigsten Formen der Axial-, Radial- und Tangentialrührer graphisch mitgeteilt.

19.221 Axialrührer

Für die wichtigsten Formen der Axialrührer, den Propellerrührer und den Schraubenrührer, läßt sich der Leistungsbedarf aus *Bild 19.8* entnehmen.

Für den Propellerrührer ist nach Angaben von RUSHTON, COSTICH und EVERETT [19.17] die Funktion N^*/Fr^y über der Reynoldszahl dargestellt. Die Leistungszahl N^* , die Froudezahl Fr und die Reynoldszahl Re sind durch die Gleichungen (19.1) bis (19.3) definiert. Der Exponent y der Froudezahl ist durch die folgende empirische Gleichung gegeben:

$$y = \frac{c_1 - \log Re}{c_2} \quad (19.6)$$

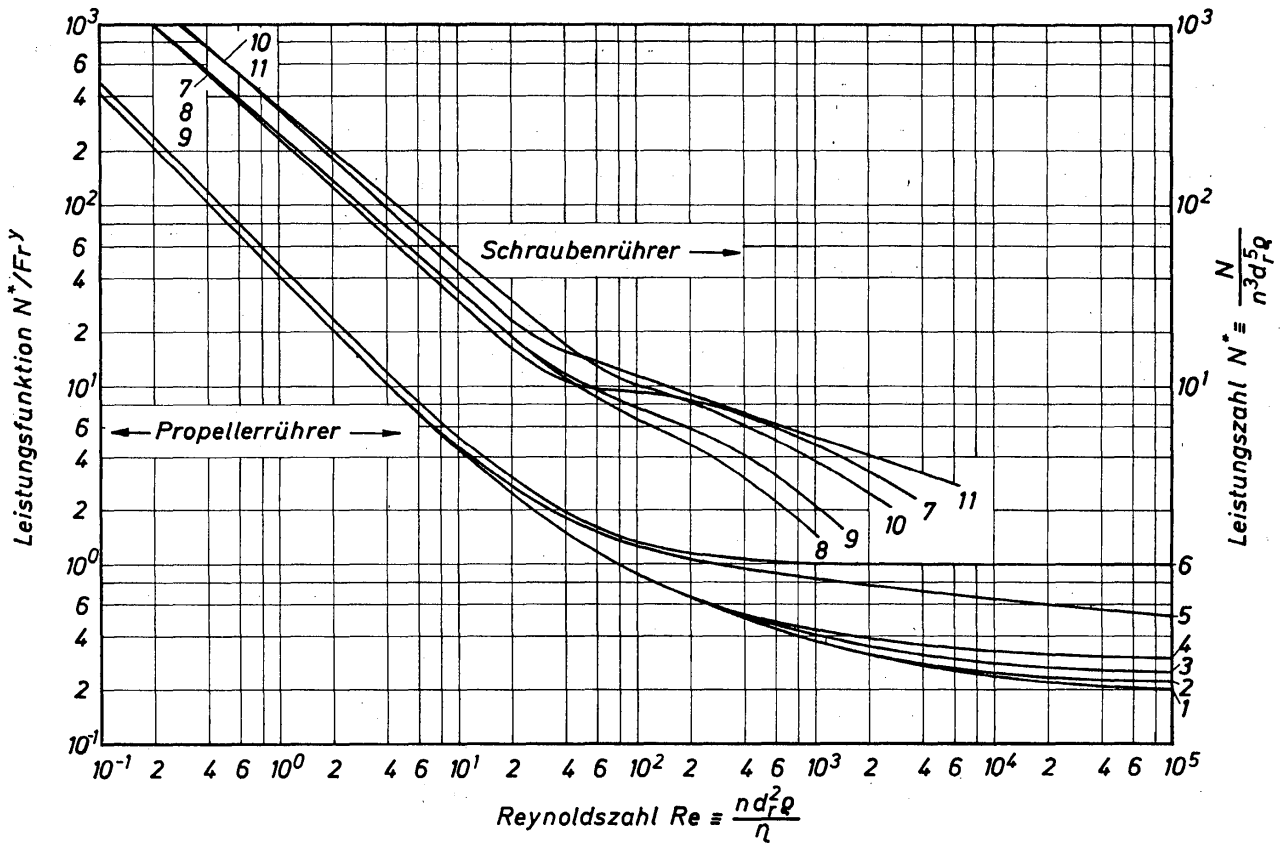


Bild 19.8. Leistungsbedarf für Propeller- und Schraubenrührer

Die Froudezahl ist, wie erwähnt, nur dann von Bedeutung, wenn sich eine Flüssigkeitstrombe ausbildet. Hiermit ist nach Untersuchungen von RUSHTON, COSTICH und EVERETT dann zu rechnen, wenn die Reynoldszahl Re größer als 400 ist und keine Wehrbleche vorhanden sind. Die Zahlenwerte für die in Gl. (19.6) auftretenden Konstanten c_1 und c_2 sind in Tabelle 19.1 abhängig vom Verhältnis aus Rührerdurchmesser d_r und Gefäßdurchmesser D angegeben.

Tabelle 19.1: Zahlenwerte für c_1 und c_2 im Exponenten y gemäß Gl. (19.6)

Durchmesserverhältnis d_r/D	c_1	c_2
0,476	2,6	18,0
0,370	2,3	18,0
0,333	2,1	18,0
0,303	1,7	18,0
0,222	0	18,0

Mit abnehmendem Durchmesser Verhältnis wird c_1 kleiner. Unter den meisten in der Praxis auftretenden Bedingungen nimmt y einen negativen Wert an. Das heißt also, daß der Leistungsbedarf mit zunehmender Froudezahl kleiner wird, da die Trombe mit zunehmender Froudezahl tiefer in die Flüssigkeit eindringt. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der Rührertheorie, die in Abschnitt 19.314 erörtert wird.

Die in *Bild 19.8* dargestellten Leistungskurven 1 bis 6 gelten für dreiblättrige Propellerrührer. Die verwendeten Rührgefäße hatten einen ebenen Boden. Der Abstand der Propeller vom Gefäßboden war gleich dem Rührerdurchmesser d_r , oder größer. Nähere Angaben über die Abmessungen der Rührer und der Rührgefäße enthält Tabelle 19.2. Der Rührerdurchmesser d_r wurde zwischen 102 und 508 mm, die Ganghöhe h_g des Rührers zwischen 102 und 503 mm und der Gefäßdurchmesser D zwischen 330 und 1272 mm geändert. Die Leistungskurven 1 bis 5 gelten für Rührer in Gefäßen ohne Wehrbleche. Nur bei Aufnahme der Rührerleistungen für Kurve 6 war das Gefäß mit vier Wehrblechen ausgestattet, deren Breite $s = D/10$ war.

Tabelle 19.2: Angaben zu den Leistungskurven für Propellerrührer in *Bild 19.8*

Kurve	Propeller- durchmesser d_r (mm)	Gefäß- durchmesser D (mm)	Verhältnis d_r/D	Ganghöhe h_g (mm)	Verhältnis h_g/d_r	Wehr- bleche
1	508	1372	0,372	433	1,05	0
2	152	457	0,333	152	1,00	0
3	102	330	0,309	102	1,00	0
4	305	1372	0,222	300	0,98	0
5	102	330	0,309	204	2,00	0
6	102	330	0,309	204	2,00	4*

* $s = D/10$.

Aus *Bild 19.8* geht hervor, daß die Leistungskurven mit zunehmender Reynoldszahl abfallen und sich bei sehr hohen Reynoldszahlen einem konstanten Endwert nähern. Bis etwa $Re = 10$ ist die Leistungszahl proportional Re^{-1} . In diesem Bereich spricht man von einer laminaren Strömung. An den laminaren Strömungsbereich schließt der Übergangsbereich und dann der turbulente Strömungsbereich an. Der Übergang zwischen den einzelnen Bereichen erfolgt stetig. Innerhalb des laminaren Strömungsbereiches wirken sich Änderungen in den Verhältniswerten d_r/D und h_g/d_r nicht aus. Lediglich die Wehrbleche erhöhen im laminaren Bereich die Rührerleistung. Diese Erhöhung ist aber nur sehr gering. Darüber hinaus liegen im Schrifttum Meßwerte vor, die keine Erhöhung der Leistungszahl im laminaren Strömungsbereich durch Wehrbleche erkennen lassen. Man darf daher zumindest mit guter Näherung erwarten, daß sich Änderungen in den geometrischen Abmessungen von Rührer und Gefäß und die Anordnung von Wehrblechen nur im Übergangsbereich und im turbulenten Strömungsbereich auf die Rührerleistung auswirken. Der Einfluß der Wehrbleche ergibt sich aus dem Vergleich von Kurve 5 (ohne Wehrbleche) mit Kurve 6 (vier Wehrbleche). Bei Vorhandensein von Wehrblechen nimmt die Leistungszahl bereits bei niedrigen Werten der Reynoldszahl einen konstanten Wert an. Aus einem Vergleich von Kurve 3 mit Kurve 5 erkennt man den Einfluß der Ganghöhe h_g . Vergröße-

rung der Ganghöhe führt zu einer Erhöhung der Leistungszahl Die Staffelung der Kurven 1 bis 4 wird im wesentlichen durch die Änderung des Durchmesser- verhältnisses d_r/D hervorgerufen. Mit abnehmenden Werten für d_r/D wird die Rührer- leistung größer, weil der Rührer ein größeres Flüssigkeitsvolumen bewegt. Nicht erkennbar sind aus den Kurven 1 bis 6 in *Bild 19.8* die möglichen Einflüsse von Form und Größe der Propellerblätter. Hierüber wurden keine Angaben gemacht. Die in *Bild 19.8* angegebenen Kurven 7 bis 11 gelten für Schraubenrührer; sie wurden von CHAPMAN und HOLLAND [19.18] mitgeteilt. Nähere Angaben über die Abmessungen der Rührer und Gefäße enthält Tabelle 19.3. Die Leistungskurven erstrecken sich über den laminaren Strömungsbereich und den Übergangsbereich. Der turbulente Bereich ist nicht mehr erfaßt worden. Im laminaren Bereich ist die Leistungszahl etwa um einen Faktor 5 größer als für Propellerrührer. Man erkennt jedoch, daß sich die Kurven mit zunehmender Reynoldszahl denen für Propeller- rührer annähern. Die Staffelung läßt die maßgebenden Einflüsse nicht klar er- kennen. Es sind daher Messungen erforderlich, die auch den turbulenten Strö- mungsbereich erfassen. Aus einem Vergleich der Kurven 10 und 11 folgt, daß zumindest im laminaren Bereich die Exzentrizität der Rühreranordnung den Leistungsbedarf kaum verändert. Schwierigkeiten, die beim Messen des Leistungs- bedarfs bei exzentrischer Rühreranordnung auftreten können, werden in einer Arbeit von HACKL und JASCHEK [19.19] behandelt. Soweit sich heute bereits Aussagen über die Flüssigkeitsbewegung in Schraubenrührern machen lassen, sind diese in einer bemerkenswerten Arbeit von PAWLOWSKI [19.20] und in einem Übersichtsbeitrag von PENNEY und BELL [19.21] zusammengefaßt. Ferner gilt auch für Schraubenrührer, daß Wehrbleche die Leistungszahl im laminaren Strömungsbereich nur sehr wenig beeinflussen.

Tabelle 19.3: Angaben zu den Leistungskurven für Schraubenrührer in *Bild 19.8*

Kurve	Schrauben- durchmesser d_r (mm)	Gefäß- durchmesser D (mm)	Schrauben- höhe h_r (mm)	Gang- höhe h_g (mm)	Wehr- bleche	Wehr- breite s (mm)	Wand- abstand s' (mm)
7	76,2	241	330	45,7	0	—	—
8	76,2	241	330	45,7	4	24,1	0
9	76,2	241	330	45,7	4	24,1	24,1
10	76,2	241	330	45,7	4	24,1	48,2
11*	76,2	241	330	45,7	0	—	—

* Der Rührer war exzentrisch angeordnet; der Wandabstand betrug 3,18 mm.

19.222 Radialrührer

Für eine Reihe verschiedener Radialrührer sind die Leistungskurven nach An- gaben von BATES, FONDY und CORPSTEIN [19.22] in *Bild 19.9* wiedergegeben. Die Gefäße waren mit jeweils vier Wehrblechen ausgestattet, deren Breite

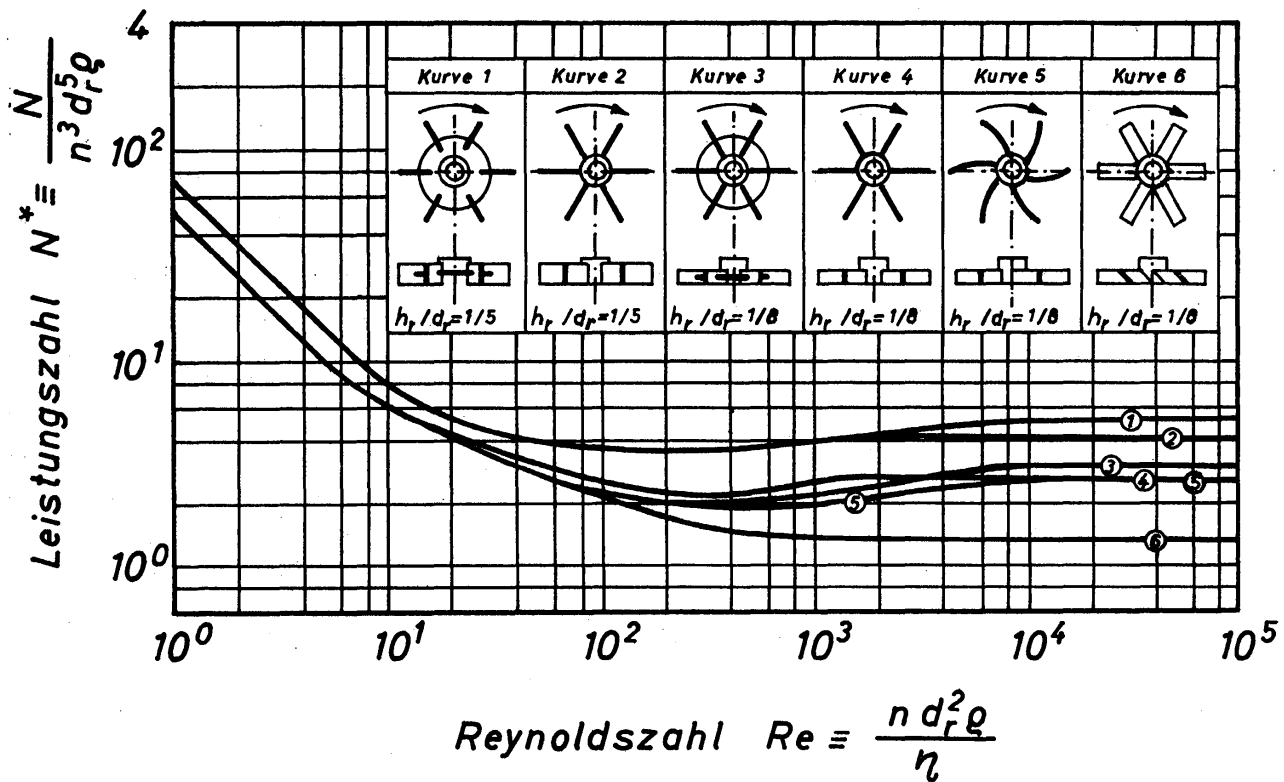


Bild 19.9. Leistungsbedarf für Radialrührer

$s = D/10$ betrug. Kurve 1 gibt den Leistungsbedarf des am häufigsten verwendeten Turbinenrührers an. Hierfür ergibt sich bei $Re = 10^5$ die Leistungszahl zu $N^* = 5,0$. Dieser Wert wird als der zur Zeit zuverlässigste angesehen. Von anderen Experimentatoren [19.17] sowie [19.23 und 19.24] werden teilweise etwas niedrigere oder auch höhere Werte gefunden. Bemerkenswert ist, daß der Leistungsbedarf für die Rührer nach den Kurven 1 und 2 sowie nach den Kurven 3 und 4 im turbulenten Bereich nicht übereinstimmt. Turbinenrührer mit Scheibe haben einen etwas höheren Leistungsbedarf. Das ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß sich die Flüssigkeit im hochturbulenten Strömungsbereich nicht mit der Umfangsgeschwindigkeit der Kreisscheibe bewegt. Wenn das zutrifft, dann ergibt sich zwischen der Kreisscheibe und dem Fluid eine Relativgeschwindigkeit, die einen zusätzlichen Widerstand zur Folge hat. Die Höhe der Turbinenblätter übt, wie der Vergleich zwischen den Kurven 2 und 4 besonders deutlich erkennen läßt, einen starken Einfluß auf den Leistungsbedarf im gesamten Bereich der Reynoldszahl aus. Durch Krümmung der Turbinenblätter, wie es für Kurve 5 zutrifft, wird der Leistungsbedarf nur im Übergangsbereich etwas herabgesetzt. Ein wesentlich niedrigerer Leistungsbedarf ergibt sich für Turbinenrührer mit geneigten Blättern gemäß Kurve 6 im Übergangsbereich und im turbulenten Strömungsbereich. In diesem Falle wirkt der Turbinenrührer nicht nur als Radial-, sondern auch als Axialrührer. Kurve 6 des Bildes 19.9 liegt daher auch im turbulenten Bereich nur wenig oberhalb der zum Vergleich geeigneten Kurve 6 des Bildes 19.8, in dem der Leistungsbedarf für Propellerrührer dargestellt ist. Bemerkenswert ist schließlich, daß der Leistungsbedarf für Turbinenrührer im laminaren Bereich nur wenig größer ist als der für Propellerrührer.

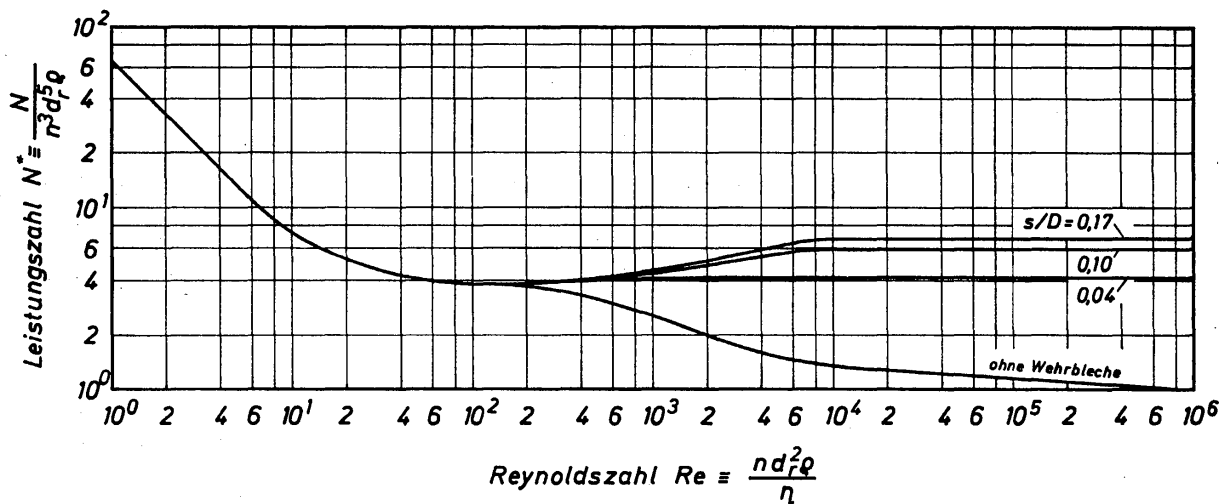


Bild 19.10

Leistungsbedarf für Turbinenrührer bei verschiedenen Breiten s der Wehrbleche

Für Turbinenrührer haben RUSHTON, COSTICH und EVERETT [19.17] den Einfluß der Breite s von Wehrblechen auf den Leistungsbedarf untersucht. Das Durchmesser Verhältnis d_r/D betrug bei diesen Versuchen $1/3$. Der Abstand e des Rührers vom Gefäßboden war gleich dem Rührerdurchmesser d_r . Die Breite s der Wehrbleche war $0,04 D$, $0,10 D$ und $0,17 D$. Die für diese Bedingungen ermittelten Leistungskurven sind in *Bild 19.10* dargestellt. Zum Vergleich ist eine Leistungskurve angegeben, die für das Rühren im Gefäß ohne Wehrbleche gilt. Man entnimmt diesem Bild, daß der Leistungsbedarf im turbulenten Bereich mit zunehmender Breite der Wehrbleche zunächst sehr stark und dann nur noch wenig ansteigt. Sehr deutlich kommt in diesem Bild ferner zum Ausdruck, daß der Einfluß der Wehrbleche erst im Übergangsbereich auftritt. Wie bereits in *Bild 19.9* zeigt sich auch in *Bild 19.10*, daß Leistungskurven bei Vorhandensein von Wehrblechen im Übergangsbereich ein ausgeprägtes Minimum aufweisen.

19.223 Tangentialrührer

Einer der wichtigsten Tangentialrührer ist der Ankerrührer, für den die Bezeichnungen in *Bild 19.3* angegeben sind. Umfangreiche Untersuchungen über den Leistungsbedarf von Ankerrührern haben CALDERBANK und MOO-YOUNG [19.25] durchgeführt. Die Meßergebnisse dieser und weiterer Forscher ließen sich in zusammenfassender Weise mittels der erweiterten Leistungszahl

$$N_A^* \equiv \frac{N}{n^3 d_r^5 \rho} \left(\frac{1}{2} + 4 \frac{h_r - b/2}{d_r - b} \right) f(D/d_r) \quad (19.7)$$

und der durch Gl. (19.2) definierten Reynoldszahl Re darstellen. In Gl. (19.7) ist der erste Ausdruck auf der rechten Seite die übliche Form der Leistungszahl. Der Klammerausdruck berücksichtigt das durch die Blattbreite b korrigierte Verhältnis aus Rührerhöhe h_r und Durchmesser d_r . Die Funktion $f(D/d_r)$ bringt schließlich den Einfluß des Verhältnisses aus Gefäßdurchmesser D und Rührerdurchmesser d_r zum Ausdruck. Hierüber machen CALDERBANK und MOO-YOUNG folgende Angaben:

$$D/d_r \leq 1,3: f(D/d_r) = \left(\frac{0,156}{D/d_r - 1} \right)^{1/2}, \quad (19.8)$$

$$D/d_r \geq 1,3: f(D/d_r) = 0,72. \quad (19.9)$$

Die durch Gl.(19.7) definierte erweiterte Leistungszahl gilt mit den Gleichungen (19.8) und (19.9) für zweiblättrige Ankerrührer, deren Stegbreite und Blattbreite übereinstimmen. In *Bild 19.11* ist N_A^* in Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re angegeben.

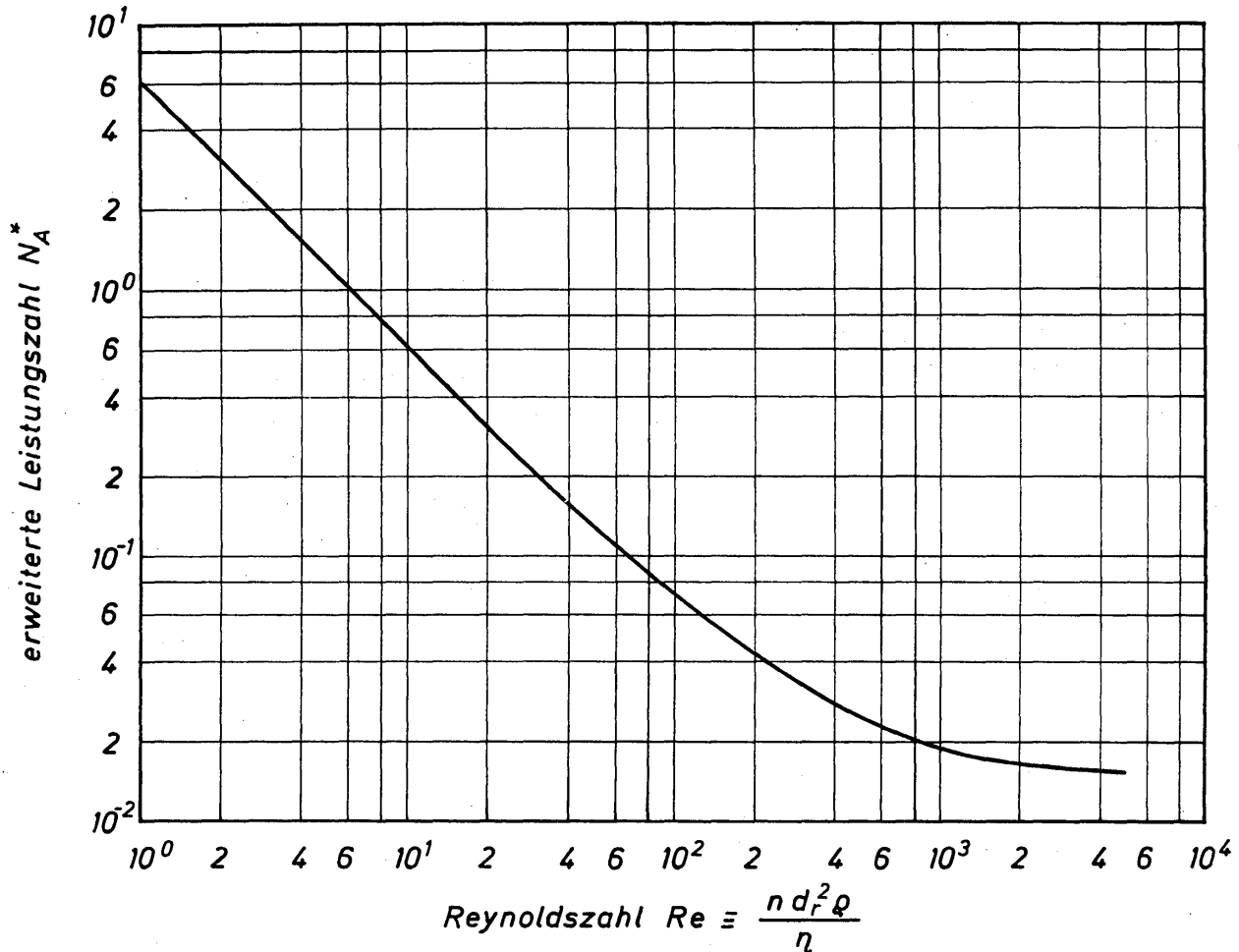


Bild 19.11. Leistungsbedarf für Ankerrührer

19.3 Theorie des Rührens Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten

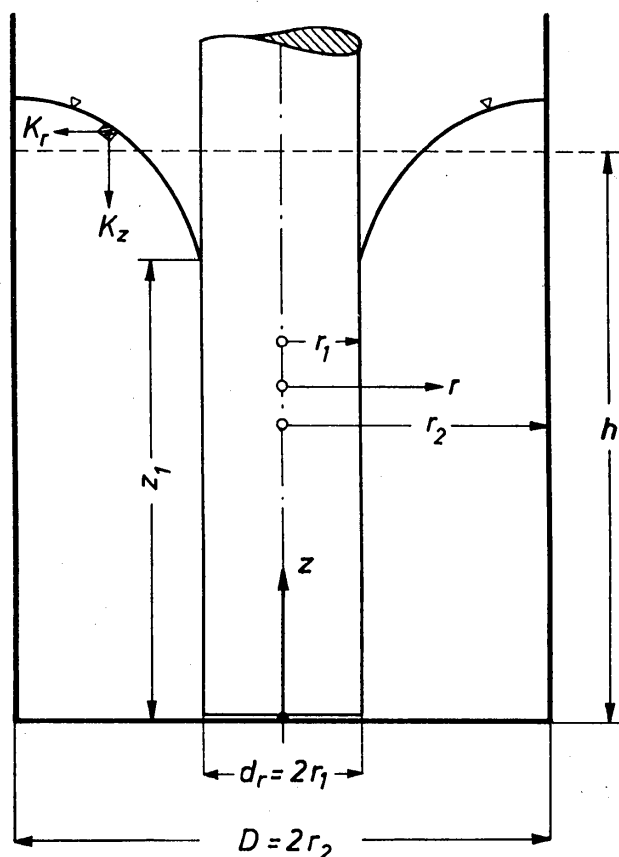
Empirische Gesetzmäßigkeiten für den Leistungsbedarf von Rührern lassen sich wegen der großen Zahl von Einflußgrößen nur mit erheblichem experimentellem Aufwand ermitteln. Es wurde daher in den letzten Jahren der Versuch unternommen, den Leistungsbedarf theoretisch zu bestimmen. Da die durch Rühren erzeugten Strömungen im allgemeinen dreidimensional und daher einer theoretischen Behandlung nicht zugänglich sind, mußten sich die Untersuchungen zwangsläufig auf Rührermodelle beschränken, durch die einfachere Strömungen erzwungen werden. Dabei wurde jedoch beachtet, daß wesentliche Eigenschaften der erzeugten Strömungen bei den praktisch verwendeten Rührern und den Modellrührern übereinstimmen. Als geeignete Rührermodelle haben sich der Zylinder und die Scheibe erwiesen. Die auf der Grundlage dieser Rührermodelle

entwickelten Gleichungen lassen sich dann durch geringfügige empirische Erweiterungen den Meßwerten für den Leistungsbedarf praktisch verwendeter Rührer sehr gut anpassen. Diese Gleichungen haben wegen ihres theoretischen Hintergrundes eine wesentlich größere Aussagekraft als die bislang üblichen rein empirischen Gleichungen.

19.31 Theorie des Zylinderrührers für Newtonsche Flüssigkeiten

19.311 Erläuterung des Rührermodells

Um die wichtigsten der beim Rühren auftretenden Vorgänge theoretisch behandeln zu können, wird von dem in *Bild 19.12* dargestellten Rührermodell ausgegangen [19.26]. Es besteht aus einem zylindrischen Gefäß mit dem Durchmesser $D = 2r_2$ und einem konzentrisch angeordneten Zylinderrührer mit dem Durchmesser $d_r = 2r_1$. Das Gefäß ist mit einer reinen Flüssigkeit gefüllt, deren Füllhöhe im Ruhezustand gleich h ist. Die Rotation des Zylinderrührers führt zur Ausbildung der in *Bild 19.12* angedeuteten Trombe. Der Zylinderrührer wird also



nur bis zur Höhe z_1 , die stets kleiner ist als die Füllhöhe h , von der Flüssigkeit benetzt. Nur über die damit festgelegte Oberfläche des Zylinderrührers kann Energie an die Flüssigkeit übertragen werden.

Bild 19.12

Bezeichnungen für den Zylinderrührer

Es wird angenommen, daß die auf ein Element des Fluids in radialer Richtung wirkenden Kräfte sich im Gleichgewicht befinden. Das hat zur Folge, daß die Fluidgeschwindigkeit nur eine Komponente in Umfangsrichtung hat. Eine Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung würde zur Ausbildung von Taylorwirbeln führen, die vernachlässigt werden. Diese Vernachlässigung scheint gerechtfertigt zu sein, da die Taylorwirbel in realen Rührgefäßen von anderen räumlichen Strömungen verdrängt werden.

Die vom Zylinderrührer auf die Flüssigkeit übertragene Leistung N ist das Produkt aus Drehmoment M und Winkelgeschwindigkeit ω . Für die Winkelgeschwindigkeit gilt $\omega = 2\pi n$ und für das Drehmoment $M = \tau_1 F_1 r_1$. Hierin bedeuten n die Rührerdrehzahl, τ_1 die Schubspannung an der Oberfläche des Rührers und

$$F_1 = 2\pi r_1 z_1 \quad (19.10)$$

die benetzte Rühreroberfläche mit z_1 als Eintauchtiefe gemäß *Bild 19.12*. Damit folgt dann die Rührerleistung zu

$$N = M\omega = 4\pi^2 n r_1^2 \tau_1 z_1. \quad (19.11)$$

In dieser Gleichung sind nur die Schubspannung τ_1 und die Eintauchtiefe z_1 unbekannt. Sie werden in den weiteren Abschnitten berechnet.

19.312 Berechnung der Schubspannung

Die Schubspannung an der Oberfläche des Zylinderrührers folgt aus der Geschwindigkeitsverteilung in der Flüssigkeit. Zu deren Berechnung geht man von der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichung aus, die für den vorliegenden Fall die Form

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(wr)}{dr} \right] = 0 \quad (19.12)$$

annimmt. Mit den Randbedingungen

$$w = r_1\omega \text{ für } r = r_1 \quad \text{und} \quad w = 0 \text{ für } r = r_2 \quad (19.13)$$

folgt hieraus nach zweimaliger Integration folgende Gleichung für die örtliche Geschwindigkeit:

$$w = \frac{\omega r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{r_2^2}{r} - r \right). \quad (19.13)$$

Bezieht man w auf die Geschwindigkeit $r_1\omega$ an der Oberfläche des Zylinderrührers, dann ergibt sich nach Umformung

$$\frac{w}{\omega r_1} = \frac{D^*}{D^{*2} - 1} \left(\frac{r_2}{r} - \frac{r}{r_2} \right). \quad (19.14)$$

Hierin ist

$$D^* = r_2/r_1 = D/d_r \quad (19.15)$$

das Radien- bzw. Durchmesser Verhältnis. Zur graphischen Darstellung ist es zweckmäßig, $w/(\omega r_1)$ nicht über r/r_2 , sondern, gemäß *Bild 19.13*, über $(r - r_1)/(r_2 - r_1)$ aufzutragen.

Für den Sonderfall $r_2/r_1 = 1$ ergibt sich die Couette-Strömung mit linearer Geschwindigkeitsverteilung. Mit zunehmenden Werten des Radienverhältnisses r_2/r_1 wird die Drehbewegung des Zylinderrührers auf einen immer kleiner werdenden

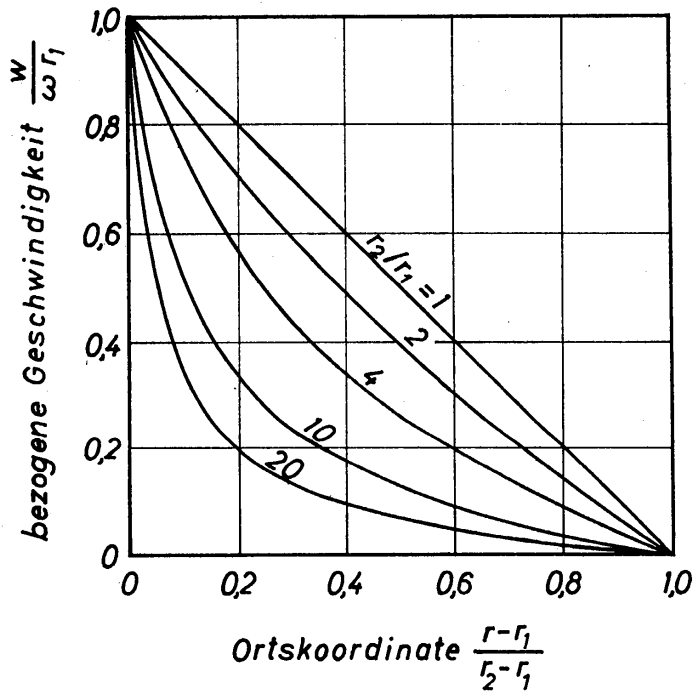


Bild 19.13
Geschwindigkeitsverteilung im Rührgefäß für verschiedene Werte des Radienverhältnisses $D^* \equiv r_2/r_1$

Flüssigkeitsanteil übertragen. Um hiervon eine genaue Vorstellung zu erhalten, wird die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} gebildet. Mit der Definitionsgleichung

$$\bar{w} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} w \, dr \tag{19.16}$$

ergibt sich nach Einsetzen von Gl. (19.13) und Integration

$$\frac{\bar{w}}{\omega r_1} = \frac{\ln D^* - (1/2)(1 - 1/D^{*2})}{(1 - 1/D^{*2})(D^* - 1)}, \tag{19.17}$$

s. Bild 19.14. Wie zu erwarten, nimmt $\bar{w}/(\omega r_1)$ mit dem Radienverhältnis ab. Für $r_2/r_1 = 1$ ist $\bar{w}/(\omega r_1) = 0,5$ und für $r_2/r_1 = \infty$ ist $\bar{w}/(\omega r_1) = 0$.

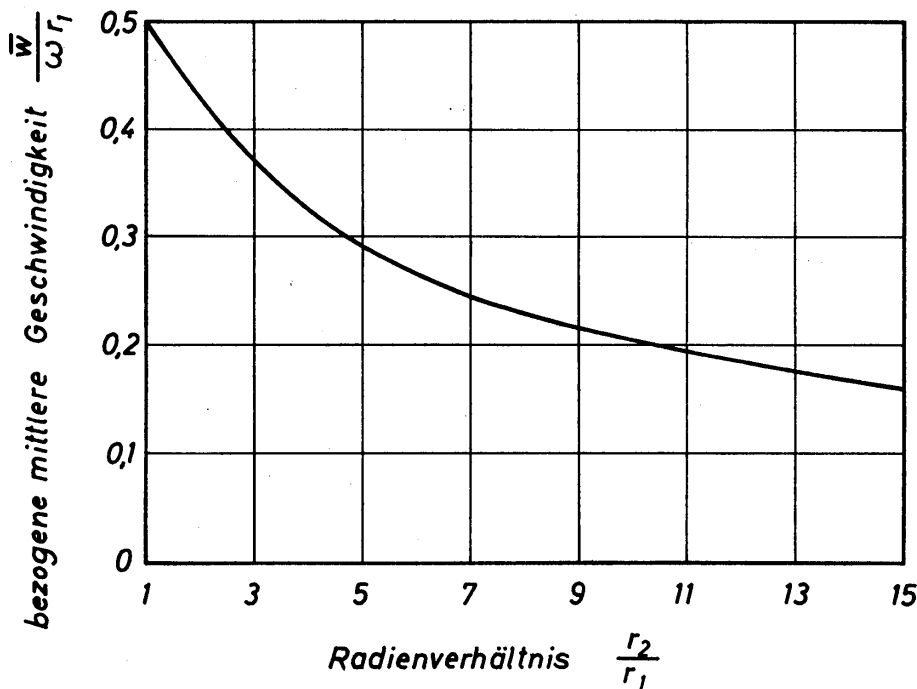


Bild 19.14
Bezogene mittlere Geschwindigkeit $\bar{w}/(\omega r_1)$, abhängig vom Radienverhältnis $D^* \equiv r_2/r_1$

Mit der Geschwindigkeitsverteilung läßt sich die in der Flüssigkeit auftretende Schubspannung τ berechnen. In Polarkoordinaten gilt die Definitionsgleichung:

$$\tau = -\eta_r \frac{d(w/r)}{dr}. \quad (19.18)$$

Für den Gradienten ergibt sich aus Gl. (19.13)

$$\frac{d(w/r)}{dr} = -2\omega \frac{r_2^2/r^3}{D^{*2}-1}, \quad (19.19)$$

und damit folgt die örtliche Schubspannung zu

$$\tau = 2\omega\eta \frac{(r_2/r)^2}{D^{*2}-1}. \quad (19.20)$$

Bei $r = r_1$ wird

$$\tau = \tau_1 = 2\omega\eta D^{*2}/(D^{*2}-1). \quad (19.21)$$

Hieraus erkennt man, daß die für die Rührleistung maßgebende Schubspannung am Zylinderrührer mit zunehmendem Radienverhältnis $D^* \equiv r_2/r_1$ kleiner wird. Für $D^* = 1$ wird $\tau_1 = \infty$, und für $D^* = \infty$ wird $\tau_1 = 2\omega\eta$. Das bedeutet aber auch, daß die Rührerleistung mit zunehmendem Radienverhältnis kleiner wird. Dieses Verhalten der Schubspannung ist auf den mit wachsendem Radienverhältnis kleiner werdenden Flüssigkeitsanteil zurückzuführen, der von der Rotationsbewegung erfaßt wird.

