
VDI Forschungsheft

Won-Hi Hong und Heinz Brauer

Stoffaustausch zwischen Gas und Flüssigkeit in Blasensäulen

Mit 52 Bildern und 5 Tabellen

Nr. 624/1984

Verein Deutscher Ingenieure

Hinweise für unsere Autoren

In der Zeitschrift „Forschung im Ingenieurwesen“ sowie in den „VDI-Forschungsheften“ werden ausschließlich Originalbeiträge über Forschungsarbeiten auf allen Gebieten des Ingenieurwesens veröffentlicht. Bitte reichen Sie die Manuskripte in doppelter Ausfertigung in englischer oder deutscher Sprache ein sowie den Titel und eine kurze Inhaltsangabe in deutsch und englisch. Für die Klischeeherstellung wird zusätzlich ein Satz einwandfreier Bildvorlagen benötigt, möglichst Original-Tuschezeichnungen im Format DIN A 4 oder

Hochglanzphotos. Auf vollständige Schriftumsangaben wird Wert gelegt. Anstelle eines Honorars erhalten die Autoren 25 Fortdrucke. Mit der Annahme eines Manuskriptes erwirbt der Verlag das alleinige Recht der Veröffentlichung bis zum Ablauf des nächsten, dem Abdruck des Manuskriptes folgenden vollen Kalenderjahres. Vor der Annahme begutachten die Arbeit unabhängig voneinander mehrere ehrenamtliche Referenten, die vom Redaktionsbeirat vorgeschlagen werden.

Information for our Authors

The journal „Forschung im Ingenieurwesen“ and the „VDI-Forschungshefte“ (Research Booklets) are devoted to the publication of research papers from all branches of engineering which have not been published elsewhere. Please submit two copies of your paper in English or German, giving the title and a short summary in English **and** German, to the VDI-Verlag GmbH, Redaktion Forschung, Postfach 1139, D-4000 Düsseldorf 1. In addition one set of clear illustrations is required for blockmaking purposes; if possi-

ble, originals in india ink of DIN A4 size, or glossy photographs. Full details of all references used are also required. Authors will receive 25 reprints of their article in lieu of a fee. With the acceptance of a paper the publishers shall acquire all rights of publication until the end of the calendar year following the year in which the article was published. Prior to its acceptance, the paper will be judged independently by several honorary referees proposed by the Editorial Advisory Board.

Impressum

Herausgeber

Verein Deutscher Ingenieure

Verlag

VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf

Redaktionsbeirat

Prof. Dr. Drs. h. c. John H. Argyris, Stuttgart
Prof. Dr.-Ing. H.D. Baehr, Hannover
Prof. Dr.-Ing. K. Bammert, Hannover
Prof. Dr.-Ing. H. Brauer, Berlin

Schriftleitung

Dipl.-Ing. H. Brüggemann (verantwortlich)

Briefe und Manuskripte nur an Verein Deutscher Ingenieure, Schriftleitung „Forschung im Ingenieurwesen“ (nicht an einzelne Mitglieder der Schriftleitung)

Vertrieb

VDI-Verlag GmbH

Forschung im Ingenieurwesen und VDI-Forschungshefte erscheinen 6mal im Jahr

Anschriften

4000 Düsseldorf 1, Graf-Recke-Straße 84, Postfach 1139
Telephon: 621 41, Telex: 08 586 525, Telegramme: Ingenieurverlag Düsseldorf.
Postscheckkonto Essen 1651 435

Jahresbezugspreis Forschung im Ingenieurwesen (6 Hefte)

In- und Ausland: 391,- DM; VDI-Mitglieder 351,90 DM.

Alle Preise zuzüglich Versandkosten ab Verlagsort.

Inland: DM 8,80
Ausland: DM 9,50

Luftpost auf Anfrage.

Einzelheftpreis: 65,20 DM; VDI-Mitglieder 58,70 DM.

Zuzüglich Versandkosten ab Verlagsort.

Jahresbezugspreis VDI-Forschungshefte (6 Hefte)

In- und Ausland: 567,- DM; VDI-Mitglieder 510,30 DM.

Alle Preise zuzüglich Versandkosten ab Verlagsort.

Inland: DM 8,80
Ausland: DM 9,50

Luftpost auf Anfrage.

Einzelheftpreis: 94,50 DM; VDI-Mitglieder 85,05 DM.

Zuzüglich Versandkosten ab Verlagsort.

Jahresbezugspreis Forschung im Ingenieurwesen und VDI-Forschungshefte (6 x 2 Hefte)

In- und Ausland: 862,- DM; VDI-Mitglieder 775,80 DM.

Alle Preise zuzüglich Versandkosten ab Verlagsort.

Inland: DM 17,60
Ausland: DM 19,-

Luftpost auf Anfrage.

Die Preise im Inland enthalten 7% Mehrwertsteuer.

Die in der Zeitschrift Forschung im Ingenieurwesen und in den VDI-Forschungsheften veröffentlichten Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Übersetzung, Nachdruck – auch von Abbildungen –, Vervielfältigungen auf photomechanischem oder ähnlichem Wege oder im Magnettonverfahren, Vortrag, Funk- und Fernsehensendung sowie Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen – auch auszugsweise – bleiben vorbehalten. Von einzelnen Beiträgen oder Teilen von ihnen dürfen nur einzelne Exemplare für den persönlichen oder sonstigen Gebrauch hergestellt werden. Jede im Bereich eines gewerblichen Unternehmens zulässig hergestellte oder benutzte Kopie dient gewerblichen Zwecken gem. § 54 (2) UrHG und verpflichtet zur Gebührenzahlung an die VG WORT, Abt. Wissenschaft, Goethestr. 49, 8000 München 2, von der die einzelnen Zahlungsmodalitäten zu erfragen sind. – Printed in Germany.

ISBN 3-18-850623-6

© VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1984
Satz: Univ.-Druckerei H. Stürtz AG
Würzburg
Druck: H. Fuck, Koblenz

VDI Forschungsheft

Won-Hi Hong und Heinz Brauer

Stoffaustausch zwischen Gas und Flüssigkeit in Blasensäulen

Mit 52 Bildern und 5 Tabellen

Nr. 624/1984

VDI-Verlag GmbH • 4 Düsseldorf I

Verlag des Vereins Deutscher Ingenieure

Inhalt

1. Einleitung	5
2. Bekannte Ergebnisse	5
2.1 Allgemeine Beschreibung von Blasenschichten und Blasensäulen	5
2.2 Bewegung und Umströmung von Blasen	6
2.2.1 Einzelblasen	6
2.2.2 Blasenschwärme	8
2.3 Experimentelle Ergebnisse zum Stofftransport an Blasen	10
2.3.1 Allgemeiner Überblick	10
2.3.2 Modelle zur Berechnung des Stofftransports	10
2.3.3 Empirische Stoffaustauschgleichungen für Blasenschichten	11
2.4 Theoretische Ergebnisse zum Stofftransport an Blasen	12
2.4.1 Stationärer Stofftransport	12
2.4.1.1 Stofftransport an Einzelblasen	12
2.4.1.2 Stofftransport an Blasenschwärmen	12
2.4.2 Instationärer Stofftransport	13
2.5 Schlußfolgerungen	13
3. Allgemeine Beschreibung des Problems	14
3.1 Deformationsturbulenz	14
3.2 Modellhafte Beschreibung des Stofftransports in Blasensäulen	15
4. Berechnung des Strömungsfeldes in der Umgebung einer formdynamischen Blase	16
4.1 Grundgleichungen für das Strömungsfeld	16
4.2 Einführung der Wirbeltransportgleichung	17
4.3 Entwicklung der Differenzgleichungen	19
4.4 Diskussion einiger Ergebnisse	22
5. Instationärer Stofftransport durch die Grenzfläche einer formdynamischen Blase	23
5.1 Berechnung des Konzentrationsfeldes	23
5.1.1 Stofftransportgleichung	23
5.1.2 Anfangs- und Randbedingungen	24
5.1.3 Mathematischer Ansatz zur Berechnung der turbulenten Massendichte	24
5.1.4 Mittlere Konzentration und Sherwood-Zahlen	25
5.2 Hinweise zur numerischen Lösung der Stofftransportgleichung	25
5.3 Darstellung und Diskussion einiger Ergebnisse	27
5.3.1 Örtliche und mittlere Konzentration	27
5.3.2 Örtliche und mittlere Sherwood-Zahl	29
5.4 Stoffaustausch bei teilweiser Durchmischung in Längsrichtung	32
6. Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit einigen experimentellen Ergebnissen der Stoffaustauschuntersuchungen	34
7. Zusammenfassung	35
8. Literatur	36

Summary

Mass transfer between gas and liquid in bubble column reactors

By *Won-Hi Hong* and *Heinz Brauer*

In this report a physical model is developed which considers unsteady state mass transfer through the interface of bubbles in liquids as well as accompanying deformation turbulence. The basis of this model is the hypothesis of deformation turbulence developed by *H. Brauer*. The mathematical functions for turbulent terms were introduced into the differential equations for the momentum and mass transfer and solved numerically. The studies show that values of the Sherwood number are strongly dependent on the Fourier number. For very short and very long time intervals mass transfer is determined by molecular transport. Fluid motion is especially important for mass transfer at intermediate values of the Fourier number.

For larger values of the Reynolds number and the Schmidt number, there is a range in which the Sherwood number can be regarded as approximately independent of the Fourier number. In this region the convective proportion of mass transport is substantially larger than the time-dependent molecular contribution. The investigation further gives an indication when it would be appropriate to restart the process through the formation of new bubbles. In particular the comparison of theoretical values with experimental results shows that the model of deformation turbulence describes adequately the unsteady mass transfer process not only on single bubbles but also on bubble swarms.