Bezieht man die örtliche Schubspannung τ auf τ_1 , so erhält man:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{(r_2/r)^2}{D^{*2}}. \quad (19.22)$$

In Bild 19.15 ist dieses Verhältnis für einige Werte des Radienverhältnisses $D^* \equiv r_2/r_1$ dargestellt. Hieraus entnimmt man gleichzeitig, daß die Schubspannung an der Außenwand des Rührgefäßes mit zunehmendem Radienverhältnis ebenfalls abnimmt. Aus Gl. (19.20) folgt für $r = r_2$:

$\tau_2 = 2\omega\eta/(D^{*2}-1).$ (19.23)

Für $D^* = 1$ wird $\tau_2 = \infty$, und für $D^* = \infty$ wird $\tau_2 = 0$.

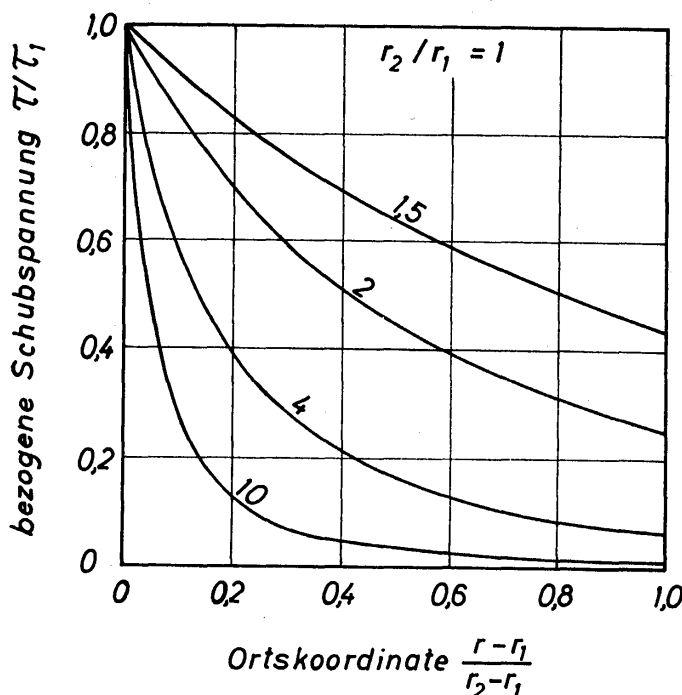


Bild 19.15
Bezogene örtliche Schubspannung τ/τ_1 für verschiedene Werte des Radienverhältnisses r_2/r_1 als Funktion der Ortskoordinate $(r-r_1)/(r_2-r_1)$

Damit sind alle Größen, die für die Strömung in Rührgefäßen maßgebend sind, bekannt, insbesondere auch die Schubspannung an der Oberfläche des Zylinderrührers. Die nächste Aufgabe besteht darin, die Eintauchtiefe z_1 zu berechnen.

19.313 Berechnung der Eintauchtiefe

Während der Rotation des Zylinderrührers bildet sich die bereits erwähnte Trombe aus, die dazu führt, daß der Zylinderrührer nicht mehr über die im Ruhezustand gegebene Höhe h in die Flüssigkeit eintaucht, sondern nur noch über die Höhe z_1 . Die Differenz $h - z_1$ wird mit zunehmender Drehzahl größer. Dabei ist auch der Grenzfall $h - z_1 = 0$ denkbar, für den keine Leistung mehr vom Rührer

auf die Flüssigkeit übertragen wird. Die Berechnung von z_1 bzw. $h - z_1$ setzt die Kenntnis der Trombenform voraus.

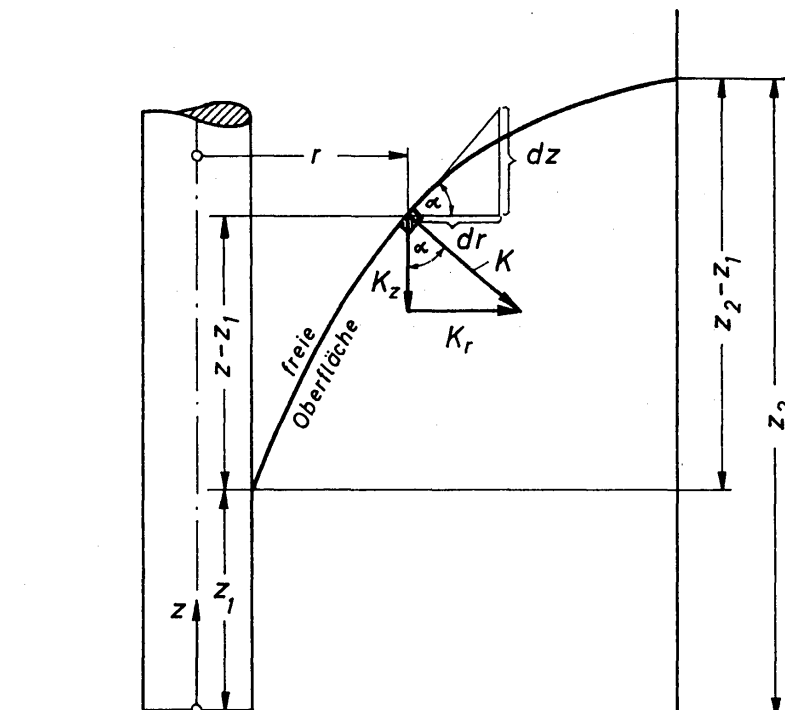


Bild 19.16
Zur Erläuterung der Form der freien Oberfläche und der an ein Flüssigkeitselement angreifenden Kräfte

In *Bild 19.16* sind die Flüssigkeitsoberfläche und die in einem Punkte daran angreifenden Kräfte dargestellt.

Die freie Flüssigkeitsoberfläche läßt sich als Potentialfläche ansehen, die stets senkrecht zur resultierenden Kraft K geneigt ist. Die Kraft K setzt sich vektoriell aus der in senkrechter Richtung wirkenden Gewichtskraft $K_z = mg$ und der in radialer Richtung wirkenden Zentrifugalkraft $K_r = m w^2/r$ zusammen. Die Neigung der Oberfläche ist

$$\operatorname{tg} \alpha = dz/dr = K_r/K_z. \quad (19.24)$$

Damit folgt zur Berechnung der Oberflächenform die Beziehung

$$(w^2/r) dr = g dz. \quad (19.25)$$

Für w^2/r erhält man aus Gl.(19.13) den Ausdruck

$$\frac{w^2}{r} = \omega^2 r \left[\frac{(r_2/r)^2 - 1}{D^{*2} - 1} \right]^2. \quad (19.26)$$

Nach Einsetzen in Gl. (19.25) und anschließender Integration unter Berücksichtigung der Randbedingung $z = z_1$ für $r = r_1$ ergibt sich nach Umformung:

$$\Delta z^* \equiv \frac{z - z_1}{\omega^2 r_1^2 / 2g} = \frac{D^{*2}}{(D^{*2} - 1)^2} \left[D^{*2} - \frac{1}{D^{*2}} - 4 \ln D^* + \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 + 4 \ln \left(\frac{r_2}{r} \right) \right]. \quad (19.27)$$

Hierin bedeutet $z - z_1$ die in *Bild 19.16* angegebene Höhendifferenz. Gl. (19.27) gestattet also bereits die Berechnung der Oberflächenform. Für $r = r_1$ ist $z - z_1 = 0$, und für $r = r_2$ wird $z - z_1 = z_2 - z_1$. Für den maximalen Wert Δz_{\max}^* folgt aus Gl. (19.27):

$$\Delta z_{\max}^* \equiv \frac{z_2 - z_1}{\omega^2 r_1^2 / 2g} = \frac{D^{*2}}{(D^{*2} - 1)^2} \left[D^{*2} - \frac{1}{D^{*2}} - 4 \ln D^* \right]. \quad (19.28)$$

Für $D^* = 1$ wird $\Delta z_{\max}^* = 0$, d. h. es tritt keine Flüssigkeitstrombe auf. Ist jedoch $D^* = \infty$, wird $\Delta z_{\max}^* = 1$, und somit ergibt sich unter sonst gleichen Bedingungen stets die größte Trombentiefe. *Bild 19.17* zeigt Δz_{\max}^* als Kurve *a* abhängig vom Radienverhältnis $D^* \equiv r_2/r_1$. Weiterhin ist das Verhältnis $\Delta z^* / \Delta z_{\max}^*$ in *Bild 19.18* für verschiedene Werte des Radienverhältnisses aufgetragen.

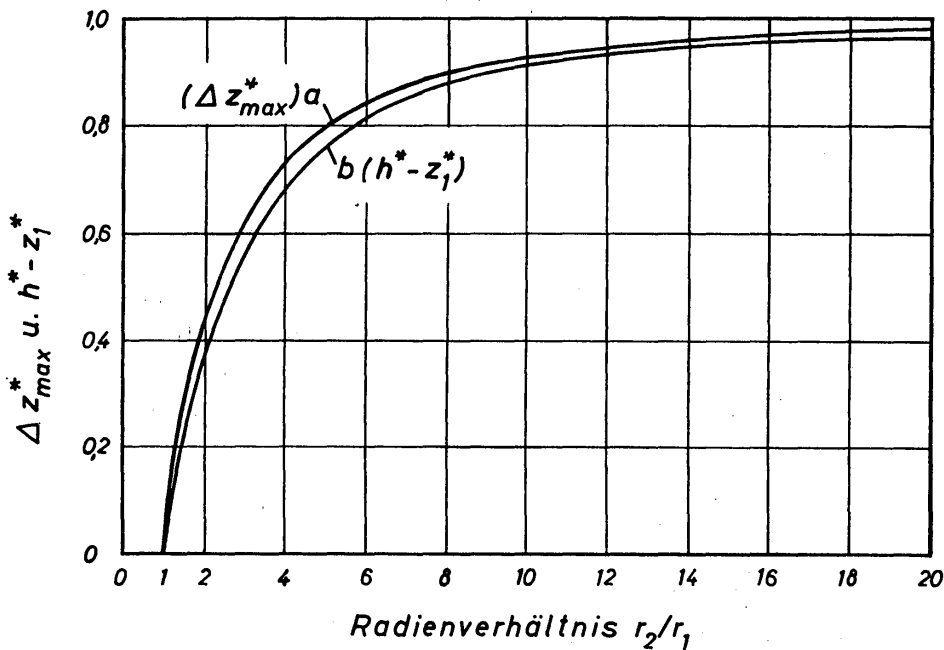


Bild 19.17. Abhängigkeit der maximalen Trombentiefe Δz_{\max}^* (Kurve *a*) und der Größe $h^* - z_1^*$ (Kurve *b*) vom Radienverhältnis r_2/r_1

Damit wird zwar ein vollständiger Überblick über die Trombenform gewonnen, die letztlich interessierende Größe z_1 ergibt sich daraus aber nicht. Hierfür ist noch ein weiterer Rechnungsgang erforderlich.

Das Volumen V der rotierenden Flüssigkeitsmasse setzt sich gemäß *Bild 19.19* aus den beiden Anteilen V_a und V_b zusammen. Es gilt:

$$(r_2^2 - r_1^2) \pi h = (r_2^2 - r_1^2) \pi z_1 + V_b. \quad (19.29)$$

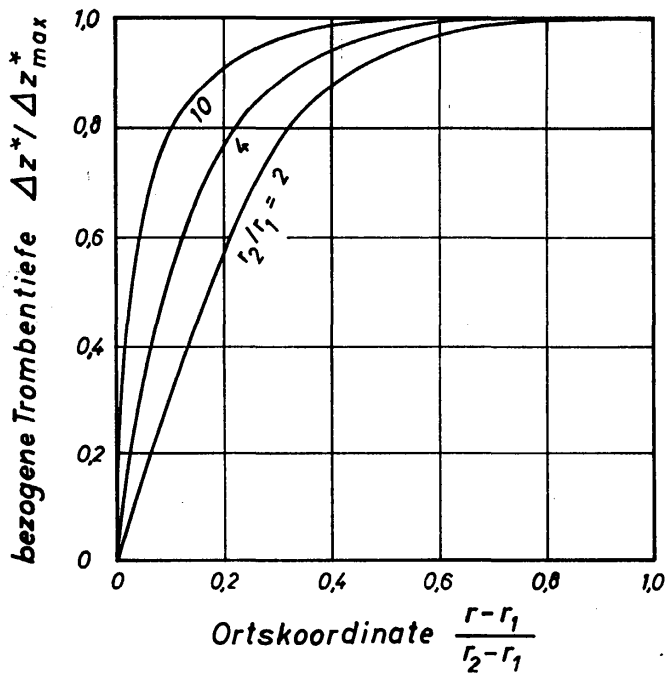


Bild 19.18
 Bezogene örtliche Trombentiefe $\Delta z^*/\Delta z_{\max}^*$ für verschiedene Werte des Radienverhältnisses r_2/r_1 als Funktion der Ortskoordinate $(r-r_1)/(r_2-r_1)$

Hieraus folgt die später unmittelbar verwendete Größe

$$h - z_1 = \frac{V_b}{(r_2^2 - r_1^2)\pi} \tag{19.30}$$

Das Volumen V_b berechnet sich mittels

$$V_b = \int_0^{2\pi} \left[\int_{r_1}^{r_2} \left(\int_0^{z-z_1} dz \right) r dr \right] d\varphi, \tag{19.31}$$

wobei φ der Umfangswinkel ist, und Gl. (19.27) für die Integrationsgrenze $z - z_1$ zu

$$V_b = (r_2^2 - r_1^2)\pi \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{3D^{*2} - 1}{(D^{*2} - 1)^2} - \frac{6D^{*4} \ln D^*}{(D^{*2} - 1)^3} \right]. \tag{19.32}$$

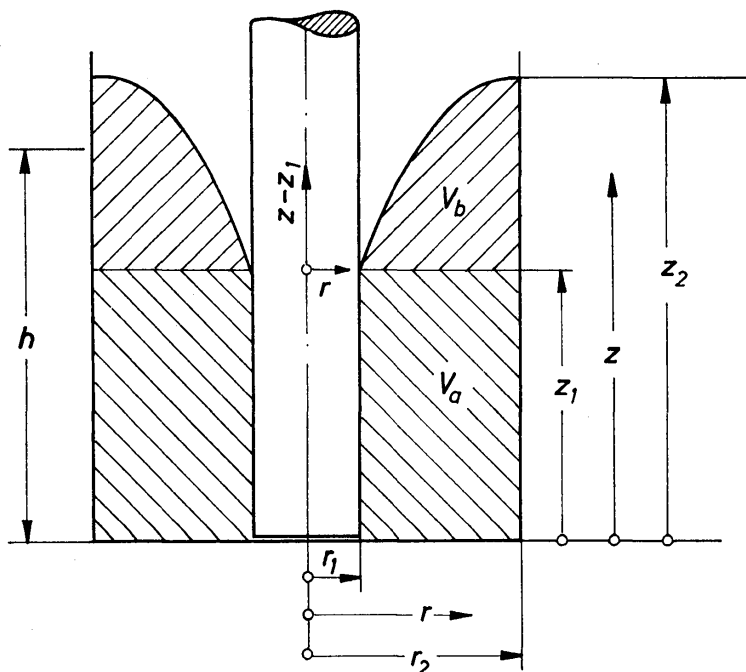


Bild 19.19
 Aufteilung des gesamten Flüssigkeitsvolumens V in die Teilvolumen V_a und V_b

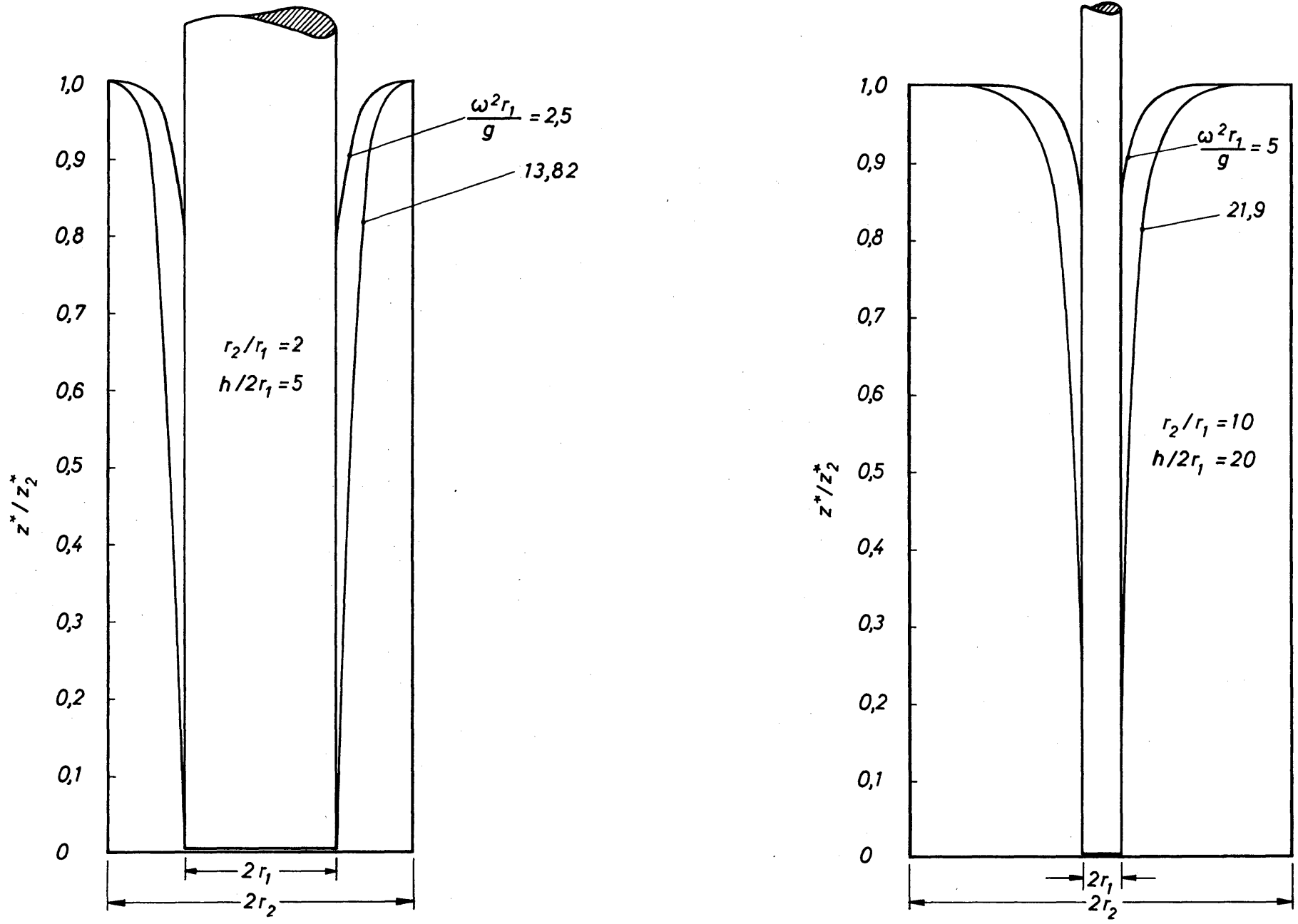


Bild 19.20. Trombenform für verschiedene Werte von r_2/r_1 , $h/2 r_1$ und $\omega^2 r_1/g$

Einsetzen in Gl.(19.30) ergibt dann

$$h^* - z_1^* \equiv \frac{h - z_1}{\omega^2 r_1^2 / (2g)} = 1 + \frac{3}{2} \frac{3D^{*2} - 1}{(D^{*2} - 1)^2} - \frac{6D^{*4} \ln D^*}{(D^{*2} - 1)^3}. \quad (19.33)$$

Diese Höhendifferenz ändert sich qualitativ in der gleichen Form mit dem Radienverhältnis $D^* \equiv r_2/r_1$ wie Δz_{\max}^* und ist in *Bild 19.17* durch Kurve *b* dargestellt. Mit den Gleichungen (19.27) und (19.33) läßt sich dann die Trombenform in vollständiger Form berechnen. In *Bild 19.20 a* und *b* sind die Tromben für einige Fälle dargestellt, wobei das Verhältnis z^*/z_2^* aufgetragen ist. Mit z_2^* wird z^* an der Stelle $r = r_2$ bezeichnet. Verändert wurden die Parameter $\omega^2 r_1/g$, r_2/r_1 und $h/2 r_1$. Mit zunehmenden Werten für $\omega^2 r_1/g$ dringt die Trombe tiefer in die Flüssigkeit vor, und desto geringer ist die Leistung, die vom Rührer auf die Flüssigkeit übertragen wird. Für $\omega^2 r_1/g = 13,82$ bzw. $21,9$ hat die Trombe den Gefäßboden erreicht. Theoretisch wird dann keine Leistung mehr übertragen. Praktisch tritt dieser Fall aber nicht auf, da die Rotation der Flüssigkeit dann durch Reibung sehr schnell vermindert und die Trombe wieder rückgängig wird. Die Folge ist jedoch eine intermittierende Leistungsübertragung. Um die Trombenform mit der anschließend zu berechnenden Rührerleistung verbinden zu können, sei an dieser Stelle auf den Zusammenhang $\omega^2 r_1/g = 2 \pi^2 Fr = 2 \pi^2 Re^2/Ga$ hingewiesen.

19.314 Rührerleistung bei laminarer Strömung

Die Schubspannung τ_1 an der Oberfläche des Zylinderrührers und die Eintauchtiefe z_1 werden zur Berechnung der Rührleistung N herangezogen. Da τ_1 und z_1 für den Fall der laminaren Strömung ermittelt wurden, kann auch die Rührleistung nur für diese Strömungsform bestimmt werden.

Führt man in Gl.(19.11) für τ_1 und z_1 die Gleichungen (19.21) und (19.33) ein, so erhält man in dimensionsloser Schreibweise:

$$N^* = 4\pi^3 \frac{h/d_r}{Re} \frac{D^{*2}}{D^{*2} - 1} \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{Fr}{h/d_r} (h^* - z_1^*) \right]. \quad (19.34)$$

Die Leistungszahl N^* , die Reynoldszahl Re und die Froudezahl Fr sind durch die Gleichungen (19.1) bis (19.3) definiert. Zu beachten ist, daß die Drehzahl n sowohl in der Reynoldszahl als auch in der Froudezahl auftritt. Hierdurch wird die Deutung graphischer Darstellungen von Gl.(19.34) und experimentell gewonnener Ergebnisse erheblich erschwert. Es ist daher sinnvoll, die Froudezahl $Fr \equiv n^2 d_r/g$ umzuformen in

$$Fr = Re^2/Ga. \quad (19.35)$$

Mit $Ga \equiv g d_r^3 \rho^2/\eta^2$ wird die Galileizahl bezeichnet. Somit erhält die Leistungsgleichung die Form

$$N^* = 4\pi^3 \frac{h/d_r}{Re} \frac{D^{*2}}{D^{*2} - 1} \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{Re^2}{Ga h/d_r} (h^* - z_1^*) \right]. \quad (19.36)$$

Hierin ist $h^* - z_1^*$ gemäß Gl. (19.33) allein vom Durchmesser Verhältnis D^* abhängig. Die Leistungszahl N^* ist eine Funktion der vier Kennzahlen Re , Ga , h/d_r und D^* .

Der Einfluß der Trombenbildung auf die Leistungszahl N^* wird durch den Ausdruck in der eckigen Klammer von Gl. (19.36) berücksichtigt. Dessen Größe wird durch die Kennzahlengruppe $Re^2/(Ga h/d_r)$ und durch die Höhendifferenz $h^* - z_1^*$ bestimmt. Aus Gl. (19.33) ergab sich $h^* - z_1^* = 0$ für $D^* = 1$ (keine Trombe vorhanden) und $h^* - z_1^* = 1$ für $D^* = \infty$ (Trombe vorhanden).

Es ist also für $D^* = 1$ die Leistungszahl

$$N^* = \infty, \quad (19.37)$$

und für $D^* = \infty$ gilt

$$N^* = 4\pi^3 \frac{h/d_r}{Re} \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{Re^2}{Ga h/d_r} \right]. \quad (19.38)$$

Die Leistungszahl N^* wird somit für wachsendes Radien- bzw. Durchmesser Verhältnis D^* kleiner, da die Trombentiefe $h^* - z_1^*$ mit dem Durchmesser Verhältnis zunimmt. Aus Gl. (19.38) folgt ferner: $N^* = \infty$ (aber $N = 0$) für $Re = 0$; $N^* = \infty$ für $h/d_r = \infty$ aber $N = 0$ für $d_r = 0$. Ferner ist für $Ga = \infty$ und $D^* = \infty$

$$N^* = 4\pi^3 \frac{h/d_r}{Re}. \quad (19.39)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die Bedeutung der Leistungszahl N^* ablesen. Es folgt nach Auflösung:

$$N = n^3 d_r^5 \rho 4\pi^3 \frac{h/d_r}{Re}. \quad (19.40)$$

Setzt man $Re/(h/d_r) = 4\pi^3$, so ist also $N = n^3 d_r^5 \rho$. Das ist gerade die Leistung, auf die jeweils die vom Rührer tatsächlich übertragene Leistung N bezogen wird. Somit ist also die Leistungszahl N^* das Verhältnis der wirklichen Leistung N zu derjenigen, die ohne Berücksichtigung des Trombeneinflusses ($Ga = \infty$ und $D^* = \infty$) bei $Re/(h/d_r) = 4\pi^3 = 124$ auftritt.

In *Bild 19.21* ist die Leistungszahl N^* gemäß Gl. (19.36), abhängig von der Reynoldszahl Re und der Galileizahl Ga , für $D^* = \infty$ und $h/d_r = 5$ dargestellt. Jede für $Ga < \infty$ eingezeichnete Kurve nähert sich mit abnehmender Reynoldszahl der Grenzkurve, die für $Ga = \infty$ nach Gl. (19.39) berechnet wurde. Bei gegebenem Wert der Galileizahl Ga wird die Leistungszahl N^* mit zunehmender Reynoldszahl Re kleiner, da sich die Trombe ausbildet und die Berührungsfläche zwischen Rührer und Flüssigkeit kleiner wird. Für den Grenzwert Re_0 wird $N^* = N = 0$, da die Trombe den Gefäßboden erreicht hat. Aus Gl. (19.36) folgt für den Grenzwert Re_0 , indem man den Ausdruck in der eckigen Klammer gleich Null setzt:

$$Re_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi^2} \frac{Ga h/d_r}{h^* - z_1^*}}. \quad (19.41)$$

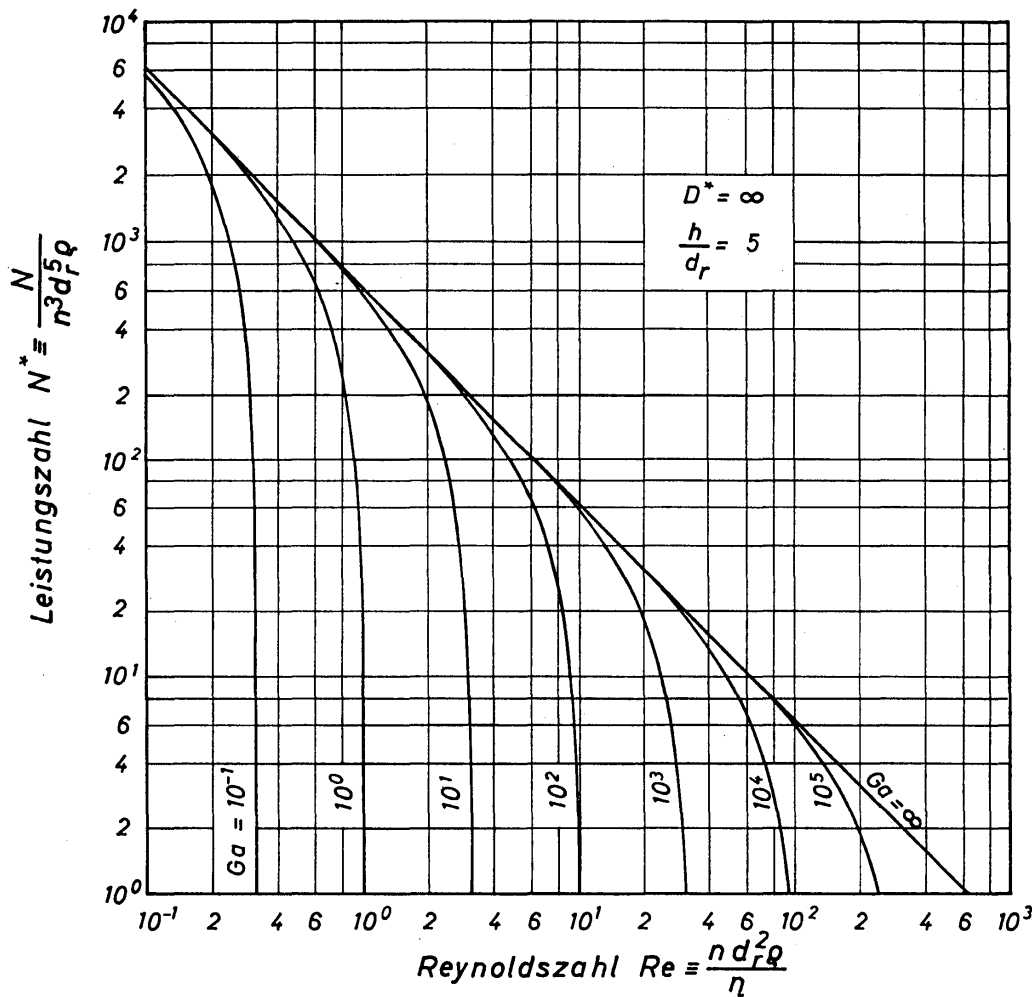


Bild 19.21. Leistungszahl N^* , abhängig von der Reynoldszahl Re und der Galileizahl Ga , für $D^* = \infty$ und $h/d_r = 5$, berechnet nach Gl.(19.36)

Dieser Grenzwert ist von besonderer Bedeutung, wenn die Ergebnisse von Laboratoriumsversuchen zur Berechnung von technischen Anlagen verwendet werden sollen. Der Wert der Reynoldszahl, der sich bei Betrieb einer technischen Anlage einstellen soll, muß stets kleiner sein als Re_0 . Zur Festlegung des höchsten Wertes der Reynoldszahl muß also die Galileizahl als entscheidende Kennzahl beachtet werden.

In der technischen Praxis hat es sich, wie schon erwähnt, als sinnvoll erwiesen, das Verhältnis $D^* \equiv D/d_r$ aus Gefäß- und Rührerdurchmesser zu $D^* = 3$ festzulegen. Daß diese Festlegung gut begründet ist, läßt Gl. (19.36) leicht erkennen. Vernachlässigt man den Trombeneinfluß – der Ausdruck in der eckigen Klammer wird dann gleich 1 –, dann bringt $D^{*2}/(D^{*2} - 1)$ den Einfluß des Durchmesserverhältnisses auf die Leistungskennzahl N^* zum Ausdruck. Für $D^* = 1$ wird $D^{*2}/(D^{*2} - 1) = \infty$, und für $D^* = \infty$ erreicht $D^{*2}/(D^{*2} - 1)$ den kleinsten Wert, nämlich 1. Dieser ist jedoch ohne jede technische Bedeutung, da er nur bei unendlich großem Gefäßdurchmesser erreicht wird. Wählt man indes $D^* = 3$, so wird $D^{*2}/(D^{*2} - 1) = 1,125$ und ist also nur noch 12,5% größer als der kleinstmögliche Wert mit 1,0. Die als technisch sinnvoll erkannte Lösung mit $D^* = 3$ führt also zu einer Rührerleistung, die nur noch wenig größer ist als das absolute Minimum. Die Abhängigkeit des Leistungsbedarfs vom Durchmesserverhältnis

geht auch aus *Bild 19.24* (Kurve für $m = 1,0$) hervor, welches später noch in einem anderen Zusammenhang besprochen wird.

19.315 Rührerleistung bei turbulenter Strömung

Eine vollständige Berechnung der Leistungszahl bei turbulenter Strömung setzt die Kenntnis des Geschwindigkeitsprofils voraus. Diese Kenntnis ist aber noch nicht vorhanden. Näherungsweise ließe sich das von REICHARDT [19.27] mitgeteilte Geschwindigkeitsgesetz für die geradlinige Couette-Strömung zumindest für kleine Werte des Radienverhältnisses auf die Strömung im Rührgefäß übertragen. Hierauf soll aber verzichtet werden. Es wird vielmehr unmittelbar das von TILLMANN [19.28] mitgeteilte Widerstandsgesetz für die gekrümmte Couette-Strömung zwischen rotierenden Zylindern zur Bestimmung der Rührerleistung herangezogen.

Für den Fall, daß sich der innere Zylinder dreht und daß der äußere Zylinder ruht, läßt sich aus den Meßwerten von TILLMANN folgende empirische Gleichung für die Leistungszahl aufstellen:

$$N_c^* = 0,054/Re_c^{1/3}. \quad (19.42)$$

Hierin sind die Leistungszahl N_c^* und die Reynoldszahl Re_c folgendermaßen definiert:

$$N_c^* \equiv \frac{2 \eta}{\pi n \varrho r_2^2} \frac{D^{*2}}{D^{*2} - 1}, \quad (19.43)$$

$$Re_c \equiv \frac{\pi n d_r^2 \varrho}{4 \eta} (D^{*2} - 1). \quad (19.44)$$

Vergleicht man hiermit die für die Strömung in Rührgefäßen verwendeten Definitionsgleichungen für N^* und Re , so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Kennzahlen:

$$N_c^* = N^* \frac{1}{D^{*2}} \frac{d_r}{h} \frac{2}{\pi^4}, \quad (19.45)$$

$$Re_c = Re \frac{\pi}{4} (D^{*2} - 1). \quad (19.46)$$

Hiermit läßt sich Gl.(19.42) in die folgende Form bringen:

$$N^* = 2,85 \frac{h/d_r}{Re^{1/3}} \frac{D^{*2}}{(D^{*2} - 1)^{1/3}}. \quad (19.47)$$

Dieses empirische Gesetz berücksichtigt nicht den Einfluß einer sich ausbildenden Trombe und gilt daher nur für $Ga = \infty$. Ferner ist die Gültigkeit auf den Bereich $10^3 \leq Re \leq 10^5$ beschränkt.

19.32 Theorie des Zylinderrührers für nicht-Newton'sche Flüssigkeiten

Den Zylinder als Modellrührer hat SCHILO [19.29] zur Berechnung des Leistungsbedarfs beim Rühren nicht-Newton'scher Flüssigkeiten verwendet. SCHILO legte seinen Untersuchungen solche nicht-Newton'schen Flüssigkeiten zugrunde, deren Fließverhalten durch den Schubspannungsansatz von OSTWALD und DE WAELE beschrieben wird. Die Eigenschaften dieses Ansatzes sind in Abschnitt 3.21 ausführlich erörtert worden. In Polarkoordinaten lautet dieser Ansatz:

$$\tau = -K \left(r \left| \frac{d\omega}{dr} \right| \right)^m. \quad (19.48)$$

Mit K wird der Ostwald-Faktor, mit m der Flüssigkeitsindex und mit $\omega = 2\pi n$ die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Für den Flüssigkeitsindex wurde in Kapitel 3 der Buchstabe n gewählt. Hier wird m vorgezogen, damit keine Verwechslung mit der Drehzahl n auftreten kann.

Die theoretische Behandlung der Strömung nicht-Newton'scher Flüssigkeiten im Ringspalt erfolgt in der gleichen Weise wie für Newton'sche Flüssigkeiten. Die maßgebenden Gleichungen werden daher ohne Herleitung mitgeteilt.

Für die bezogene örtliche Umfangsgeschwindigkeit erhält man die Beziehung

$$\frac{w}{\omega r_1} = \frac{r}{r_1} \frac{\left(D^* \frac{r_1}{r} \right)^{2/m} - 1}{D^{*2/m} - 1}. \quad (19.49)$$

Für $m = 1$ ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung für Newton'sche Flüssigkeiten. In diesem Falle stimmt Gl.(19.49) mit Gl.(19.14) überein. In Bild 19.22 ist $w/(\omega r_1)$ für $D^* \equiv r_2/r_1 = 2$, abhängig von der Ortskoordinate $(r-r_1)/(r_2-r_1)$ und vom Flüssigkeitsindex m , dargestellt. Mit abnehmenden Werten für m wird die Geschwindigkeit kleiner.