1. Einleitung*)

In einer großen Zahl von verfahrenstechnischen Apparaten für Gas/Flüssigkeit-Prozesse wird zur Erzeugung der Phasengrenzfläche das Gas in Form von Blasen in der Flüssigkeit verteilt. Durch die disperse Verteilung der Blasen wird eine Vergrößerung der Phasengrenzfläche je Volumeneinheit und damit eine Erhöhung des Stoffstroms zwischen beiden Fluiden erzielt. Als Beispiele sind die Durchführung chemischer oder biochemischer Reaktionen zu nennen sowie die Trennung von Stoffgemischen durch Rektifikation, Absorption und die Abwasserreinigung. Der entstehende Blasenschwarm bewegt sich z.B. in Blasenkolonnen entweder in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung wie die Flüssigkeit.

Die Auslegung von Blasenkolonnen beliebiger Größe erfordert genaue Kenntnisse über die Bewegung der Blasenschwärme und über die Stoffströme, die durch die Blasenoberfläche hindurchtreten. Die damit verbundenen physikalischen Vorgänge des Impuls- und Stofftransports im Blasenschwarm sind außerordentlich kompliziert, da die Phasengrenzfläche sich ständig sowohl bezüglich der Größe als auch der Form verändert und die aufsteigenden Blasen starke Zirkulationsströme in der Flüssigkeit hervorrufen. Die Bewegung einer in einem Schwarm befindlichen Blase wird von benachbarten Blasen gestört. Die translatorischen Bewegungen der Blase sind sehr ungeordnet und zeichnen sich durch häufige Richtungsänderungen sowie durch rasch wechselnde Beschleunigungen und Verzögerungen aus. Den translatorischen Bewegungen ist weiterhin eine Rotation überlagert, deren Richtung sich ebenfalls ändern kann. Werden die Vorgänge in der Umgebung einer Blase durch die Anwesenheit benachbarter Blasen nicht oder nur unwesentlich gestört, gelten die Gesetze für Einzelblasen.

Die Blasen haben nur im Bereich sehr kleiner Werte für den Durchmesser Kugelform. In den meisten technischen

Anwendungsfällen verändern die Blasen fortlaufend ihre Form. Die Formänderung der Blasen hat einen großen Einfluß auf den Impuls- und Stofftransport.

Jede Blase ist als geschlossenes System zu betrachten, das keinen Massendurchfluß aufweist. Aus diesem Grund ist der Stofftransport instationär, obwohl sich die Blasen stationär in einer Flüssigkeit bewegen. Der Stofftransport kommt zum Erliegen, wenn sich innerhalb der Blase die zur Umgebung gehörige Gleichgewichtskonzentration eingestellt hat.

Für eine Bearbeitung des Stofftransports in Blasenkolonnen hat man sich bisher auf Teilprobleme beschränkt, die als Grenzfälle des Gesamtproblems angesehen werden können. Zur Berechnung des Stofftransports zwischen einer Flüssigkeit und einem darin frei aufsteigenden Blasenschwarm wurden bislang zwei die wirklichen Verhältnisse sehr stark vereinfachende Annahmen getroffen. Diese Annahmen bestehen darin, daß man das Verhalten der Blasenschwärme durch das Verhalten von Einzelblasen annähert. Ferner wird die instationäre Bewegung ebenso wie der instationäre Stoffaustausch durch die entsprechenden stationären Vorgänge ersetzt.

In dieser Arbeit wird eine mathematische Erfassung der wirklichen Verhältnisse angestrebt, also die Berechnung des instationären Stofftransports an formdynamischen Einzelblasen. Mit Hilfe eines erprobten Modells für die formveränderliche Blase werden die Strömungsfelder aus den Bewegungsgleichungen numerisch berechnet und die Geschwindigkeitsfelder werden zur Berechnung des Konzentrationsfeldes durch numerische Integration der Stofftransportgleichung für die formdynamische Blase verwendet. Aus den berechneten Konzentrationsfeldern erhält man bei jeder gegebenen Zeit die den tatsächlichen Stoffübergang kennzeichnenden Sherwood-Zahlen.

Bei den durchzuführenden Rechnungen soll der auftretende Stoffstrom klein sein, so daß die freie Konvektion vernachlässigbar wird. Die Bewegungsgleichungen können damit getrennt vom Stoffaustausch behandelt werden. Außerdem soll die Grenzflächenspannung keine lokalen Unterschiede aufweisen, daher tritt keine Grenzflächenturbulenz auf. Weitere Voraussetzungen sind konstante Stoffwerte, die Gültigkeit des Newtonschen Schubspannungsansatzes und des Fickschen Ansatzes für den molekularen Stofftransport.

*) Überarbeitete Fassung der unter dem gleichen Titel vom Fachbereich 10 – Verfahrenstechnik – der Technischen Universität Berlin genehmigten Dissertation des erstgenannten Verfassers, 1983 (D83).

Dieser Verfasser dankt Herrn Professor Dr. rer. nat. K.-H. Reichert und Herrn Professor Dr.-Ing. I. Rechenberg für die Mitwirkung am Promotionsverfahren sowie für die wertvollen Hinweise bei der Durchsicht des Manuskripts. Die Untersuchung wurde im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsvorhabens (Br 260/55-1) durchgeführt. Für die finanzielle Unterstützung sei auch an dieser Stelle gedankt.

2. Bekannte Ergebnisse

2.1 Allgemeine Beschreibung von Blasenschichten und Blasensäulen

Die Entstehung und Bewegung von Tropfen und Blasen ist von H. Brauer [1] in zusammenfassender Weise beschrieben worden. Die Blasensäule besteht im wesentlichen aus einem senkrecht angeordneten zylindrischen Gefäß, in dem Gasblasen durch eine Flüssigkeit aufsteigen. Das Gas wird über eine Verteilervorrichtung in Form von Blasen oder auch dünnen Gasstrahlen meistens von unten in die Säule eingeleitet. Als Gasverteiler dienen poröse Sinterplatten aus Metall, Keramik oder Glas bzw. Platten mit Viellochdüsen oder Löchern definierten Querschnitts. Der Vorteil der Lochplatten besteht darin, daß man bei nicht zu hohen Gasbelastungen den Durchmesser der sich am Lochrand bildenden Blasen vorausberechnen kann.

Während die Gasphase die Säule stets durchströmt, wird die Flüssigkeit entweder kontinuierlich oder diskontinuierlich durch die Säule gefördert, und zwar im Gleichstrom oder im Gegenstrom zur Gasphase.

Eine Blasensäule kann im allgemeinen in drei übereinanderliegende Zonen unterteilt werden, die sich nicht nur hinsichtlich ihres Strömungsverhaltens und des örtlichen Gasgehalts, sondern auch in der Intensität der Austauschvorgänge voneinander unterscheiden. Im unteren Teil der Säule befindet sich die für den Stoff- und Wärmeaustausch besonders wirksame Anströmzone. Der Mittelabschnitt bildet die Gleichgewichtszone, die meist den längsten Teil einer Blasensäule darstellt. Die Gleichgewichtszone wird von der Zerfallszone abgeschlossen. Bei geringen Gasbelastungen kann die Anströmzone ohne Gleichgewichtszone unmittelbar in die Zerfallszone übergehen [2].

Aufgrund der Beweglichkeit der Phasengrenzfläche zwischen den Blasen und der umgebenden Flüssigkeit können die Blasen sowohl während der Entstehung als auch während der Bewegung in der Flüssigkeit fortlaufend ihre Form ändern. Die Formänderung kann so weit gehen, daß sie zu einer Zerteilung in mehrere kleine Blasen oder umgekehrt zum Zusammenwachsen führt. Koaleszenz und Zerfall der Blasen hängen vor allem vom Volumenstrom und von den Stoffdaten ab.

Mit dem Volumenstrom des Gases ändert sich der Blasen-durchmesser und auch die Frequenz der Blasenbildung. Bei der Blasenbildung unterscheidet man den Bereich des Blasengasens, den Übergangsbereich und den Bereich des Strahlgasens. Im Bereich des Blasengasens bilden sich stets einzelne Blasen mit konstantem Durchmesser. Alle Blasen haben daher auch die gleiche Aufstiegs-geschwindigkeit. Der Aufstieg erfolgt in geordneter Form. Die Folge ist eine verhältnismäßig geringe Verwirbelung und Durchmischung der Flüssigkeit längs und quer zur Aufstiegsrichtung der Blasen. Im Gegensatz dazu ist die Verwirbelung und Durchmischung der Flüssigkeit im Bereich des Strahlgasens sehr groß; denn die hier auftretenden Blasenschwärme haben aufgrund der unterschiedlichen Durchmesser auch unterschiedliche Aufstiegs-geschwindigkeiten. Durch unregelmäßige Verteilung der Blasen können bei Blasenschwärmen mit unterschiedlichem Durchmesser sehr leicht örtliche Rückströmungen auftreten.

In der Literatur [3;4] wird der zuerst erwähnte Strömungszustand auch „homogener“ oder „quasi laminarer“, der zweite „heterogener“ oder „turbulenter“ Strömungszustand genannt.

Um eine Blasensäule berechnen zu können, muß zunächst bekannt sein, unter welchen Bedingungen sich die Blasenströmung als spezieller Phasenverteilungszustand einstellt. Die gleichmäßige und störungsfreie Strömung durch die Säule setzt eine gleichmäßige Verteilung beider Phasen in der Säule voraus. Die wichtigsten strömungstechnischen Größen zur Dimensionierung von Blasensäulen sind der volumetrische Gasgehalt bzw. die Höhe der Blasenschicht, die Phasengrenzfläche der Blasenschicht und der Druckverlust. Diese Größen wurden von *H. Brauer* [1] ausführlich erläutert.

2.2 Bewegung und Umströmung von Blasen

Für das Verständnis der Impuls-, Stoff- und Wärmetransportprozesse zwischen Flüssigkeiten und Gasblasen sind detaillierte Kenntnisse der Bewegung von Blasen in Flüssigkeiten sehr wichtig. Bei sehr niedrigem Volumenstrom sind die Gas- und Flüssigkeitgeschwindigkeiten klein, so daß die gleichmäßige Phasenverteilung fast immer gewährleistet ist. Außerdem ist die gegenseitige Beeinflussung der Blasen gering, so daß die Gesetze für Einzelblasen gelten.