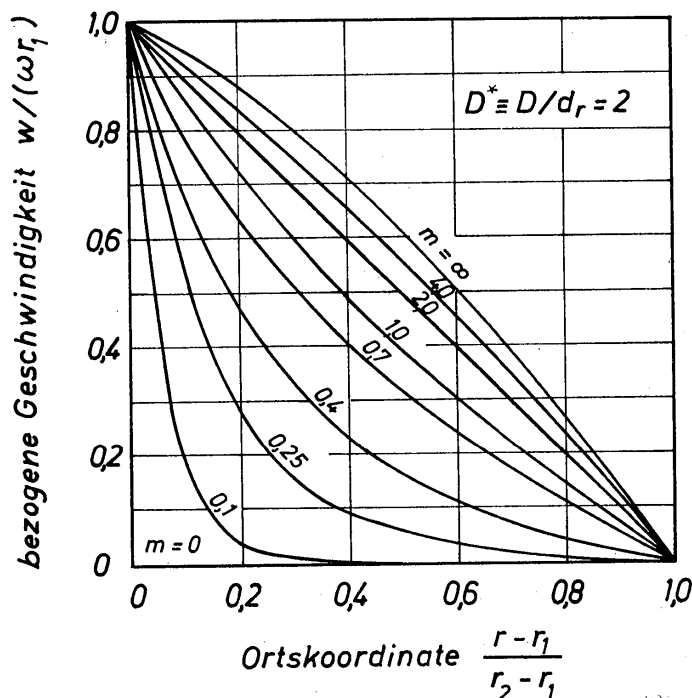


Bild 19.22
Geschwindigkeitsverteilung im Rührgefäß
für nicht-Newton'sche Flüssigkeiten

Die örtliche Schubspannung ergibt sich zu:

$$\tau = \left(\frac{2 \omega K^{1/m}}{m} \right)^m \frac{(r_2/r)^2}{(D^{*2/m} - 1)^m} \tag{19.50}$$

Für $m = 1$ folgt Übereinstimmung mit Gl.(19.20). Setzt man $r = r_1$ bzw. $r = r_2$, so erhält man die Schubspannung an der Zylinder- bzw. an der Gefäßoberfläche. Für die Leistungszahl N^* leitete SCHILO die folgende Beziehung her:

$$N^* = \pi^2 \left(\frac{4 \pi}{m} \right)^m \frac{h/d_r}{Re_m} \frac{D^{*2}}{(D^{*2/m} - 1)^m} \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{Fr}{h/d_r} (h^* - z_1^*) \right] \tag{19.51}$$

Die Leistungszahl N^* und die Froudezahl Fr sind in gleicher Weise definiert wie bei Newtonschen Flüssigkeiten und somit durch die Gleichungen (19.1) und (19.3) gegeben. Eine von der für Newtonsche Flüssigkeiten abweichende Definition weist jedoch die Reynoldszahl auf; sie wird deshalb mit Re_m bezeichnet. Die Definitionsgleichung lautet:

$$Re_m \equiv \frac{n^{2-m} d_r^2 \rho}{K} \tag{19.52}$$

Bei nicht-Newtonschen Flüssigkeiten ist es nicht sinnvoll, die Froudezahl Fr durch die Reynoldszahl Re_m und die Galileizahl Ga_m zu ersetzen, wie es mittels

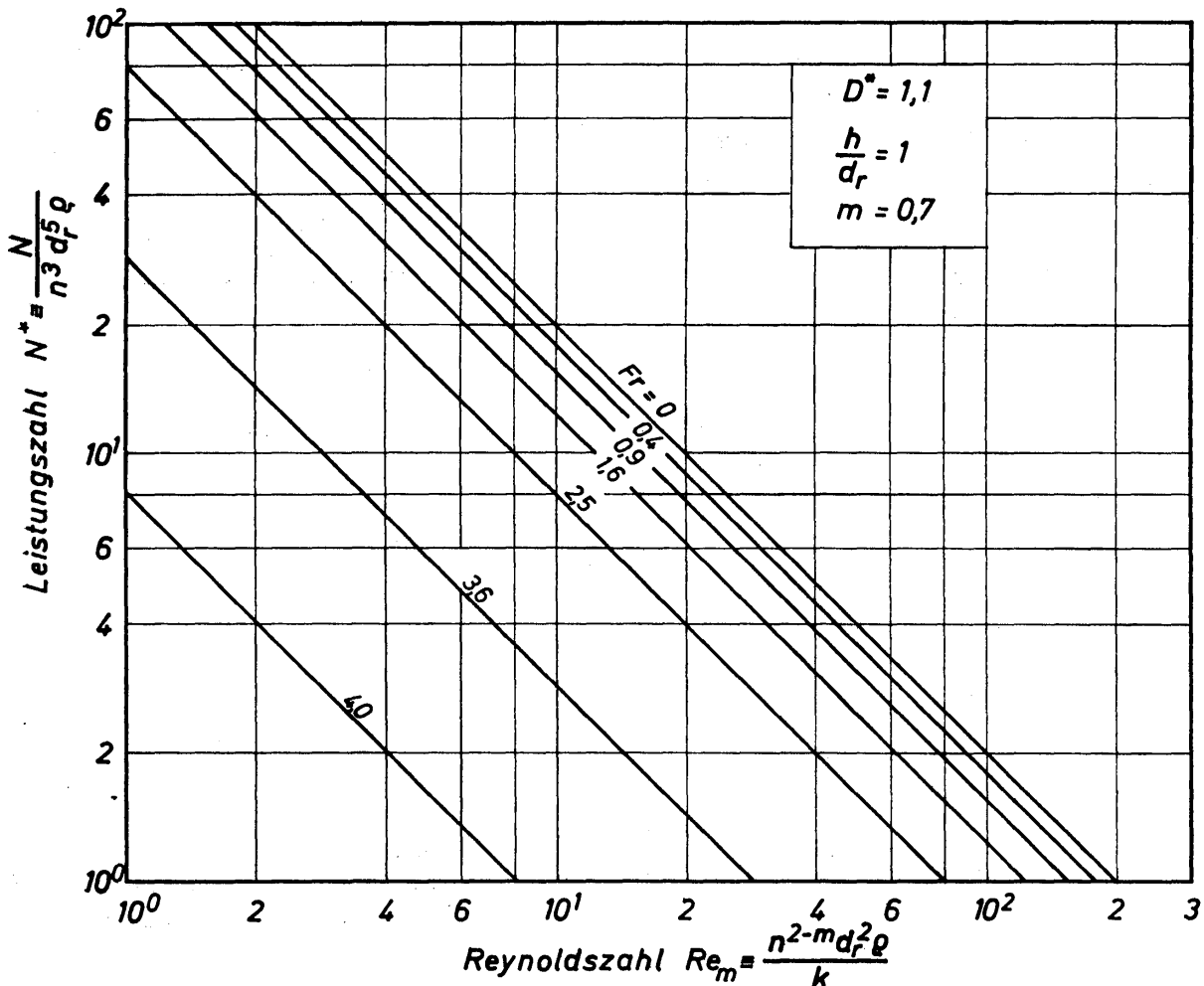


Bild 19.23. Leistungszahl N^* für eine nicht-Newtonsche Flüssigkeit mit dem Index $m = 0,7$ abhängig von der Reynoldszahl Re_m für verschiedene Werte der Froudezahl Fr

Gl.(19.35) bei Newtonschen Flüssigkeiten getan wurde. Da die Galileizahl bei nicht-Newtonschen Flüssigkeiten eine Abhängigkeit von der Drehzahl aufweist, würde die Abhängigkeit der Leistungszahl N^* von der Drehzahl durch Re_m und Ga_m , also durch zwei Kennzahlen, zum Ausdruck kommen. Gegenüber der Schreibweise mit der Froudezahl ergäbe sich also keine Vereinfachung.

Die in Gl.(19.51) auftretende Höhendifferenz $h^* - z_1^*$ ist ein Maß für diejenige Zylinderlänge, welche durch die Ausbildung der Trombe mit der Flüssigkeit nicht mehr in Berührung kommt. Für diese Höhendifferenz gilt folgende Beziehung:

$$h^* - z_1^* \equiv \frac{h - z_1}{\omega^2 r_1^2 / (2g)} = \frac{1}{(1 - D^{*2/m})^2} \left[\frac{1}{2} (D^{*2} + 1) - \frac{4(D^{*4} - D^{*2/m})}{(1 - 1/m)(4 - 2/m)(D^{*2} - 1)} + \frac{2D^{*2/m}}{1 - 1/m} + \frac{2(D^{*4} - D^{*4/m})}{(1 - 2/m)(4 - 4/m)(D^{*2} - 1)} - \frac{2D^{*4/m}}{2 - 4/m} - 1 \right]. \quad (19.53)$$

In Bild 19.23 ist die Leistungszahl N^* , abhängig von der Reynoldszahl Re_m , für verschiedene Werte der Froudezahl Fr bei konstanten Werten für D^* , h/d_r und m dargestellt. Die Leistungszahl nimmt mit wachsender Froudezahl ab, da die

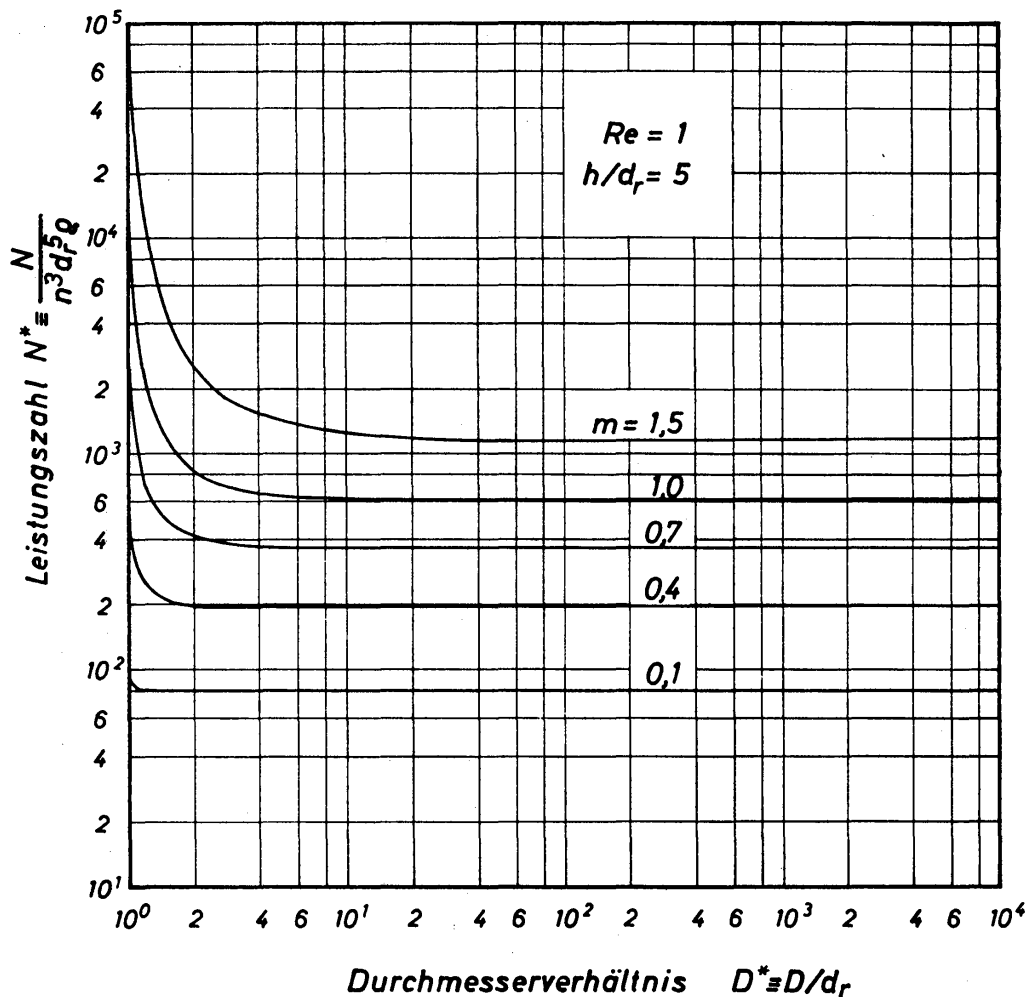


Bild 19.24. Leistungszahl N^* für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten, abhängig vom Durchmesser Verhältnis D^* , für verschiedene Werte des Flüssigkeitsindex m

Trombe tiefer wird. Für den Grenzfall $Fr = 0$ verschwindet der Einfluß der Trombe. Der Ausdruck in der eckigen Klammer von Gl.(19.51) wird dann zu 1. Die Leistungszahl läßt sich dann durch die vereinfachte Beziehung angeben:

$$N^* = \pi^2 \left(\frac{4 \pi}{m} \right)^m \frac{h/d_r}{Re_m} \frac{D^{*2}}{(D^{*2/m} - 1)^m} \tag{19.54}$$

Bild 19.24 zeigt N^* , abhängig vom Durchmesser Verhältnis $D^* \equiv D/d_r$, für verschiedene Werte des Flüssigkeitsindex m sowie für die konstanten Werte $Re_m = 1$ und $h/d_r = 5$. Hiernach nimmt die Leistungszahl mit zunehmendem Durchmesser Verhältnis D^* sehr stark ab und nähert sich dann einem von D^* unabhängigen Endwert. Bei Tangentialrührern, deren Verhalten mit dem von Zylinder-rührern näherungsweise übereinstimmt, liegt das Durchmesser Verhältnis zwischen $D^* = 1$ und $D^* = 1,5$. Innerhalb dieses Bereiches ändert sich die Leistungszahl sehr stark mit D^* . Ferner läßt Bild 19.24 deutlich erkennen, daß die Leistungszahl mit zunehmendem Flüssigkeitsindex m größer wird.

19.33 Vergleich zwischen der Theorie für den Zylinderrührer und experimentellen Ergebnissen

SCHILO [19.29] hat den Leistungsbedarf von Zylinderrührern für verschiedene Bedingungen gemessen. In Bild 19.25 sind Meßwerte für die Leistungszahl N^* über der Reynoldszahl Re_m für Flüssigkeiten mit Werten des Flüssigkeitsindex m

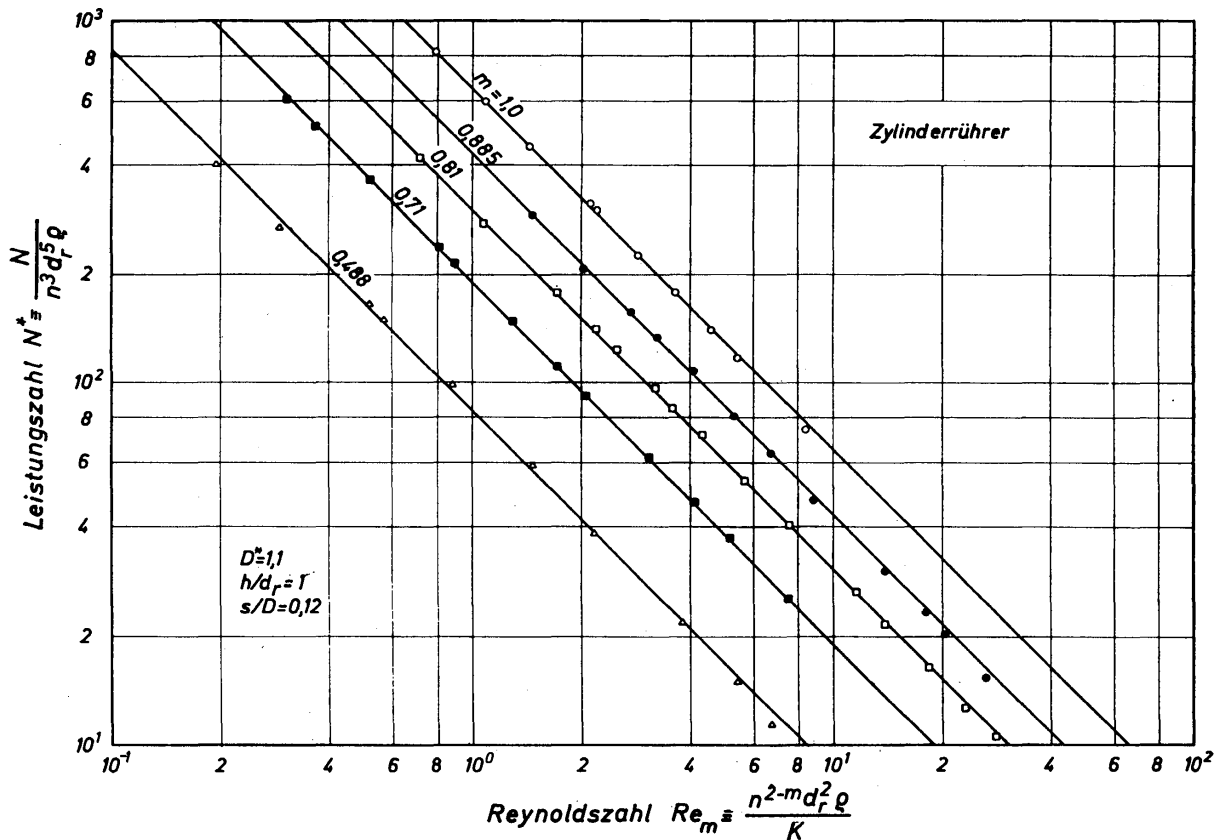


Bild 19.25. Vergleich zwischen gemessenen und theoretisch bestimmten Leistungszahlen N^* für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten; N^* als Funktion der Reynoldszahl Re_m mit dem Flüssigkeitsindex m als Parameter

zwischen 1 und 0,488 dargestellt. Der Index $m = 1$ gilt für Newtonsche Flüssigkeiten. Unverändert bleiben bei diesen Versuchen das Durchmesser Verhältnis mit $D^* = 1,1$, das Füllhöhenverhältnis mit $h/d_r = 1$ und das Bodenabstandsverhältnis mit $e/D = 0,12$. Die dargestellten Meßwerte werden durch die nach Gl.(19.54) berechneten Kurven sehr gut wiedergegeben.

Weitere Meßwerte für den Leistungsbedarf von Zylinderrührern zeigt *Bild 19.26*. Hierin ist der aus Gl.(19.54) folgende Ausdruck $N^* Re_m / (\pi^2 h/d_r)$ für verschiedene Werte des Durchmesser Verhältnisses D^* zwischen 1,05 und 3,0 über dem Flüssigkeitsindex m aufgetragen. Auch hierbei ergibt sich wieder eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, und zwar sowohl für Newtonsche als auch für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten.

In einer Untersuchung von REICHENBERGER [19.30] wurde der Leistungsbedarf von Zylinderrührern unter besonderer Berücksichtigung der Flüssigkeitsstrombegrenzung gemessen. Auch hierbei ergab sich gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

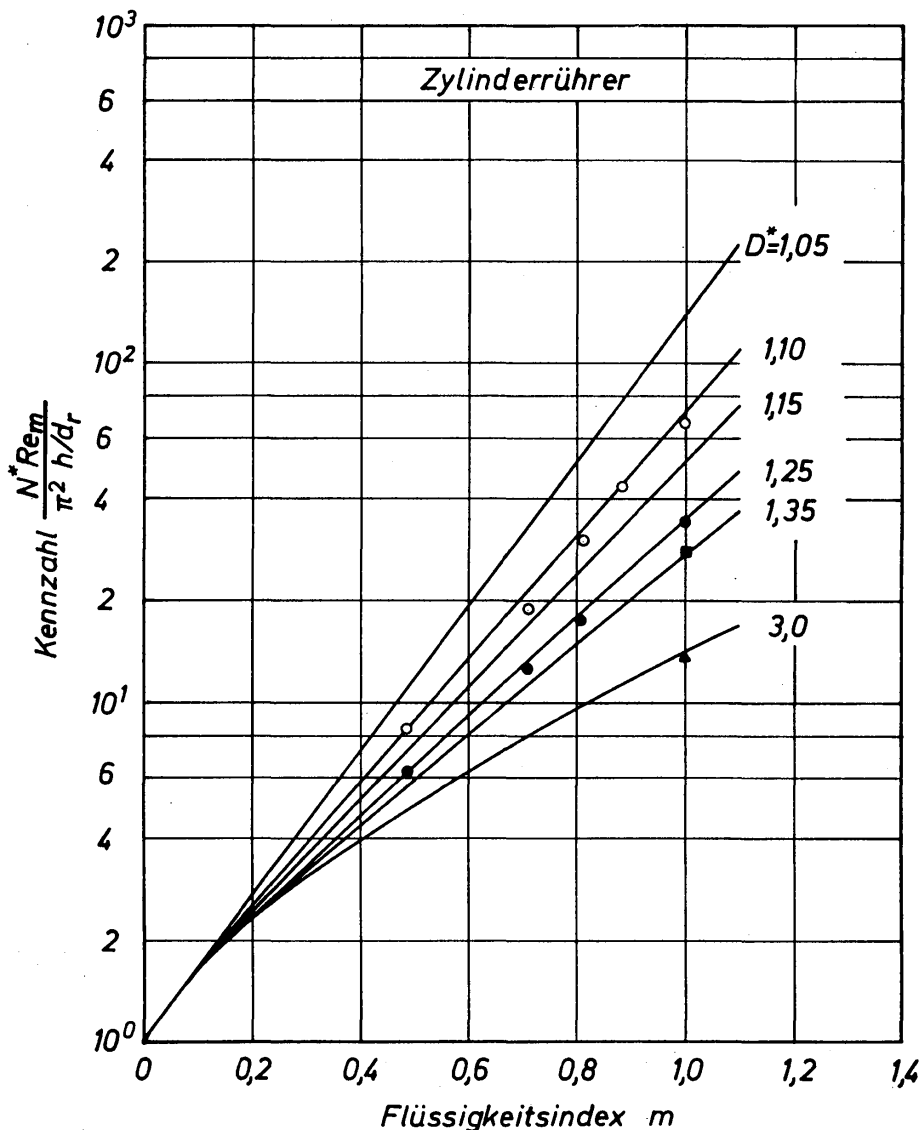


Bild 19.26. Vergleich zwischen gemessenen und theoretisch bestimmten Leistungszahlen für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten; Leistungskennzahl als Funktion des Flüssigkeitsindex m mit dem Durchmesser Verhältnis D^* als Parameter

19.34 Leistungsbedarf des Zylinderrührers, bezogen auf das Gefäßvolumen

Ist die Rührerleistung N und das Gefäßvolumen V , dann ist die Leistung je Volumeinheit N/V . In der technischen Praxis tritt immer wieder die Frage auf, ob N/V bei Vergrößerung des Gefäßvolumens, ausgedrückt durch den Gefäßdurchmesser D , konstant bleibt oder sich ändert. Mit dieser Frage haben sich vor Jahren bereits BÜCHE [19.31] und RUSHTON [19.32] beschäftigt. Eine allgemein verbindliche Antwort konnte bislang noch nicht gegeben werden. Das liegt daran, daß die für die Rührerleistung maßgebenden Gesetze entweder noch nicht in ausreichender Form bekannt waren oder diese Gesetze nicht konsequent angewendet wurden. Wenn die in Rührgefäßen beliebiger Größe ablaufenden physikalischen Vorgänge bekannt sind und durch Gleichungen mit genügender Genauigkeit beschrieben werden, dann läßt sich auch der Leistungsbedarf je Volumeinheit für alle Fälle angeben. In diesem Falle erübrigen sich die sogenannten Vergrößerungsfaktoren. Im angloamerikanischen Schrifttum spricht man in diesem Zusammenhang vom Problem des «scaling-up». Dieses Problem tritt immer nur dann auf, was nochmals wiederholt sei, wenn der Ablauf der physikalischen Vorgänge nicht in ausreichender Form geklärt ist.

Für den Zylinderrührer sind die mit dem Leistungsbedarf zusammenhängenden Probleme theoretisch geklärt und durch Experimente überprüft. Für diesen Rührertyp läßt sich daher auch die Frage der Rührerleistung je Volumeinheit einwandfrei beantworten. Setzt man einfachheitshalber voraus, daß keine Flüssigkeitstrombe auftritt, dann folgt aus Gl.(19.36) für Newtonsche Flüssigkeiten die Beziehung:

$$N^* = 4\pi^3 \frac{h/d_r}{Re} \frac{D^{*2}}{D^{*2} - 1}. \quad (19.55)$$

Führt man für N^* die Gl.(19.1) ein, so erhält man

$$N = 4\pi^3 n^3 d_r^4 h \rho Re^{-1} \frac{D^{*2}}{D^{*2} - 1}. \quad (19.56)$$

Für das Volumen des Rührgefäßes gilt

$$V = h d_r^2 \frac{\pi}{4} (D^{*2} - 1). \quad (19.57)$$

Nach Einführen in Gl.(19.56) und Umformung folgt

$$\frac{N}{V} = 16\pi^2 \frac{\eta^3 Re^2}{\rho^2 D^4} \frac{D^{*6}}{(D^{*2} - 1)^2}. \quad (19.58)$$

Dieses ist die gesuchte Gleichung für den Leistungsbedarf je Volumeinheit für ein Rührgefäß mit Zylinderrührer bei laminarer Strömung einer Newtonschen Flüssigkeit unter Vernachlässigung einer Flüssigkeitstrombe. Gl.(19.58) liefert zunächst das wichtige Ergebnis, daß der Leistungsbedarf je Volumeinheit mit zunehmendem Gefäßdurchmesser abnimmt, wenn alle anderen Größen konstant

bleiben, insbesondere auch die Reynoldszahl. Führt man also zur Bestimmung des Leistungsbedarfs einen Modellversuch in einem kleinen Laborgefäß durch, dann ist die Leistung je Volumeinheit gemäß Gl.(19.58) erheblich größer als in dem praktisch verwendeten großen Rührbehälter, wenn bei dem Laboratoriumsversuch die gleiche Reynoldszahl eingestellt wird, die in der Großanlage zu erwarten ist. Stellt man indes die Frage nach dem Einfluß des Gefäßdurchmessers auf den Leistungsbedarf in ganz allgemeiner Form, dann muß in Gl.(19.58) für die Reynoldszahl Re die Definitionsgleichung (19.1) eingesetzt werden. Man erhält dann:

$$\frac{N}{V} = 16 \pi^2 n^2 \eta \frac{D^{*2}}{(D^{*2} - 1)^2}. \quad (19.59)$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Leistungsbedarf je Volumeinheit unabhängig vom Gefäßdurchmesser ist. Damit wird gleichzeitig nochmals betont, daß die zuvor erörterte Gl.(19.58) nur für die Durchführung von Modellversuchen, bei denen die Reynoldszahl konstant gehalten werden soll, von Interesse ist.

Zur Durchführung von Modellversuchen erhält man aus Gl.(19.58) noch einen wichtigen Hinweis:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^{4/3} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{2/3}. \quad (19.60)$$

Kennzeichnen hierin die Indizes 1 und 2 die Flüssigkeiten in der Groß- und in der Modellanlage, dann besagt diese Gleichung, daß die Versuche in der Modellanlage mit einer Flüssigkeit von erheblich geringerer Viskosität durchgeführt werden müssen, wenn N/V und Re in beiden Fällen übereinstimmen sollen. Diese Bedingungen sind besonders bedeutsam, wenn man Versuche zur Bestimmung der Mischzeit durchführt.

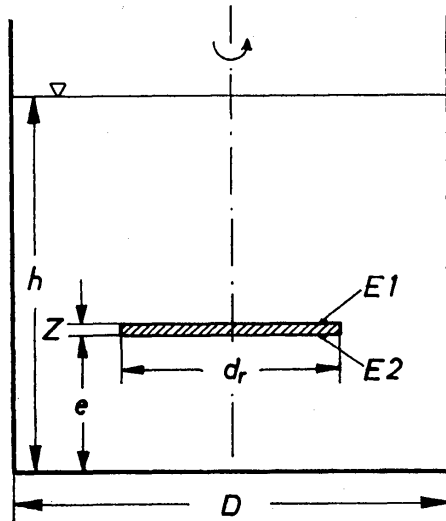
Vernachlässigt man in Gl.(19.60) das Dichteverhältnis, dann ergibt sich weitgehende Übereinstimmung mit einer von RUSHTON [19.32] mitgeteilten empirischen Beziehung, in welcher das Durchmesser Verhältnis D_1/D_2 den Exponenten 1,5 aufweist. RUSHTON kam zu seinem Ergebnis auf Grund von Untersuchungen an Turbinenrührern. Man geht daher wahrscheinlich nicht fehl in der Annahme, daß die aus der Theorie für Zylinderrührer hergeleitete Gl.(19.60) von allgemeiner Bedeutung ist. Führt man die Rechnungen, die oben für Newtonsche Flüssigkeiten durchgeführt wurden, auch für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten durch, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{N}{V} = 4 \pi \left(\frac{4 \pi}{m} \right)^m \frac{K^3 Re_m^2}{n^{3(1-m)} \rho^2 D^4} \frac{D^{*6}}{(D^{*2} - 1)} \frac{1}{(D^{*2-m} - 1)^m}. \quad (19.61)$$

Diese Gleichung ist in ihrem Aufbau bereits so kompliziert, daß sich ähnlich einfache Regeln für die Übertragung der Ergebnisse von Untersuchungen an Modellanlagen auf Großanlagen, wie sie sich für Newtonsche Flüssigkeiten ergaben, nicht aufstellen lassen.

19.35 Theorie des Scheibenrührers für Newtonsche Flüssigkeiten

Gemäß der Darstellung in *Bild 19.27* hat die als Rührermodell betrachtete Scheibe den Durchmesser d_r und die Höhe z . Die Scheibenhöhe soll jedoch so gering sein,



daß die von der Mantelfläche der Scheibe an die Flüssigkeit übertragene Energie vernachlässigbar ist. Die Energiezufuhr an die Flüssigkeit soll also nur durch die obere Scheibenfläche $E1$ und die untere Scheibenfläche $E2$ erfolgen.

Bild 19.27. Anordnung einer Rührerscheibe im Rührgefäß und Bezeichnungen

SCHLICHTING [19.33] hat die von der oberen Scheibenfläche $E1$ an die Flüssigkeit übertragene Leistung unter der Bedingung berechnet, daß sich die Scheibe in einem unendlich ausgedehnten Flüssigkeitsvolumen befindet und die dabei auftretende Grenzschichtströmung laminar ist. In der hier verwendeten Schreibweise lautet die Gleichung:

$$N_{E1}^* = 4\pi^3 \frac{0,04825}{Re^{1/2}}. \quad (19.62)$$

Die Leistungszahl N_{E1}^* ist durch Gl.(19.1) definiert, wenn man die Leistung N durch N_{E1} ersetzt, und die Reynoldszahl Re durch Gl.(19.2). In Gl.(19.62) ist nicht berücksichtigt, daß die Scheibe an einer Welle befestigt ist. Hierdurch wird die zur Übertragung von Energie an die Flüssigkeit verfügbare Scheibenfläche verkleinert. Der tatsächliche Wert der Leistungszahl ist daher auch kleiner als der durch Gl.(19.62) bestimmte. Man erhält den genauen Wert, wenn man die rechte Seite von Gl.(19.62) mit dem Ausdruck $1 - (d_w/d_r)^4$ multipliziert, der jedoch nur sehr wenig von dem Wert 1 abweicht. Im allgemeinen darf diese Korrektur vernachlässigt werden. Mit d_w wird der Durchmesser der Rührerwelle bezeichnet.

Zur Berechnung der Leistung, die von der unteren Scheibenfläche $E2$ der Flüssigkeit zugeführt wird, geht man von der Vorstellung aus, daß sich die Scheibe in einem geschlossenen Gehäuse bewegt und einseitig von der Flüssigkeit benetzt wird. Hierbei sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Fall ist der Bodenabstand e sehr klein, so daß er die Leistungsübertragung beeinflusst. Im zweiten Falle ist der Bodenabstand e sehr groß, so daß sein Einfluß auf die Leistungsübertragung unberücksichtigt bleiben darf.

Bei kleinem Bodenabstand e hat SUBBA RAJU [19.34] eine Gleichung hergeleitet, die sich nach THIELE [19.13] in der folgenden Form schreiben läßt:

$$N_{E2}^* = 4\pi^3 \frac{0,03125}{Re} \frac{d_r^*}{e^*} \left[1 - 0,16936 Re^2 \frac{e^{*4}}{d_r^{*4}} \right]. \quad (19.63)$$

Mit $e^* \equiv e/D$ wird der bezogene Bodenabstand und mit $d_r^* \equiv d_r/D$ der bezogene Rührerdurchmesser bezeichnet. Bei großem Bodenabstand e läßt sich wieder eine Gleichung von SCHLICHTING [19.33] übernehmen, die sich wie folgt schreiben läßt:

$$N_{E2}^* = 4\pi^3 \frac{0,03326}{Re^{1/2}}. \quad (19.64)$$

Aus einem Vergleich der beiden letzten Gleichungen folgt als obere Grenze für Gl.(19.63) und als untere Grenze für Gl.(19.64) die Bedingung:

$$Re \frac{e^{*2}}{d_r^{*2}} = 1,352. \quad (19.65)$$

Die beiden Gleichungen (19.63) und (19.64) gelten für den laminaren Strömungszustand.

In Bild 19.28 ist die Leistungszahl N_{E2}^* für die untere Scheibenfläche, abhängig von der Reynoldszahl Re , mit dem Verhältnis e^*/d_r^* als Parameter dargestellt. Die ausgezogenen und gestrichelt fortgesetzten Kurven wurden nach Gl.(19.63)

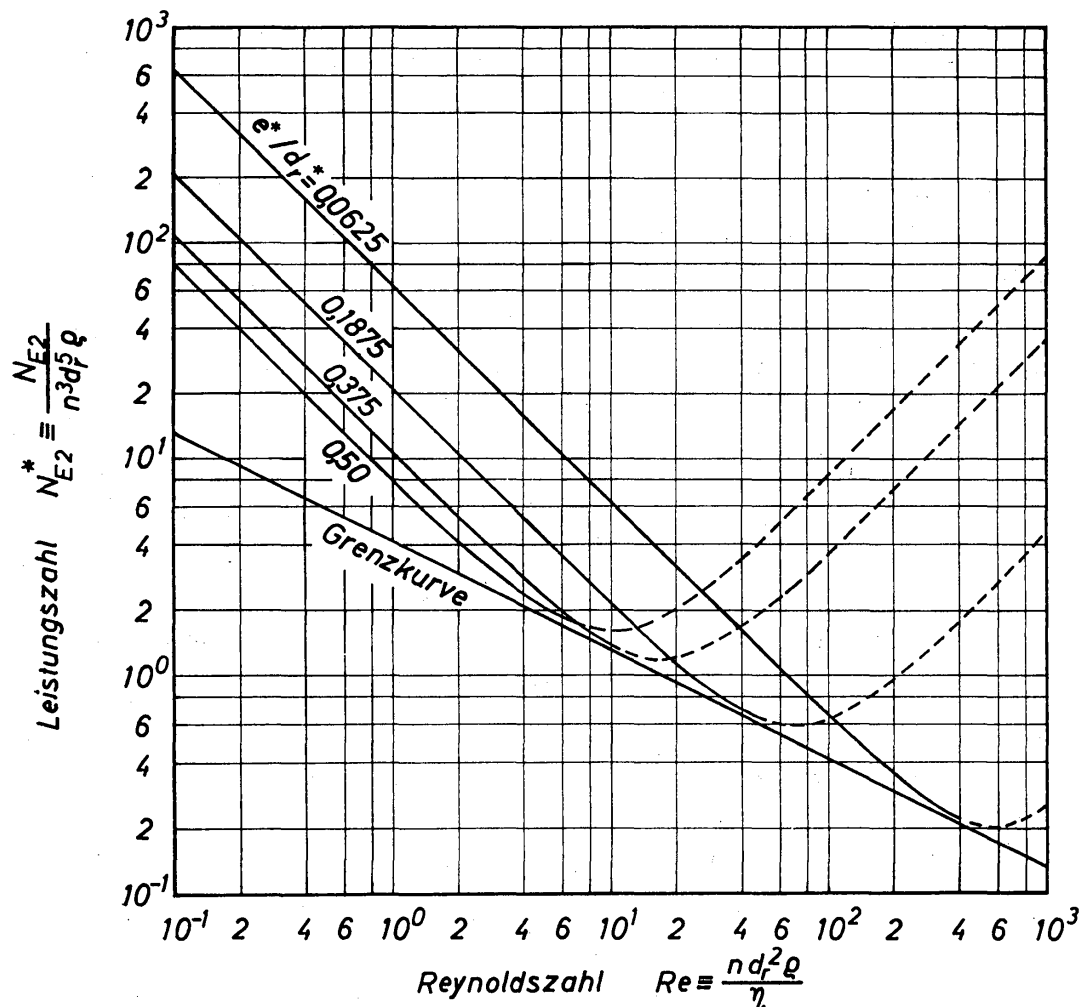


Bild 19.28. Leistungsübertragung von der unteren Scheibenfläche $E2$ an die Flüssigkeit; Erläuterung im Text

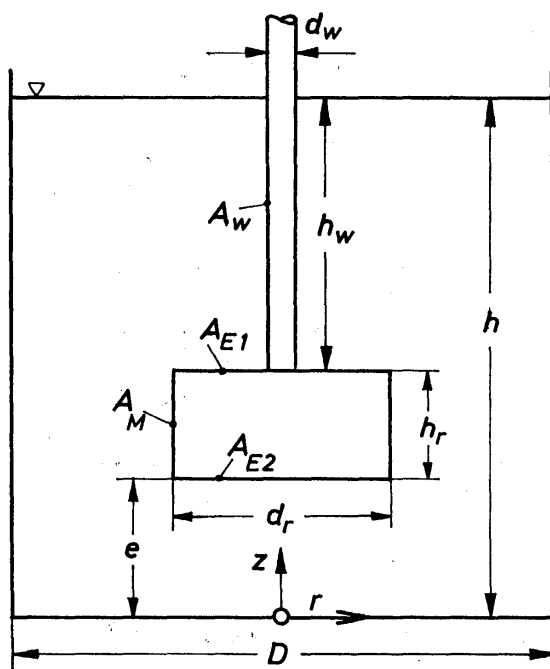
berechnet. Physikalisch sinnvoll sind davon aber nur die ausgezogenen Kurvenäste. Diese weisen im Bereich sehr kleiner Werte der Reynoldszahl die Steigung -1 auf. In Richtung zunehmender Reynoldszahl nähern sich alle Kurven der nach Gl.(19.64) berechneten Grenzkurve. Die Annäherung an diese Grenzkurve erfolgt bei um so kleineren Werten der Reynoldszahl, je größer das Verhältnis e^*/d_r^* ist.

Beim Vergleich der Leistungszahlen N_{E2}^* und N_{E1}^* stellt man fest, daß von der oberen Scheibenfläche $E1$ eine größere Leistung an die Flüssigkeit übertragen wird als von der unteren Scheibenfläche $E2$. Nach SCHLICHTING [19.33] ist dies darauf zurückzuführen, daß zwischen der unteren Scheibenfläche $E2$ und dem Gefäßboden eine Flüssigkeitsmasse mit im Mittel etwa halber Winkelgeschwindigkeit mitrotiert. Infolgedessen sind hier die Gradienten der Umfangsgeschwindigkeit, senkrecht zur Scheibenoberfläche, im Mittel auch nur etwa halb so groß wie an der oberen Scheibenfläche $E1$. Ähnliche Gleichungen zur Berechnung der Leistungsübertragung von rotierenden Scheiben an Flüssigkeiten haben auch ULBRECHT und WICHTERLE [19.35] mitgeteilt.

19.36 Verbindung der Theorien für Zylinder- und Scheibenrührer

19.361 Herleitung der Leistungsgleichung

In *Bild 19.29* ist das Rührermodell dargestellt, das der von THIELE [19.13] entwickelten Theorie zugrunde liegt. Der Rührer befindet sich in einem zylindrischen Gefäß vom Durchmesser D . Die Füllhöhe der Flüssigkeit beträgt h . Als Rührer wird ein zylindrischer Körper angenommen, dessen Durchmesser d_r und dessen Höhe h_r ist. Der Rührer ist an einer Welle mit dem Durchmesser d_w befestigt. Die Welle taucht mit der Länge h_w in die Flüssigkeit ein. Der Abstand vom Gefäßboden bis zur Unterkante des Rührers ist e . Ferner bezeichnen A_M , A_W , A_{E1} und A_{E2} die Oberflächen des Rührers, von denen Energie an die Flüssigkeit übertragen wird. A_M ist die Mantelfläche des Rührers, A_W die der Welle, A_{E1} ist die obere und A_{E2} die untere Endfläche der Rührerscheibe.