2.2.1 Einzelblasen

Der Widerstand von Blasen ist eine Funktion ihrer Aufstiegs-geschwindigkeit und hängt in starkem Maße von der Form der Blase ab. Im Verlauf instationärer Bewegungsabschnitte ändert sich die Form der Blase fortlaufend; während der stationären Bewegungsphase klingt die Formänderung bei kleinen Blasen jedoch weitgehend ab.

Bei dem stationären Aufstieg kann eine Blase mit zunehmender Größe nacheinander drei verschiedene Formen annehmen, wenn die Bewegung der Blasen durch benachbarte Blasen und durch Gefäßwände nicht gestört wird [5]. Die

Art des Gases übt keinen merklichen Einfluß auf das Verhalten der Blase aus, solange Dichte und Viskosität des Gases gegenüber denen der Flüssigkeit vernachlässigbar sind [6].

Sehr kleine Blasen haben Kugelform, die durch die dominierende Wirkung der Oberflächenspannungskraft bestimmt ist. Wegen der Beweglichkeit der Phasengrenzfläche treten im Blaseninnern Zirkulationsströmungen auf. Die Aufstiegs-geschwindigkeit der Blase ist wegen der inneren Zirkulation wesentlich größer als die von Partikeln mit starrer Oberfläche. Die Blasenoberfläche kann jedoch durch Anreicherung von oberflächenaktiven Substanzen „erstarren“, so daß innerhalb der Blase keine Zirkulationsströmung mehr auftritt.

Bei weiterem Anwachsen der Blase wird die Form zunächst periodisch und schließlich aperiodisch deformiert. Aus der Kugelform wird ein abgeflachtes Rotationsellipsoid. Diese Form stellt einen Übergang zwischen den Kugelblasen und den bei weiterer Volumenvergrößerung auftretenden formlosen Blasen dar. Die Blasen sind nicht mehr formbeständig, sondern formdynamisch.

Für kleine Werte der Reynolds-Zahl haben *J. Hadamard* [7] und *W. Rybczynski* [8] unabhängig voneinander Rechnungen durchgeführt, in denen die Trägheitsglieder der stationären Bewegungsgleichung vernachlässigt wurden. Dabei wurde die Abwesenheit der grenzflächenaktiven Stoffe angenommen, so daß die Grenzflächenspannung konstant bleibt und eine ideale Beweglichkeit der Phasengrenzfläche berücksichtigt wird. Die Hadamard-Rybczynski-Korrektur für das Stokessche Gesetz und ihre Diskussion sind in dem Buch von *H. Brauer* [1] zu finden, und ihre Herleitung ist in den Büchern von *V.G. Levich* [9] und *G.K. Batchelor* [10] wiedergegeben. Nach dieser Korrektur kann eine Blase im äußersten Fall 1,5mal schneller in einer Flüssigkeit aufsteigen als eine starre Kugel von gleicher Dichte. Jedoch wurde bei den experimentellen Untersuchungen häufig beobachtet, daß sehr kleine Blasen dem Stockesschen Gesetz folgen und keine innere Zirkulation auftritt [11]. Die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche macht sich den Messungen zufolge sehr plötzlich bemerkbar und führt dann zu einer sprungartigen Erniedrigung des Widerstandes [9; 12]. Die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment wurde von *V.G. Levich* [9] mit der Wirkung grenzflächenaktiver Substanzen erklärt.

Die von *Hadamard* und *Rybczynski* durchgeführten Rechnungen sind mit den gleichen Schwächen behaftet wie die von *Stokes*. In allen Fällen sind die Trägheitsglieder in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt worden.

Für den Bereich großer Reynolds-Zahlen haben *V.G. Levich* [9], *B.T. Chao* [13] und *D.W. Moore* [14] Grenzschichtrechnungen durchgeführt. Dabei wurde angenommen, daß sich um eine Kugelblase herum eine Grenzschichtströmung ausbildet und der Geschwindigkeitsgradient in der Phasenoberfläche verschwindet. Diese Theorie hat *J.F. Harper* [15] ausführlich diskutiert und auf einige Schwächen hingewiesen.

Die Berechnung des Strömungsfeldes um eine Kugelblase und des Widerstandes unter Berücksichtigung einer beweglichen Phasengrenzfläche erfordert die Lösung der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen, in denen die Reibungs- und Trägheitsglieder enthalten sind. Bei der Galerkin-Methode ist die Wahl des Polynoms für die Stromfunktion entscheidend. Das Polynom soll so gewählt werden, daß es alle Randbedingungen und die integrale Form der Navier-Stokesschen Gleichung erfüllt. Das daraus berechnete Gesetz beschreibt das Wirbelgebiet und die Druckverteilung an der Blasenoberfläche ungenügend. Obwohl die Galerkin-Methode analytische Gleichungen liefert, ist die numerische Lösung der vollständigen Navier-Stokesschen Bewegungs-

te für die Relativgeschwindigkeit beim Blasenschwarm als beim Schwarm fester Partikeln. Dieser Unterschied ist vor allem durch die Deformierbarkeit der Blase und die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche erklärt [56]. Bei hohem Gasgehalt kann leicht eine Störung in der Strömung auftreten, die zu einer ungleichmäßigen Verteilung der Blasen führt. Die Störung kann durch Fluten, Zirkulationsströmung der Flüssigkeit sowie Vorhandensein der großen Blasen verursacht werden [56].

Die durch eine unregelmäßige Verteilung der Blasen entstehende Zirkulationsströmung der Flüssigkeit hat einen merklichen Einfluß auf den Gasgehalt, der in der Mitte der Säule größere Werte als in Wandnähe aufweist [58]. Diese Sekundärströmung in der Säule wird in der englischen Literatur als "Gulf stream" bezeichnet und erhöht die Relativgeschwindigkeit der Blasen in der Säulenmitte. Diese Erhöhung der Relativgeschwindigkeit kann durch die nachlaufende Wirbelströmung der vorangegangenen Blase wieder vermindert werden [59; 60]. Eine vollständige Klärung des Problems liegt noch nicht vor. Jedoch wird die Blasensäule in der Praxis so betrieben, daß der Gasgehalt unterhalb von 30% liegt.

Um das Schwarmgesetz anwenden zu können, sind genaue Kenntnisse über den sich in der Säule einstellenden Gasgehalt und über die Aufstiegs geschwindigkeit der Einzelblase bei gegebenen physikalischen Eigenschaften der Fluide erforderlich. Die Aufstiegs geschwindigkeit der Einzelblase ist vor allem vom Blasendurchmesser abhängig. Zur Bestimmung des Blasendurchmessers in der Säule sind viele Methoden bekannt. Einen Vergleich verschiedener Meßmethoden haben R. Buchholz, W. Zakrzewski und K. Schügerl [61] durchgeführt und vorgeschlagen, mehrere Methoden gleichzeitig anzuwenden, weil keine einfache Methode zur Bestimmung der Blasenverteilung bekannt ist.

Für den mittleren Blasendurchmesser wird häufig der Sauter-Durchmesser \bar{d}_s benutzt:

$$\bar{d}_s = \frac{\sum_i N_i d_{p,i}^3}{\sum_i N_i d_{p,i}^2} \quad (23)$$

N_i ist die Anzahl der Blasen mit dem Durchmesser $d_{p,i}$.

Außer dem Blasendurchmesser und der Aufstiegs geschwindigkeit der Blasen ist der Gasgehalt einer der wichtigsten Parameter für die Charakterisierung der Strömung in der Blasensäule. Der Gasgehalt gibt nicht nur Aufschluß über die Verweilzeit beider Phasen, sondern gibt auch die Möglichkeit, in Verbindung mit dem mittleren Blasendurchmesser die zur experimentellen Bestimmung des Stofftransports maßgebende Phasengrenzfläche zu ermitteln:

$$a_p = 6 \varepsilon_g / \bar{d}_p \quad (24)$$

Hierin ist a_p die spezifische Phasengrenzfläche und \bar{d}_p der mittlere Blasendurchmesser bzw. der Sauter-Durchmesser. Der Gasgehalt hängt hauptsächlich von der Gasleerrohr geschwindigkeit und von den physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit ab.

Über den mittleren Blasendurchmesser und den Gasgehalt haben viele Autoren [4; 62 bis 74] Untersuchungen angestellt. Die vorgeschlagenen Korrelationen sind in der Arbeit von Y.T. Shah, B.G. Kelkar, S.P. Godbole und W.-D. Deckwer [75] zusammengefaßt.

2.3 Experimentelle Ergebnisse zum Stofftransport an Blasen

2.3.1 Allgemeiner Überblick

Der Stoffübergang an Einzelblasen ist in zahlreichen Arbeiten experimentell untersucht worden [76 bis 90]. Eine Zusammenstellung von Untersuchungen des Stofftransports an Blasen und Tropfen haben R.M. Griffith [91], C.L. Pritchard und S.K. Biswas [92] sowie R. Clift, J.R. Grace und M.E. Weber [11] geliefert. Die mitgeteilten experimentellen Ergebnisse zeigen große Streuung. In den meisten theoretischen Arbeiten wurde keine Abhängigkeit des Stofftransports von der Zeit beachtet. Viele Experimentatoren stellten jedoch einen abnehmenden Massenstrom mit der Zeit fest [77–79; 81; 83; 87; 88].

Die Messung des Stofftransportes in Blasenschichten ist von zahlreichen Autoren durchgeführt worden, jedoch meist ohne ausreichende Angabe der Versuchsbedingungen. Von den im Schrifttum verfügbaren Meßwerten ist daher nur eine sehr kleine Anzahl für eine vollständige Auswertung mit Hilfe dimensionsloser Kenngrößen brauchbar. Die für den Stoffaustausch in Blasenschichten verfügbaren Meßwerte sind umgerechnet und in Bild 3 dargestellt worden [76; 93 bis 101]. Die Streuung der Meßwerte ist so groß, daß sich keine vernünftige Korrelation herstellen läßt. Die Ursachen dafür sind vor allem auf unvollkommene Modellvorstellungen und auf ungenaue Meßmethoden zurückzuführen. Als Parameter sind bei diesen Messungen der Blasendurchmesser, die Aufstiegs geschwindigkeit der Blasen, der Gasgehalt und die Phasengrenzfläche von Bedeutung. Ihre Bestimmung ist noch immer mit großen Unsicherheiten verbunden.