A_M ist die Mantelfläche des Rührers, A_W die der Welle, A_{E1} ist die obere und A_{E2} die untere Endfläche der Rührerscheibe.

Bild 19.29
Bezeichnungen beim Blattrührer

Das von dem Modellrührer erzeugte dreidimensionale Strömungsfeld innerhalb des Gefäßes wurde von THIELE vollständig berechnet. Zur Vereinfachung wurde vorausgesetzt, daß sich bei der Rotation des Rührers keine Trombe in der Flüssigkeit ausbildet. Ein Beispiel für das berechnete Feld von Stromlinien ist bereits in *Bild 19.6* angegeben worden. Ist das Strömungsfeld bekannt, dann läßt sich auch die vom Rührer an die Flüssigkeit übertragene Leistung N berechnen. Die Leistung setzt sich aus vier Anteilen zusammen:

$$N = N_M + N_W + N_{E1} + N_{E2}. \quad (19.66)$$

Dabei bedeuten N_M die von der Mantelfläche A_M des Rührers, N_W die von der Oberfläche A_W der Rührerwelle sowie N_{E1} und N_{E2} die von den Endflächen $E1$ und $E2$ des Rührers an die Flüssigkeit übertragenen Leistungsanteile. Hierfür sollen die Gleichungen in einheitlicher Schreibweise mitgeteilt werden.

Ganz allgemein gilt für die vom Flächenelement dA abgegebene differentielle Leistung:

$$dN = 2\pi n r \tau dA. \quad (19.67)$$

Berechnet man den Leistungsanteil N_M für die Mantelfläche A_M des Rührers, dann gilt mit $r = d_r/2$,

$$dA_M = \frac{1}{2} d_r dz d\varphi \quad (19.68)$$

und

$$\tau_M = -\eta \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right]_{r=d_r/2} \quad (19.69)$$

für den Leistungsanteil die Beziehung:

$$N_M = \frac{\pi}{4} n \eta d_r^3 \int_0^{e+h_r} \int_e^e \left[- \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right]_{r=d_r/2} dz d\varphi. \quad (19.70)$$

Mit w wird die Umfangsgeschwindigkeit, mit z die vom Gefäßboden aus zählende senkrechte Koordinate und mit φ die Umfangskoordinate bezeichnet. Da die Strömung im Gefäß rotationssymmetrisch ist, kann die Integration über den Umfang ohne Kenntnis von w durchgeführt werden. In dimensionsloser Schreibweise erhält man dann:

$$N_M^* = 2\pi^3 \frac{d_r^*}{Re} \int_{e^*}^{e^*+h_r^*} \left[- \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{w^*}{r^*} \right) \right]_{r^*=d_r^*} dz^*. \quad (19.71)$$

Hierin bedeuten $w^* \equiv w/(\pi d_r n)$ die bezogene Umfangsgeschwindigkeit, $r^* \equiv 2r/D$ den bezogenen Ortsradius, $d_r^* \equiv d_r/D$ den bezogenen Rührerdurchmesser, $d_w^* \equiv d_w/D$ den bezogenen Durchmesser der Rührerwelle, $e^* \equiv e/D$ den bezogenen Bodenabstand, $h_r^* \equiv h_r/D$ die bezogene Rührerhöhe, $z^* \equiv z/D$ die bezogene axiale

Koordinate sowie N_M^* und Re die durch die Gleichungen (19.1) und (19.2) definierten Kennzahlen. In diesen ist als charakteristische Länge der Rührerdurchmesser zu verwenden.

Für die anderen Leistungsanteile lassen sich die der Gl.(19.71) entsprechende Beziehungen aufstellen. So erhält man für die Leistungszahl N_W^* der Rührerwelle die Beziehung:

$$N_W^* = 2\pi^3 \frac{d_r^*}{Re} \left(\frac{d_w^*}{d_r^*} \right)^3 \int_{e^* + h_r^*}^{h^*} \left[-\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{w^*}{r^*} \right) \right]_{r^* = d_w^*} dz^*, \quad (19.72)$$

für die Leistungszahl der oberen Endfläche:

$$N_{E1}^* = \frac{1}{2} \pi^3 \frac{d_r^*}{Re} \frac{1}{d_r^{*3}} \int_{d_w^*}^{d_r^*} r^{*2} \left[-\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right]_{z^* = e^* + h_r^*} dr^* \quad (19.73)$$

und für die Leistungszahl der unteren Endfläche

$$N_{E2}^* = \frac{1}{2} \pi^3 \frac{d_r^*}{Re} \frac{1}{d_r^{*3}} \int_0^{d_r^*} r^{*2} \left[+\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right]_{z^* = e^*} dr^*. \quad (19.74)$$

In den letzten drei Gleichungen sind $h^* \equiv h/D$ die bezogene Füllhöhe und $d_w^* \equiv d_w/D$ der bezogene Durchmesser der Rührerwelle. Ferner sei nochmals betont, daß als charakteristische Länge in den Leistungskennzahlen und in der Reynoldszahl stets der Rührerdurchmesser d_r verwendet wird. Aus diesem Grunde lassen sich die vier Leistungsanteile wie folgt zur Gesamtleistung zusammenfassen:

$$\begin{aligned} N^* = \pi^3 \frac{d_r^*}{Re} & \left\{ 2 \int_{e^*}^{e^* + h_r^*} \left[-\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{w^*}{r^*} \right) \right]_{r^* = d_w^*} dz^* \right. \\ & + 2 \left(\frac{d_w^*}{d_r^*} \right)^3 \int_{e^* + h_r^*}^{h^*} \left[-\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{w^*}{r^*} \right) \right]_{r^* = d_w^*} dz^* \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{d_r^{*3}} \int_{d_w^*}^{d_r^*} r^{*2} \left[-\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right]_{z^* = e^* + h_r^*} dr^* \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{d_r^{*3}} \int_0^{d_r^*} r^{*2} \left[+\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right]_{z^* = e^*} dr^* \right\}. \quad (19.75) \end{aligned}$$

Diese Beziehung ist ganz allgemein gültig für die Berechnung der Leistungszahl des in *Bild 19.29* dargestellten Modellrührers zum Rühren Newtonscher Fluide im Bereich der laminaren und der turbulenten Strömung. Grundsätzlich läßt sich

Gl.(19.75) auch dann anwenden, wenn beim Rühren eine Flüssigkeitsstrombe auftritt. In diesem Fall müssen lediglich die Integrationsgrenzen gemäß der von der Flüssigkeit benetzten Oberfläche neu festgelegt werden. In Abschnitt 19.31 hat sich bereits gezeigt, daß bei Auftreten einer Trombe die Galileizahl als zusätzliche Kennzahl auftritt.

19.362 Leistungsgleichung für Rührer mit großer Höhe

Bei Rührern mit großer Höhe ist die Annahme gerechtfertigt, daß zwischen den an den verschiedenen Oberflächen des Modellrührers entstehenden Gradienten der Umfangsgeschwindigkeit keine nennenswerte gegenseitige Beeinflussung auftritt. Aus diesem Grunde dürfen die für Zylinder- und Scheibenrührer hergeleiteten Gleichungen für den Leistungsbedarf bei laminarer Strömung im Rührgefäß unmittelbar übernommen werden. Von THIELE wurden diese Gleichungen erneut hergeleitet, indem er gemäß Gl.(19.75) für alle Leistungsanteile die Geschwindigkeitsgradienten in Umfangsrichtung berechnete.

In dimensionsloser Schreibweise gilt für den gesamten Leistungsbedarf die Beziehung

$$N^* = N_M^* + N_W^* + N_{E1}^* + N_{E2}^*. \quad (19.76)$$

Für die Leistungsabgabe N_M^* der Mantelfläche des Zylinderrührers erhält man aus Gl.(19.34) unter Berücksichtigung der in diesem Abschnitt verwendeten Bezeichnungen die folgende Gleichung:

$$N_M^* = 4\pi^3 \frac{h_r^*}{Re} \frac{1}{d_r^* (1 - d_r^{*2})}. \quad (19.77)$$

Für die Leistungsabgabe der Rührerwelle gilt

$$N_W^* = 4\pi^3 \frac{h_w^*}{Re} \left(\frac{d_w^*}{d_r^*} \right)^3 \frac{1}{d_w^* (1 - d_w^{*2})}. \quad (19.78)$$

Für die Leistungsabgabe der Endflächen $E1$ und $E2$ gelten die bereits mitgeteilten Gleichungen (19.62) bis (19.64).

Aus den erwähnten Gleichungen erkennt man, daß der bezogene Rührerdurchmesser $d_r^* \equiv d_r/D$ einen sehr starken Einfluß auf die einzelnen Leistungsanteile ausübt. Um diesen Einfluß noch deutlicher zu machen, sind der gesamte Leistungsbedarf, ausgedrückt durch N^* , sowie die einzelnen Leistungsanteile in *Bild 19.30*, abhängig von d_r^* , dargestellt. Die Reynoldszahl Re sowie die geometrischen Verhältnisse h_r^* , e^* , d_w^* und h_w^* wurden entsprechend den in der Darstellung angegebenen Werten konstant gehalten. Der praktisch interessierende Bereich der Leistungszahlen ist im allgemeinen auf Werte des Durchmesserhältnisses $d_r^* > 0,2$ beschränkt. In diesem Bereich ist die Verringerung der oberen Endfläche durch die Querschnittsfläche der Rührerwelle vernachlässigbar, so daß die Leistungszahl N_{E1}^* unabhängig vom Durchmesserhältnis d_r^* ist. Erst für Werte von $d_r^* < 0,15$ macht sich dieser Einfluß stärker bemerkbar. Ist $d_r^* = d_w^*$, so ist durch die obere Endfläche keine Leistungsübertragung an die Flüssigkeit mög-

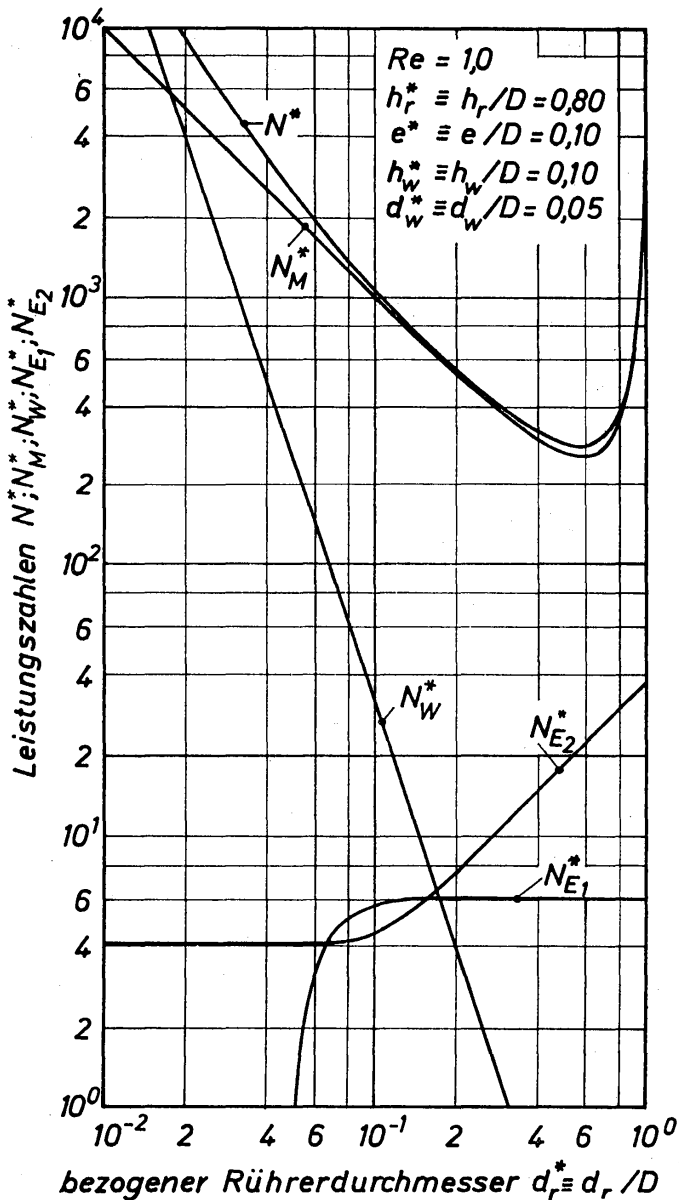


Bild 19.30. Theoretisch ermittelte Leistungszahlen für Modellrührer mit großer Höhe (Erläuterung im Text)

lich. Dementsprechend nimmt die Leistungszahl N_{E1}^* für $d_r^* = d_w^*$ den Wert Null an. Die Leistungszahl N_{E2}^* der unteren Endfläche nimmt in dem praktisch interessierenden Bereich $d_r^* > 0,2$ bei dem vorgegebenen Wert von $e^* = 0,1$ linear mit dem Durchmesser Verhältnis zu. Für $d_r^* = 0,086$ ist die Bedingung $Re e^{*2}/d^{*2} = 1,352$ erfüllt, so daß die Leistungszahl N_{E2}^* in die vom Durchmesser Verhältnis und dem Bodenabstand e^* unabhängige Gl.(19.64) übergeht. Die Leistungszahl N_W^* ist umgekehrt proportional zur dritten Potenz des Durchmesser Verhältnisses d_r^* . Der Anteil der Leistungszahlen N_{E1}^* , N_{E2}^* und N_W^* an der Leistungszahl N^* des Rührermodells ist bei dem in *Bild 19.30* dargestellten Fall gering, so daß N^* im wesentlichen durch die Leistungszahl N_M^* der zylindrischen Mantelfläche bestimmt wird. Mit abnehmenden Werten für den bezogenen Bodenabstand e^* nimmt jedoch die Leistungszahl N_{E2}^* der unteren Endfläche gemäß Gl.(19.63) umgekehrt proportional zum Bodenabstand zu, so daß ihr Einfluß merklich größer als in dem in *Bild 19.30* dargestellten Fall werden kann.

Die Leistungszahl N_M^* der zylindrischen Mantelfläche nimmt mit zunehmenden Werten des Durchmesserhältnisses d_r^* ab, durchläuft gemäß *Bild 19.30* bei $d_r^* \approx 0,6$ ein ausgeprägtes Minimum und steigt dann wieder an. Für $d_r^* = 1$ wird N_M^* und somit auch N^* unendlich groß. Das im Kurvenverlauf für die Leistungszahl N^* charakteristische Minimum ist auf die Form der dimensionslosen Kennzahlen zurückzuführen. Trägt man unmittelbar die Leistung N über dem Rührerdurchmesser d_r auf, so stellt man fest, daß N mit zunehmendem Rührerdurchmesser stetig ansteigt.

19.363 Leistungsgleichung für Rührer mit mäßiger Höhe

Bei mäßiger Höhe $h_r^* \equiv h_r/D$ des Modellrührers treffen die Voraussetzungen, unter denen die bekannten Lösungen der Bewegungsgleichungen hergeleitet wurden, nicht mehr zu. Das heißt also, daß sich die Gradienten der Umfangsgeschwindigkeiten an den einzelnen Teilflächen des Rührers gegenseitig beeinflussen. Die für das gesamte Strömungsfeld maßgebenden partiellen Differentialgleichungen stellen somit also ein gekoppeltes System dar. Es wurde von THIELE [19.13] mittels eines Differenzenverfahrens numerisch gelöst. Dabei erwies es sich als zweckmäßig, von den instationären Bewegungsgleichungen auszugehen, um frei wählbare Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeitskomponenten zu erhalten. Aus den berechneten Geschwindigkeitsfeldern wurden die Gradienten der Umfangsgeschwindigkeit, senkrecht zur jeweiligen Rührerfläche, mit Hilfe von Parabelnäherungen dritter Ordnung bestimmt.

In *Bild 19.31* ist das Produkt $N_i^* Re$ für die einzelnen Leistungsanteile und für die gesamte Leistung über dem bezogenen Rührerdurchmesser d_r^* aufgetragen. Da die Leistungszahl im laminaren Strömungsbereich umgekehrt proportional der Reynoldszahl ist, ist das Produkt $N_i^* Re$ unabhängig von Re . Als obere Grenze für den laminaren Strömungsbereich darf $Re = 10$ bis 40 angenommen werden. Die in *Bild 19.31* eingetragenen Meßwerte zeigen, daß zwischen Theorie und Experiment eine sehr gute Übereinstimmung besteht.

Für die Leistungszahl N_M^* der zylindrischen Mantelfläche des Rührers und die Leistungszahl N_W^* der Rührerwelle ergeben sich in qualitativer Hinsicht die gleichen Abhängigkeiten vom bezogenen Rührerdurchmesser d_r^* wie für den in Abschnitt 19.31 behandelten Zylinderrührer. In quantitativer Hinsicht ist jedoch die Leistungszahl N_M^* bei einer bezogenen Rührerhöhe $h_r^* \equiv h_r/D = 0,1$ um den Faktor 1,5 größer als die für den Zylinderrührer bei gleicher Höhe. Die Leistungszahl N_W^* der Rührerwelle beträgt indes nur das 0,72fache der Leistungszahl für den Zylinderrührer. Dies ist darauf zurückzuführen, daß durch die obere Endfläche die Flüssigkeit über einen Teil der Rührerwelle eine Umfangsgeschwindigkeit erfährt, die zu einer Abnahme des für die Leistungsübertragung maßgebenden Geschwindigkeitsgradienten an der Rührerwelle führt.

Für die Leistungszahlen N_{E1}^* und N_{E2}^* der oberen und unteren Endfläche des in *Bild 19.29* dargestellten Rührermodells ergibt sich auch in qualitativer Hinsicht keine Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Rechnungen, die für die unend-

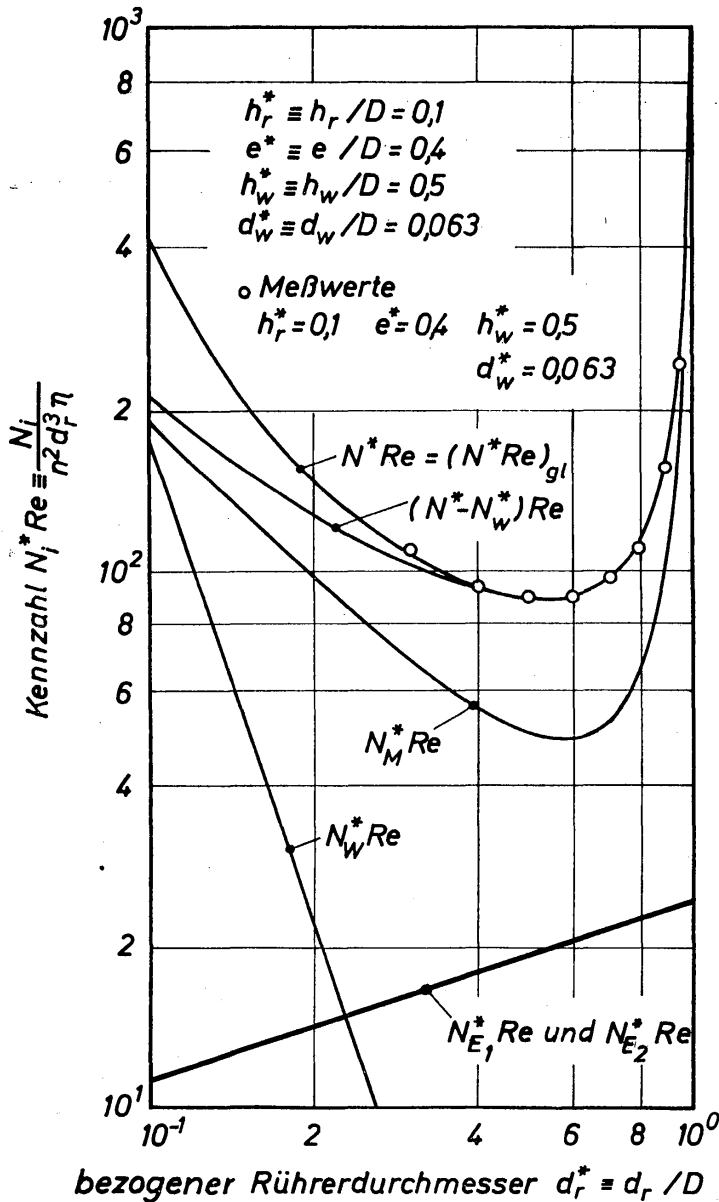


Bild 19.31. Theoretisch ermittelte Leistungszahlen für Modellrührer mit mäßiger Höhe (Erläuterung im Text)

lich dünne Scheibe in Abschnitt 19.35 mitgeteilt wurden. Die für diese Leistungsanteile geltenden Kurven sind in *Bild 19.30* für die unendlich dünne Scheibe und in *Bild 19.31* für den Rührer mit mäßiger Höhe dargestellt. Aus *Bild 19.31* geht hervor, daß die Leistungszahlen für die beiden Endflächen innerhalb der Zeichengenauigkeit übereinstimmen. Daraus kann gefolgert werden, daß es bei Rührern mit mäßiger Höhe h_r^* einen Bereich des Bodenabstandsverhältnisses $e^* \equiv e/D$ gibt, in dem die Geschwindigkeitsverteilungen an der oberen Endfläche $E1$ nicht von der freien Oberfläche der Flüssigkeit und an der unteren Endfläche $E2$ nicht vom Gefäßboden beeinflusst werden und somit auch unabhängig von der Reynoldszahl sind. Die numerischen Rechnungen für den Leistungsbedarf des Rührermodells von *Bild 19.29* sind bislang nur für eine bezogene Rührerhöhe $h_r^* \equiv h_r/D = 0,1$ durchgeführt. Es ist daher noch nicht möglich, allgemein verbindliche Gleichungen aufzustellen, mit deren Hilfe die Leistungszahl in Abhängigkeit von allen Einflußgrößen berechnet werden kann.

19.4 Halbtheoretische Gleichungen zur Berechnung des Leistungsbedarfs beim Rühren Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten

Die in diesem Abschnitt mitgeteilten Gleichungen zur Berechnung der Rührerleistung sind auf der Grundlage der in den vorausgegangenen Abschnitten hergeleiteten theoretischen Gleichungen entwickelt worden. Da bei der Herleitung der theoretischen Gleichungen nicht alle im Rührgefäß auftretenden Strömungsvorgänge erfaßt werden konnten, hat es sich als notwendig erwiesen, die Gleichungen empirisch zu erweitern. Hierdurch gelang es dann, die bislang bekannten Meßwerte durch physikalisch begründete Gleichungen wiederzugeben. Sie werden halbtheoretische Gleichungen genannt.

Die mitgeteilten Gleichungen gelten für Blatt-, Anker- und Turbinenrührer im Bereich der laminaren Strömung Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten. Für die empirische Erweiterung der theoretischen Grundgleichungen boten sich die von THIELE [19.13] und SCHILO [19.29] entwickelten Methoden an. Beide Methoden erwiesen sich als sehr erfolgreich. Sie werden daher ausführlich behandelt, da man erwarten darf, daß sie sich auch zur Aufstellung halbtheoretischer Leistungsgleichungen für andere Rührertypen eignen.

19.41 Leistungsgleichungen für das Rühren Newtonscher Flüssigkeiten

Die in den vorausgegangenen Abschnitten 19.31 und 19.36 entwickelten Theorien bilden die Grundlage für die Aufstellung halbtheoretischer Gleichungen zur Berechnung des Leistungsbedarfs von Blatt-, Anker- und Turbinenrührern im Bereich der laminaren Strömung. Zu dem Zweck nimmt man an, daß der Modellrührer bezüglich der Leistungsübertragung einem wirklichen Rührer gleichwertig ist, wenn man dem Modellrührer den «gleichwertigen Durchmesser d_{gl} » zuordnet. Zwischen dem gleichwertigen Durchmesser d_{gl} des Modellrührers und dem Durchmesser d_r des wirklichen Rührers besteht ein einfaches Verhältnis. Die Verwendung des gleichwertigen Durchmessers wurde von THIELE [19.13] vorgeschlagen. Seine Bedeutung wird im folgenden Abschnitt näher erörtert.

19.411 Der gleichwertige Rührerdurchmesser

Die Bedeutung des gleichwertigen Rührerdurchmessers d_{gl} soll an Hand von *Bild 19.32* am Beispiel des Blattrührers erklärt werden. Der Durchmesser des Blattrührers ist d_r . Der Blattrührer wird mit einem Modellrührer verglichen, dessen Durchmesser d_{gl} ist. Der gleichwertige Durchmesser d_{gl} wird so bestimmt, daß vom Modellrührer die gleiche Leistung an die Flüssigkeit übertragen wird wie von dem Blattrührer mit dem Durchmesser d_r . In *Bild 19.32* ist angenommen worden, daß der gleichwertige Durchmesser kleiner ist als der wirkliche Durchmesser. Wie sich im folgenden noch zeigen wird, ist diese Annahme physikalisch begründet.

Der Ersatz des wirklichen Rührers durch einen zylinderförmigen Modellrührer ist die logische Konsequenz, die sich aus Überlegungen von BRAUER [19.26] sowie Beobachtungen von SCHILO [19.29] und NAGATA nebst Mitarbeitern [19.11] er-

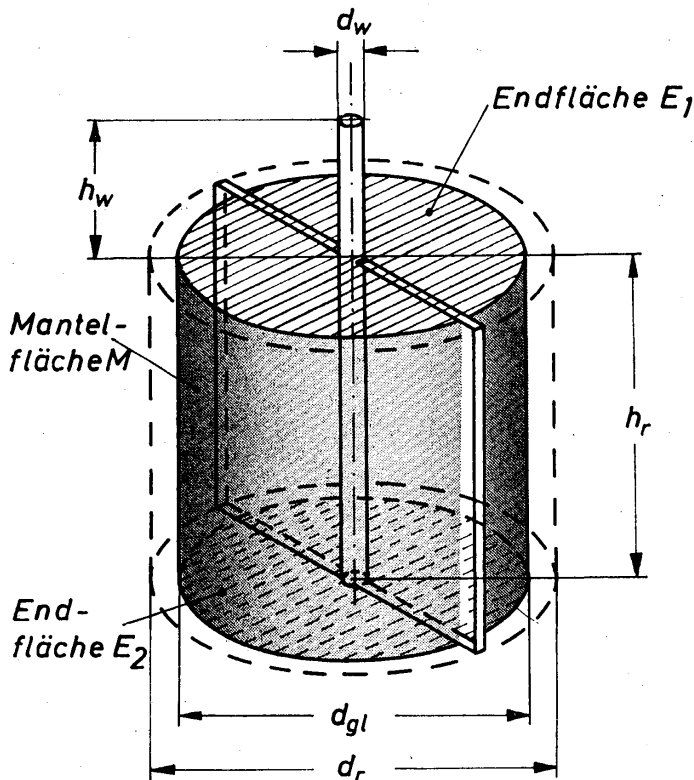


Bild 19.32
Zur Erläuterung des gleichwertigen
Rührerdurchmessers am Beispiel des
Blattrührers

gab. Die experimentell gesicherten Beobachtungen lehrten, daß sich die Flüssigkeit, die sich innerhalb eines Zylinders befindet, dessen Durchmesser etwas kleiner ist als der des wirklichen Rührers, bezüglich der Rotation näherungsweise wie ein starrer Körper verhält. Der Durchmesser dieses starren, zylinderförmigen Körpers ist d_{gl} . Es lag daher nahe, den wirklichen Rührer durch einen zylinderförmigen Modellrührer zu ersetzen. Darüber hinaus schien der Versuch gerechtfertigt zu sein, Übereinstimmung zwischen der vom wirklichen Rührer und der vom Modellrührer abgegebenen Leistung allein durch Verändern des gleichwertigen Durchmessers zu erreichen. Dieser Versuch ist erfolgreich gewesen. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß man grundsätzlich auch eine gleichwertige Höhe des Modellrührers in Betracht ziehen mußte. Dabei konnte aber davon ausgegangen werden, daß die gleichwertige Höhe weniger stark von der tatsächlichen abweicht als der gleichwertige Durchmesser vom wirklichen. Die Auswertung der Meßergebnisse zeigte, daß der gleichwertige Durchmesser nur wenig vom wirklichen abweicht. Daher war es also zulässig, Übereinstimmung zwischen der wirklichen und der gleichwertigen Höhe anzunehmen. Im folgenden werden für Blatt-, Anker- und Turbinenrührer die Berechnungsgleichungen für den Leistungsbedarf mit den zugehörigen Gleichungen für den gleichwertigen Durchmesser angegeben.

19.412 Leistungsberechnung für Blatt- und Ankerrührer

Nach den Ausführungen im vorangegangenen Abschnitt läßt sich der Leistungsbedarf mittels der in den vorangegangenen Abschnitten entwickelten Gleichungen berechnen, wenn man den wirklichen Durchmesser d_r durch den gleichwertigen Durchmesser d_{gl} ersetzt. In dieser neuen Schreibweise sollen die Leistungsgleichungen hier noch einmal angegeben werden. Dabei soll dann gleichzeitig

berücksichtigt werden, daß es im gesamten Schrifttum über die Rührerleistung üblich ist, als charakteristische Länge in der Leistungszahl N^* und der Reynoldszahl Re den wirklichen Rührerdurchmesser d_r zu verwenden. Das soll auch in den folgenden Gleichungen beibehalten werden. Die Folge ist dann jedoch, daß auf der rechten Seite der Leistungsgleichungen zusätzlich die Verhältnisse $(d_{gl}^*/d_r^*)^3 = (d_{gl}/d_r)^3$ und $d_{gl}^*/d_r^* = d_{gl}/d_r$ auftreten, wobei $d_{gl}^* \equiv d_{gl}/D$ ist. Blatt- und Ankerrührer sind Rührer mit verhältnismäßig großer Höhe. Der Leistungsbedarf läßt sich daher mittels der Gleichungen (19.77) und (19.78) für N_M^* und N_W^* sowie mittels der Gleichungen (19.62) bis (19.64) für N_{E1}^* und N_{E2}^* berechnen. Für $Re (e^*/d_r^*)^2 \leq 1,352$ gilt die Beziehung:

$$N^* = \frac{4\pi^3}{Re} \left(\frac{d_{gl}^*}{d_r^*} \right)^3 \left\{ \frac{h_r^*}{d_{gl}^* (1 - d_{gl}^{*2})} + \frac{h_w^*}{d_w^* (1 - d_w^{*2})} \left(\frac{d_w^*}{d_{gl}^*} \right)^3 \right. \\ \left. + 0,04825 Re^{1/2} \frac{d_{gl}^*}{d_r^*} \left[1 - \left(\frac{d_w^*}{d_{gl}^*} \right)^4 \right] \right. \\ \left. + 0,03125 \frac{d_{gl}^*}{e^*} \left[1 + 0,16936 Re^2 \left(\frac{e^*}{d_r^*} \right)^4 \right] \right\}. \quad (19.79)$$

Für $Re (e^*/d_r^*)^2 \geq 1,352$ gilt die Beziehung:

$$N^* = \frac{4\pi^3}{Re} \left(\frac{d_{gl}^*}{d_r^*} \right)^3 \left\{ \frac{h_r^*}{d_{gl}^* (1 - d_{gl}^{*2})} + \frac{h_w^*}{d_w^* (1 - d_w^{*2})} \left(\frac{d_w^*}{d_{gl}^*} \right)^3 \right. \\ \left. + 0,04825 Re^{1/2} \frac{d_{gl}^*}{d_r^*} \left[1 - \left(\frac{d_w^*}{d_{gl}^*} \right)^4 \right] + 0,03326 Re^{1/2} \frac{d_{gl}^*}{d_r^*} \right\}. \quad (19.80)$$

Diese beiden Gleichungen hat THIELE auch zur iterativen Berechnung des bezogenen gleichwertigen Durchmessers $d_{gl}^* \equiv d_{gl}/D$ für Blattrührer verwendet, indem er für N^* gemessene Werte von NAGATA, YOKOYAMA und MAEDA [19.36] heranzog. Die japanischen Forscher haben Versuche mit zweiblättrigen Blattrührern durchgeführt. Sie bestimmten die Leistungszahl N^* , abhängig von der Reynoldszahl Re und den geometrischen Parametern d_r^* , h_r^* und $e^* = h_w^*$. Die bezogene Flüssigkeitshöhe $h^* \equiv h/D$ blieb unverändert und betrug $h^* = 1$. Für die bezogene Rührerhöhe $h_r^* \equiv h_r/D = 0,9$, den bezogenen Bodenabstand $e^* \equiv e/D = 0,05$ und der Reynoldszahl $Re = 10$ sind einige der aus Messungen ermittelten Werte der Leistungszahl N^* , abhängig vom bezogenen Rührerdurchmesser $d_r^* \equiv d_r/D$, im oberen Teil von *Bild 19.33* dargestellt. Die ausgezogene Kurve gibt die Gl.(19.79) wieder. Im unteren Teil von *Bild 19.33* ist der zugehörige gleichwertige Durchmesser d_{gl}^* über dem Rührerdurchmesser d_r^* aufgetragen. Die durch die Meßwerte gelegte Ausgleichskurve wird sehr gut durch die empirische Beziehung

$$d_{gl}^* \equiv d_{gl}/D = 0,877 d_r^{*1,07} \quad (19.81)$$

wiedergegeben.

Zur Bestimmung des bezogenen gleichwertigen Durchmessers für zweiblättrige Ankerrührer zog THIELE Versuchsergebnisse von SCHILO [19.29] heran. In *Bild 19.3* ist der Typ des von SCHILO verwendeten Ankerrührers schematisch angegeben. Hierin ist b die Breite der Ankerblätter, die bei allen Versuchen mit $0,1 D$ unverändert blieb. Alle anderen Abmessungen wurden in weiten Bereichen geändert.

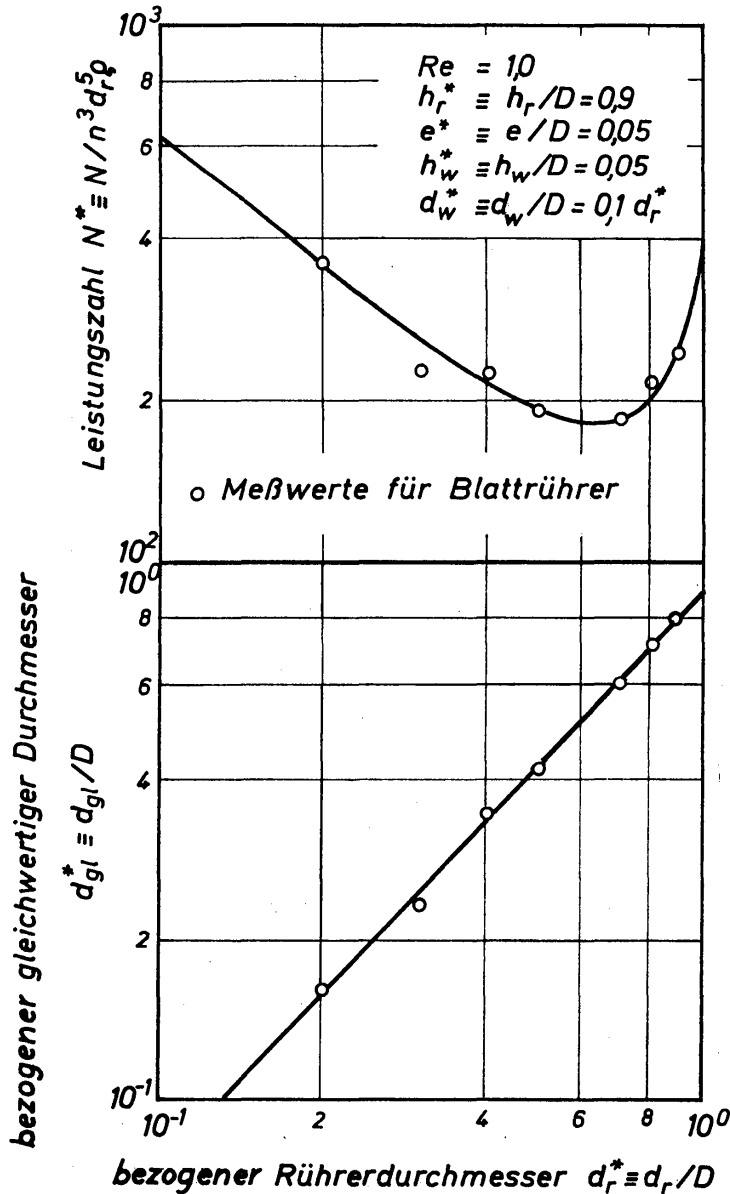


Bild 19.33

Leistungszahl N^* und bezogener gleichwertiger Durchmesser d_{gl}^* für Blattrührer, abhängig vom bezogenen Rührerdurchmesser d_r^*

Im oberen Teil von *Bild 19.34* sind Meßwerte für N^* über dem bezogenen Durchmesser der Ankerrührer aufgetragen. Die Werte für N^* gelten für eine konstante Reynoldszahl $Re = 2,0$ und für einen unveränderlichen Bodenabstand $e^* \equiv e/D = 0,1$. Die bezogene Rührerhöhe $h_r^* \equiv h_r/D$ ist gleich dem bezogenen Rührerdurchmesser $d_r^* \equiv d_r/D$. Die bezogene Flüssigkeitshöhe $h^* \equiv h/D$ ist gleich $1,2 d_r^*$ für $d_r^* > 0,625$ und gleich $1,4 d_r^*$ für $d_r^* \leq 0,625$. Die Meßwerte werden durch die nach Gl. (19.79) berechnete Kurve gut ausgeglichen. Im unteren Teil von *Bild 19.34* ist der zugehörige gleichwertige Durchmesser d_{gl}^* über dem wirklichen Rührerdurchmesser d_r^* aufgetragen. Durch die Meßwerte wurde eine Ausgleichskurve gelegt, die sich mit der empirischen Gleichung

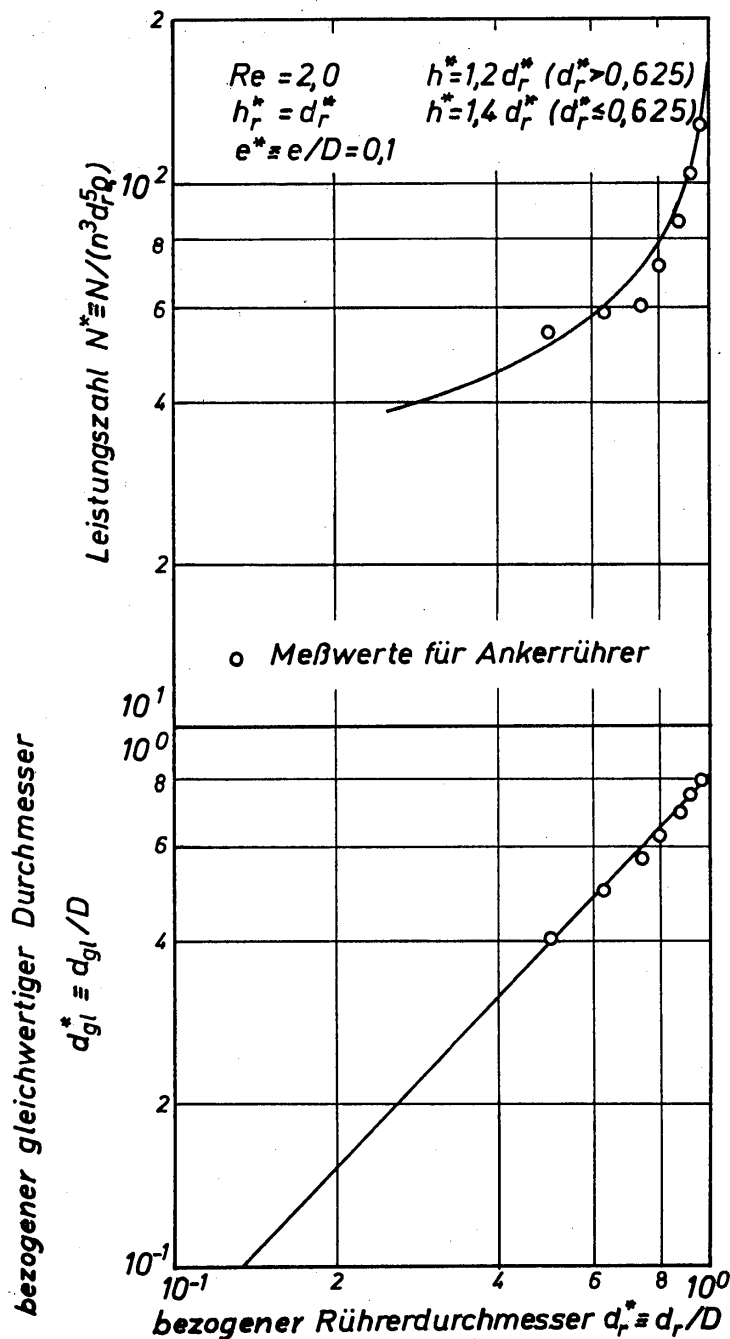


Bild 19.34

Leistungszahl N^* und bezogener gleichwertiger Durchmesser d_{gl}^* für Ankerrührer, abhängig vom bezogenen Rührerdurchmesser d_r^*

$$d_{gl}^* \equiv d_{gl}/D = 0,820 d_r^{*1,07} \quad (19.82)$$

berechnen läßt.

Wie man erwarten durfte, ist der gleichwertige Durchmesser eines Ankerrührers stets etwas kleiner als der eines Blattrührers. Der Ankerrührer erzeugt also einen etwas kleineren Flüssigkeitszylinder (der sich bezüglich seiner Umfangsgeschwindigkeit wie ein fester Körper bewegt) als der Blattrührer. Bedingt ist das dadurch, daß der Ankerrührer eine geringere Oberfläche besitzt, durch die der Flüssigkeit die Bewegung aufgezwungen wird.

Aus diesen Überlegungen folgt dann, daß sich der Leistungsbedarf von Gitterrührern ebenfalls nach den Gleichungen (19.79) und (19.80) berechnen läßt, wenn man den gleichwertigen Durchmesser nach der Beziehung

$$d_{gl}^* = a d_r^{*1,07} \quad (19.83)$$

bestimmt. Die Proportionalitätskonstante a wird so gewählt, daß ihr Wert etwa mitten zwischen den Werten für Anker- und Blattrührer liegt. Somit wird für Gitterrührer $a = 0,850$ empfohlen.

Die für den gleichwertigen Durchmesser gefundenen empirischen Gleichungen zeigen, daß der gleichwertige Durchmesser nur wenig kleiner ist als der wirkliche. Je besser die beiden Durchmesser übereinstimmen, desto besser ist die aus Beobachtungsergebnissen abgeleitete Annahme gerechtfertigt, daß sich die innerhalb des Zylinders mit dem gleichwertigen Durchmesser befindliche Flüssigkeit bezüglich der Rotationsbewegung wie ein starrer Körper verhält. Praktisch kann diese Annahme natürlich nie ganz erfüllt sein. Hierauf ist es auch zurückzuführen, daß sich mittels Anker- und Blattrührer noch Mischwirkungen erzielen lassen. Innerhalb des Zylinders mit dem Durchmesser des wirklichen Rührers treten zwangsläufig dreidimensionale Bewegungen auf, deren Geschwindigkeitskomponenten von gleicher Größenordnung sind. Sie sind jedoch sehr klein im Vergleich zu der Umfangsgeschwindigkeit, die das Fluid auf dem Durchmesser des Rührers besitzt.

19.413 Leistungsberechnung für Turbinenrührer

Turbinenrührer sind Rührer mit mäßiger Höhe. Auf die zur Bestimmung der Rührerleistung erforderlichen Rechnungen wurde in Abschnitt 19.363 eingegangen. Dabei wurde bereits erwähnt, daß es auf Grund der bisher vorliegenden numerischen Ergebnisse noch nicht möglich ist, die Rührerleistung durch eine Gleichung auszudrücken, die alle Einflußgrößen berücksichtigt. Die bisher vorliegenden theoretischen Ergebnisse sind in *Bild 19.31* dargestellt. Sie gelten für die folgenden Werte der geometrischen Verhältnisse: $h_r^* \equiv h_r/D = 0,1$, $e^* \equiv e/D = 0,4$, $h_w^* \equiv h_w/D = 0,5$ bzw. $h^* \equiv h/D = 1$ und $d_w^* \equiv d_w/D = 0,063$.

Wie aus *Bild 19.31* hervorgeht, ist der Anteil der Rührerwelle am Produkt $N^* Re$ für praktisch vorkommende Werte des Rührerdurchmessers $d_r^* \geq 0,3$ vernachlässigbar klein. Ferner kann aus der Übereinstimmung von N_{E1}^* und N_{E2}^* geschlossen werden, daß der bezogene Bodenabstand e^* und die bezogene Flüssigkeitshöhe h^* nur dann von Bedeutung sind, wenn der Rührer entweder in der Nähe des Gefäßbodens oder der freien Flüssigkeitsoberfläche angeordnet ist. Schließt man diese Fälle aus, dann wird die in *Bild 19.31* eingezeichnete Kurve $N_{E1}^* Re$ und $N_{E2}^* Re$ mit guter Näherung auch noch für andere als die angegebenen geometrischen Verhältniswerte gelten. Die dann noch als wichtige Einflußgröße verbleibende Rührerhöhe h_r^* ist so gewählt worden, daß die Höhen der praktisch verwendeten Turbinenrührer nur wenig davon abweichen. Somit lassen sich also die in *Bild 19.31* dargestellten Ergebnisse für die Leistungsberechnung von Turbinenrührern verwenden. Dabei ist jedoch folgendes zu beachten: Wie aus *Bild 19.32* hervorgeht, hat der Modellrührer den Durchmesser d_{gl} und der wirkliche Rührer den Durchmesser d_r . In den Kennzahlen wird als charakterische Länge der wirkliche Durchmesser d_r verwendet. Bei den theoretischen Betrachtungen muß es gemäß *Bild 19.32* jedoch der gleichwertige Durchmesser sein. Damit man

die in *Bild 19.31* dargestellten theoretischen Ergebnisse für die praktische Berechnung von Turbinenrührern verwenden kann, muß daher folgende Umrechnungsgleichung verwendet werden.

$$N^* Re = \left(\frac{d_{gl}^*}{d_r^*} \right)^3 (N^* Re)_{gl}. \quad (19.84)$$

Hierin ist das Produkt $(N^* Re)_{gl}$ aus *Bild 19.31* zu entnehmen.

Für Turbinenrührer mit den gleichen Werten der geometrischen Verhältnisse, die oben für Modellrührer angegeben wurden, hat HECHEL [19.37] den Leistungsbedarf, abhängig vom bezogenen Durchmesser d_r^* und der Anzahl c der Turbinenblätter, experimentell bestimmt. Eine Schemazeichnung von den Turbinenrührern, die HECHEL bei seinen Versuchen verwendete, ist in *Bild 19.2* angegeben. Auf einer Kreisscheibe mit dem Durchmesser d_s sind entweder 2, 3, 4, 6 oder 8 Turbinenblätter befestigt. Die Blätter haben die Länge l und die Höhe h_r . Die für den Turbinenrührer wichtigen geometrischen Verhältnisse hatten die Werte $d_s/d_r = 3/4$ und $l/d_r = 1/3$.

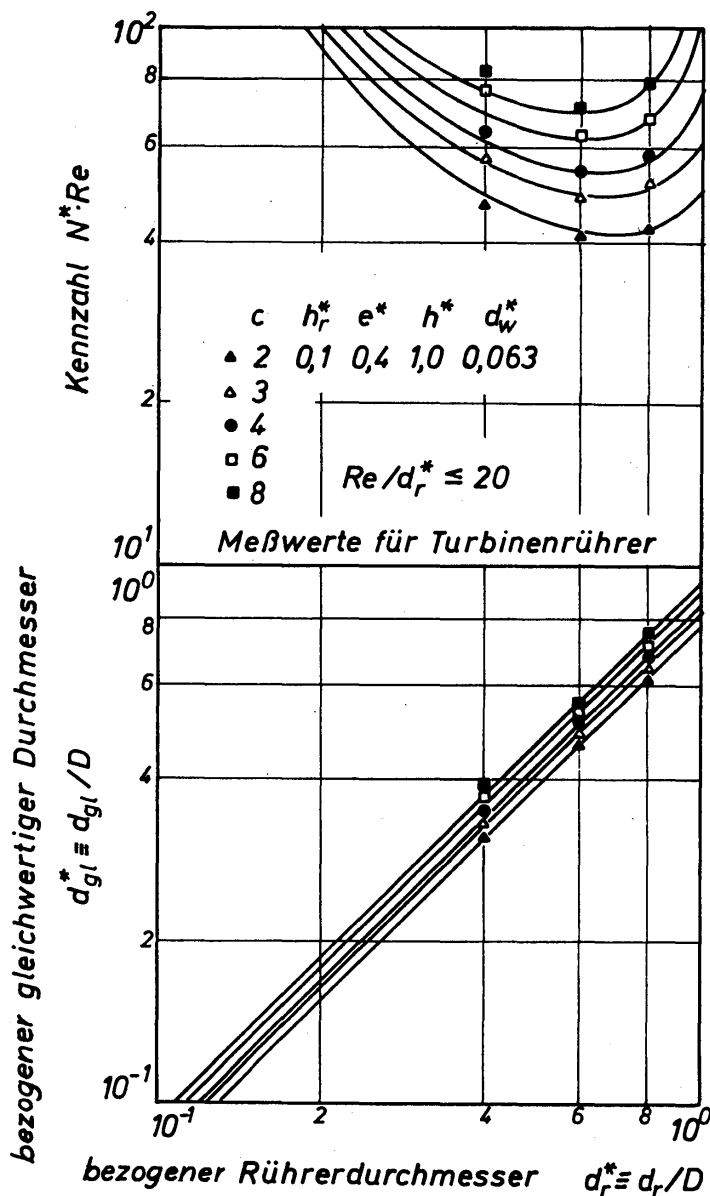


Bild 19.35
Leistungszahl N^* und bezogener gleichwertiger Durchmesser d_{gl}^* für Turbinenrührer, abhängig vom bezogenen Rührerdurchmesser d_r^*

Mit den Meßwerten von HECHTEL, der in *Bild 19.31* dargestellten Kurve für $(N^* Re)_{gl}$ und der Umrechnungsgleichung (19.84) ist es möglich, den gleichwertigen Durchmesser zu bestimmen. Im oberen Teil von *Bild 19.35* ist das Produkt $N^* Re$ über dem bezogenen wirklichen Durchmesser $d_r^* \equiv d_r/D$ der Turbinenrührer aufgetragen. Die Anzahl c der Turbinenblätter dient als Parameter. Die Darstellung gilt für $Re/d_r^* \leq 20$. Die Meßwerte werden von Kurven ausgeglichen, die mittels Gl.(19.84) ermittelt wurden, wobei für den gleichwertigen Durchmesser die empirische Beziehung

$$d_{gl}^* \equiv d_{gl}/D = 0,71 c^{0,125} d_r^* \quad (19.85)$$

gilt. Diese Gleichung erfaßt die im unteren Teil von *Bild 19.35* dargestellten Kurven. Mit zunehmender Blattzahl c nähert sich der gleichwertige Durchmesser dem wirklichen.

19.414 Vergleich zwischen berechneter und gemessener Leistung von Blatt-, Anker- und Turbinenrührer

In den beiden vorangegangenen Abschnitten wurden halbtheoretische Gleichungen zur Berechnung des Leistungsbedarfs von Blatt-, Anker- und Turbinen-

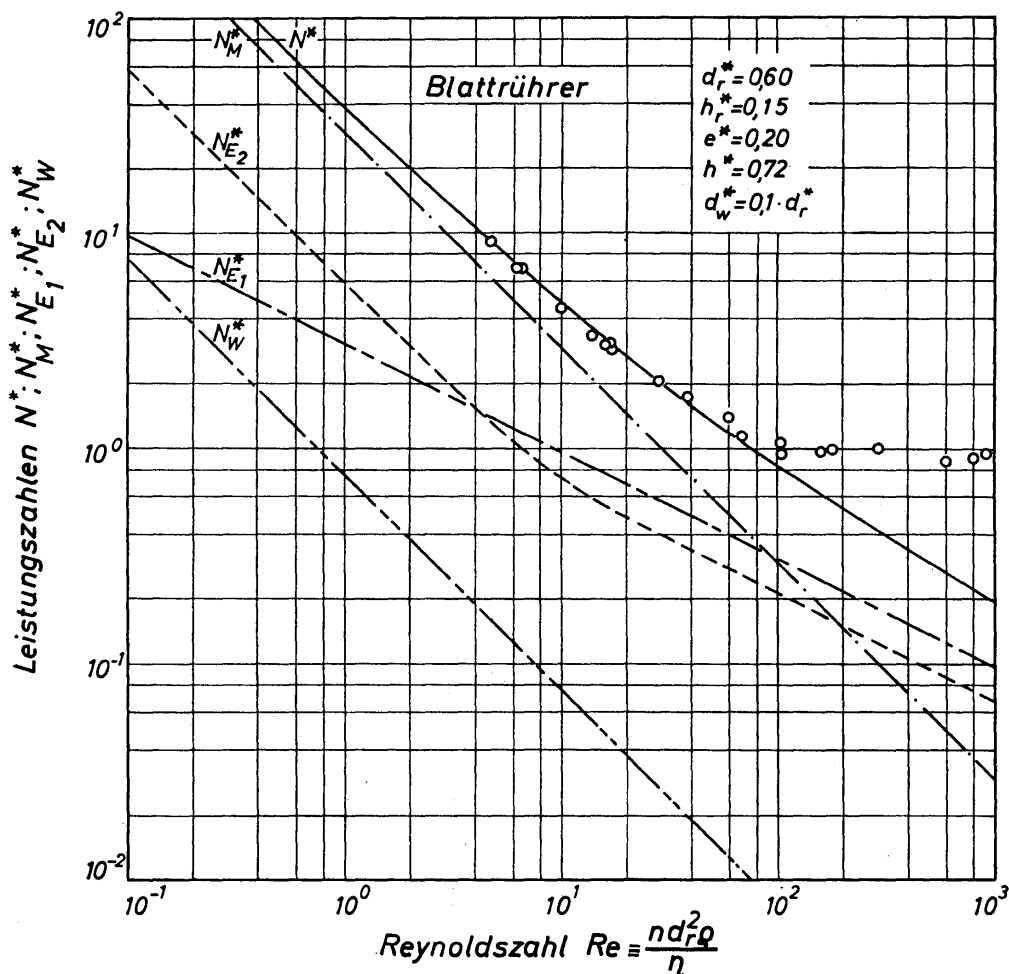


Bild 19.36. Leistungszahl N^* und ihre Anteile für einen Blattrührer, verglichen mit Meßwerten von UHL [19.1]

rührern mitgeteilt. Diese Gleichungen sollen im folgenden durch Vergleich mit Meßergebnissen überprüft werden.

In den *Bildern 19.36 bis 19.40* sind die nach den Gleichungen (19.79) und (19.80) unter Verwendung von Gl. (19.81) für den gleichwertigen Durchmesser berechneten Leistungszahlen N^* von Blattrührern, abhängig von der Reynoldszahl Re , durch ausgezogene Kurven wiedergegeben. Sie gelten für Werte der geometrischen Verhältnisse, die mit denen übereinstimmen, die bei den Messungen von UHL, zitiert von HOLLAND und CHAPMAN [19.1], sowie von NAGATA, YOKOYAMA und MAEDA [19.36] auftraten. Die Meßwerte sind durch verschiedene Symbole gekennzeichnet.

In *Bild 19.36* sind die Ergebnisse der von UHL durchgeführten Messungen an Blattrührern dargestellt. Diese Ergebnisse wurden von HOLLAND und CHAPMAN [19.1] übernommen. Alle weiteren Meßwerte stammen von den genannten japanischen Forschern. In den *Bildern 19.36 und 19.37* sind neben den Kurven für die gesamte Leistungszahl N^* auch die Kurven für die einzelnen Anteile angegeben. Es bedeuten N_M^* Leistungszahl für die zylindrische Mantelfläche, N_W^* Leistungszahl für die Welle sowie N_{E1}^* und N_{E2}^* die Leistungszahlen für die obere und die untere Endfläche des Blattrührers. Zu beachten ist, daß die Kurven für die Leistungsanteile unterschiedliche Neigungen aufweisen. Darauf ist es zurück-

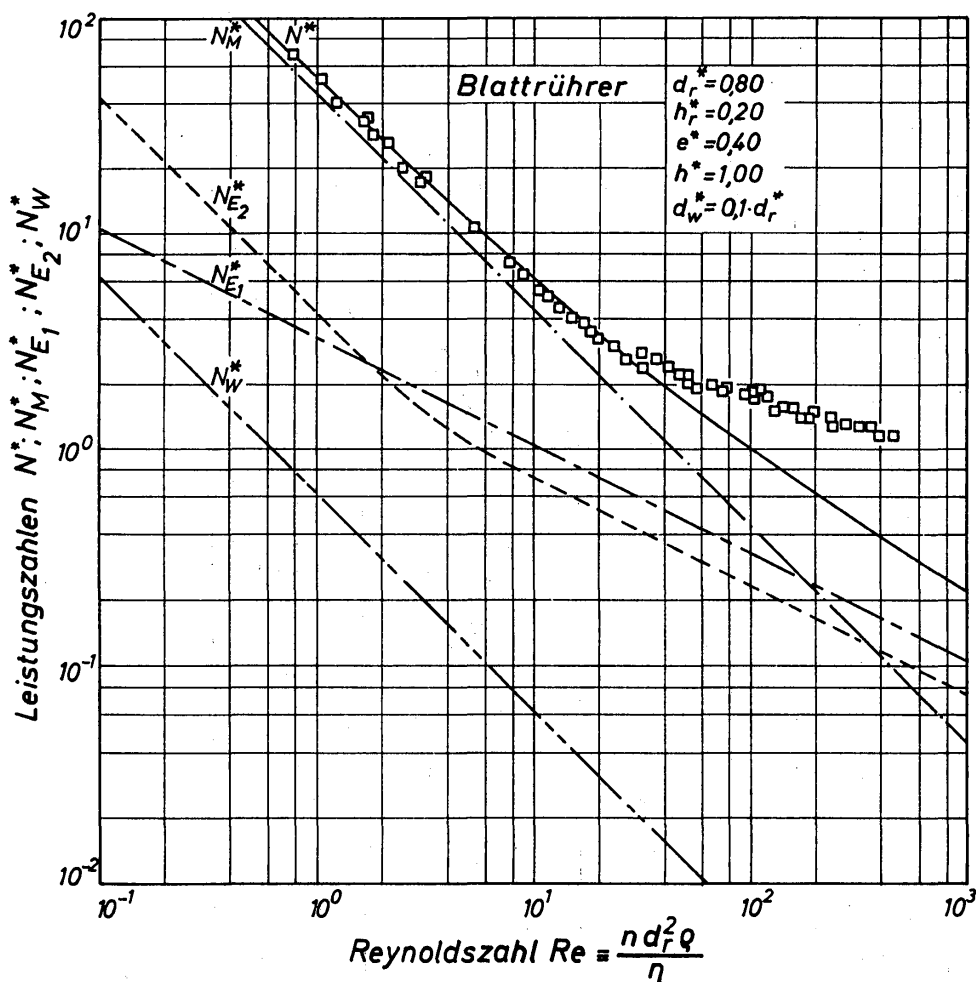


Bild 19.37. Leistungszahl N^* und ihre Anteile für einen Blattrührer, verglichen mit Meßwerten von NAGATA, YOKOYAMA und MAEDA (19.36)

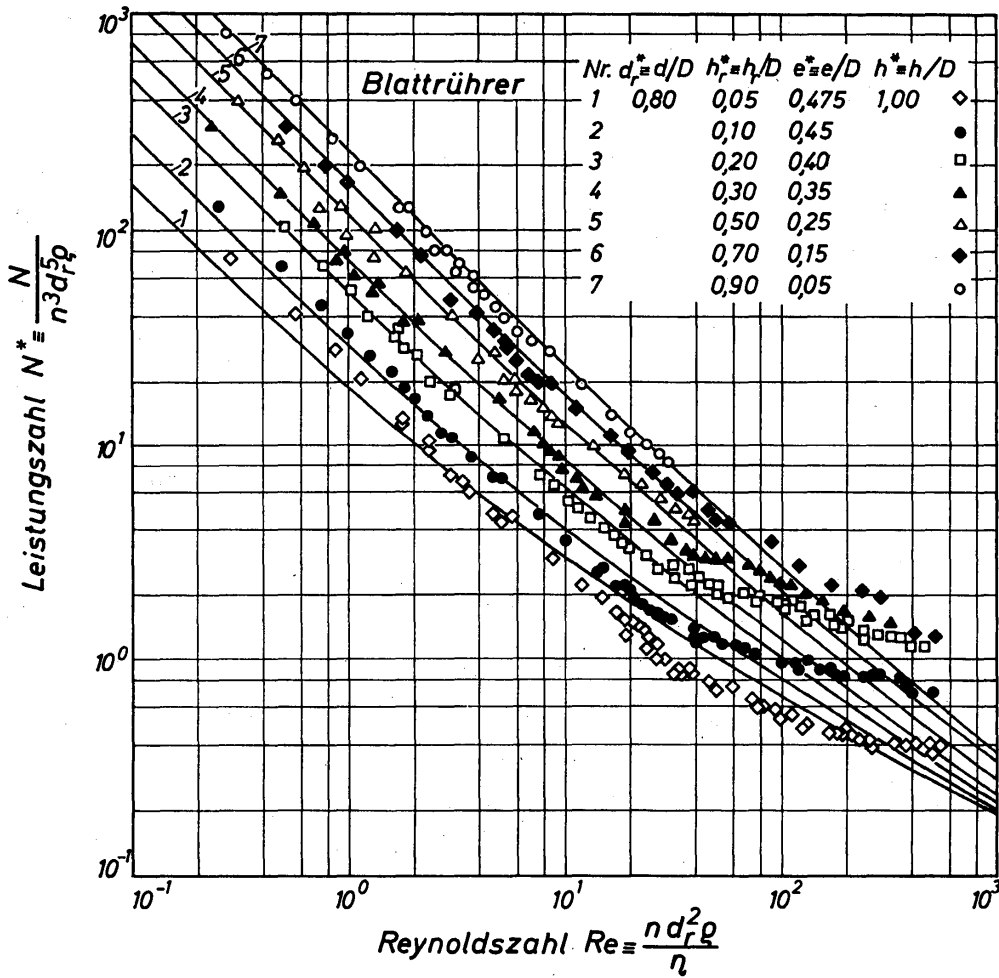


Bild 19.38

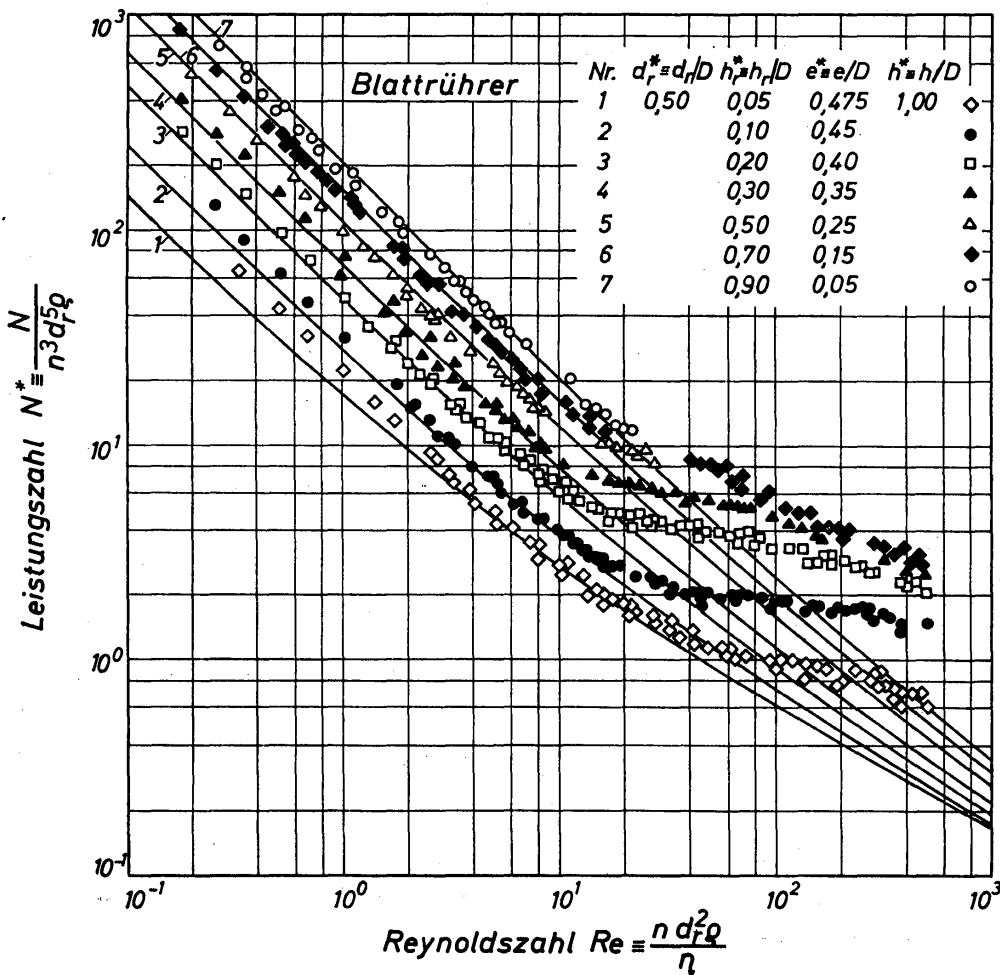


Bild 19.39

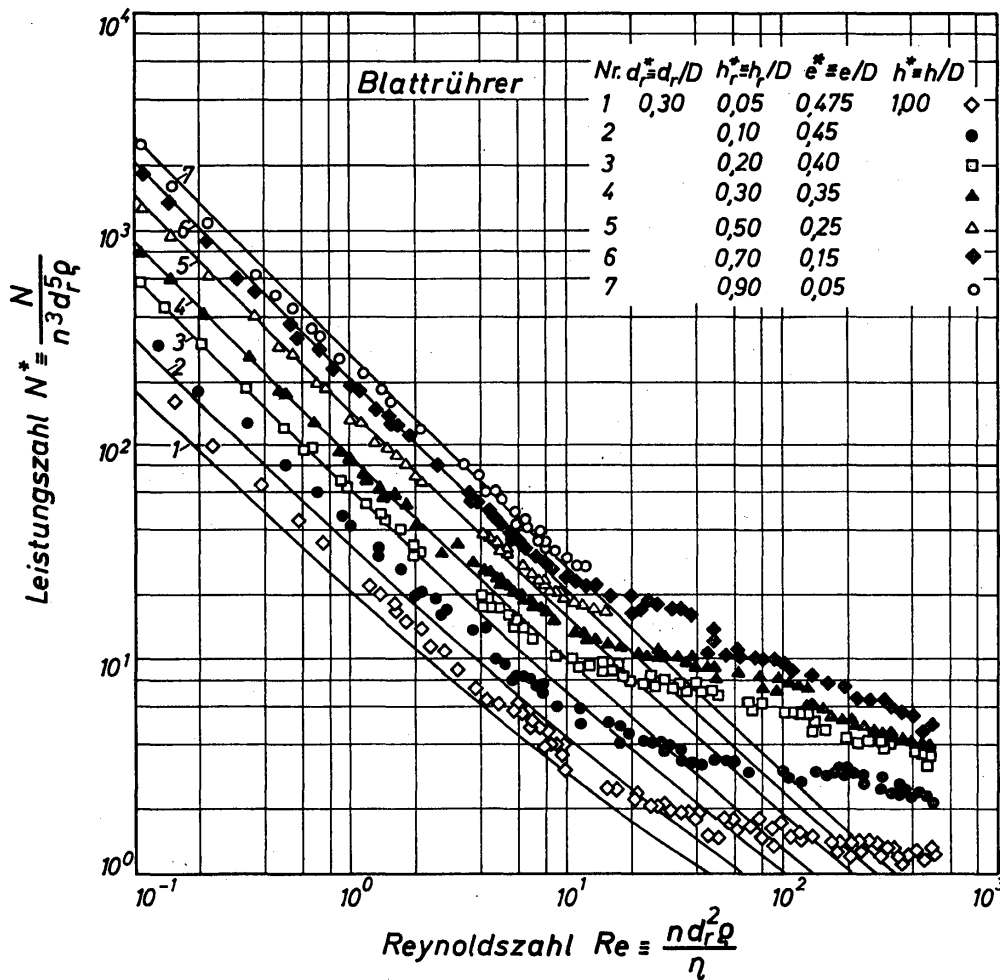


Bild 19.40

Bilder 19.38 bis 19.40. Vergleich zwischen theoretisch und experimentell bestimmten Leistungszahlen für Blattrührer. Meßwerte von NAGATA, YOKOYAMA und MAEDA [19.36]. Bild 19.38 für Blattrührer mit $d_r^* \equiv d_r/D = 0,8$, Bild 19.39 für Blattrührer mit $d_r^* = 0,5$ und Bild 19.40 für Blattrührer mit $d_r^* = 0,3$

zuführen, daß die Neigung der Kurve für die gesamte Leistungszahl N^* mit zunehmender Reynoldszahl geringer wird. Im Bereich sehr kleiner Reynoldszahlen ist N^* proportional Re^{-1} . Mit zunehmender Reynoldszahl nähert sich N^* der Proportionalität $Re^{-1/2}$. Die Bilder geben also zu erkennen, daß der Übergang im Kurvenverlauf von einer starken zu einer schwächeren Neigung nicht unbedingt auf den Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung im Rührgefäß hinweist. Die Neigungsänderung der Kurve für N^* beginnt sich etwa bei $Re = 10$ stärker bemerkbar zu machen. Der Übergang in den turbulenten Strömungsbereich erfolgt für das in *Bild 19.36* gewählte Beispiel bei $Re \approx 90$ und für das in *Bild 19.37* gewählte Beispiel bei $Re \approx 30$. Bei der Beurteilung des Strömungszustandes auf Grund von Angaben über den Verlauf der Leistungskurve muß man also beachten, daß sich die Leistung aus mehreren Anteilen zusammensetzt, die verschiedene Abhängigkeiten von der Reynoldszahl aufweisen. Innerhalb des laminaren Strömungsbereiches werden die halbtheoretischen Gleichungen für den Leistungsbedarf durch die Meßwerte sehr gut bestätigt.

In den *Bildern 19.38 bis 19.40* sind weitere Meßwerte der japanischen Forscher dargestellt. Sie werden verglichen mit Kurven, die mittels der halbtheoretischen Gleichungen berechnet wurden. Innerhalb des laminaren Strömungsbereiches,

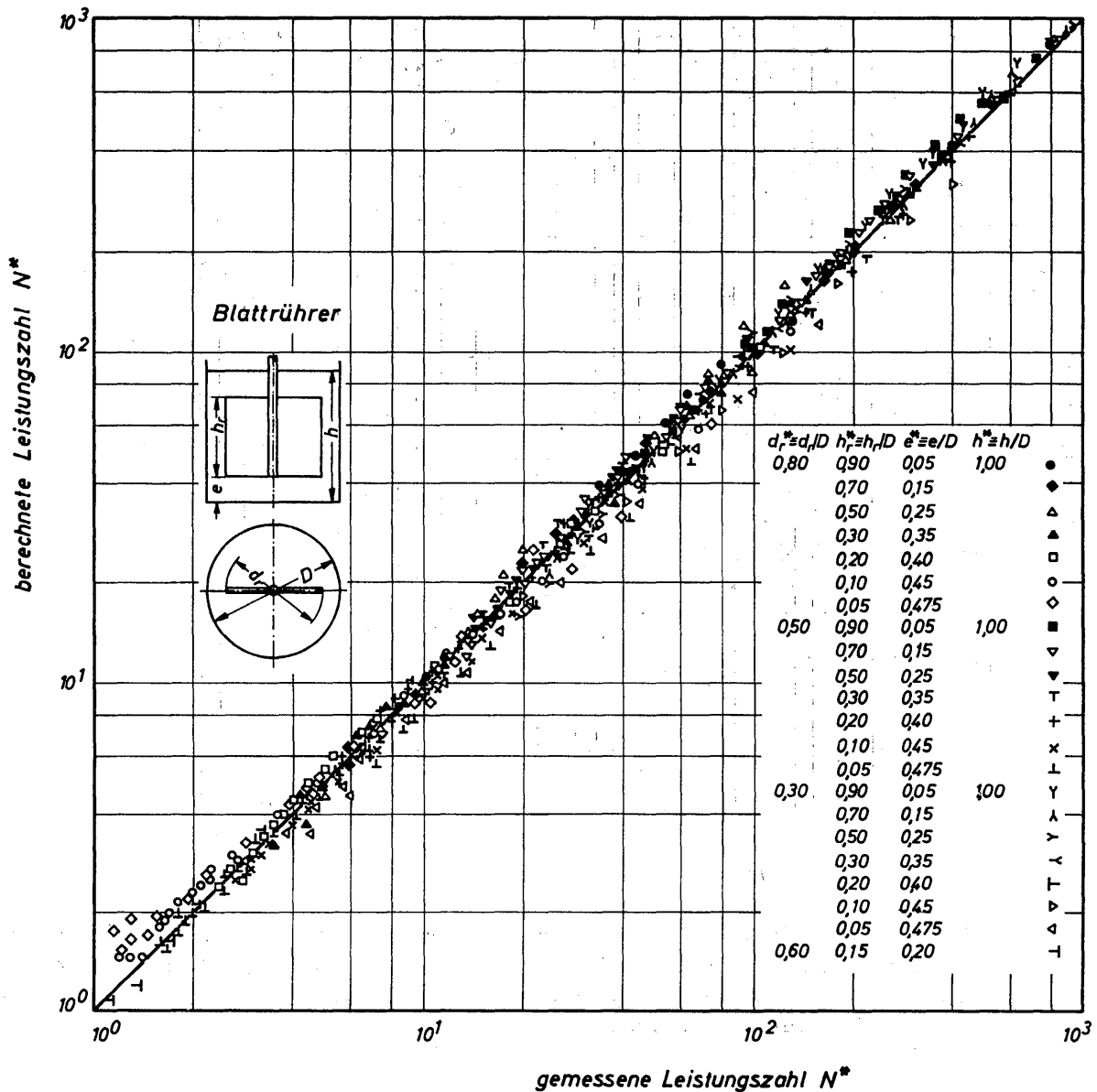


Bild 19.41. Vergleich zwischen theoretisch und experimentell ermittelten Leistungszahlen für alle untersuchten Blattrührer

dessen obere Grenze etwa zwischen $Re = 10$ und $Re = 40$ liegt, stimmen die gemessenen und berechneten Werte für die Leistungszahl N^* gut überein. Die geometrischen Verhältnisse der Blattrührer wurden, was die Zahlenangaben in den Bildern erkennen lassen, innerhalb weiter Grenzen geändert.

In *Bild 19.41* sind schließlich alle Meßwerte für Blattrührer, die innerhalb des laminaren Strömungsbereiches liegen, zusammengefaßt. Aufgetragen wurde die mittels der Gleichungen (19.79 bis 19.81) berechnete Leistungszahl über der experimentell bestimmten. Es zeigt sich nochmals die gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

Für zweiblättrige Ankerrührer wurden in *Bild 19.42* die von SCHILO [19.29] mitgeteilten Meßwerte für die Leistungszahl mit berechneten Werten verglichen. Die Berechnung der Leistungszahl erfolgt mittels der Gleichungen (19.79) und (19.80) unter Verwendung der Gl. (19.82) für den bezogenen gleichwertigen Durchmesser. Berechnete und gemessene Werte stimmen gut überein.