Einen kritischen Überblick über bestehende Korrelationen zur Berechnung des Stoffaustauschs in Blasensäulen vermitteln S. Sideman, O. Hortacsu und J.W. Fulton [102], R.A. Mashelkar [103] sowie W.-D. Deckwer [104]. Außerdem geben A. Mersmann [4] aus verfahrenstechnischer und W.-D. Deckwer [104; 105] aus reaktionstechnischer Sicht eine Zusammenstellung über die zur Dimensionierung von Blasensäulen verfügbaren Modelle.

2.3.2 Modelle zur Berechnung des Stofftransports

Die bekannten Stoffübergangshypothesen wie die Zweischichten- oder die Penetrations-Hypothese können nicht ohne weiteres zur Berechnung des Stoffübergangskoeffizienten an Einzelblasen und im Blasenschwarm angewendet werden, da das Geschwindigkeitsfeld um die Blase sowie die

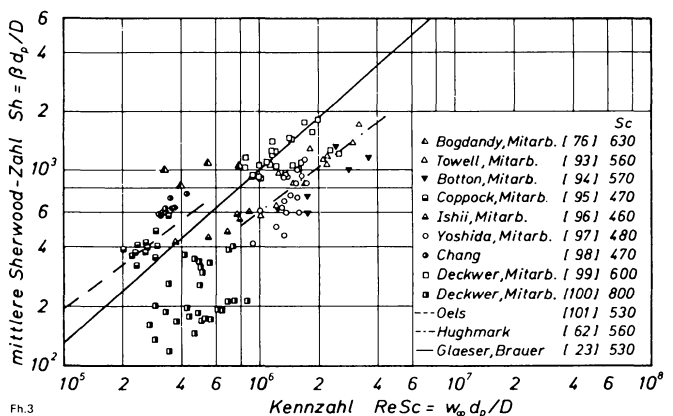


Bild 3. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Kennzahl $Re Sc$ für Blasenschichten.

Bewegung der Phasengrenzfläche nicht bekannt sind. Der komplizierte Strömungsvorgang im Blasenschwarm und mangelhafte Unterlagen zur Berechnung des Stofftransports durch die Grenzfläche von Einzelblasen haben dazu geführt, daß man für die praktische Auslegung der Blasensäule sich allein auf experimentell gefundene Meßdaten und empirische Korrelationen stützen kann. Die Korrelationen sind meistens an Blasensäulen im Labormaßstab ermittelt und stellen zudem noch integrale Werte dar. Für die Aufstellung der Korrelationen wurde oft ein unzureichendes Modell verwendet. Deshalb sind solche Korrelationen nur mit großer Vorsicht anzuwenden [104].

Den in der Literatur angegebenen experimentellen Stoffübergangskoeffizienten liegen Messungen der Ein- und Austrittskonzentration beider Phasen in Blasensäulen zugrunde. Zur Interpretation experimenteller Ergebnisse des Gesamtsystems und zu Rückschlüssen auf die einzelnen Einflußgrößen werden häufig mathematische Modelle verwendet, die Strömungs- und Stofftransportvorgänge durch Näherungsansätze beschreiben. Als solche mathematischen Modelle sind im wesentlichen Dispersions- oder Diffusionsmodelle sowie Zellen- und Kaskadenmodelle zu nennen [2; 106]. Diese Modelle beschreiben die Strömungs- und Stofftransportvorgänge summarisch und erfassen nicht die tatsächlichen physikalischen Vorgänge an der Blase.

In der Arbeit von *Y.T. Shah, G.J. Stiegel* und *M.M. Sharma* [107] werden die Modelle der Längsvermischung für den Stofftransport in Gas/Flüssigkeits-Reaktoren kritisch diskutiert. Die wichtigsten Ergebnisse sind folgende:

- Angesichts der Dimensionierung eines Reaktors muß die Analyse des Verweilzeitverhaltens mit dem tatsächlichen Stofftransportvorgang verbunden sein.
- Ohne einige weitere vereinfachende Annahmen sind die mathematischen Gleichungen für den Stofftransport in Blasensäulen sehr kompliziert zu lösen, obwohl das Verweilzeitverhalten durch einfache Dispersionsmodelle beschrieben wird.
- Deshalb haben die Reaktormodelle mit mehr als zwei Parametern eine beschränkte Anwendung.

Bei der Aufstellung dieser Modelle muß der Stoffübergangskoeffizient, mit dessen Hilfe die übertragene Stoffmenge berechnet wird, als konstant vorausgesetzt oder aus den Versuchswerten bestimmt und angepaßt werden.

2.3.3 Empirische Stoffaustauschgleichungen für Blasenschichten

Autoren, deren Meßergebnisse in Bild 3 dargestellt sind, haben meist aus gemessener Ein- und Austrittskonzentration der Flüssigkeit und des Gases den Stoffübergangskoeffizienten β bzw. das Produkt aus Stoffübergangskoeffizienten β und spezifischer Phasengrenzfläche a_p bestimmt. Die aufgetragenen Meßdaten sind entweder mit der Annahme der völligen Durchmischung beider Phasen oder des axialen Dispersionsmodells ausgewertet worden. Der Blasendurchmesser wurde entweder direkt der entsprechenden Arbeit entnommen, oder er wurde aus den angegebenen Formeln berechnet. Mit Hilfe des Blasendurchmessers und Gl. (24) kann aus dem volumetrischen Stoffübergangskoeffizienten βa_p bei gegebenem Gasgehalt der Stoffübergangskoeffizient β berechnet werden. Aus diesen Größen wird die Sherwood-Zahl bestimmt. Zum Vergleich wurden auch theoretische und empirische Gleichungen aufgetragen.

Der volumetrische Stoffübergangskoeffizient βa_p ist für die Beschreibung des Stofftransports mit langsamen chemischen Reaktionen ausreichend. Dagegen ist die getrennte Kenntnis des Stoffübergangskoeffizienten β im Fall schneller

Tabelle 2. Korrelationen für flüssigkeitsseitigen Stofftransport in Blasensäulen.

Autoren	Korrelation
Frössling [108]	$Sh = 2 + 0,552 Re^{1/2} Sc^{1/3}$
Ranz, Marshall [109]	$Sh = 2 + 0,95 Re^{1/2} Sc^{1/3}$
Garner, Foord, Tayeban [110]	$Sh = -126 + 1,8 Re^{1/2} Sc^{0,42}$
Schügerl, Lücke, Oels [111]	$Sh = 0,15 Re^{3/4} Sc^{1/2}$
Srikrishna, Sivaji, Barasimhamurty [112]	$Sh = 2 + 0,37 Re^{0,577} Sc^{1/3}$
Calderbank, Moo-Young [113]	$\beta(Sc)^{2/3} = 0,31 \left[\frac{(\rho - \rho_g) \eta g}{\rho^2} \right]^{1/3}$ für $d_p < 2,5 \cdot 10^{-3}$ m $\beta(Sc)^{1/2} = 0,42 \left[\frac{(\rho - \rho_g) \eta g}{\rho^2} \right]^{1/3}$ für $d_p > 2,5 \cdot 10^{-3}$ m
Hughmark [62]	$Sh = 2 + 0,0187 \left[Re^{0,484} Sc^{0,339} \left(\frac{d_p^3 g}{D^2} \right)^{0,024} \right]^{1,61}$
Akita, Yoshida [66]	$Sh = 0,5 Sc^{1/2} \left(\frac{g d_p^3}{v^2} \right)^{1/4} \left(\frac{g d_p^2}{\sigma} \right)^{3/8}$
Gestrich, Esenwein, Krauss [115]	$Sh = \frac{a_p}{D} \left\{ 2,23 \cdot 10^{-4} K_F^{0,18} + 3,85 \cdot 10^{-3} \left[w_g^{0,05 + 0,0335(H_0/D_R)} \left(\frac{H_0}{D_R} \right)^{-0,605} \right] \right\}$
Kastanek [116]	$\beta a_p = 2,875 \cdot 10^{-2} w_g^{0,65} e_g^{0,35} (1 - e_g)^{0,65}$
Hikita, Asai, Tanigawa, Segawa, Kitao [117]	$\frac{\beta a_p w_g}{g} = 14,9 \left(\frac{w_g \eta}{\sigma} \right)^{1,76} K_F^{-0,248} \left(\frac{\eta g}{\rho} \right)^{0,243} \left(\frac{\eta}{\rho D} \right)^{-0,604}$
Ishii, Johnson [96]	$Sh = \left[\frac{4}{\pi(1 - e_g)} \right]^{1/2} Re^{1/2} Sc^{1/2}$
Reuß [114]	$Sh = 0,63 Re^{1/2} Sc^{1/2} \left(\frac{1 - e_g}{1 - e_g^{1/3}} \right)^{1/2}$
Le Clair, Hamielec [131]	$Sh = \frac{2,213}{\sqrt{1 - e_g}} Re^{0,492} Sc^{1/2}$

chemischer Reaktionen in der Phasengrenzfläche erforderlich, um den Beschleunigungsfaktor berechnen zu können [75]. Außerdem ist die Trennung von βa_p in Einzelgrößen sinnvoll für das fundamentale Verständnis der Stofftransportvorgänge [93].

Der volumetrische Stoffübergangskoeffizient βa_p ist von der mittleren Gasgeschwindigkeit in der leeren Säule sowie von den geometrischen Abmessungen der Blasensäule abhängig. Außerdem ist er gegen die physiko-chemischen Eigenschaften beider Phasen sehr empfindlich. Wegen der Unsicherheit bei der Bestimmung der spezifischen Phasengrenzfläche a_p kann der damit bestimmte Stoffübergangskoeffizient β mit großen Fehlern behaftet sein.

Bei der Wiedergabe von Meßwerten für Einzelblasen durch empirische Gleichungen für die zeitunabhängige Sherwood-Zahl geht man im allgemeinen von folgendem Ansatz aus, der erstmals von *N. Frössling* [108] benutzt wurde:

$$Sh = 2 + C_1 Re^m Sc^n \quad (25)$$

Mit C_1 wird eine von der Schmidt-Zahl Sc sowie vom Viskositätsverhältnis beider Phasen abhängige Funktion bezeichnet. Die Exponenten m und n werden theoretisch und empirisch ermittelt. Für Blasenschwärme wurde eine ähnliche Formel benutzt.

Einige empirische und theoretische Stoffaustauschgleichungen für Blasenschichten sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

2.4 Theoretische Ergebnisse zum Stofftransport an Blasen

Der Stofftransport durch die Grenzfläche von Partikeln in eine umgebende Phase zeichnet sich dadurch aus, daß er instationär ist. Nur für den Grenzfall, daß Blasen oder Tropfen allein aus der diffundierenden Komponente bestehen und eine Änderung des Durchmessers vernachlässigt wird, ist ein stationärer Transport denkbar [118].

2.4.1 Stationärer Stofftransport

2.4.1.1 Stofftransport an Einzelblasen

Wenn die Blase allein aus der diffundierenden Komponente A besteht, tritt ein Konzentrationsprofil nur in der umgebenden Flüssigkeit auf. Die innerhalb der Blase auftretende Partialdichte ρ_A ist orts- und zeitunabhängig und gleich dem Wert ρ_{Ap} an der Blasenoberfläche. Ferner ist die in sehr großem Abstand von der Blasenoberfläche auftretende Partialdichte $\rho_{A\infty}$ zeitunabhängig. Somit ist also die Partialdichtedifferenz $\rho_{Ap} - \rho_{A\infty}$ während der Dauer des Transportprozesses konstant.

Für den Stoffstrom \dot{M}_A durch die Phasengrenzfläche gilt die Gleichung

$$\dot{M}_A = \beta A_p (\rho_{Ap} - \rho_{A\infty}) \quad (26)$$

Mit $A_p = d_p^2 \pi$ wird die Blasenoberfläche und mit β der über die gesamte Blasenoberfläche gemittelte Stoffübergangskoeffizient bezeichnet. Der mittlere Stoffübergangskoeffizient läßt sich nach dimensionslosen Gleichungen berechnen, in denen folgende Kennzahlen auftreten:

$$Sh = \beta d_p / D \quad \text{mittlere Sherwood-Zahl} \quad (27)$$

$$Sc = \nu / D \quad \text{Schmidt-Zahl} \quad (28)$$

Es bedeutet D den Diffusionskoeffizienten.

Im Bereich niedriger Reynolds-Zahlen, $Re \rightarrow 0$, und großer Schmidt-Zahlen, $Sc \rightarrow \infty$, erhält man bei formstabiler Kugelblase folgende Beziehung für die mittlere Sherwood-Zahl [118–120]:

$$Sh = 2 + \frac{0,651(Re Sc)^{1,72}}{1 + (Re Sc)^{1,22}} \quad (29)$$

Anwendungsbereich: $0 \leq Re \leq 1$, $0 \leq Re Sc \leq \infty$.

Für $Re Sc \rightarrow 0$ nähert sich die Sherwood-Zahl dem Wert $Sh = 2$. Für $Re Sc \rightarrow \infty$ erhält man aus Gl. (29) das von *V.G. Levich* [9] mitgeteilte theoretische Grenzgesetz für Kugelblasen:

$$Sh = 0,65(Re Sc)^{1/2} \quad (30)$$

V.G. Levich [9] hat Gl. (30) unter der Voraussetzung hergeleitet, daß die Konzentrationsgrenzschicht im Vergleich zum Blasenradius dünn ist.

Für sehr große Werte der Reynolds-Zahl, $Re \rightarrow \infty$, und kleine Werte der Schmidt-Zahl, $Sc \rightarrow 0$, läßt sich das die Blase umgebende Fluid angenähert als viskositätsfrei ansehen; dann gilt die Gleichung [121; 122]

$$Sh = 2 + \frac{0,232(Re Sc)^{1,72}}{1 + 0,205(Re Sc)^{1,22}} \quad (31)$$

Anwendungsbereich: $0 \leq Re \leq Re_B$, $0 \leq Re Sc \leq \infty$.

Mit $Re Sc \rightarrow \infty$ geht aus Gl. (31) das bereits von *J. Boussinesq* [123] hergeleitete theoretische Grenzgesetz für Kugelblasen hervor:

$$Sh = 1,13(Re Sc)^{1/2} \quad (32)$$

Diese Gleichung kann man auch mit Hilfe der von *R. Higbie* [124] vorgeschlagenen Penetrations-Hypothese erhalten, die im Buch von *H. Brauer* und *D. Mewes* [118] ausführlich behandelt wurde.

Einen umfassenden Einblick in den Stoffübergang an Kugelblasen erhält man durch die Lösung der vollständigen Differentialgleichung für das Konzentrationsfeld. Die dafür erforderliche lokale Geschwindigkeit ergibt sich aus einer weiteren Differentialgleichung. Eine Lösung dieser Gleichungen ist nur mit numerischen Verfahren möglich. Als Ergebnis derartiger Rechnungen teilten *L. Oelrich*, *H. Schmidt-Traub* und *H. Brauer* [121] außer einer Reihe anderer Größen die mittlere Sherwood-Zahl mit. Sie verwendeten die von *Haas*, *Schmidt-Traub* und *Brauer* numerisch berechneten Geschwindigkeitsfelder [118].

Die Berechnung des Stofftransports, die sich auf die Geschwindigkeitsverteilung gemäß der Galerkin-Methode [125] bzw. auf die Grenzschicht-Hypothese [126; 127] stützt, liefert nur sehr beschränkte Übereinstimmung mit den Ergebnissen der numerischen Rechnung. Die Galerkin-Methode liefert nur bei kleinen Werten der Reynolds-Zahl Ergebnisse, die mit denen der numerischen Methode übereinstimmen. Die Grenzschichtrechnung trifft dagegen im Bereich größerer Werte der Reynolds-Zahl zu [11].

Wie bereits erwähnt, wird die Form der Blase instabil, wenn die Reynolds-Zahl den Grenzwert Re_B überschreitet. Die fortlaufenden Formänderungen der Blase nach Überschreiten von $Re = Re_B$ verursachen in der Phasengrenzfläche selbst und in ihrer nächsten Umgebung die für die Deformationsturbulenz charakteristischen stochastischen Bewegungen. Die Deformationsturbulenz übt einen großen Einfluß sowohl auf das Strömungsfeld als auch auf den Stofftransport aus. *H. Glaeser* [128] hat im Rahmen seiner Dissertation Rechnungen durchgeführt, die die Einwirkungen der Deformationsturbulenz auf den Impuls- und Stofftransport berücksichtigen. Die für den Stofftransport durch die Grenzfläche formdynamischer Blasen geltende Gleichung für die mittlere Sherwood-Zahl lautet

$$Sh = 2 + 1,5 \cdot 10^{-2} Re^{0,89} Sc^{0,7} \quad (33)$$

Die Deformationsturbulenz kann, was besonders zu beachten ist, nicht nur zu einer Erhöhung der Massenstromdichte, sondern im Vergleich zu formstabilen Blasen auch zu einer Erniedrigung führen.

2.4.1.2 Stofftransport an Blasenschwärmen

Eine genaue mathematische Lösung der vollständigen Differentialgleichungen für das Konzentrationsfeld in der Umgebung von Blasenschwärmen scheidet an der Vielzahl der Randbedingungen. Daher ist man, wie auch bei dem Impulstransport, auf stark vereinfachende Modellrechnungen angewiesen.

Ein sehr häufig verwendetes Modell ist das „Hüllkugelmodell“ von *J. Happel* [40]. *E. Ruckenstein* [129] hat mit diesem Modell den Stofftransport an Blasenschwärmen berechnet. Dabei wurde vorausgesetzt, daß sich die Blasen wie feste Kugeln verhalten. Die Ergebnisse zeigen, daß eine gute

Übereinstimmung der ermittelten Gleichung mit der empirischen Gleichung von *P.H. Calderbank* und *M.B. Moo-Young* [113] für kleine Blasen ($d_p < 2,5 \cdot 10^{-3}$ m), also im Bereich kleiner Werte der Reynolds-Zahl erzielt wird.

Für größere Werte der Reynolds-Zahl wurde die Grenzschichtrechnung durchgeführt. *S. Waslo* und *B. Gal-Or* [130] haben ihre in [47] angegebene Geschwindigkeitsverteilung verwendet, während *M. Reuß* [114] Gl. (20) von *G. Marrucci* [49] heranzog. *B.P. Le Clair* und *A.E. Hamielec* [131] haben das Hüllkugelmodell von *S. Kuwabara* [41] verwendet und angenommen, daß alle Blasen gleichen Durchmesser haben und räumlich gleichmäßig verteilt sind. Sie stellten fest, daß die Geschwindigkeiten an der Blasenoberfläche sowie die innere Zirkulation der Blase mit zunehmendem Gasgehalt größer wurden und dadurch der Stoffstrom anstieg. Die innere Zirkulation und der Stoffstrom können durch die Einwirkung oberflächenaktiver Stoffe wieder vermindert werden; jedoch haben die Autoren darauf hingewiesen, daß der Einfluß der oberflächenaktiven Stoffe auf den Transportvorgang bei größeren Blasen gering ist und die Deformation der Blase den Transportvorgang noch komplizierter macht.

Ein weiteres Hüllkugelmodell, in dem eine Potentialströmung um die Blase angenommen wird, haben *T. Ishii* und *A.I. Johnson* [96] sowie *I. Yaron* und *B. Gal-Or* [132] zur Berechnung des Stofftransports verwendet. Die dazu erforderliche Geschwindigkeitsverteilung stammt von *B.T. Chao* [13] und *D.W. Moore* [14]; sie weist nur eine geringe Abweichung von der für die Potentialströmung auf.