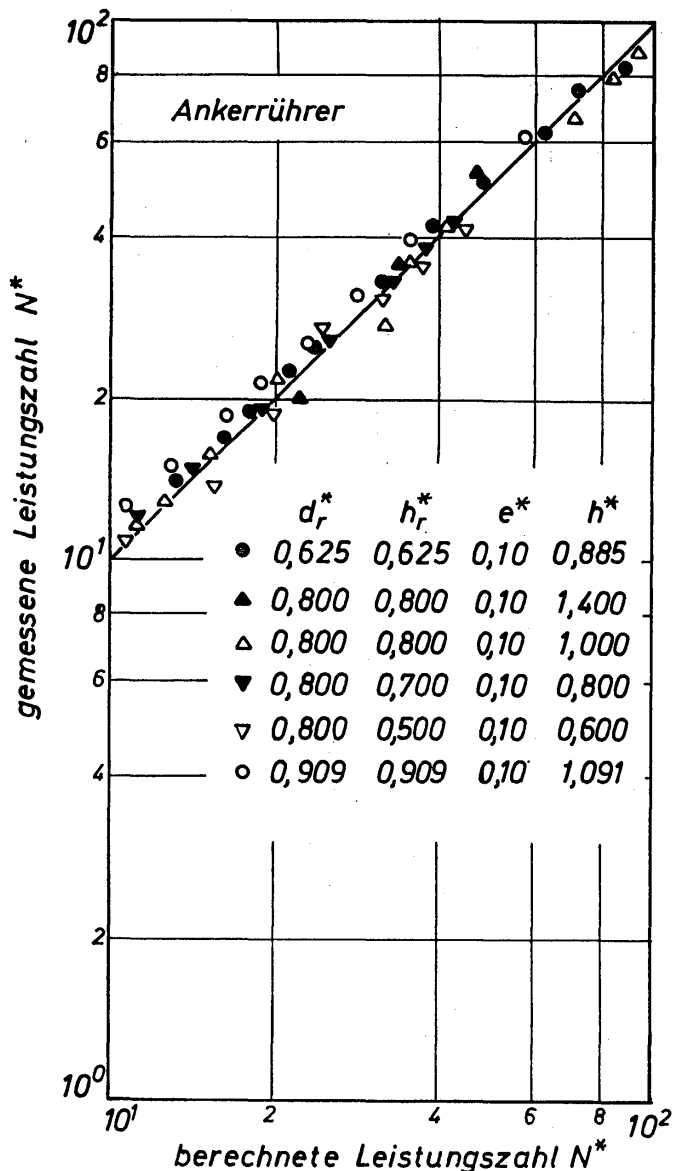


Bild 19.42
 Vergleich zwischen theoretisch und experimentell ermittelten Leistungszahlen für Ankerrührer; Meßwerte von SCHILO [19.29]

In Bild 19.43 sind für Turbinenrührer die von HECHEL experimentell bestimmten Leistungszahlen mit berechneten verglichen. Die Berechnung erfolgt mittels Gl. (19.84) unter Verwendung von Gl. (19.85) für den gleichwertigen Durchmesser und von Angaben über $(N^* Re)_{gl}$ aus Bild 19.31. Die berechneten und gemessenen Werte für den Leistungsbedarf stimmen gut überein.

19.42 Leistungsgleichungen für das Rühren nicht-Newtonscher Flüssigkeiten

Umfangreiche experimentelle Untersuchungen über den Leistungsbedarf von Blatt- und Ankerrührern beim Rühren nicht-Newtonscher Flüssigkeiten führte SCHILO [19.29] durch. Danach ist es zulässig, die insgesamt an die Flüssigkeit abgegebene Leistung N aus zwei Anteilen zusammensetzen. In dimensionsloser Schreibweise gilt dann:

$$N^* = N_M^* + N_{E2}^* \tag{19.86}$$

Mit N_M^* wird die Leistungszahl für die zylindrische Mantelfläche A_M gemäß Bild 19.29 und mit N_{E2}^* die Leistungszahl für die untere Endfläche A_{E2} bezeichnet.

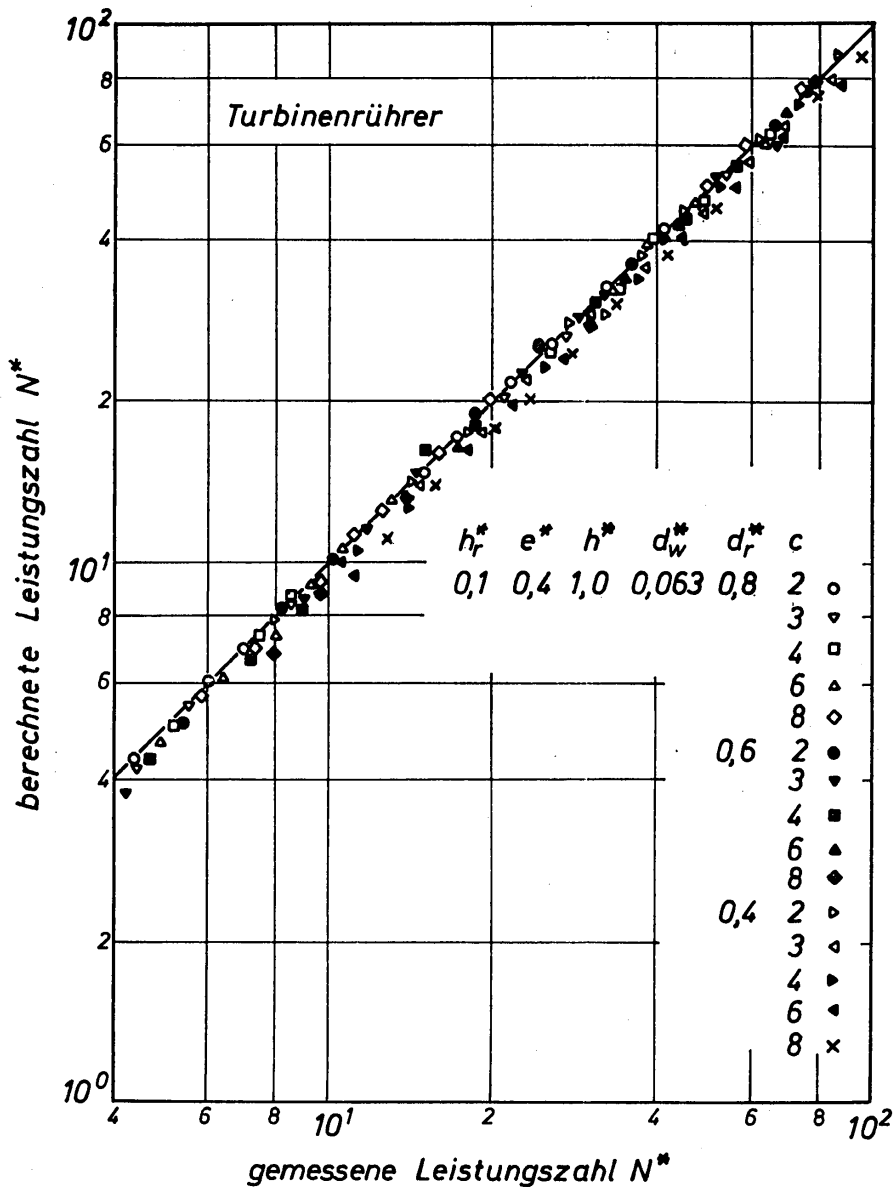


Bild 19.43. Vergleich zwischen theoretisch und experimentell ermittelten Leistungszahlen für Turbinenrührer; Meßwerte von HECHTEL [19.37]

Für die Leistungszahl N_M^* konnte SCHILO auf Grund seiner theoretischen und experimentellen Untersuchungen die folgende halbtheoretische Leistungsgleichung aufstellen:

$$N_M^* = 0,7 \pi^2 \left(\frac{4 \pi}{m} \right)^m \frac{h_r/d_r}{Re_m^{0,9}} \frac{D^{*2}}{(D^{*2/m} - 0,75)^m} \tag{19.87}$$

Sie weist gegenüber der in Abschnitt 19.32 hergeleiteten theoretischen Gl.(19.64) für den Zylinderrührer nur sehr kleine Änderungen auf. Die Leistungszahl N_M^* ist durch Gl.(19.1) und die Reynoldszahl Re_m durch Gl.(19.52) definiert. Ferner bedeuten $D^* \equiv D/d_r$ ein Durchmesser Verhältnis mit D als Gefäßdurchmesser und d_r als Rührerdurchmesser, h_r die Rührerhöhe und m den Flüssigkeitsindex. Die Bezeichnungen für Blatt- und Ankerrührer sind in den Bildern 19.29 und 19.3 angegeben.

Der Herleitung der theoretischen Gl.(19.54) zufolge muß sich das Fließverhalten der nicht-Newtonschen Fluide durch den Schubspannungsansatz von OSTWALD

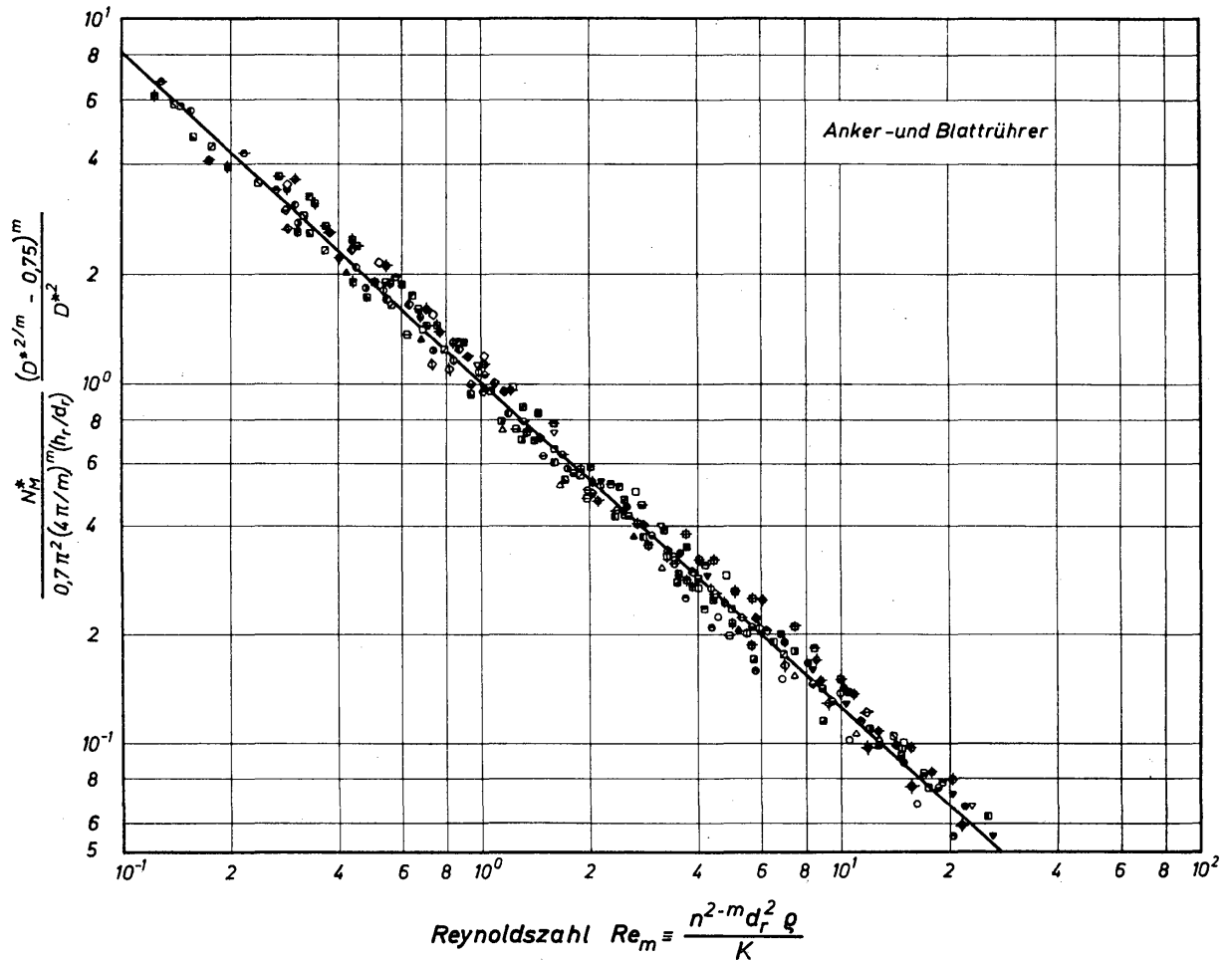


Bild 19.44. Vergleich zwischen den nach Gl.(19.87) berechneten Leistungszahlen von Anker- und Blattührern und Meßwerten von SCHILO [19.29] für das Rühren nicht-Newtonischer Flüssigkeiten. Nähere Angaben zu den Meßwerten enthält Tabelle 19.4

und DE WAELE gemäß Gl.(19.48) beschreiben lassen. Der Flüssigkeitsindex m kann theoretisch Werte zwischen 0 und ∞ annehmen. Eingeschlossen ist dabei der Wert $m = 1$, durch den Newtonsche Fluide charakterisiert werden. Das heißt also, daß Gl.(19.87) sowohl für nicht-Newtonische als auch für Newtonsche Flüssigkeiten angewendet werden darf.

Im Vergleich zu der theoretischen Gl.(19.54) weist die halbtheoretische Gl.(19.87), wie bereits betont, nur sehr geringfügige Änderungen auf. An Stelle von π^2 wurde $0,7\pi^2$, an Stelle von Re_m^1 wurde $Re_m^{0,9}$ gesetzt. Soweit diese Korrekturen physikalisch begründet werden können, wird man sie wahrscheinlich darauf zurückführen müssen, daß die Fluidbewegung nicht nur in dem Ringspalt, der von dem Gefäß mit dem Durchmesser D und von dem Rührer mit dem Durchmesser d_r gebildet wird, stattfindet, sondern zu einem geringeren Maße auch in dem Kernzylinder mit dem Durchmesser d_r . Da die theoretische Gleichung nur in geringfügiger Weise geändert werden mußte, um sie den Meßwerten anzupassen, darf man annehmen, daß der Zylinderrührer die wichtigsten Vorgänge bei der Leistungsübertragung von Blatt- und Ankerrührern mit guter Näherung erfaßt. Für die Berechnung der Leistungszahl N_{E2}^* empfiehlt SCHILO die Anwendung der folgenden Gleichung:

$$N_{E2}^* = \frac{\pi^2}{8 Re_m} \left(\frac{2\pi}{m} \right)^m \frac{D_e^{*2}}{(D_e^{*2/m} - 1)^m} \quad (19.88)$$

Hierin ist $D_e^* \equiv D/(D-2e)$.

In *Bild 19.44* sind die Meßwerte von SCHILO für zweiflügelige Anker- und Blatt-rührer dargestellt. Die ausgezogene Kurve wurde nach Gl. (19.87) berechnet. Nähere Angaben zu den Versuchswerten sind in Tabelle 19.4 zusammengestellt. Bei allen Versuchen betrug der Gefäßdurchmesser $D = 100$ mm, das Höhenverhältnis für beide Rührertypen $h_r/d_r = 1$, die bezogene Flügelbreite der Ankerrührer $b/D = 0,1$ und das Bodenabstandsverhältnis in allen Fällen $e/D = 0,1$. In Tabelle 19.4 bedeuten ferner $D^* \equiv D/d_r$ und m den Flüssigkeitsindex der nicht-

Tabelle 19.4:

Angaben zu den in *Bild 19.44* dargestellten Meßwerten von SCHILO [19.29]

Zeichen	Rührer	D	m	Zeichen	Rührer	D	m
○	Anker	1,05	1,0	◊	Anker	1,25	0,71
●	Anker	1,05	0,885	◊	Anker	1,25	0,65
□	Anker	1,05	0,91	⊠	Anker	1,25	0,53
■	Anker	1,05	0,71	⊠	Anker	1,25	0,488
△	Anker	1,05	0,65				
▲	Anker	1,05	0,53	⊞	Anker	1,35	1,0
▣	Anker	1,05	0,488	⊞	Anker	1,35	0,885
				⊕	Anker	1,35	0,81
▤	Anker	1,10	1,0	⊖	Anker	1,35	0,71
▼	Anker	1,10	0,885	⊗	Anker	1,35	0,65
▽	Anker	1,10	0,81	⊘	Anker	1,35	0,65
▥	Anker	1,10	0,71	⊙	Anker	1,35	0,53
▦	Anker	1,10	0,65	⊚	Anker	1,35	0,488
▧	Anker	1,10	0,53				
⊙	Anker	1,10	0,488	⊛	Anker	1,60	1,0
				⊜	Anker	1,60	0,885
⊕	Blatt	1,10	0,86	⊝	Anker	1,60	0,71
⊖	Blatt	1,10	0,81	⊞	Anker	1,60	0,51
⊗	Blatt	1,10	0,71				
⊘	Blatt	1,10	0,505	⊠	Blatt	1,60	1,0
				⊡	Blatt	1,60	0,885
⊙	Anker	1,15	1,0	⊣	Blatt	1,60	0,71
⊙	Anker	1,15	0,885	⊤	Blatt	1,60	0,51
◆	Anker	1,15	0,81				
◇	Anker	1,15	0,71	⊖	Anker	2,00	1,0
◆	Anker	1,15	0,65	⊞	Anker	2,00	0,885
◆	Anker	1,15	0,53	⊠	Anker	2,00	0,71
▣	Anker	1,15	0,488	◆	Anker	2,00	0,51
▤	Anker	1,25	1,0	⊞	Blatt	2,00	1,0
▥	Anker	1,25	0,885	⊠	Blatt	2,00	0,885
▦	Anker	1,25	0,81	⊡	Blatt	2,00	0,71
				⊣	Blatt	2,00	0,51

Newton'schen Flüssigkeiten im Schubspannungsansatz gemäß Gl.(19.48). Mit $m = 1$ werden Newton'sche Flüssigkeiten charakterisiert. Die mittlere Abweichung der in *Bild 19.44* dargestellten Meßwerte von der nach Gl.(19.87) berechneten Kurve beträgt $\pm 8\%$.

Ein Vergleich von Gl.(19.87) mit Meßwerten weiterer Experimentatoren für nicht-Newton'sche Flüssigkeiten hat sich auf Grund mangelnder Angaben nicht als möglich erwiesen. Ein bereits früher von METZNER und OTTO [19.38] entwickeltes Verfahren zur Berechnung des Leistungsbedarfs von Rührern ist von SCHILO sehr sorgfältig überprüft worden. Die dabei festgestellten Mängel lassen die Anwendung des Verfahrens von METZNER und OTTO nicht mehr als empfehlenswert erscheinen. Hingewiesen sei an dieser Stelle auch auf eine Untersuchung von WERNER [19.39], in welcher ebenfalls der Leistungsbedarf von Blattührern gemessen wurde. Das Fließverhalten der bei diesen Versuchen verwendeten nicht-Newton'schen Flüssigkeiten wurde durch ein erweitertes Potenzgesetz ausgedrückt. Aus diesem Grunde war ein Vergleich der Meßwerte mit der Gleichung von SCHILO nicht möglich.

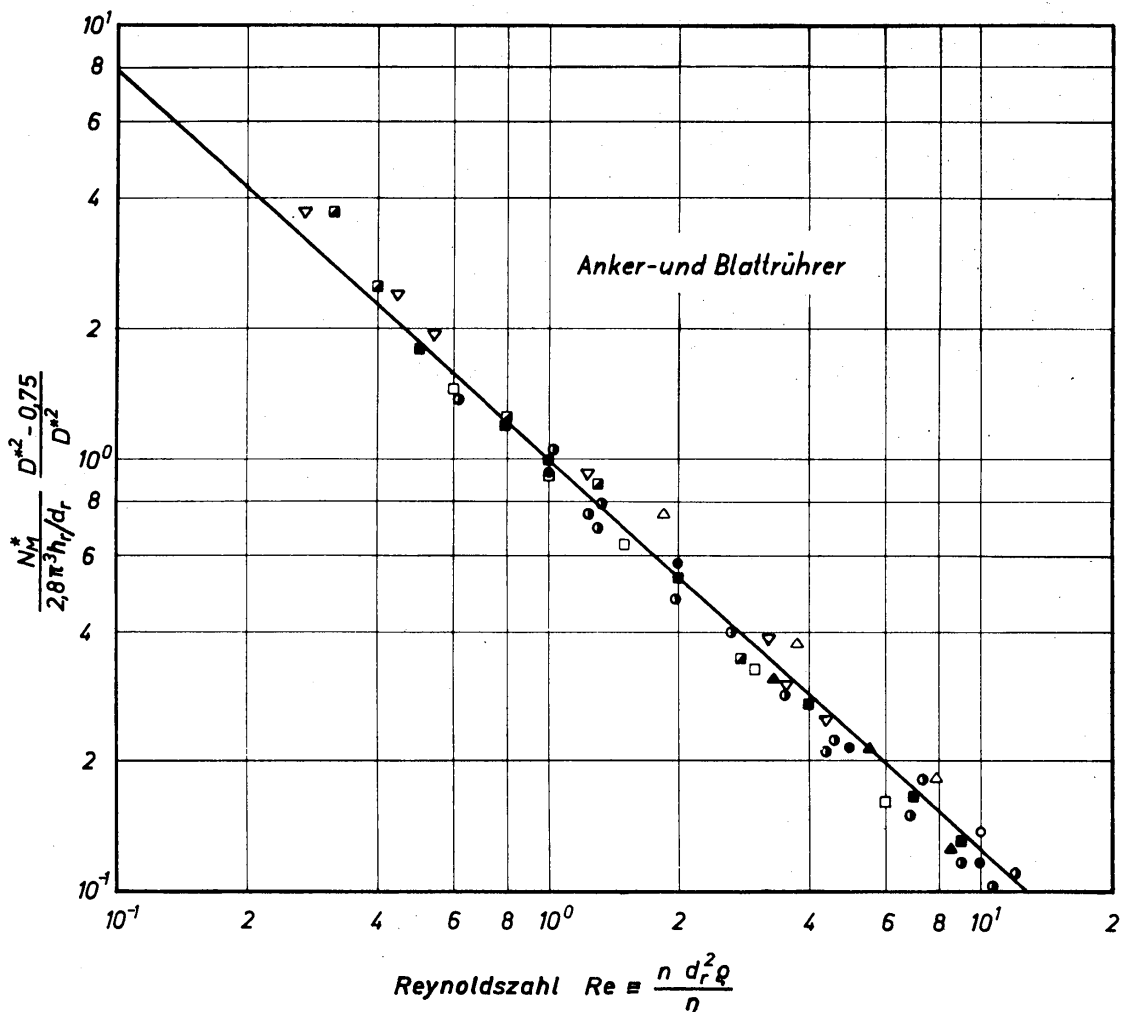


Bild 19.45. Vergleich zwischen den nach Gl.(19.87) berechneten Leistungszahlen von Blatt- und Ankerrührern und Meßwerten mehrerer Forscher für das Rühren Newton'scher Flüssigkeiten ($m = 1$). Nähere Angaben zu den Meßwerten enthält Tabelle 19.5

Ein Vergleich der von SCHILO aufgestellten Gl.(19.87) für Newtonsche Flüssigkeiten ($m = 1$) mit Meßwerten verschiedener Experimentatoren ist in *Bild 19.45* durchgeführt. Nähere Angaben zu den Meßwerten enthält Tabelle 19.5. Auch dieser Vergleich ergibt eine recht befriedigende Übereinstimmung der halbt theoretischen Gleichung mit den Meßwerten.

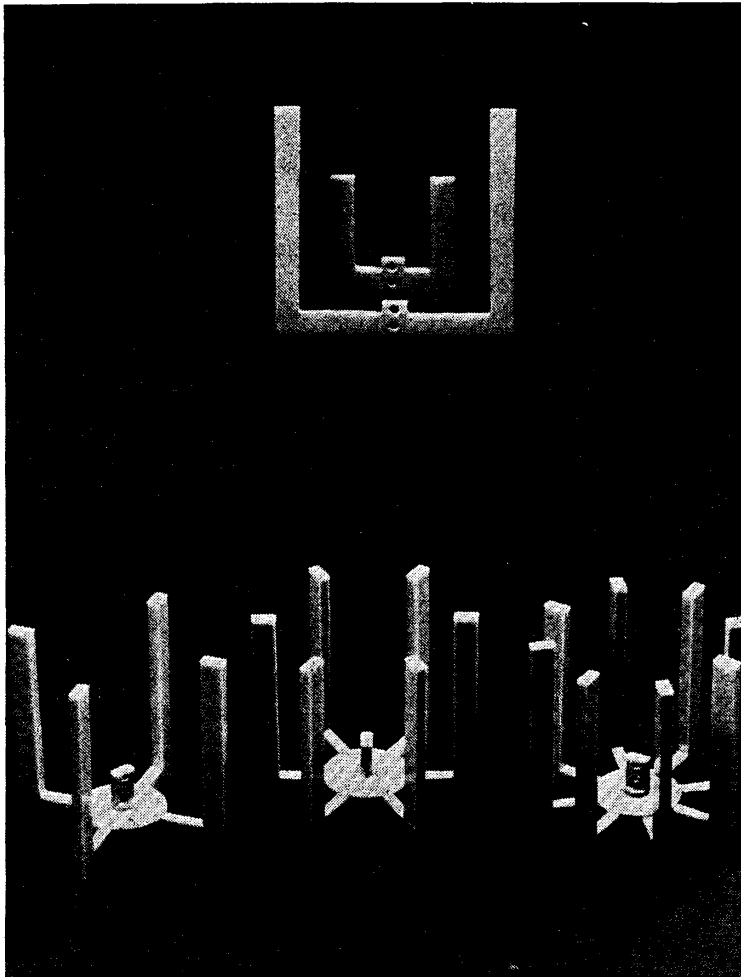


Bild 19.46. Photographische Aufnahmen von mehrflügeligen Ankerrührern

Bei den bisher erwähnten Versuchen wurden stets zweiflügelige Ankerrührer verwendet. SCHILO hat auch Versuche mit 4-, 6- und 8flügeligen Ankerrührern durchgeführt. In *Bild 19.46* ist eine photographische Aufnahme von mehrflügeligen Ankerrührern wiedergegeben. Die für diese Rührer ermittelten Leistungszahlen lassen sich ebenfalls mittels Gl.(19.87) berechnen, wenn die rechte Seite dieser Gleichung mit $\sqrt{c/2}$ multipliziert wird, wobei c die Zahl der Ankerflügel bedeutet. Man erhält dann also folgende halbt theoretische Gleichung:

$$N^* = 0,7 \pi^2 \left(\frac{4\pi}{m} \right)^m \frac{h_r/d_r}{Re_m^{0,95}} \frac{D^{*2} \sqrt{c/2}}{(D^{*2/m} - 0,75)^m} \quad (19.89)$$

Diese Gleichung darf nicht für $c > 8$ verwendet werden.

Tabelle 19.5: Angaben zu den in *Bild 19.45* dargestellten Meßwerten für den Leistungsbedarf beim Rühren Newtonscher Flüssigkeiten

Zeichen	Verfasser		Rührer	$D = D/d_r$	h_r/d_r
■	BECKNER und SMITH	[19.40]	Anker	1,178	0,77
○	ZLOKARNIK	[19.41]	Anker	1,02	1,0
▲	UHL und VOZNIK	[19.42]	Anker	1,01	0,5
△				1,08	0,5
●	SCHILO	[19.29]	Anker	1,05	1,0
				1,10	1,0
				1,15	1,0
				1,25	1,0
				1,35	1,0
				1,60	1,0
				2,00	1,0
■	ULLRICH und SCHREIBER	[19.43]	Blatt	2,15	1,0
●	ZLOKARNIK	[19.41]	Blatt	2,00	1,0
□	NAGATA und Mitarbeiter	[19.44]	Blatt	1,25	1,0
▽	SCHILO	[19.29]	Blatt	1,10	1,0
				1,60	1,0
				2,00	1,0

19.5 Einige Bemerkungen zum Mischen

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel bereits gesagt wurde, soll durch einen Rührprozeß die innige Vermischung von zwei oder auch mehreren Phasen herbeigeführt werden. Die Phasen können sowohl in flüssiger, gasförmiger oder auch fester Form vorliegen. In diesem Kapitel wird stets davon ausgegangen, daß eine der Phasen, die mit A bezeichnet werden soll, flüssig ist. Ist die andere dann entweder eine gasförmige oder feste Phase, dann liegt sie stets in Form mehr oder weniger feiner Partikeln vor. Die flüssige Phase A bildet dabei die kontinuierliche, die gasförmige oder feste die diskontinuierliche Phase. Weiterhin ist es aber auch möglich, daß in der flüssigen Phase A eine nicht mischbare flüssige Phase B verteilt werden soll. In diesem Falle kann nicht unmittelbar vorausgesagt werden, welche der beiden flüssigen Phasen A und B die kontinuierliche und welche die diskontinuierliche Phase ist. Es ist immer zu erwarten, daß in bestimmten Bereichen des Volumverhältnisses der beiden Phasen die Phase A die kontinuierliche und in anderen Bereichen des Volumverhältnisses die Phase B die kontinuierliche ist [19.45]. Man spricht von einer Phaseninversion. Der Mischprozeß besteht in allen diesen Fällen darin, die disperse Phase möglichst gleichmäßig

in der kontinuierlichen Phase zu verteilen. Im folgenden sollen einige Hinweise auf das Vermischen von Flüssigkeiten, auf die Begasung von Flüssigkeiten und auf das Suspendieren fester Partikeln mittels Rührer gegeben werden. Sie beschränken sich aber im wesentlichen auf einige Schriftumszitate.

19.51 Mischen von Flüssigkeiten

In diesem Abschnitt soll jener Fall behandelt werden, bei dem der Prozeß des Mischens von zwei mischbaren Flüssigkeiten A und B durch die Röhreinrichtung beschleunigt wird. Der Rührprozeß dient hierbei also zum beschleunigten Konzentrationsausgleich. Streng genommen ist der Mischprozeß also ein Stofftransportprozeß, der nicht Gegenstand der Behandlung in diesem Buch ist. Indes sind mit diesem Stofftransportprozeß sehr bedeutsame Strömungsvorgänge verknüpft, daß zumindest einige wenige Bemerkungen am Platze sind.

Der Mischprozeß läuft um so schneller ab, je größer

- a) die Phasengrenzfläche und
- b) der Impulsaustausch

zwischen den zu mischenden Stoffen A und B ist. Sowohl die Größe der Phasengrenzfläche als auch der Impulsaustausch zwischen den beiden Komponenten hängen von dem verwendeten Rührer und von der Gefäßform ab. Denn Rührer und Gefäßform bestimmen die räumliche Strömung, in deren Feld die Volumverkleinerung der beiden Komponenten und der Impulsaustausch ablaufen. Über die räumliche Strömung ist indes bis heute nur wenig bekannt.

In der Einleitung zu diesem Kapitel war bereits gesagt worden, daß man den Rührer als Förder- und als Mischorgan auffassen kann. Als Mischorgan hat nach dem oben Gesagten der Rührer die Aufgabe, die Volumen der beiden Komponenten A und B in kleinere Elemente aufzulösen. Ferner hat er die Aufgabe, die Volumelemente in einer solchen Weise innerhalb des Gefäßes im Kreislauf zu fördern, daß zwischen den Elementen ein großes Geschwindigkeitsgefälle und im gesamten Gefäßvolumen ein hoher Turbulenzgrad auftritt. Durch beide Maßnahmen wird ein hoher Impulsaustausch herbeigeführt, der zwangsläufig einen lebhaften Stoffaustausch zwischen den Komponenten A und B zur Folge hat. Die dem Rührer in dieser Weise zugeordneten Funktionen werden bislang noch nicht in der wünschenswerten Weise verstanden.

In der Forschung richtet sich heute die Aufmerksamkeit vor allem auf die im Rührgefäß herrschende Struktur der Turbulenz. Besondere Erwähnung verdienen in diesem Zusammenhang die Arbeiten von THOMAE [19.10], CUTTER [19.14], CORRSIN [19.46], REITH [19.47], ROSENSWEIG [19.48], KIM und MANNING [19.49], MANNING und WILHELM [19.50] und RICE, TOOR und MANNING [19.51]. Eine zusammenfassende Darstellung über die Grundlagen der Turbulenz in Rührgefäßen findet man in dem Buch von UHL und GRAY [19.2]. In den zitierten Arbeiten werden auch die entwickelten Meßverfahren und die bei den Messungen festgestellten Schwierigkeiten beschrieben. Die bisher erzielten Ergebnisse reichen

noch nicht aus, dem praktisch tätigen Ingenieur Auskunft über den Einfluß der Turbulenz auf den zeitlichen Ablauf der Durchmischung zu geben.

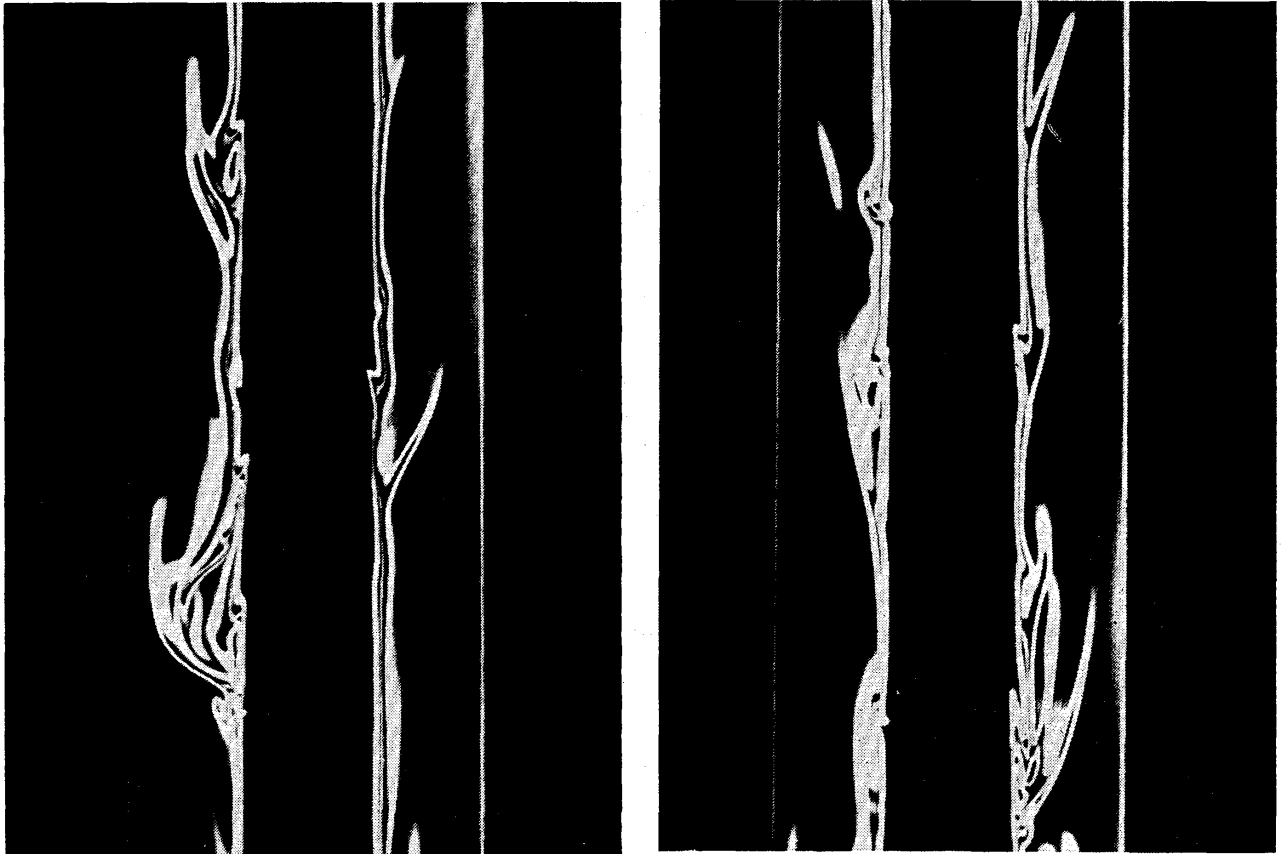


Bild 19.47. Schlierenoptische Aufnahmen von der Ausbildung und Struktur einer turbulenten Grenzschicht, die sich an einer Zylinderwand befindet

Um einen Eindruck von den Schwierigkeiten zu erhalten, die der Untersuchung der Turbulenz in Rührgefäßen entgegenstehen, mag man sich daran erinnern, daß es immerhin vieler Jahrzehnte bedurfte, um einige Kenntnisse über die Turbulenz in so einfachen Fällen wie der Kanal- und der Grenzschichtströmung an Platten zu gewinnen. Wobei noch zu berücksichtigen ist, daß die hierbei gewonnenen Kenntnisse keineswegs erschöpfend und für viele technische Probleme auch heute noch unbefriedigend sind. Hierüber wird von SCHLICHTING [19.32] und TOWNSEND [19.52] ausführlich berichtet. Insbesondere die Experimente von KLEBANOFF [19.53] haben deutlich erkennen lassen, daß die turbulente Grenzschichtdicke an festen Wänden zeitlich und örtlich stark fluktuiert. In *Bild 19.47*

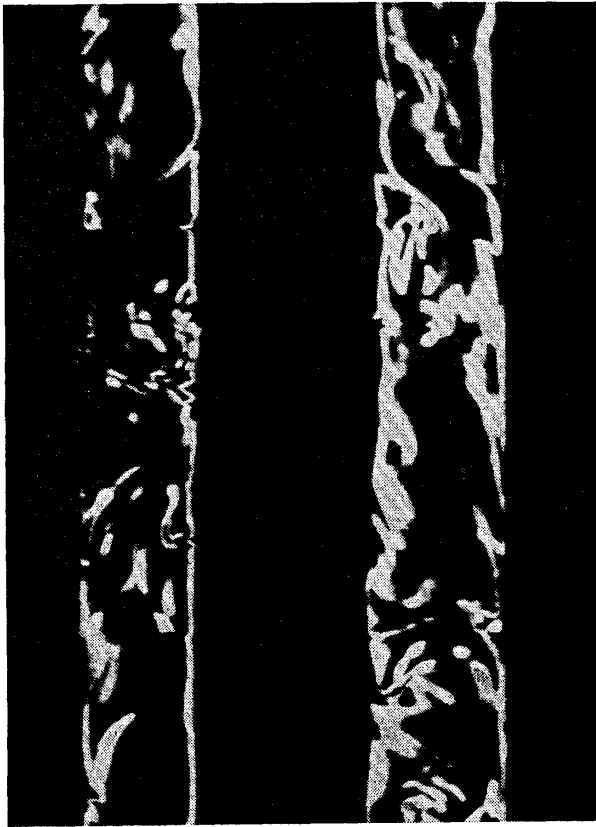


Bild 19.48
Schlierenoptische Aufnahme von
der Struktur eines ausgebildeten
turbulenten Strömungsfeldes

sind einige vom Verfasser hergestellte schlierenoptische Aufnahmen von der Ausbildung der turbulenten Temperaturgrenzschicht bei freier Konvektion an einem senkrecht angeordneten Rohr wiedergegeben. Bei erzwungener Konvektion zeigt die Grenzschicht grundsätzlich die gleiche Struktur. Durch eruptionsartige Vorgänge in der Grenzschicht wird der turbulente Austausch mit der angrenzenden Flüssigkeit hervorgerufen. Die in *Bild 19.47* wiedergegebenen Aufnahmen zeigen das Einsetzen der Turbulenz. Bei ausgebildeter Turbulenz ergeben schlierenoptische Aufnahmen die in *Bild 19.48* erkennbare Struktur der Turbulenz in einem Kernstrom. In ähnlicher Form wird man sich die Turbulenz in Rührgefäßen vorstellen dürfen. Erschwerend kommt jedoch bei der räumlichen Strömung im Rührgefäß hinzu, daß sich die zu mischenden Komponenten A und B in Form von Volumelementen bewegen, über deren Form und Größe, und damit auch über deren Phasengrenzfläche nur wenig bekannt ist [19.54]. Aussagen über die Turbulenzstruktur in Rührgefäßen lassen sich also auch erst dann machen, wenn die Bewegung der zu mischenden Komponenten bekannt ist. Zur Zeit beschränkt man sich in dieser Beziehung noch auf die Bewegung einer reinen Flüssigkeit im Rührgefäß. Hingewiesen sei in diesem Zusammenhang auf die Arbeiten von RUSHTON, MACK und EVERETT [19.55], RUSHTON und OLDSHUE [19.56], SACHS und RUSHTON [19.57], VAN DE VUSSE [19.58] und MARR und JOHNSON [19.59].