I. Yaron und *B. Gal-Or* [133] sowie *S. Kumar* und *K.K. Sirkar* [134] haben eine Verteilungsfunktion für Blasen mit unterschiedlichem Durchmesser eingeführt und stellten fest, daß der Sauter-Durchmesser \bar{d}_s als mittlerer Blasendurchmesser \bar{d}_p sehr gut geeignet ist.

Die theoretisch ermittelten Gleichungen für die Sherwood-Zahl nähern sich je nach der Modellvorstellung entweder Gl. (30) oder – wenn der Gasgehalt gegen null geht – Gl. (32). Einige Gleichungen sind in Tabelle 2 enthalten.

Eine wesentliche Voraussetzung zur Anwendbarkeit des Hüllkugelmodells ist die Bedingung, daß die betrachtete Einzelzelle repräsentativ für den gesamten Blasenschwarm in der Blasen säule ist. Der Gasanteil der Schicht wird also durch die Blase ersetzt, während das Flüssigkeitsvolumen dieser Blase als Hüllschicht zugeordnet wird. Weiterhin liegt der Theorie die Annahme zugrunde, daß die Konzentration der diffundierenden Komponente an der Blasenoberfläche und am äußeren Rand der Hüllschicht konstant ist. Das Hüllkugelmodell betrachtet demnach den Impuls- und Stofftransport summarisch. Daher sind befriedigende Aussagen für örtliche Vorgänge mit diesem Modell nicht möglich.

2.4.2 Instationärer Stofftransport

Der Stofftransport durch die Grenzfläche von Blasen ist, wie bereits mehrfach betont, im allgemeinen instationär. Da die mathematische Beschreibung des instationären Stofftransports sehr kompliziert ist, wird die Annahme getroffen, daß die Geschwindigkeitsverteilung um die Blase bzw. den Tropfen zeitlich unveränderlich ist. Das anfangs zwischen der fluiden Partikel und der Umgebung bestehende Konzentrationsgefälle gleicht sich mit der Zeit aus.

Rechnungen dieser Art haben *E. Ruckenstein* [135], *J.W. Tauton* und *E.N. Lightfoot* [136], *B.T. Chao* und *J.L.S. Chen* [137] sowie *V.D. Dang* und *E. Ruckenstein* [138] durchgeführt. Für die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb und außerhalb der fluiden Partikel verwendeten die genannten Autoren die Gesetzmäßigkeiten der Potentialströmung

und der schleichenden Umströmung. Die erzielten Ergebnisse gelten aber nur für kleine Zeiten, da vorausgesetzt wurde, daß die Konzentrationsänderung auf die nächste Umgebung der Phasengrenzfläche beschränkt bleibt.

Über die allgemeinen Fälle des Stofftransports in einem ruhenden System und in einem System mit schleichender Umströmung der Partikel hat *H. Brauer* [139] ausführlich berichtet. Es wird angenommen, daß die Blasen die Form einer Kugel haben. Von den vorliegenden Ergebnissen wird hier nur jener Fall erläutert, für den der Transportwiderstand allein in der umgebenden Phase liegt.

Als Bedingung zur Zeit $t=0$ wurde innerhalb und außerhalb der fluiden Partikel jeweils eine konstante Konzentration der Komponente A angenommen. Mit fortschreitender Zeit findet dann ein Konzentrationsausgleich zwischen den beiden Phasen statt. In der Phasengrenzfläche ergibt sich durch die Gleichgewichtsbedingung ein Konzentrationsprung, der durch die Henry-Zahl festgelegt ist:

$$H^* = \rho_{A1p} / \rho_{A2p} \quad (34)$$

Es bedeuten ρ_{A1p} die Partialdichte der Komponente A auf der Gasseite der Phasengrenzfläche; ρ_{A2p} ist der entsprechende Wert auf der Flüssigkeitsseite. Für sehr kurze und sehr lange Zeiten lassen sich die Differentialgleichungen für das Konzentrationsfeld so weit vereinfachen, daß sich geschlossene Lösungen angeben lassen [118; 140]. Die dafür geltenden Gleichungen werden hier angegeben, da sie einen guten Einblick in einige Eigenschaften des instationären Stofftransports vermitteln. Für die mittlere Sherwood-Zahl gelten die folgenden Grenzzesetze:

$$Fo_m \rightarrow 0: \quad Sh = \frac{4}{H^* \sqrt{\pi}} Fo_m^{-1/2} \quad (35)$$

$$Fo_m \rightarrow \infty: \quad Sh = \frac{2/3}{Fo_m} \quad (36)$$

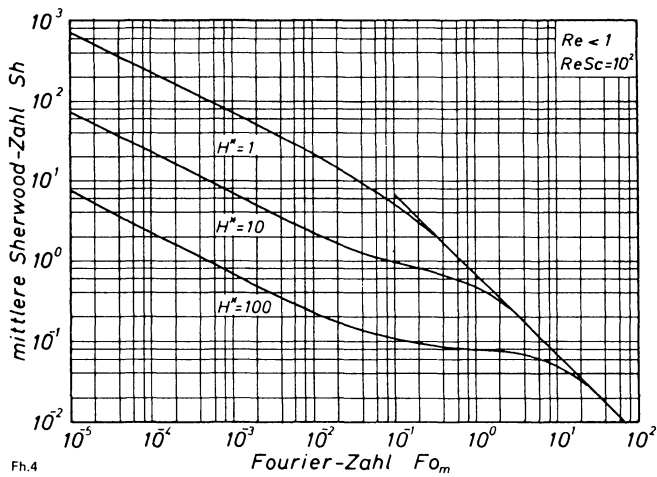
Die Fourier-Zahl für den Stofftransport ist wie folgt definiert:

$$Fo_m = \frac{tD}{d_p^2/4} \quad (37)$$

Der Stofftransport für sehr kurze Zeiten ($Fo_m \rightarrow 0$) und für sehr lange Zeiten ($Fo_m \rightarrow \infty$) ist unabhängig vom Bewegungszustand der Blase umgebenden Phase. Für die schleichende Umströmung sind die numerisch bestimmten Werte der mittleren Sherwood-Zahl in Bild 4 und die mittlere Konzentration in der Blase in Bild 5 über der Fourier-Zahl aufgetragen.

2.5 Schlußfolgerungen

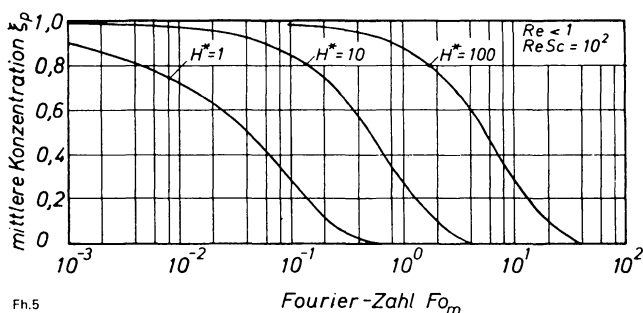
Zur Berechnung des Stoffaustauschs in Blasenschichten stehen nur empirische Gleichungen zur Verfügung. Mit einfachen Modellen bemüht man sich um eine Aufklärung der für den Stoffaustausch maßgebenden Phänomene. Die experimentellen und theoretischen Untersuchungen stützen sich in den meisten Fällen auf Hypothesen über den Stoffaustausch, die den Vorgang erheblich vereinfachen. Die Ergebnisse solcher Untersuchungen liefern daher auch nur Erkenntnisse über zusammengefaßte Wirkungen von mehreren Einzelphänomenen. Solche Erkenntnisse haben nur eine sehr beschränkte Bedeutung. Die Streuung der Meßwerte in Bild 3 und die verschiedenen Korrelationen in Tabelle 2



Fh.4

Bild 4. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für die Reynolds-Zahl $Re < 1$ und die Kennzahl $ReSc = 10^2$.

Parameter ist die Henry-Zahl.



Fh.5

Bild 5. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für die Reynolds-Zahl $Re < 1$ und die Kennzahl $ReSc = 10^2$.

Parameter ist die Henry-Zahl.

deuten an, daß die verfügbaren Modellvorstellungen nur im eng begrenzten Bereich anwendbar sind. Die folgenden Gesichtspunkte führen zu einer Einengung der praktischen Brauchbarkeit dieser Modellvorstellungen:

- Die Deformierbarkeit der Phasengrenzfläche führt zu zeitabhängigen periodischen und nichtperiodischen Formänderungen der Blasen, wenn die Reynolds-Zahl $Re \geq Re_B$ und die Flüssigkeitskennzahl $K_F \geq 10^4$ ist.
- In der Phasengrenzfläche können sich oberflächenaktive Stoffe anreichern, durch die die Beweglichkeit der Phasengrenzfläche herabgesetzt werden kann.

3. Allgemeine Beschreibung des Problems

Ist die Reynolds-Zahl einer Blase, die einzeln oder im Blasenschwarm in einer Flüssigkeit aufsteigt, größer als Re_B , und ist ferner die Flüssigkeitskennzahl $K_F \geq 10^4$, so ändert die Blase ständig ihre Form. Die zunächst periodisch auftretenden Deformationen gehen sehr bald in stochastische über. Diese stochastischen Deformationen der Phasengrenzfläche rufen in ihrer näheren Umgebung stochastische Fluidbewegungen hervor, die man auf Grund ihrer Ursachen Formänderungs- oder Deformationsturbulenz nennt. Eine Hypothese zur Deformationsturbulenz wurde von H. Brauer [24] aufgestellt; ausführliche Erläuterungen für die Deformationsturbulenz sowie verschiedene Turbulenzvorgänge in mehrphasigen Strömungen wurden an anderer Stelle [147] gegeben.

- Das Aufnahme- oder Abgabevermögen für den diffundierenden Stoff ist begrenzt, da Blasen über keinen Durchfluß der diffundierenden und der inerten Komponente verfügen. Nur für den Grenzfall, daß die Gleichgewichtswerte in der Phasengrenzfläche zeitlich konstant sind, stellt sich ein stationärer Transport ein.
- Bei den meisten Experimenten wird nicht darauf geachtet, in welchem Abstand von den Grenzkurven, die in Bild 4 für $Fo_m \rightarrow 0$ gemäß Gl. (35) und für $Fo_m \rightarrow \infty$ gemäß Gl. (36) angegeben sind, die Messungen durchgeführt werden. Hierdurch werden die Größen $C_{1,m}$ und n in Gl. (25) beeinflusst.
- Wie in Bild 4 zu sehen ist, weisen die für große Werte der Henry-Zahl H^* dargestellten Kurven Bereiche auf, in denen die Sherwood-Zahl von der Fourier-Zahl unabhängig und somit konstant ist. Es ist zu erwarten, daß die von der Fourier-Zahl unabhängigen Bereiche auch bei großen Werten der Kennzahl $ReSc$ gelten, da der konvektive Stofftransport in diesen Bereichen allein bestimmend ist [118].

Der Einfluß oberflächenaktiver Stoffe auf den Stoffaustausch führt zu einer Änderung im fluidodynamischen Verhalten des Systems. Ein zusätzlicher Oberflächenwiderstand durch eine sich bildende Schicht grenzflächenaktiver Stoffe wird jedoch von vielen Autoren für unwahrscheinlich gehalten [72; 82; 86; 87]. Dieser Einfluß kann bei großen Blasen in jedem Fall nur gering sein; die Deformation der Blase erweist sich als ausschlaggebend, insbesondere wenn die oberflächenaktiven Stoffe nicht in zu großer Menge vorhanden sind [83; 131; 141].

Der Stofftransportmechanismus wird nicht geändert, wenn sich die Blase in einem Schwarm befindet. Lediglich der fluiddynamische Vorgang ändert sich [142].

Die Abhängigkeit der Relativgeschwindigkeit des Blasenschwarms vom Gasgehalt ist bei kleinen Blasen sehr deutlich. Für größere Blasen wird die Deformation der Blase so dominant, daß die Blase im Schwarm als Einzelblase ohne Behinderung benachbarter Blasen betrachtet werden kann [143; 144]. Man darf annehmen, daß die Relativgeschwindigkeit der Blase im Schwarm besonders bei großen Blasen mit Deformationsturbulenz gleich der Relativgeschwindigkeit von Einzelblasen ist [52; 145].

Ist die Henry-Zahl H^* groß, können die Ergebnisse für Einzelblasen auch im Bereich des Blasengasens auf den Blasenschwarm angewendet werden [75; 146].

Da der Stofftransport in entscheidendem Maße von dem Strömungsfeld um die Blase abhängt, muß die Deformationsturbulenz in ihrer Auswirkung sowohl auf den Impuls- als auch auf den Stofftransport betrachtet werden.

3.1 Deformationsturbulenz

Die Deformation der Phasengrenzfläche ist auf eine fluiddynamische Instabilität zurückzuführen. Im Gegensatz zur Grenzflächenturbulenz, die durch lokale Unterschiede in der Grenzflächenspannung ausgelöst wird, ist bei der Deformationsturbulenz kein über die Phasengrenzfläche gerichteter Stoffstrom erforderlich. Aus diesem Grund ist die Deformationsturbulenz unabhängig von der Zeit. Anders als die konventionelle Volumenturbulenz ist die Wirkung der Deformationsturbulenz in der Nähe der Phasengrenzfläche am größten. Eine steigende Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen erhöht die Deformationsturbulenz.

Der Grenzwert Re_B , der das Einsetzen der periodischen Deformation kennzeichnet, sowie der Grenzwert Re_C für

formlose Blasen können mit Gl. (10) und (12) berechnet werden. Periodische Deformationen erfassen stets die gesamte Blase, während stochastische Deformationen vornehmlich auf Teilbereiche der Blase beschränkt sind. Zur gleichen Zeit treten aber derartige Deformationen an mehreren Stellen der Blasenoberfläche auf, so daß sie insgesamt doch das Verhalten der ganzen Blase beeinflussen [147].

Die im Übergangsbereich auftretenden Deformationen sind in Bild 6 und in Bild 7 schematisch dargestellt. Ausgangsform ist bei den betrachteten Deformationen stets die Kugelblase. Die Umströmung der Blase mit Deformationsturbulenz erfolgt unter Ausbildung eines Ablösegebiets. Die Lebensdauer der von den Deformationen erzeugten Wirbel kann wesentlich größer als die Dauer bestimmter Deformationszustände sein. Das bedeutet also, daß gerade erzeugte Wirbel mit noch existierenden in Wechselwirkung treten müssen. Hierdurch ergeben sich in der umgebenden Flüssigkeit die für die Deformationsturbulenz charakteristischen stochastischen Bewegungen.

Die stochastischen Schwankungsbewegungen lassen sich heute noch nicht in detaillierter Form beschreiben. Eine rein theoretische Berechnung der turbulenten Strömungen und des turbulenten Stofftransports ist noch nicht möglich. Deshalb versucht man Modellvorstellungen zu entwickeln, in denen experimentell gewonnene Erfahrungsdaten verarbeitet werden.

Die Hypothese zur Deformationsturbulenz, angewendet auf die formdynamische Blase, besagt, daß die formdynamische Blase durch eine Kugelblase ersetzt werden darf, wenn die zeitlich und örtlich gemittelte Wirkung der Deformationsturbulenz auf Impuls- und Stofftransport durch geeignete Größen beschrieben wird. Bei dem Impulstransport müssen diese Größen

- unabhängig von der Reynolds-Zahl sein, da nach experimentellen Untersuchungen der Widerstandsbeiwert mit $\zeta = 2,61$ konstant ist,
- ihren höchsten Wert in der Blasenoberfläche haben und
- mit zunehmendem Abstand von der Blasenoberfläche kleiner werden.

Für diese Größen haben *H. Glaeser* und *H. Brauer* [23] die turbulenten Schubspannungen genommen und damit den durch die Formschwankungen hervorgerufenen zusätzlichen Impulstransport beschrieben.

Die unter den Einwirkungen der Deformationsturbulenz entstehende zusätzliche Stoffstromdichte wird durch Einführen von turbulenten Austauschkoefizienten erfaßt. Da kein Austausch von Fluidelementen über die formveränderliche Grenzfläche hinweg auftreten kann, ist nur der molekulare Stofftransport durch die Phasengrenzfläche möglich. In der Grenzfläche muß demnach der turbulente Austauschkoefizient des Stoffes den Wert null haben. Damit ist auch die turbulente Stoffstromdichte in der Phasengrenze null. Die turbulente Schubspannung hat dagegen in der Grenzfläche ihren größten von null verschiedenen Wert. Zwischen der Behandlung des deformationsturbulenten Impuls- und Stofftransports an einer formveränderlichen Blase besteht somit keine Analogie [122].

3.2 Modellhafte Beschreibung des Stofftransports in Blasensäulen

Die gleichmäßige und störungsfreie Strömung durch die Säule setzt eine gleichmäßige Verteilung beider Phasen in der Säule voraus. Örtliche und zeitliche Schwankungen in der Phasenverteilung sollen nach Möglichkeit ausgeschlossen werden. Diese gleichmäßige Phasenverteilung ist bei sehr kleinem Gas- und Flüssigkeitsdurchsatz fast immer ge-

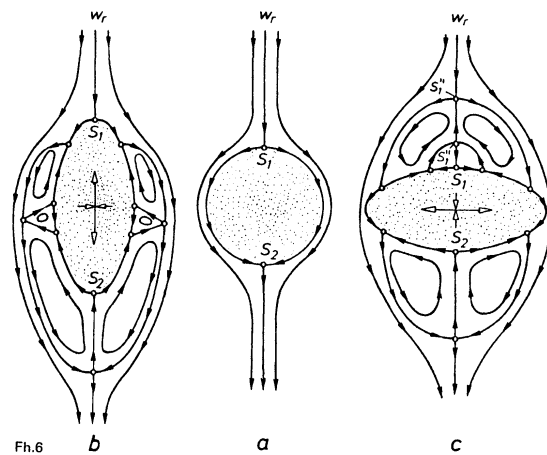


Bild 6. Wirbelbildung bei der Deformation ellipsoidischer Blasen.

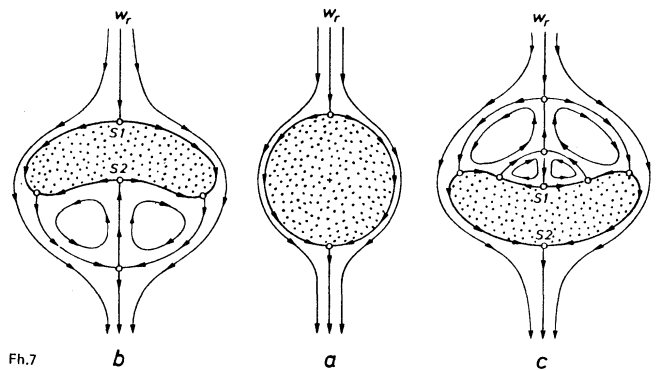


Bild 7. Wirbelbildung bei der Deformation schirmartiger Blasen.

währleistet, so daß sich auch ein störungsfreier Durchfluß für beide Phasen einstellt. Bei erhöhtem Gasdurchsatz kommt es dagegen sehr leicht zu Störungen in der Phasenverteilung und somit auch im Durchfluß.

Durch die aufsteigenden Gasblasen wird ein nach oben gerichteter Flüssigkeitsstrom hervorgerufen, der bei Erreichen der Flüssigkeitsoberfläche umgelenkt wird und somit einen Kreislauf innerhalb der Säule ausführt. Da sich beide Ströme in ständiger Berührung befinden, treten Schwankungsbewegungen sowohl in Querrichtung als auch in Längsrichtung auf.