Unter Berücksichtigung der noch sehr unvollkommenen Kenntnisse über die räumliche Strömung und deren Turbulenzstruktur im Rührgefäß verwundert es nicht, daß man noch keine verbindlichen Aussagen über den Mischprozeß machen kann. Man befindet sich noch im Stadium des Sammelns von Beobachtungs-

ergebnissen, die als Grundlage für eine physikalische Deutung der für den Mischvorgang maßgebenden Einflüsse dienen können. Eine gute Zusammenfassung der bislang gesammelten experimentellen Ergebnisse findet man in dem Buch von UHL und GRAY [19.2]. Ferner sei auf eine Untersuchung von ZLOKARNIK [19.41] aufmerksam gemacht. Bei allen Untersuchungen hat sich herausgestellt, daß die gemessenen Mischzeiten auch vom Meßverfahren abhängen. Somit können die Ergebnisse nicht absolute, sondern nur relative Bedeutung haben. Bei der Anwendung solcher Ergebnisse für die Lösung technischer Aufgaben ist also stets Vorsicht geboten.

19.52 Begasen von Flüssigkeiten durch Rührer

Bei der Begasung von Flüssigkeiten in Rührgefäßen bestehen im wesentlichen nur zwei verschiedene Möglichkeiten. Bei der einen wird das Gas durch den Gefäßboden geleitet, und dem Rührer fällt die Aufgabe zu, das Gasvolumen in kleine Blasen aufzulösen und diese im Gefäß zu verteilen. Bei der anderen Möglichkeit saugt der rotierende Rührer durch seine Hohlwelle das über der Flüssigkeit befindliche Gas an und verteilt es mittels eines speziellen Rührelementes in der Flüssigkeit. Derartige Rührer nennt man Hohlrührer. Eine ausführliche Abhandlung über die bei der Flüssigkeitsbegasung in Rührgefäßen auftretenden Probleme findet man in dem 2. Band des Buches von UHL und GRAY [19.2]. An dieser Stelle sollen nur einige Hinweise auf die Hohlrührer gebracht werden.

Die umfangreichsten Untersuchungen über die Wirkungsweise von Hohlrührern hat ZLOKARNIK [19.60] durchgeführt. Die bei den Hohlrührern wichtigsten Größen sind das vom Rührer angesagte Gasvolumen und der Leistungsbedarf des Rührers. Hierüber macht ZLOKARNIK für einige Hohlrührertypen Angaben. Aussagen über die Größe der erzeugten Gasblasen liegen indes nicht vor. In diesem Zusammenhang sei jedoch auf die grundlegenden Untersuchungen von CALDERBANK verwiesen, die in dem Buch von UHL und GRAY ausführlich erörtert werden. Von besonderer Bedeutung ist bei der Begasung von Flüssigkeiten die Größe der Phasengrenzfläche. Mit diesem Problem haben sich zahlreiche Autoren befaßt. Erwähnt seien insbesondere die Arbeiten von WESTERTERP, DIERENDONCK und KRAA [19.61] und LINCK [19.62].

19.53 Suspendieren fester Partikeln durch Rührer

Auch über das Suspendieren fester Partikeln wird in dem Buch von UHL und GRAY [19.2] ausführlich berichtet. Unberücksichtigt blieben dabei jedoch die von KNEULE und WEINSPACH [19.63 und 19.64] und die von WEINSPACH [19.65 und 19.66] gelieferten Beiträge, weshalb darauf besonders aufmerksam gemacht sei. In diesen Arbeiten wird der enge Zusammenhang zwischen Wirbelschichten und den in Rührgefäßen auftretenden Suspensionsschichten aufgezeigt. Die Untersuchungsergebnisse dieser Autoren gestatten die einfache Bestimmung derjenigen Reynoldszahl des Rührers, ab welcher alle Partikeln vollständig suspendiert sind.

Schrifttum

- [19.1] ● F. A. HOLLAND und F. S. CHAPMAN, *Liquid Mixing and Processing in Stirred Tanks*, Reinhold, New York 1966
- [19.2] ● V. W. UHL und J. B. GRAY, *Mixing, Theory and Practice*, Academic Press, New York/London, Band 1 (1966) und Band 2 (1967)
- [19.3] ● A. H. P. SKELLAND, *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, Wiley, New York/London/Sydney 1967
- [19.4] ● W. L. WILKINSON, *Non Newtonian Fluids. Fluid Mechanics, Mixing and Heat Transfer*, Pergamon Press, London/Oxford/New York/Paris 1960
- [19.5] J. ULBRECHT und P. MITSCHKA, Nicht-Newtonische Flüssigkeiten, Strömungsvorgänge und Wärmeübergang, erschienen in *Beiträge zur Verfahrenstechnik*, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1967
- [19.6] C. S. RAO und D. VENKATESWARLU, The design of mixers, *Chem. Age India* 12 (1961) 9/10, 387–93
- [19.7] W. WEIHRAUCH, Mehrstufen-Impuls-Gegenstromrührer, *Verfahrenstechn.* 2 (1968) 6, 243–6
- [19.8] H. ULLRICH und H. SCHREIBER, Rühren in zähen Flüssigkeiten, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5/6, 218–24
- [19.9] R. T. JOHNSON, Batch mixing of viscous liquids, *Ind. Eng. Chem. Process Design & Development* 6 (1967) 3, 340–5
- [19.10] H. THOMAE, Das turbulente Strömungsfeld in einem Rührkessel, *Chem.-Ing.-Techn.* 42 (1970) 5, 317–22
- [19.11] S. NAGATA, K. YAMAMOTO, K. HASHIMOTO und Y. NARUSE, Flow patterns of liquids in a cylindrical mixing vessel with baffles, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.* 21 (1959) 260–73
- [19.12] S. NAGATA, K. YAMAMOTO, K. HASHIMOTO und Y. NARUSE, Studies on the flow patterns of liquids in a cylindrical mixing vessel, over a wider range of Reynolds number, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.* 22 (1960) 1, 68–85
- [19.13] H. THIELE, *Leistungsbedarf für das Rühren Newtonscher Flüssigkeiten*, Dissertation, Technische Universität Berlin 1971
- [19.14] L. A. CUTTER, Flow and turbulence in a stirred tank, *AIChE J.* 12 (1966) 1, 35–45
- [19.15] R. H. BOWERS, An investigation of flow phenomena in stirred tanks, *AIChE J., Symposium Series* 10 (1965) 8–13
- [19.16] J. Y. OLDSHUE, *Chem. Proc. Eng.* 47 (1966) 183–8
- [19.17] J. H. RUSHTON, E. W. COSTICH und H. J. EVERETT, Power characteristics of mixing impellers, *Chem. Eng. Progr.* 46 (1950) Part I: 8, 395–404; Part II: 9, 467–76
- [19.18] F. S. CHAPMAN und F. A. HOLLAND, A study of turbine and helical-screw agitators in liquid mixing, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 43 (1965) T 131–T 140
- [19.19] A. HACKL und G. JASCHEK, Messen des Drehmomentes an Rührwerken mit exzentrisch angeordnetem Rührer, *Chem.-Ing.-Techn.* 40 (1968) 9/10, 494–6
- [19.20] J. PAWLOWSKI, Grundlagen des fördertechnischen Verhaltens einspindeliger Schnecken bei Newtonschen Flüssigkeiten, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 20, 1180–7
- [19.21] W. R. PENNEY und K. J. BELL, Close clearance agitators, *Ind. Eng. Chem.* 59 (1967) 4, 40–6
- [19.22] R. L. BATES, P. L. FONDY und R. R. CORPSTEIN, Examination of some geometric parameters of impeller power, *Ind. Eng. Chem. Process Design & Development* 2 (1963) 4, 310–4
- [19.23] S. NAGATA und T. YOKOYAMA, Studies on power requirementw of mixing impellers, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.* 17 (1955) 4, 253–63
- [19.24] P. H. CALDERBANK, Physical rate process in industrial fermentation, Part I: The interfacial area in gas-liquid contacting with mechanical agitation, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 36 (1958) 443–63

- [19.25] P. H. CALDERBANK und M. B. MOO-YOUNG, The power characteristics of agitators for the mixing of Newtonian and non-Newtonian fluids, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 39 (1961) 337-47
- [19.26] H. BRAUER, Ansatz zur theoretischen Berechnung des Leistungsbedarfs und des Wärmeübergangs beim Rühren, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5/6, 209-17
- [19.27] H. REICHARDT, Gesetzmäßigkeiten der geradlinigen turbulenten Couetteströmung, *Mitteilungen des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Nr. 22*, Göttingen 1959
- [19.28] W. TILLMANN, Zum Reibungsmoment der turbulenten Strömung zwischen rotierenden Zylindern, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 27 (1961) 6, 189-94
- [19.29] D. SCHILO, *Leistungsbedarf von Tangentialrührern beim Rühren nicht-Newtonscher Flüssigkeiten*, Dissertation, Technische Universität Berlin 1968, und *Chem.-Ing.-Techn.* 41 (1969) 5/6, 253-9
- [19.30] G. D. REICHENBERGER, *Messung der Rührerleistung und der Mischzeit für mehrflügelige Ankerrührer bei nicht-Newtonschen Flüssigkeiten*, Diplomarbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin 1967
- [19.31] W. BÜCHE, Leistungsbedarf von Rührwerken; *Z. VDI 81* (1937) 37, 1065-9
- [19.32] J. H. RUSHTON, The use of pilot plant mixing data, *Chem. Eng. Progr.* 47 (1951) 9, 485-8
- [19.33] ● H. SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie*, Verlag Braun, 5. Auflage, Karlsruhe 1965
- [19.34] P. V. SUBBA RAJU, Flow between two unsteadily rotating disks, *Appl. Sci. Res.* 16 (1966) 5, 395-404
- [19.35] J. ULBRECHT und K. WICHTERLE, Schnell laufende Rührwerke bei laminarer Strömung, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 11, 656-8
- [19.36] S. NAGATA, T. YOKOYAMA und H. MAEDA, Studies on the power requirement of mixing impellers, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.* 18 (1956) 1, 13-29
- [19.37] D. HECHEL, *Leistungsbedarf von Scheiben- und Turbinenrührern beim Rühren Newtonscher Flüssigkeiten*, Diplomarbeit am Lehrstuhl für Verfahrenstechnik, Technische Universität Berlin 1970
- [19.38] A. B. METZNER und R. E. OTTO, Agitation of non-Newtonian fluids, *AIChE J.* 3 (1957) 1, 3-10
- [19.39] U. WERNER, Modelluntersuchungen an Rührwerken mit nicht-Newtonschen Flüssigkeiten, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5/6, 237-42
- [19.40] J. L. BECKNER und J. M. SMITH, Anchor-agitated systems: Power input with Newtonian and pseudoplastic fluids, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 44 (1966) 224-36
- [19.41] M. ZLOKARNIK, Eignung von Rührern zum Homogenisieren von Flüssigkeitsgemischen, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 9/10, 539-48
- [19.42] V. W. UHL und H. P. VOZNICK, The anchor agitators, *Chem. Eng. Progr.* 56 (1960) 3, 72-7
- [19.43] H. ULLRICH und H. SCHREIBER, Rühren in zähen Flüssigkeiten, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5/6, 218-24
- [19.44] S. NAGATA, M. YANAGIMOTO und T. YOKOYAMA, Studies of mixing of high viscous liquids, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.* 18 (1956) 4, 444-60
- [19.45] J. A. QUINN und D. B. SIGLOH, Phase inversion in the mixing of immiscible liquids, *Can. J. Chem. Eng.* 41 (1963) 1, 15-8
- [19.46] S. CORRISIN, Simple theory of idealized turbulent mixer, *AIChE J.* 3 (1957) 3, 329-30
- [19.47] T. REITH, Generation and decay of concentration fluctuations in a stirred baffled vessel, *AIChE, International Chemical Engineers Joint Meeting, London, 13. bis 17. Juni 1965*, Mixing Theory related to practice, 12-21
- [19.48] R. E. ROSENSWEIG, Idealized theory for turbulent mixing in vessels, *AIChE J.* 10 (1964) 1, 91-7

- [19.49] W.J.KIM und F.S.MANNING, Turbulence energy and intensity spectra in a baffled stirred vessel, *AICHE J.* 10 (1964) 5, 747-52
- [19.50] F.S.MANNING und R.H.WILHELM, Concentration fluctuation in a stirred baffled vessel, *AICHE J.* 9 (1963) 1, 12-9
- [19.51] A.W.RICE, H.L.TOOR und F.S.MANNING, Scale of mixing in a stirred vessel, *AICHE J.* 10 (1964) 1, 125-9
- [19.52] ● A.A.TOWNSEND, *The structure of turbulent shear flow*, Cambridge University Press, London/New York 1956
- [19.53] P.S.KLEBANOFF, Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, *NACA Rep.* 1247 (1955)
- [19.54] P.L.FONDY und R.L.BATES, Agitation of liquid systems requiring a high shear characteristic, *AICHE J.* 9 (1963) 3, 338-42
- [19.55] J.H.RUSHTON, D.E.MACK und H.J.EVERETT, Displacement capacities of mixing impellers, *Trans. Amer. Inst. Chem. Eng.* 42 (1946) 3, 441-54
- [19.56] J.H.RUSHTON und J.Y.OLDSHUE, Mixing-Present theory and practice, *Chem. Eng. Progr.* 49 (1953) 4, 161-8, und 5, 267-75
- [19.57] J.P.SACHS und J.H.RUSHTON, Discharge flow from turbine-type mixing impellers, *Chem. Eng. Progr.* 50 (1954) 12, 597-603
- [19.58] J.G.VAN DE VUSSE, Mixing by agitation of miscible liquids, *Chem. Eng. Sci.* 4 (1955) 4, 178-200, und 5, 209-20
- [19.59] G.R.MARR und E.F.JOHNSON, The pumping capacity of impellers in stirred tanks, *AICHE J.* 9 (1963) 3, 383-5
- [19.60] M.ZLOKARNIK, Auslegung von Hohlrührern zur Flüssigkeitsbegasung, *Chem.-Ing.-Techn.* 38 (1966) 3, 357-66, und 7, 717-23
- [19.61] K.R.WESTERTERP, L.L.VAN DIERENDONCK und J.A.DE KRAA, Interfacial areas in agitated gas-liquid contacters, *Chem. Eng. Sci.* 18 (1963) 3, 157-76
- [19.62] V.LINCK, Bestimmung der Phasengrenzfläche in einem mit mechanischem Rührwerk versehenen Reaktor bei Gasdurchgang, *Chem. Eng. Sci.* 21 (1966) 9, 777-90
- [19.63] F.KNEULE und P.M.WEINSPACH, Suspendierung fester Körper in Flüssigkeiten, *Chem.-Ing.-Techn.* 35 (1963) 10, 720-5
- [19.64] F.KNEULE und P.M.WEINSPACH, Suspendieren von Feststoffpartikeln im Rührgefäß, *Verfahrenstechn.* 1 (1967) 12, 531-40
- [19.65] P.M.WEINSPACH, Der Lösevorgang im Fließbett und im Rührgefäß, *Chem.-Ing.-Techn.* 39 (1967) 5/6, 231-6
- [19.66] P.M.WEINSPACH, Fluidisieren und Suspendieren als konkurrierende verfahrenstechnische Grundoperationen, *Chem.-Ing.-Techn.* 40 (1968) 18, 884-9

Namenverzeichnis

- Abbey R. G. 776
 Abbott M. 508, 515
 Ackeret J. 300
 Ackerman G. H. 850
 Acrivos A. 213, 303, 685
 Adachi H. 823, 857
 Adam O. 507, 531
 Adams H. 272
 Adler C. R. 337
 Adler M. 46
 Aerov M. E. 611, 794
 Allen H. S. 199
 Allen J. M. 686
 Allendorf H. D. 550
 Alt C. 776
 Amick E. H. 289
 Anderson E. D. 88
 Anderson G. H. 742
 Anderson K. L. 769
 Anshus B. E. 684
 Aoi T. 207
 Apuzzo G. 300, 303
 Arnold H. D. 199
 Arnold W. 752
 Astarita G. 300, 303, 700
- Babos B. 747
 Badger W. L. 679
 Bär P. 324, 325, 336
 Bain W. A. 776
 Baird R. M. 409
 Baker M. L. 202
 Baker O. 722
 Banchemo J. T. 347
 Bandukwala A. 387
 Banit E. 590
 Barker D. H. 210
 Baron T. 478
 Bart W. 418, 433, 443, 507, 531, 642, 776
 Barthels H. 748
 Bashforth F. 272
 Batel W. 629
 Bates R. L. 883, 936
 Batt R. S. W. 742
 Bayer H. 355
 Beardmore R. H. 302
 Becker H. A. 212, 501, 503
 Beckner J. L. 933
 Bednarski S. 656, 661
 Belkin H. H. 681
 Bell K. J. 883
 Bellinger F. 776
 Benenati R. F. 409, 472
 Benforado D. M. 124
 Beranek J. 460, 498
- Berbente C. 693
 Bergelin O. P. 679
 Bernal J. D. 404
 Beveridge G. S. G. 407
 Billet R. 776
 Bingham E. C. 128, 138
 Binnie A. M. 684
 Bird R. B. 80, 127, 130, 164, 700
 Bitran H. D. 317
 Bitter J. G. A. 566
 Blackadder D. A. 622
 Blake F. C. 424
 Blasius H. 34, 55, 101, 104
 Blaß E. 446
 Blechschmidt K. 821
 Bloore P. D. 478
 Blum E. H. 406
 Boardman R. P. 366
 Boehme G. 520, 587
 Bogue D. C. 57, 145, 174
 Bohnet M. 661, 663, 666, 667
 Bolles W. L. 804, 812
 Bolt L. H. 583
 Bonner F. T. 320
 Borho K. 650
 Bose K. 776
 Botterill J. S. 478
 Bowers R. H. 877
 Boylan D. R. 612
 Bradley D. 656, 661, 666
 Brauer H. 45, 80, 83, 113, 116, 120, 252, 262, 326, 369, 390, 428, 429, 430, 434, 438, 508, 516, 535, 544, 559, 566, 574, 679, 684, 693, 697, 722, 767, 776, 779, 887, 915
 Braun W. G. 550
 Brenner H. 213, 357, 358, 362
 Breßler R. 111
 Bretherton F. P. 303
 Brisson W. L. 503
 Brockstedt H. C. 508
 Brodkey R. S. 174
 Brötz W. 679
 Brooke Benjamin T. 683
 Brosilow C. B. 409
 Brown F. E. 306, 307
 Brown G. P. 69
 Brown R. A. S. 303
 Brown R. L. 588
 Brownell L. E. 430, 432
 Brunner K. 642, 647, 653
 Buchanan R. H. 501
 Büche W. 904
 Büttiker R. 303
- Burke S. P. 203, 433, 443
 Burovoi L. A. 474
 Butterworth D. 695
 Byrnes J. J. 124
- Calderbank P. H. 295, 345, 860, 884, 885
 Caplan K. J. 646
 Carlos C. R. 474
 Carlson L. W. 101
 Carman P. C. 424, 427, 428
 Cathrein E. 303
 Chao B. T. 300
 Chapman F. S. 869, 883, 923
 Charles D. E. 531
 Charles H. E. 761, 762
 Charles M. E. 83, 583, 762
 Charwat A. F. 202
 Chase R. C. 174
 Chattopadhyay A. 503
 Chawla J. M. 747, 756
 Cheng G. K. 69
 Cheng P. Y. 866
 Cheng S. I. 821
 Chien S.-F. 742
 Chisholm D. 302
 Cho K. 531
 Chowdhury K. C. R. 212
 Christiansen E. B. 143, 169, 210, 213
 Christiansen R. M. 308
 Clamen A. 210
 Clark R. H. 531
 Cleveland R. G. 747
 Cochran W. G. 324
 Cohen L. S. 742
 Colebrook C. F. 40
 Collier J. G. 743
 Collins M. 57, 145
 Collins R. E. 428
 Consiglio J. A. 316
 Cooper C. M. 679
 Cooper W. R. 607, 622
 Cornish R. J. 90
 Corpstein R. R. 883
 Corrsin S. 934
 Costich E. W. 880
 Coull J. 347
 Coulson J. M. 833
 Cowan C. B. 501
 Cox R. G. 362
 Crosser O. K. 689
 Cunningham E. 202
 Curtiss C. F. 127
 Cutter L. A. 875, 934
 Czajka J. 813

- Darling C. W. W. 102, 124
 Daubert Th. E. 550
 Davies H. A. 821
 Davies J. A. 833
 Davies R. M. 298
 Davidson J. F. 303, 460, 475, 478, 702
 Davidson L. 289
 Dealy J. M. 57
 Dean W. R. 46
 Debbas S. 404, 406, 407, 409
 DeGouff J. J. 791
 Deissler R. G. 54, 83, 106
 Deiters B. 771
 Denny D. F. 508
 Desmon L. G. 55
 Dewey N. S. 211
 Dickey C. A. 430
 v. Dierendonck L. L. 937
 Diery W. 804
 Dodds W. S. 792
 Dodge D. W. 173, 174
 Doig J. D. 550
 Dombrowski H. S. 430
 Dombrowski N. 318, 319, 322, 336
 Donahl J. 624
 Dornieden M. 702
 Dougherty W. J. 776
 Drew T. E. 679
 Dryden H. L. 203
 Dubach P. 590
 Dukler A. E. 679, 747
 Durand R. 508, 535, 544
 Dytnerskii Y. 841

 v. Ebbenhorst Tengbergen H. J. 646, 650
 Eck B. 818
 Eckert E. R. G. 101, 103
 Eduljee H. E. 833
 Edwards D. G. 317
 Eguchi W. 823, 857
 Eidt C. M. 758
 Eirich F. R. 129
 Eisenklam P. 318, 319, 336, 607
 Eissenberg D. M. 174
 Elgin J. C. 771
 Ellis H. S. 583
 Elzinga E. R. 347
 Emmert E. E. 679
 Emslie A. G. 320
 Engelhardt W. V. 413
 Epstein N. 432, 501, 762
 Ergun S. 433, 463, 487
 Espig H. 328
 Esser W. 433, 443
 Evans F. 283
 Evans H. D. 290, 316

 Everett H. J. 880, 936
 Eversole W. G. 279, 288
 Eveson G. F. 357, 362
 Eyring H. 136

 Fage A. 206
 Fallah R. 681
 Farady L. 747
 Faxén H. 201, 358
 Feind K. 78, 679, 740, 743
 Finn R. K. 207
 Flachsbart O. 199, 206
 Fondy P. L. 883, 936
 Franklin F. C. 595
 Fraser H. J. 406
 Fraser R. P. 318, 319, 322, 336
 Frederickson A. G. 129, 164
 Friedman S. J. 337, 680
 Fritsch T. R. 341
 Fritz W. 212
 Führböter A. 508
 Fujiata S. 776
 Furnas C. C. 417, 422, 776

 Gami D. C. 432
 Garber H. J. 293, 296, 297, 298
 Gardner G. C. 443
 Garner F. H. 200, 300, 341
 Gartside G. 695
 Gasparyan A. M. 201, 358
 Gasterstädt J. 507, 531
 Gauvin W. H. 200, 202, 205, 210, 212, 221
 Gelbe H. 770
 Gemmel A. R. 762
 Gervits V. M. 841
 Geßner W. 45
 Ghosh B. 503, 504
 Gibbons J. H. 347
 Gilbert R. E. 769
 Gilbert W. D. 857
 Gill L. E. 742
 Gilliland E. R. 833
 Gishler P. E. 502, 504
 Glaser H. 95, 412, 435
 Gluckert F. A. 337
 Goglia M. J. 317
 Goldman A. J. 362
 Goldstein G. A. 83
 Goldstein S. 199
 Gomezplata A. 478
 Goodridge F. 695
 Gouse S. W. 713
 Govier G. W. 747, 762
 Grace H. P. 622
 Graef M. 683
 Graham W. 629
 Grassmann P. 59, 181, 297, 298, 302, 303
 Gratton L. C. 406

 Grave B. 231, 329
 Gray J. B. 869, 934, 937
 Green H. 129
 Greene H. L. 56
 Gregory A. R. 428
 Gretzinger J. 316
 Grigull U. 679
 Grimble R. E. 123
 Grimison E. D. 113
 Grimley S. S. 679, 684, 690
 Grocott G. J. 832
 Grummer M. 409, 411
 Günter K. 279, 283
 Guha D. K. 863
 Gunn D. J. 102, 124, 432
 Gutfinger C. 704, 707

 Haas F. C. 314
 Hackl A. 883
 Hagen G. 20
 Hall E. W. 357, 362
 Hallett V. A. 742
 el Halwagi M. M. 478
 Hamielec A. E. 300
 Hammer H. 850
 Hammerton D. 300
 Hampel H. R. 595
 Handlos A. E. 290
 Hanks R. W. 80, 143, 169, 170, 172
 Hanratty T. J. 30, 387, 423, 430, 742
 Happel J. 357, 358, 362, 388, 424, 432
 Hardy B. W. 290
 Harkins W. D. 306, 307
 Harmathy T. Z. 345
 Harrison D. 460, 475, 476, 478
 Hartley D. E. 694
 Hartnett J. P. 91
 Hashimoto K. 875, 915
 Hasson D. 318
 Haughey D. P. 407
 Hausen H. 47
 Hausenblas H. 54
 Hawksley J. L. 308
 Haycock P. J. 341
 Hayes W. B. 290
 Hayworth C. B. 307
 Hechel D. 921
 v. Hecke F. 833
 Hedström B. O. A. 148, 176
 Heer F. 430
 Heertjes P. M. 607
 Heideger W. J. 346
 Hellmer L. 603
 Hempel J. 743
 Henwood G. A. 363
 Herning F. 829
 Herring W. M. 337

- Heuss J. M. 851
 Hewitt G. F. 742
 Hiby J. W. 375, 480
 Hikita H. 791
 Himmelblau D. M. 762
 Hinze J. O. 314, 320, 322, 329
 Hirschfelder J. O. 127
 Hitchcock J. A. 531
 Hitchou J. W. 666
 Hixson A. N. 308
 Hobler T. 813
 Hodgson G. W. 583, 762
 Hoerner S. 202
 Hofmann G. 92, 97
 Hoftijzer D. J. 281
 Holland C. D. 290
 Holland F. A. 869, 883, 923
 Holloway F. A. L. 783
 Hoogendoorn C. J. 747
 Hoon A. Y. 753
 Hopf L. 679
 Hoppe K. 804, 833, 841
 Horada M. 823, 857
 Horton T. J. 341
 Hougén O. A. 776
 Houghton G. 300, 347
 Howard G. W. 508
 Howkins J. E. 702
 Hoyle R. 328
 Hu S. 339, 342
 Hudson D. R. 417
 Hughes R. R. 290
 Hughmark G. A. 747, 819
 Humble L. V. 55
 Hunter T. G. 681
 Huntington R. L. 791
 Hupe K.-P. 702

 Ibele W. E. 742
 Ideljcik I. J. 820
 Irani F. 693
 Irvine T. F. 101, 103
 Isaakyan S. M. 201, 358
 Ito H. 46, 47, 48, 50, 52

 Jackson M. L. 674
 Jackson R. 478
 Jakob M. 113
 Janio K. 478
 Jashek G. 883
 Jefferey G. B. 355
 Jeffrey D. W. 792
 Jeffreys G. V. 308
 Jenicke A. W. 587
 Jenson V. G. 200, 201, 629
 Jepsen J. C. 690
 Jeschar R. 411, 415, 417, 421, 430, 441
 Jesser B. W. 771
 Jinescu G. 472

 Johanson L. N. 595
 Johné R. 366, 367
 Johns W. R. 318
 Johnson A. I. 276, 300
 Johnson E. F. 936
 Johnson H. F. 305
 Johnson M. N. 166
 Johnson R. T. 875
 Johnstone H. F. 453, 478
 Johnstone T. R. 501
 Jollst K. R. 423, 430
 Jones A. M. 208
 Jones C. 531
 Jones J. H. 550
 Jones L. O. 684
 Jordan H. B. 758
 Jung R. 507, 554

 Kamei S. 681
 Kanter J. 336
 Kapitza P. L. 682, 683, 684, 693
 Kapitza S. P. 683, 684
 Karas K. 93
 v. Kármán Th. 38, 324
 Kaskas A. 200, 228
 Kassatkin A. 412, 643, 833, 841
 Kast W. 437
 Katacka K. 791
 Katz D. L. 78, 88
 Kawai S. 595
 Kaye B. H. 366
 Kays W. M. 54
 Keey R. B. 200
 Keller J. B. 201
 Kelsall D. F. 661
 Keunicke K. 603
 Kholpanov L. P. 742
 Kim D. H. 742
 Kim W. J. 934
 King C. J. 851
 Kintner R. C. 339, 341, 342, 346
 Kirkbride C. G. 679
 Kirschbaum E. 311, 776, 812
 Kirschmer O. 41
 Klassen J. 504
 Klebanoff P. S. 935
 Klee A. J. 339
 Klein H. 640
 Kling G. 430
 Kneule F. 366, 810, 825, 937
 Knudsen J. G. 742
 Knudsen M. 66, 78, 88, 208
 Koch R. 45, 78, 435
 Koch R. 810, 812
 Kochergin N. V. 841
 Kölbel H. 850, 852
 Koestel A. 742
 Koh J. C. Y. 91
 Kokado J. 531

 Kolev N. 452, 453, 794, 795
 Korchinski J. J. O. 345
 Kottwitz F. A. 612
 Kowalczewski J. J. 747
 Koyanagi T. 791
 de Kraa J. A. 937
 Kramers H. 702
 v. Krevelen D. W. 281
 Kriegel E. 252, 262, 369, 390, 508, 516, 535, 544, 547, 559, 566, 572, 643, 650, 747, 756
 Krijgsman C. 661
 Krishna P. M. 345
 Krischer O. 420
 Krupcizka R. 813
 Krupp H. 520, 587
 Kubota H. 480
 Kuethe E. 203
 Kürten H. 227
 Kundt A. 63
 Kuroda K. 628
 Kutzer H. 804, 810, 828, 832
 Kuznior J. 810, 812
 Kvapil R. 587, 588, 594, 602
 Kwauk M. 478, 480
 Kynch G. Y. 358

 Labine R. A. 707
 Lacey P. M. C. 742
 Laddha G. S. 771
 Ladenburg R. 201, 379
 Ladendorf K.-Fr. 165
 Laird A. D. K. 302
 Lama R. 629
 Lama R. F. 503
 Lamb D. E. 742
 Lamb H. 75, 208
 Lane W. R. 347
 Langemann H. 850, 852
 Langhaar H. L. 57
 Lapple C. E. 227
 Larkius R. P. 792
 Laufer J. 23
 Le Lec P. 624
 Lee D. W. 314
 Lee J. 174, 618
 Lempp M. 554
 Lerk C. F. 607
 Leschonski K. 643
 Leva M. 409, 411, 433, 460, 478, 480, 771
 Levenspiel O. 771
 Levich V. G. 299, 706
 Lewis H. C. 317
 Licht W. 339
 Liebster H. 199
 Lightfoot E. N. 130, 693
 Lilleht L. U. 761, 762
 Lin P. N. 366
 Linck V. 937

- ter Linden A. J. 644
 Lochiel A. C. 295
 Lockart R. W. 747, 756, 792
 Lockett M. L. 478
 Loeffler A. L. 102, 387
 London A. L. 54, 120
 Longwell P. A. 91
 Lopatina A. M. 607
 de Lorenzo B. 88
 Lowdermilk W. H. 55
 Lu B. C.-Y. 503, 504
 Lumley J. L. 70
 Lyan S. 702
- Maccoll J. W. 205
 Mach E. 437, 776, 864
 Mack D. E. 936
 Mac Leod A. A. 681
 Madonna L. A. 503
 Maeda H. 917, 923
 Mahoney J. F. 290
 Mahrenholtz O. 742
 Maier E. 508
 Malek M. A. 503, 504
 Malik A. A. 432
 Manegold E. 406, 859
 Mann C. A. 792
 Manning F. S. 934
 Manton M. J. 57
 Mantzouranis B. G. 742
 Manurung F. 501
 Marchildon E. K. 210
 Maroudas A. 607
 Marr G. R. 936
 Marrucci G. 700
 Marshall W. R. 316, 319, 337
 Marshek R. M. 478
 Martin J. J. 432
 Martinelli R. C. 747, 756, 794
 Marzilger B. 240
 Mason J. 404
 Massot C. 693
 Mathur K. B. 502
 Matolosy K. 747
 Matsuhisa S. 700
 Matthies H. J. 443
 Maycock R. L. 290
 McAdams W. H. 55, 679
 McCabe W. L. 432
 McCarter R. J. 792
 McComas S. T. 91
 McKinney J. F. 776
 McNoen J. S. 366
 Meier A. 776
 Meikle R. A. 386
 Meissner W. 22
 Meister B. J. 305
 Mellish W. G. 769
 Mersmann A. 278, 470, 486,
 775, 787, 813, 851, 859
- Meter D. M. 80
 Metzner A. B. 139, 142, 148,
 157, 174, 931
 Meyer H. 507
 Michel K. 761
 Mikumo E. 531
 Milborn H. 320, 322, 329
 Miller C. O. 679
 Miller P. 124
 Miller R. A. 432
 Minard G. W. 787
 Mitchell J. W. 120
 Mittelstrass M. 804
 Mitschka P. 869
 Miura V. 791
 Mock W. C. 203
 Möller H. 593
 Mohunta D. M. 771
 Molerus O. 478
 Molstad M. C. 776
 Monkerud E. 329
 Monrad C. C. 432, 679, 681
 Montillon G. H. 612
 Montonna R. E. 612
 Moody L. F. 40
 Mooney M. 134, 136
 Moore D. W. 300
 Morales M. 422
 Morey F. C. 707
 Morikawa Y. 268, 531, 551
 Morikuni I. 531
 Morkovin H. V. 22
 Morris G. A. 702
 Moser H. A. 486, 819
 Moulton R. W. 319
 Mühle J. 252
 Müller E. H. K. 559
 Müller K. 227
 Mugele R. A. 314, 316
 Mukhlenov I. P. 857
 Muntean O. 478
 Murgatroyd W. 694
 Muschelknautz E. 250, 507,
 642, 647, 653
 Myers J. E. 791
- Nagata S. 823, 857, 875, 884,
 915, 917, 923, 933
 Nagel R. 641, 642
 Nakamura H. 628
 Narasimhamurty G. 339, 345
 di Nardo A. 69
 Narsimhan G. 465
 Naruse Y. 875, 915
 Nash A. W. 681
 Nassenstein H. 347
 Nedderman R. M. 692, 695, 742
 Nekarvis W. F. 432
 Nelson P. A. 316
 de Nevers N. 850
- Newitt D. M. 508, 515, 531, 548
 Newton I. 18, 29, 200
 Newton R. 583
 Nicklin D. J. 303
 Nikuradse J. 25, 27, 33, 36, 57,
 74, 535
 Nippert H. 52
 Nirmeier E. A. 433
 Noak D. 661
 Norman W. S. 832
 Nukiyama S. 317
 Null H. R. 305
 Nunner W. 25, 42, 692
 Nusselt W. 674
 Nuttal H. 101
- Oberbeck A. 212
 Ochmann J. 322
 O'Connell H. E. 819
 v. Ohnesorge W. 312
 Oishi J. 681
 Okamura S. 622
 Oldshue J. Y. 877, 936
 Oliver D. R. 387, 629, 753
 Olney R. B. 666
 Orning A. A. 433
 Osberg G. L. 480, 501, 502, 504
 Oseen C. W. 198
 Ostrach S. 742
 Ostwald N. 128, 130
 Othmer D. F. 460, 587
 Otto R. E. 931
- Padmurajaiah T. P. 553
 Palumbo G. 700
 Partridge B. A. 283, 475
 Pavlov O. P. 813
 Pawlowski J. 136, 883
 Pearce K. W. 629
 Peck L. G. 320
 Peebles F. N. 293, 296, 297,
 298, 404, 409
 Penney W. R. 883
 Perry R. H. 689
 Peterson W. S. 501
 Petroll J. 646
 Pettyjohn E. S. 213
 Pfeffer R. 357
 Philippoff W. 129
 Pietsch W. 770
 Pigford R. L. 412, 478, 679
 Pike R. W. 759
 Piret E. L. 792
 Platonow P. 590
 Plummer W. B. 203, 433, 443
 Poiseuille J. 20
 Polthier K. 559
 Portalski S. 679, 680, 684, 689,
 693
 Poutanen A. A. 276

- Prandtl L. 28, 30, 33, 45, 80,
 104, 129, 136, 175, 519
 Proulx A. Z. 791
 Pyle D. L. 476, 478
- Quandt E. 721
 Quinn J. A. 933
 Quitter V. 646
- Raasch J. 227
 Rabenhorst H. 520, 587
 Rabinowitsch B. 134
 Raesfeld A. 91
 Raghavendra N. M. 346
 Raju G. J. V. J. 474
 Raju K. S. 465, 474
 Raju P. V. S. 906
 Rao C. S. 869
 Rao C. V. 465, 474
 Rao M. N. 346, 863
 Ratcliff G. A. 622, 702
 Rayleigh 314, 319
 Redberger P. J. 83, 583, 762
 Reddy K. V. S. 503
 Reed J. C. 142
 Reeds K. J. 702
 Redfield J. A. 300
 Regehr H. U. 666
 Reichardt H. 27, 29, 898
 Reichenberger G. D. 903
 Reichert H. 650
 Reiner M. 129, 131
 Reinhart A. 346
 Reisner W. 587
 Reiss L. P. 30
 Reith T. 934
 Rennie J. 283
 Reuss M. 855
 Reuter H. 459, 475, 476, 477
 Reynolds O. 21, 128
 Rice A. W. 934
 Richards J. C. 588
 Richardson J. F. 386, 388, 474,
 508, 515, 531, 548, 551, 833
 Richter G. 776
 Riedel K. 598
 Rietema K. 657, 661
 Rippel G. R. 758
 Rise R. I. 317
 Roberts F. 702
 Robinson C. S. 833
 Robinson C. W. 501
 Roblee L. H. S. 409
 Roper G. H. 550
 Rose H. E. 595
 Rose K. 484
 Rosensweig R. E. 934
 Rothfus R. R. 27, 80, 681
 Rotta J. 25
 Round G. F. 583
- Routley J. H. 320, 322
 Rowe P. N. 283, 363, 475
 Roy N. K. 863
 Rubinow S. I. 201
 Ruckenstein E. 472, 478, 693
 Rumpf H. 227, 309, 404, 406,
 643, 650, 770
 Rushton J. H. 880, 904, 905,
 936
 Russell T. W. F. 742, 762
 Ruth B. F. 387, 612, 622
 Ryan N. W. 166
 Rylek M. 804, 812
- Sabersky R. H. 38
 Sachs J. P. 936
 Sallans H. R. 501
 Sambuichi M. 622
 Sandstede G. 520, 587
 Sarchet B. R. 776
 Sater V. E. 771
 Sather N. F. 346
 Saunby J. B. 502
 Sauter J. 316
 Sawistowski H. 783
 Schachman H. K. 366
 Schade G. 646
 Schaworonkow N. M. 794
 Scheele G. F. 56, 305
 Schicht H. H. 722, 747
 Schiller L. 22, 57, 74
 Schilo D. 899, 902, 915, 918,
 926
 Schlichting H. 28, 191, 906,
 908, 935
 Schmid K.-J. 238, 326, 336
 Schmiedel J. 211
 Schmidt E. 679
 Schmidt M. 493
 Schmidt P. 323, 413
 Schocklitsch A. 694
 Schoenhorn E. M. 776
 Schönert K. 404, 406
 Scholz N. 58
 Schowalter W. R. 57, 145
 Schrader H. 435, 776, 778, 789
 Schreiber H. 875, 933
 Schrewe G. 787
 Schroeder R. R. 346
 Schröter J. 721, 747
 Schubauer G. B. 203
 Schubert G. U. 22
 Schubert H. 661, 770
 Schuchart P. 268, 520, 524,
 533
 Schümmer P. 140
 Schultz-Grunow F. 507
 Schulze F. 592
 Schulze J. 240
 Schurig W. 679
- Schwartz C. E. 423
 Schytil F. 460
 Scott G. D. 409
 Segler G. 533
 Sellschopp W. 679
 Shearer C. J. 742
 Sherwood Th. K. 69, 412, 783
 Shephard C. B. 227
 Shibuja J. 683
 Shipley G. H. 783
 Shimizu T. 859
 Shirato M. 622
 Shook C. A. 548
 Shulman W. L. 769, 770, 771,
 791
 Siemens H.-J. 324, 325
 Siemes W. 273, 279, 283, 284,
 288, 301, 603
 Sigloh D. B. 933
 Sigwart K. 347
 Simkin D. J. 666
 Simmons F. G. 211
 Sinclair C. G. 508
 Singh A. D. 453
 Skelland A. H. P. 869
 Skramstad H. K. 203
 Skupinski E. 88
 Slattery J. C. 305
 Sleicher C. A. 308
 Slipecevich C. M. 316
 Smith J. H. 422
 Smith J. M. 423, 933
 Smith L. R. 759
 Smith L. W. 317
 Smith R. A. 508
 Smith T. N. 389
 Smith W. 201
 Smoluchowski M. S. 358, 367
 Snyder W. T. 83
 Sokol D. 460, 498
 Sollami B. J. 792
 Sonntag G. 409, 411
 Sonshine R. M. 358
 Sparrow E. M. 101, 102
 Speck G. 406, 409, 410
 Spells K. E. 508
 Spencer R. C. 314
 Spinn C. W. 422
 Squires L. 212
 Squires W. 212
 Stackhouse E. 279, 284, 288
 Stage H. 776
 Stainthorp F. P. 686, 694, 742
 Stairmand C. J. 646
 Stapathy R. 201
 Standart G. 804, 812
 Stechemesser H. 752
 Steinour H. H. 387
 Stephan K. 57, 58, 90
 Stephens E. J. 702

- Stevens W. F. 316
 Stewart W. E. 130
 Stimson M. 355
 Stokes G. 198, 199, 296, 300, 354
 Stokke O. M. 762
 Strand C. P. 850
 Stratemeier J. R. 702
 Straumann R. 612
 Street J. R. 303
 Strom J. R. 346
 Stuart H. A. 129
 Stutzman L. F. 792
 Sullivan S. L. 290
 Sutherland D. N. 622
 Sutherland J. P. 480
 Sutherland W. A. 120
 Svetozarova G. I. 474
 Sweeney D. E. 792

 Tailby S. R. 684, 689
 Tallmadge J. A. 433, 704, 706, 707
 Talmor E. 472
 Tamarin A. I. 478
 Tanaka T. 594, 595, 601
 Tanasawa S. 317
 Tanasawa Y. 317
 Tang Y. P. 762
 Tate R. W. 319, 337
 Taubert C. 850
 Tauner R. I. 57
 Taylor G. 298
 Taylor H. F. 106
 Taylor M. F. 83
 Taylor R. F. 702
 Taylor T. D. 213, 303
 Tek M. R. 303, 759
 Teller A. J. 821
 Teoreanu I. 472, 478
 Tepe J. B. 666
 Deutsch Th. 412, 437, 776, 779
 Thadany M. C. 404, 409
 Thiele H. 906, 908, 913, 915
 Thodos G. 432, 433
 Thomae H. 875, 934
 Thomas D. G. 545
 Thomas W. J. 679
 Thompson A. R. 776
 Thorley B. 502
 Tierney J. W. 409
 Tietgens O. 829
 Tiller F. M. 622
 Tillmann W. 898
 Tollmien W. 221, 683
 Tomita Y. 57
 Tomotika S. 207
 Toomey R. D. 478
 Toor H. L. 934
 Torner G. M. 319

 Torobin L. B. 200, 202, 205, 212, 221
 le Tourneau B. W. 123
 Towell G. D. 850
 Townes H. W. 38
 Townsend A. A. 935
 Toyoda S. 317
 Trawinski H. 605, 661
 Trees J. 602
 Treybal R. E. 307, 339, 412
 Troesch H. A. 314
 Turpin J. L. 791
 Turtle R. B. 508, 515
 Tyabin N. V. 337

 Uchida S. 776
 Ucke T. 723
 Uemata T. 268, 531, 551
 Uetz H. 508
 Uhl V. W. 869, 922, 933, 934, 937
 Ujhidy A. 747
 Ulbrecht J. 869, 908
 Ullrich C. F. 770, 771, 791
 Ullrich H. 82, 605, 875, 933
 Umnik N. N. 794

 Vachagin K. D. 337
 Valentine S. 203, 346
 Vassilatos G. 480
 Venkateswarlu D. 345, 869
 Voznick H. P. 933
 v. d. Vusse J. G. 936

 de Waele 130
 Wagner G. H. 279, 284, 288
 Wagstaff J. B. 433
 Walker J. E. 27, 80
 Wall T. 792
 Walters J. K. 303
 Wang Y. L. 91
 Warburg E. 63, 64
 Ward D. E. 318
 Ward H. C. 759
 Ward S. G. 357, 362
 Warsap J. H. 206
 Wassermann M. L. 305
 Weber C. 314, 319
 Weber M. 528
 Weckman V. W. 791
 Weidner G. 268, 507
 Weihrauch W. 871
 Weinspach P. M. 366, 937
 Weiß F. B. 771
 Welch H. T. 833
 Wellinger K. 508
 Wells N. 770, 771
 Welschhof G. 507
 Wen C. Y. 465
 Wentz Ch. A. 432, 433
 Wenzel L. A. 290

 Werner U. 931
 Wessel J. 227
 West F. B. 857
 Westerterp K. R. 937
 Weymann H. 136
 Whan G. A. 27, 80
 Wheeler J. A. 160
 Whitacker S. 683, 684
 White A. 776
 White C. H. 46
 White C. M. 208
 White D. A. 706, 707
 White E. T. 302
 White R. R. 792
 Wichterle K. 908
 Wicke E. 633
 Wicks M. 747
 Wieselsberger C. 199, 202, 207, 209, 212
 Wiggert K. 771
 Wild G. J. 694
 Wilhelm R. H. 203, 478, 480, 934
 Wilke C. R. 851
 Wilkes J. C. 303
 Wilkes J. O. 692
 Wilkins B. 759
 Wilkinson W. L. 869
 Willic M. R. J. 428
 Winning M. D. 787
 Winterstein G. 460, 484, 498
 Wissler E. H. 160
 Wöhlbier H. 587
 Wood B. H. 707
 Woods K. W. 666
 Worster R. C. 508

 Yamamoto K. 875, 915
 Yamamoto M. 531
 Yanagimoto M. 933
 Yen J. T. 101
 Yih S. S. 683
 Yokoyama T. 884, 917, 923, 933
 Yoshida F. 791
 Yu Y. H. 465

 Zabrodsky S. S. 460
 Zakhavaeva N. N. 607
 Zaki W. N. 386, 388, 551
 Zamann R. 115
 Zelfel E. 486, 810, 813, 820, 825
 Zenz F. A. 460, 587, 776
 Zerbe J. E. 123
 Zhivaikin L. Y. 679
 Zimmermann J. O. 791
 Zimmermann L. 646
 Ziunatulin N. K. 337
 Zlokarnik M. 933, 941
 Zurmühl R. 237

Sachverzeichnis

- Ablagerungsgeschwindigkeit 545, 546
 Ablaufwehr auf Kolonnenböden 811
 Ähnlichkeitsgesetz für Fließbewegung von
 Kornmassen 598
 Ähnlichkeitsgesetz für Prallverschleiß 568
 Ähnlichkeitsgesetz für Rührerleistung 878
 äquivalente Sandrauigkeit 41
 Anfangsschubspannung 139
 Anordnung von Rohren
 fluchtend 111
 in Kreuzgitter 118
 in Parallelgittern 111
 versetzt 111
 Archimedeszahl 463
 Ansatz für Schubspannung nach
 BINGHAM 138
 NEWTON 20
 OSTWALD 129
 PRANDTL-EYRING 136
 Auftreffwinkel beim Prallverschleiß 565
 Ausfluß aus Bunkern 588
 Ausflußgleichung 598, 602
 Austauschgröße für Impuls 29
- Begasen von Flüssigkeiten 937
 Belastungsgrenzen von
 berieselten Füllkörperschichten 777, 782, 786,
 789
 berieselten Rohren 746
 Siebböden 824, 825
 Wirbelschichten 462, 463, 466
 berieselte Füllkörperschichten 766
 Berlsattel 400
 Bettfilter 606
 Bingham-Flüssigkeiten 138, 154, 163
 Blasen
 Aufstieg in nicht-Newtonschen Fluiden 303
 Bildung an Düsen 277
 Bildung an Lochplatten 289
 Bildungsfrequenz 284
 Blasengasen 279
 Durchmesser 278
 Hadamard-Rybczinski-Korrektur 299
 Konturen 274
 Laplace-Konstante 274
 quasistatische Bildung 272
 Strahlgasen 279, 282
 Widerstand von
 Kugelblasen 296
 Kugelblasen mit innerer Zirkulation 297
 Ellipsoidblasen 298
 formlosen Blasen 298
 Zylinderblaen 302
- Blasensäulen 849
 Anströmzone 853
 Austauschzone 849
 Druckverlust 860
 Flüssigkeitsumlauf 849
 Gleichgewichtszone 854
 Höhe der Blasenschicht 855
 Längsaustausch 849
 Phasengrenzfläche 859
 Queraustausch 849
 Schaum 862
 suspendierter Feststoff 862
 volumetrischer Gasgehalt 852
 Zerfallszone 855
 Blasenströmung 716
 Bodendruck in Bunkern 596
 Boltzmann-Konstante 60
- Cunningshamsche Korrektur 202
- dilatante Flüssigkeiten 131
 Dimensionsanalyse 183
 Drallabscheider 641
 Drehströmungsentstauber 641
 Driftkegel 475
 Driftring 475
 Druckschwankungen bei Gas-Flüssigkeits-Strö-
 mungen in Rohren 760
 Druckverlauf in inhomogenen Wirbelschichten
 477
 Druckverlust bei Gas-Flüssigkeits-Strömung in
 Rohren
 nach CHAWLA 755
 nach KRIEGEL 753
 nach LOCKHART und MARTINELLI 749
 Druckverlust beim Durchströmen von
 trockenen Siebböden 817
 Sprudelschichten auf Siebböden 823
 Zylinder- und Flachglocken 835
 Sprudelschichten auf Glockenböden 838
 Glockenböden 833
 Ventilböden 841
 Blasensäulen 860
 Wirbelschichten 463
 Wirbelschichtstufen 486
 Druckverlustdiagramm für fluidodynamischen
 Transport 521
 Druckverlust im
 Gaszyklon 649
 Hydrozyklon 663
 Druckverlust in
 berieselten Füllkörperschichten 776, 794
 trockenen Füllkörperschichten 425, 429,
 433, 434, 437, 441

- Druckwiderstand 36
 Durchmischung in Wirbelschichten 472
 Durchströmung von Rohrbündeln
 Kreuzgitter 119
 Parallelgitter 112
- Einflußgrößen 183
 Einlaufstrecke
 in ebenen Kanälen 90
 in Rohren
 laminare Strömung 57, 145
 turbulente Strömung 57
 elektrisches Feld 240, 247
 Entstaubungsgrad 635
 Definition 636
 Fraktionsentstaubungsgrad 638
 Gesamtentstaubungsgrad 637
 für Drallabscheider 640
 für Drehströmungsentstauber 640
 für Venturiwäscher 640
 für Zyklonabscheider 640
 exzentrische Kernrohranordnung 82
- Fadenablösung 321
 Filmdicke
 auf rotierenden Scheiben 324
 in rotierenden Hohlzylindern 321
 von Rieselfilmen 680, 688
 Filterkuchendicke 617
 Filtertheorie 612
 Filtrat 608
 Filtratgeschwindigkeit 614, 616
 Filtration bei konstantem
 Druck 614
 Volumstrom 614
 Fließbewegung von Kornmassen 587
 Bodendruck 596
 Gewölbebildung 590
 in Bunkern 587
 in geneigten Rohren 602
 Kohäsionskraft 596
 Primärbewegung 593
 Sekundärbewegung 593
 Fließkurve 132
 Flüssigkeiten
 BINGHAM 138
 dilatante 131
 Newtonsche 18
 nicht-Newtonsche 127
 OSTWALD 129
 PRANDTL-EYRING 136
 rheopektische 129
 strukturviskose 131
 thixotrope 129
 viskoelastische 129
 viskose 127
- Flüssigkeitsfilme
 Rieselfilme 674
 Haftfilme 704
 Flüssigkeitsindex 130
 Flüssigkeitsstrahlen 336
 Flüssigkeitstemperatur, mittlere 55
 Flüssigkeitstrombe 893
 Fluidat 397
 Fluidatbett 397, 459
 fluiddynamischer Feststofftransport
 Ablagerungsgeschwindigkeit 545, 546
 Druckverlustdiagramm 521
 Feststoffablagerung 543
 Geschwindigkeitsverhältnis 528
 hydraulischer 507, 533
 in Rohrkrümmern 552
 in senkrechten Rohren 549
 in Verzweigungen 554
 in waagerechten Rohren 522
 Konzentrationsprofile 547
 Massenstromverhältnis 509
 Minimumgeschwindigkeit 521, 542
 mittlere Fluidgeschwindigkeit 523
 Modellvorstellung vom Transport 525
 pneumatischer 507, 527
 Raumkonzentration 509, 511
 Transportkonzentration 509, 511
 Transportwiderstandszahl
 allgemeines Gesetz 526
 Definition 522
 für hydraulischen Transport 533
 für pneumatischen Transport 527
 Verteilung des Feststoffes im Fluidstrom 514
 Fraktionsentstaubungsgrad 638
 Froudezahl 278
 Füllkörper 399
 Bersattel 400
 Intaloxsattel 400
 Pallring 400
 Raschigring 400
 relatives Hohlvolumen von Raschigringen 401
 spezifische Oberfläche 401
 Füllkörperschicht, einphasig durchströmt
 Fehlerrechnung für Druckverlust 439
 Geschwindigkeitsverteilung 421
 Gleichkornschicht 408
 hydraulischer Durchmesser 417
 Mehrkornschicht 413
 mittlerer Lückengrad 408, 411, 413
 örtlicher Lückengrad 407, 408
 Widerstandsgesetze
 theoretisches 425
 empirische 429, 433, 434, 437, 441,
 446, 452

Füllkörperschicht, zweiphasig durchströmt
 Belastungsgrenzen 782
 Druckverlust 776, 794
 Flüssigkeitsfüllzahl 772
 Flüssigkeitsinhalt 770
 Flüssigkeitsverteilung 775
 Flutgrenze 777
 Gegenstrom 769
 Gleichstrom 791
 Mindestflüssigkeitsbelastung 789
 Modellvorstellung 767
 Phasengrenzfläche 790
 Staugrenze 777, 786

Galileizahl 286

Gas-Film-Strömung in Rohren
 Druckverlust im Gegenstrombereich 739
 Gegenstrom 718
 Geschwindigkeitsprofile im
 Flüssigkeitsfilm 724
 Gasstrom 729
 Gleichstrom
 aufwärts 718
 abwärts 718
 mittlere Filmdicke 727
 mittlere Geschwindigkeit des
 Flüssigkeitsfilms 725
 Gasstromes 731
 Reynolds-Zahl der Gasströmung 731
 Staugrenze 746
 Widerstandsgesetze,
 empirisches 743
 theoretische,
 allgemeines 733
 spezielle 738

Gas-Flüssigkeits-Strömungen
 in Blasensäulen 848
 in Füllkörperschichten 766
 auf Kolonnenböden 800
 in Rohren 713

Gas-Flüssigkeits-Strömung in Blasensäulen
 Anströmzone 853
 Austauschzelle 849
 Druckverlust 860
 Flüssigkeitsumlauf 849
 Gleichgewichtszone 854
 Höhe der Blasenschicht 855
 Längsaustausch 849
 Phasengrenzfläche 859
 Queraustausch 849
 Schaum 862
 volumetrischer Gasgehalt 852
 Zerfallszone der Blasen 855

Gas-Flüssigkeits-Strömung in Füllkörper-
 schichten
 Belastungsgrenzen 782
 Druckverlust 776, 794
 Flüssigkeitsfüllzahl 772
 Flüssigkeitsinhalt 770
 Flüssigkeitsverteilung 775
 Flutgrenze 777
 Gegenstrom 769
 Gleichstrom 791
 Mindestflüssigkeitsbelastung 789
 Modellvorstellung 767
 Phasengrenzfläche 790
 Staugrenze 777, 786

Gas-Flüssigkeits-Strömung auf Kolonnen-
 böden
 Druckverlustberechnung
 für Glockenböden nach
 DAVIES 840
 KUTZER 835
 für Ventilböden nach
 HOPPE 844
 KUTZER 842

Gas-Flüssigkeits-Strömung in Rohren 713
 Berechnung des Druckverlustes nach
 CHAWLA 755
 KRIEDEL 753
 LOCKHART und MARTINELLI 749
 Druckschwankungen 760
 Druckverlust in
 Rohrkrümmern 757
 senkrechten Rohren 756
 Flüssigkeits- und Gasanteil 759
 Phasenverteilungszustände 715, 720, 721

Gaskonstante 60

Gaszyklon, Berechnung
 nach BARTH und MUSCHELKNAUTZ 643
 mittels Kennfeldern 649

Gesamtentstaubungsgrad 637

Gewölbebildung 590

Gleitströmung 64
 maximale Geschwindigkeit 65
 mittlere Geschwindigkeit 66
 örtliche Geschwindigkeit 65
 Widerstandsgesetz 66

Grenzbeladung 647

Grenzgeschwindigkeiten in Wirbelschichten
 obere 462, 466
 untere 462, 463

Grenzkorndurchmesser 644

Grenzschichttemperatur, mittlere 55

Hadamard-Rybczinski-Korrektur 299

Häufigkeitsverteilungskurve 637

Haftflüssigkeit an bewegten
 Platten 704
 Zylindern 707

Hagen-Poiseuillesche Gleichung 20

Hedströmzahl 156

- Hohlvolumen von Raschigringen 401
 homogene Wirbelschicht 462, 472
 hydraulisch
 glattes Rohr 37, 40
 rauhes Rohr 40
 hydraulischer Transport 507, 533, 534, 547
 hydrodynamische Einlaufstrecke in
 Rohren 57
 ebenen Kanälen 90
 Hydrozyklon
 Aufbau 657
 Druckverlust 663
 Einlauf 657
 Oberlauf 657
 Unterlauf 657
 Trennwirkung 666
 Trennzahl 667
 Wirkungsgrad 663
- Impulsaustausch in Suspensionen 375
 Impulsstromdichte 18
 Instabilität
 laminarer Strömungen 166, 683
 von Wirbelschichten 479
 instationäre Bewegung von Partikeln 221
 instationärer Sinkweg 223
 Intaloxsattel 400
 isotherme Strömung 53
 isotrope Turbulenz 23
- Kapseltransport 583
 Kennzahlen
 Archimedeszahl 463
 Bedeutung 181
 Flüssigkeitskennzahl 683
 Froudezahl 278
 Galileizahl 286
 Hedströmzahl 156
 Herleitung
 mittels Dimensionsanalyse 183
 aus Differentialgleichungen 191
 Knudsenzahl 62
 Machzahl 67
 Reynoldszahl 22
 Strouhalzahl 285
 Weberzahl 278
 kinetische Gastheorie 62
 Klärzone 625, 627
 Koeffizientenmatrix 186
 Kohäsionskraft 596
- Kolonnenböden
 Ablaufwehr 811
 einflutig 813
 einflutig mit Umlenkung 813
 Glockenböden 805, 826
 Siebböden 810
 Tunnelböden 808
 Überlaufbecher 811
 Ventilböden 809, 841
 Zulaufwehr 811
 zweiflutig 813
 zweiflutig mit Zwischenwehr 813
 Kompressibilität von Filterkuchen 622
 Kontinuumsströmung 64
 Konzentration beim Feststofftransport
 Profile 547
 Raumkonzentration 509, 511
 Transportkonzentration 509, 511
 Korngrößenanalyse 629
 Kreisscheibe 212
 Kreiszyylinder, quer angeströmt
 Widerstand, Gesetz von
 LAMB 208
 TOMOTIKA und AOI 207
 Kreuzgitter 118
 kritische Reynoldszahl 166
 Krümmerströmung 52
 Krümmerverluste 50
 Krümmerwinkel 51
 Krümmungsverhältnis 50
 Kugeln
 Ablösung 197
 Bewegung in begrenzter Umgebung 201
 Cunninghamsche Korrektur 202
 kritische Reynoldszahl 200
 Einfluß des Turbulenzgrades 202
 Pendelbewegung 201
 stationärer Ringwirbel 200
 Umströmung 198
 Widerstand, Gesetz von
 GOLDSTEIN 199
 KASKAS 200
 Oseen 198
 STOKES 198
 Kugelpaare, Widerstand 353, 358
- Lamellenablösung 321
 Lamellenzerfall 318
 Längsstrom durch Rohrbündel 123
 Längsteilungsverhältnis 112
 Leistungsbedarf von Rührern
 Ähnlichkeitsgesetz 878
 Axialrührer 880
 empirische Gesetze 877
 Radialrührer 883
 Tangentialrührer 885
 theoretische Gesetze 895
 Lochplatten 819
 Lockerungsgeschwindigkeit 460

- Lockerungspunkt 461
 Loschmidt-Zahl 60
 Lückengrad von
 Gleichkornschichten 408
 Mehrkornschichten 413
 Wirbelschichtstufe 491
- Machzahl 67
 Massenstromverhältnis 509
 mehrstufige Wirbelschichten 482
 Mindestenergie zur Tropfenbildung 308
 Minimumgeschwindigkeit 521, 542
 Mischen 934
 Mischungsweg-Hypothese 28
 mittlere Flüssigkeitstemperatur 55
 mittlere freie Weglänge 60
 mittlere Grenzschichttemperatur 55
 mittlere Verweilzeit 492
 Moleküldurchmesser 60
 Molekulargeschwindigkeit 60
 Molmasse 60
 Muldenverschleiß 563
- Newtonscher Schubspannungsansatz 20
- Oberflächenfilter 606
 Arbeitsweise 608
 Aufbau 608
 Filterkuchen 608
 Filterkuchendicke 617
 Filtertheorie 612
 Filtratgeschwindigkeit 614, 616
 Filtration bei konstantem Druck 614
 Filtration bei konstantem Volumstrom 614
 Grundgleichung der Filtration 614
 Kompressibilität des Filterkuchens 622
 Ostwald-Flüssigkeit 129, 139, 159, 164
- Pallring 400
 Parallelgitter 111
 Partikelbewegung
 auf gerader Bahn 213
 auf gekrümmter Bahn 225
 im senkrechten Strömungsfeld 232
 im waagerechten Strömungsfeld 239
 im gekrümmten Strömungsfeld 250
 im elektrischen Feld 240, 247
 im Stokesschen Bereich 231
 in Rohrkrümmern 256
 instationäre Bewegung 221
 instationärer Sinkweg 223
 Schwebegeschwindigkeit 219
 Sinkgeschwindigkeit 219
 Steiggeschwindigkeit 219
- Partikelschwärme 353
 Suspensionen hoher Konzentration 369
 Suspensionen niedriger Konzentration 364
 Gleichkornsuspension 366
 Zweikornsuspension 369
 Phasengrenzfläche in
 berieselten Füllkörperschichten 790
 Blasensäulen 859
 Phasenverteilungszustände bei der
 Gas-Flüssigkeits-Strömung in Rohren 715,
 720, 721
 Blasenströmung 716
 Filmströmung 716
 Kolbenströmung 716
 Nebelströmung 716
 Pfropfenströmung 716
 Schichtenströmung 716
 Schwallströmung 716
 Wellenströmung 716
 pneumatischer Transport 507, 526, 527, 528
 Potenzansatz von OSTWALD 129
 Prallverschleiß 556, 567
 Ähnlichkeitsgesetz 568
 Einfluß des *E*-Moduls 570
 Näherungsgesetz 572
 Prandtl-Eyring-Flüssigkeit 136, 147, 161
 Prandtlsches Widerstandsgesetz 33
- Querstrom durch Rohrbündel
 Kreuzgitter 118
 Parallelgitter 111
 Querteilungsverhältnis 112
- Raschigring 400
 Rauigkeit
 geriffelte 45
 rippenförmige 84
 sandartige 36
 wellenförmige 45
 Rauigkeitsströmung 38
 Rauigkeitsverhältnis 36
 Rauhtiefe 42
 Raumkonzentration 509, 511
 Reflexion von Molekülen
 diffuse 63
 spiegelnde 63
 Relativgeschwindigkeit 213, 217
 Reynoldszahl 22, 144, 213, 731
 Rieselfilme mit glatter Oberfläche
 Geschwindigkeitsprofil 675
 maximale Geschwindigkeit 676, 678
 mittlere Geschwindigkeit 677, 678
 mittlere Filmdicke 680
 Schubspannung 678

- Rieselfilme mit welliger Oberfläche
 Entstehung der Wellen 683
 Flüssigkeitskennzahl 683
 Geschwindigkeitsprofil 693
 maximale Filmdicke 689
 minimale Filmdicke 688
 Oberflächengeschwindigkeit 692
 Stabilitätszahl 683
 Struktur der Oberfläche 685
 Wellenfrequenzen 691
- Ringkanäle
 exzentrische Rohranordnung 82
 glatte 74
 konzentrische Rohranordnung 74
 raue 83
- Ringkanalströmung
 laminar 74
 Newtonsche Fluide 74
 nicht-Newtonsche Fluide 164
 turbulent 80
- Rohranordnung im Bündel
 fluchtend 111, 114
 versetzt 111, 114
- Rohrbündel
 Kreuzgitter 118
 Parallelgitter 111
- Rohre
 glatte 18, 30, 31, 33
 künstlich rauhe 42
 sandrauhe 36
 technisch rauhe 40
- Rohrkrümmer 48, 552, 560
- Rohrströmung
 Bingham-Flüssigkeiten 154
 laminar 18
 Newtonsche Fluide 18
 nicht-Newtonsche Fluide 139, 147, 154
 Ostwald-Flüssigkeiten 139
 Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten 147
 turbulent 24
- Rührerformen
 Axialrührer 870
 Radialrührer 871
 Tangentialrührer 872
- Rührerleistung
 Newtonsche Fluide 895, 907, 910, 917, 920
 nicht-Newtonsche Fluide 899
- Rührertheorie 887
 Eintauchtiefe 891
 Flüssigkeitstrombe 893
 Geschwindigkeitsfeld 888
 gleichwertiger Rührerdurchmesser 915
 Leistungsbedarf 895
 Scheibenrührer 906
 Schubspannungsfeld 890
 Zylinderrührer 887
- Sandrauigkeit 36, 41
 Schaumschichten 862
 Scheibenrührer 906
 Schubspannungsgeschwindigkeit 23
 Schwankungsgeschwindigkeit 22
 Schwarmgesetze 353
 Schwebegeschwindigkeit 219
 Schwerkraftabscheidung 624
 Sedimentation 624
 Sedimentationsdiagramm 627
 Sedimentationszeit 626
 Sedimentschicht 625
 Siebboden 810
 Druckverlust beim Durchströmen
 des trockenen Siebbodens 817
 der Sprudelschicht 823
 Erweiterungsverlust 817
 Flächenverhältnis 811, 818
 Gesamtdruckverlust 814
 hydrostatischer Druck 821, 822
 Kontraktionsverlust 817
 Kontraktionszahl 817, 819
 Lochplatten 819
 maximal zulässige Gasgeschwindigkeit 822
 Reibungsverlust 817
 Strahlvermischung 817
 Widerstandsbeiwert der
 Lochplatte 821
 Sprudelschicht 823
 Aufbau 810
 Belastungsgrenze
 obere 825
 untere 824
- Sinkbewegung von
 Einzelpartikeln 216
 Gleichkornsuspensionen 388
 Partikelschwärmen 377
 Zweikornsuspensionen 369, 389
- Sinkgeschwindigkeit 219
 spezifische Oberfläche von Füllkörpern 401
- Stabilität der
 Rohrströmung 166, 168, 169, 170
 Kanalströmung 171, 172
 Wirbelschicht 479
- Stabilitätszahl 166
 stationäre Partikelbewegung 216
 stationärer Ringwirbel 200
- Staub 632
 Staubtechnik 631
 Staugrenze bei der Gas-Flüssigkeits-Strömung
 in
 Füllkörperschichten 777, 786
 Rohren 746
- Steiggeschwindigkeit 219
 Strahlgasen 279, 282
 Strahlschicht 501
 Strahlzerfall 311

- Strömung
ausgebildet 56
nicht ausgebildet 56
isotherm 53
nicht isotherm von
Flüssigkeiten 54
Gasen 55
Newtonsche Fluide 18, 74
nicht-Newtonsche Fluide 127
- Strömung durch Kanäle mit dreieckigem Querschnitt 100
Widerstandsgesetze
laminare Strömung 100
turbulente Strömung 101
- Strömung durch Kanäle mit elliptischem Querschnitt 92
mittlere Geschwindigkeit 93
örtliche Geschwindigkeit 93
örtliche Wandschubspannung 95
Widerstandsgesetze
laminare Strömung 93
turbulente Strömung 95
- Strömung durch Kanäle mit Rechteckquerschnitt 90
hydraulische Einlaufstrecke 90
Widerstandsgesetze 91
- Strömung durch Kanäle mit rhombischem Querschnitt 97
Geschwindigkeitsprofile 97, 98
mittlere Geschwindigkeit 97
Widerstandsgesetze
laminare Strömung 98
turbulente Strömung 100
- Strömung durch Kanäle mit ungewöhnlichem Querschnitt 102
Geschwindigkeitsfelder 103
Widerstandsgesetze
laminare Strömung 103
turbulente Strömung 104
- Strömung durch Ringkanäle 74
örtliche Geschwindigkeit 75
mittlere Geschwindigkeit 75
Geschwindigkeitsprofile 76
örtliche Schubspannung 76
Wandschubspannung 77
Widerstandsgesetze
glatte Ringkanäle 79, 80, 82
rauhe Ringkanäle 83, 86, 88
- Strömung durch Rohrbündel
Längsstrom durch Parallelgitter 123
Querstrom durch Kreuzgitter 118
Querstrom durch Parallelgitter 111
aus Kreisrohren 111
aus Ovalrohren 116, 117
- Strömung nicht-Newtonscher Flüssigkeiten 127
Bingham-Flüssigkeiten 138, 154, 163, 170, 172
dilatante Flüssigkeiten 131
Ostwald-Flüssigkeiten 129, 139, 159, 164, 168, 171
Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten 136, 147, 161, 169, 172
strukturviskose Flüssigkeiten 131
thixotrope Flüssigkeiten 129
viskoelastische Flüssigkeiten 129
viskose Flüssigkeiten 127
- Strömung von Flüssigkeitsfilmen an bewegten, senkrechten Platten 704
bewegten, senkrechten Zylindern 707
unbewegten, geneigten Wänden 695
unbewegten horizontalen Zylindern 700
unbewegten, senkrechten Wänden 676
unbewegten Kugeln 704
- Strouhalzahl 285
- Struktur von Füllkörperschichten 404
- Summendurchgangskurve 636
- Summenrückstandskurve 636
- Suspendieren fester Partikeln 937
- Suspensionselement 371
- technisch rauhe Rohre 40
- Theorie der Gas-Film-Strömung 722
- Theorie des Rührens 887
- thixotrope Flüssigkeiten 129
- Tomssches Phänomen 70
- Transport, fluiddynamischer, in
Rohrkrümmern 552
senkrechten Rohren 549
Verzweigungen 554
waagerechten Rohren 522
- Transportkonzentration 509, 511
- Transportwiderstandszahl
allgemeines Gesetz 526
Definition 522
spezielle Gesetze für
hydraulischen Transport 533
pneumatischen Transport 527
- Tropfenbildung
durch rotierende Hohlzylinder 320
durch rotierende Scheiben 323
Fadenablösung 321
Lamellenablösung 321
Tropfenablösung 321
durch Strahlzerfall 311
durch Zerstäuben 313
durch Zerwellen 312
- Tropfendurchmesser 317, 319, 322, 336, 337
maximaler 315
nach SAUTER 316
- Tropfenpulsationen 346
- Tropfenwiderstand 338, 340
- turbulente Austauschgröße 29
- Turbulenz 21

- Turbulenzballen 28
 Turbulenzgrad 23
- Umströmung von Kugeln 198
- Venturiwäscher 641
- Verschleiß in
 horizontalen Rohren 558
 Rohrkrümmern 560
 vertikalen Rohren 556
- Verschleißabschnitte 564
- Verschleißgeschwindigkeit 569, 572
- Verschleißmulde 563
- viskoelastische Flüssigkeiten 129
- viskose Flüssigkeiten 127
- Verweilzeit, mittlere 492
- Verweilzeitverteilung 496
- Widerstandsgesetze für Blasen
 Einfluß grenzflächenaktiver Stoffe 300
 Ellipsoidblasen 298
 formlose Blasen 298
 Hadamard-Rybczynski-Korrektur 299
 Kugelblasen 296
 Kugelblasen mit innerer Zirkulation 297
 Zylinderblasen 302
- Widerstandsgesetze für fluiddynamischen
 Transport
 allgemeines Gesetz 526
 hydraulischer Transport 533
 pneumatischer Transport 527
- Widerstandsgesetze für Füllkörperschichten
 Gleichkornschichten aus
 Granulaten 433
 Kugeln 425, 429
 Raschigringen 434
 anderen Füllkörpern 437
 Mehrkornschichten aus
 Granulaten 443
 Kugeln 441
 geordnet aufgebaute Schichten 452
- Widerstandsgesetze für Gas-Flüssigkeits-
 Strömungen in
 Blasensäulen 860
 Füllkörperschichten 776, 794
 Kolonnenböden
 Siebböden 821, 822, 823
 Glockenböden 830, 831, 835, 838
 Ventilböden 842, 844
 Rohren 733, 738, 743, 749, 753, 755
- Widerstandsgesetze für Kanäle, durchströmt
 von Newtonschen Medien
 Ringkanal 78, 80, 83, 86
 Rechteckkanal 91
 elliptischer Kanal 93, 95, 96
 rhombischer Kanal 98, 100
 dreieckiger Kanal 100, 101
 andere Kanäle 103, 104
- Widerstandsgesetz für Kreisscheiben 212
- Widerstandsgesetz für Kreiszyylinder
 von LAMB 208
 von TOMOTIKA und AOI 207
- Widerstandsgesetz für Kugeln
 bei stationärer Bewegung
 von GOLDSTEIN 199
 von KASKAS 200
 von OSEEN 198
 von STOKES 198
 bei instationärer Bewegung 225
- Widerstandsgesetz für Kugelpaare 353, 358
- Widerstandsgesetz für Lochplatten 821
- Widerstandsgesetze für Rohre, durchströmt
 von Newtonschen Fluiden
 glatte 30, 31, 33
 rauhe 36, 40, 42, 45
 mit Wirbeleinbauten 45
 gekrümmte 46, 48
 von BLASIUS 34
 von PRANDTL 33
- Widerstandsgesetz für Rohre, durchströmt
 von verdünnten Gasen 66
- Widerstandsgesetze für Rohrbündel
 Kreuzgitter, Querstrom 121
 Parallelgitter, Längsstrom 124
 Parallelgitter, Querstrom
 fluchtend 114, 116, 117
 versetzt 114
- Widerstandsgesetze für Rohre und Kanäle,
 durchströmt von nicht-Newtonschen Medien
 Bingham-Flüssigkeiten
 Rohre 157, 176
 Rechteckkanal 163, 164
 Ostwald-Flüssigkeiten
 Rechteckkanal 160
 Ringkanal 165
 Rohre 142, 175
 Prandtl-Eyring-Flüssigkeiten
 Rechteckkanal 161, 162
 Rohre 149, 177
- Widerstandsgesetze für Rührer 880, 885,
 895, 899, 907, 910, 917, 920
- Widerstandsgesetze für Tropfen 338, 340

Wirbelschicht 397, 459
Betriebsgeschwindigkeit 470, 471
Druckverlauf in inhomogener Schicht 477
Durchmischung 472
Grenzgeschwindigkeiten 462, 463, 466
Instabilität 479
Lockerungsgeschwindigkeit 460
mehrstufige Schichten 482
Widerstandsgesetz für eine Wirbelschichtstufe
486

Zerstäuber 313, 320, 323
Zerstäuberzahl 329
Zerstäubungsdiagramm 330
Zylinderblasen 302
Zylinderrührer 387
Zyklonabscheider 641

Wirbelschicht 397, 459
Betriebsgeschwindigkeit 470, 471
Druckverlauf in inhomogener Schicht 477
Durchmischung 472
Grenzgeschwindigkeiten 462, 463, 466
Instabilität 479
Lockerungsgeschwindigkeit 460
mehrstufige Schichten 482
Widerstandsgesetz für eine Wirbelschichtstufe
486

Zerstäuber 313, 320, 323
Zerstäuberzahl 329
Zerstäubungsdiagramm 330
Zylinderblasen 302
Zylinderrührer 387
Zyklonabscheider 641