Der Kreislauf der Flüssigkeit ist in viele kleine Kreisläufe unterteilt, so daß sich Austauschzellen bilden. In jede Zelle treten Austauschströme ein, die den Stoffaustausch zwischen dem Aufwärts- und dem Abwärtsstrom bewirken. Die Austauschströme rufen einen lebhaften Quer- und Längsaustausch hervor. Bereits kleine Störungen können zu einem Zusammenbruch der Austauschzellen führen. Tritt ein solcher Zusammenbruch ein, dann wird kurzzeitig eine Umlenkung des Abwärts- und des Aufwärtsstromes hervorgerufen. Das heißt also, daß unter solchen Bedingungen der normale Durchfluß zum Erliegen kommt. Ein derartiges System ist aber instabil, so daß sich unter dem Einfluß vorhandener Störungen nach kurzer Zeit wieder der normale Durchfluß mit geordneten Austauschzellen einstellt. Diese Vorstellung über die Struktur einer Blasensäule steht mit Beobachtungen bzw. mit der Deutung verschiedener Versuchsergebnisse, z.B. von *G.D. Towell*, *C.P. Strand* und *G.H. Ackermann* [93] sowie *N. De Nevers* [148], in Einklang.

Der in den Austauschzellen ablaufende Stoffaustausch hat zur Folge, daß sich örtliche Unterschiede in den Konzentrationen sehr schnell ausgleichen. Die Blasensäule zeichnet

sich also dadurch aus, daß die Konzentrationen über den Strömungsquerschnitt nahezu konstant sind. Da die in den Austauschzellen befindlichen Blasen keinen Durchfluß aufweisen, sind sie als geschlossene Systeme zu betrachten [118]. Aus den genannten Gründen ist der Stofftransport immer instationär.

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Ablauf des für die einzelnen Blasen instationären Stoffaustauschs in einer Blasen säule untersucht, wobei angenommen wird, daß über den Querschnitt ein vollkommener Konzentrationsausgleich vorhanden ist. Nur in axialer Richtung der Säule kann demnach ein Konzentrationsprofil entstehen. Im weiteren Ver-

lauf wird aber auch für die Längsrichtung eine teilweise Durchmischung angenommen.

Der Stoffaustausch über die Grenzfläche der in einer Austausch zelle befindlichen Blasen wird unter Berücksichtigung der Deformationsturbulenz berechnet. Wie die Ergebnisse von *H. Glaeser* [128] zeigen, sind die Strömungs- und Stofftransportvorgänge an einer formveränderlichen Blase in der Austausch zelle nicht wesentlich anders als in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit, da der Einfluß der Deformationsturbulenz auf die unmittelbare Nähe der Blasenoberfläche beschränkt ist. Über die mathematische Formulierung der physikalischen Modellvorstellung wird in den folgenden Kapiteln berichtet.

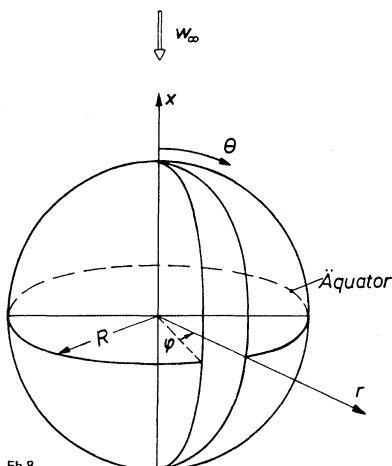
4. Berechnung des Strömungsfeldes in der Umgebung einer formdynamischen Blase

Zur mathematischen Behandlung des Impulstransports in der Umgebung einer formveränderlichen Blase wird entsprechend der in Kapitel 3 beschriebenen Modellvorstellung die formveränderliche Blase durch eine volumengleiche formstabile kugelförmige Blase ersetzt und die Wirkung der stochastischen Formänderung auf den Impulstransport durch spezielle Gleichungen beschrieben. Weitere Voraussetzungen sind: konstante Stoffwerte, inkompressible Strömung, isothermes System, newtonsches Verhalten der Flüssigkeit, vernachlässigbar kleine Viskosität des die Blase bildenden Gases, über eine genügend lange Zeit gemittelter stationärer Aufstieg der Blase in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit und konstanter Durchmesser der Blase.

4.1 Grundgleichungen für das Strömungsfeld

Die Strömung eines Fluids wird durch die aus einer Impulsbilanz folgende Bewegungsgleichung in Verbindung mit der aus einer Massenbilanz folgenden Kontinuitätsgleichung beschrieben. Gemäß Bild 8 wird der Ursprung des gewählten Kugel-Koordinatensystems in die Mitte der Blase gelegt. Zur eindeutigen Bestimmung eines Punktes dienen der Radius r , der Umfangswinkel θ und der azimutale Winkel φ . In allgemeiner Form lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (38).$$



Fh.8

Bild 8. Bezeichnung der Ortskoordinaten.

Es bedeuten \mathbf{w} den Geschwindigkeitsvektor, p den örtlichen Druck, $\boldsymbol{\tau}$ den Tensor der viskosen Spannungen und t die Zeit. Die Gleichung gilt in dieser Form für laminare und turbulente Strömung; sie wird Navier-Stokessche Gleichung genannt. Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (39).$$

In der turbulenten Strömung treten instationäre Zufallsbewegungen auf, die man im allgemeinen nur durch statistische Mittelwerte, z.B. zeitliche Mittelwerte, beschreiben kann. Für die rechnerische Behandlung einer turbulenten Strömung ist es zweckmäßig, die momentane örtliche Geschwindigkeit \mathbf{w} in ihren zeitlichen Mittelwert $\bar{\mathbf{w}}$ und eine überlagerte Schwankungsgeschwindigkeit \mathbf{w}' aufzuteilen:

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}' \quad (40).$$

Diese Aufspaltung wird auch auf andere Größen wie Druck, Konzentration, Temperatur usw. angewendet.

Wird diese Zerlegung auf die Kontinuitätsgleichung angewendet, so ergibt sich

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} = 0 \quad (41)$$

und

$$\nabla \cdot \mathbf{w}' = 0 \quad (42).$$

Die Kontinuitätsgleichung wird sowohl von den zeitlichen Mittelwerten als auch von den Schwankungen der Geschwindigkeit erfüllt.

Führt man für die Geschwindigkeit und den Druck die Zerlegung in zeitlichen Mittelwert und Schwankungsgröße in Gl. (38) ein, so erhält man die Bewegungsgleichung für turbulente Strömungen, die auch als Reynoldsche Gleichung bezeichnet wird:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_g \quad (43).$$

Die Herleitung dieser Gleichung ist z.B. von *H. Schlichting* [149], *J.C. Rotta* [150] sowie *A.S. Monin* und *A.M. Yaglom* [151] ausführlich beschrieben worden.

Der Tensor der Gesamtspannungen $\boldsymbol{\tau}_g$ setzt sich aus dem zeitlichen Mittelwert des Tensors der viskosen Spannungen

$\bar{\tau}$ und dem Tensor der scheinbaren Spannungen der deformationsturbulenten Strömung τ_{D-T} zusammen:

$$\tau_g = \bar{\tau} + \tau_{D-T} \quad (44)$$

Der Tensor der scheinbaren Spannungen τ_{D-T} ergibt sich bei der Herleitung der Bewegungsgleichung für die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeiten und des Drucks aus der Navier-Stokesschen Gleichung. Von den Komponenten des zusätzlichen Spannungstensors der Schwankungsbewegung soll nur die Schubspannung $\tau_{r\theta, D-T}$ berücksichtigt werden, da die übrigen turbulenten Schubspannungskomponenten null sind und die turbulenten Normalspannungen gegenüber der turbulenten Schubspannung $\tau_{r\theta, D-T}$ sowie den viskosen Spannungen vernachlässigbar klein sind [23].

Die turbulente Schubspannung ist dem zeitlich gemittelten Produkt der Schwankungsgeschwindigkeiten in radialer Richtung (w'_r) und in Umfangsrichtung (w'_θ) proportional:

$$\tau_{r\theta, D-T} = -\rho \overline{w'_r w'_\theta} \quad (45)$$

Für die Schubspannung ergab sich in dimensionsloser Schreibweise die empirische Funktion [23]

$$\tau_{r\theta, D-T}^* = -1,05 [\bar{w}_{\theta \max}^* u \sin \theta + (1-u) \bar{w}_{\theta w}^*] e^{-s(r^*-1)} \quad (46)$$

Mit s und u werden Faktoren bezeichnet, die von der Umfangskoordinate θ abhängen. Die eingeführten dimensionslosen Kennzahlen sind wie folgt definiert:

$$r^* = r/R \quad \text{bezogene radiale Koordinate} \quad (47)$$

$$\tau_{r\theta, D-T}^* = \frac{\tau_{r\theta, D-T}}{\rho w_\infty^2 / 2} \quad \text{bezogene örtliche turbulente Schubspannung} \quad (48)$$

$$\bar{w}_{\theta w}^* = \bar{w}_{\theta w} / w_\infty \quad \text{bezogene zeitlich gemittelte Tangentialgeschwindigkeit in der Blasenoberfläche} \quad (49)$$

$$\bar{w}_{\theta w \max}^* = \bar{w}_{\theta w \max} / w_\infty \quad \text{maximaler Wert von } w_{\theta w}^* \quad (50)$$

Hierin bedeutet $R = d_p/2$ den Blasenradius. Durch Anpassung der empirischen Faktoren s und u wurde die Schubspannung nach Gl. (46) so bestimmt, daß der damit berechnete Widerstandsbeiwert mit dem experimentell ermittelten Wert von $\zeta = 2,61$ übereinstimmt.

Unter Verwendung von Gl. (46) lassen sich die Differentialgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld bei Auftreten der Deformationsturbulenz numerisch lösen. Mit der Bedingung der im zeitlichen Mittel rotationssymmetrischen Strömung lauten diese Gleichungen in dimensionsloser Schreibweise

$$\begin{aligned} & \frac{2}{Re} \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial t^*} + \bar{w}_r^* \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial r^*} + \frac{\bar{w}_\theta^*}{r^*} \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial \theta} - \frac{\bar{w}_\theta^{*2}}{r^*} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial r^*} + \frac{2}{Re} \frac{1}{r^{*2}} \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial r^*} \right) + r^* \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \bar{w}_r^*}{\partial \theta^2} \right. \\ & \quad \left. + \cot \theta \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial \bar{w}_\theta^*}{\partial \theta} - 2 \bar{w}_r^* - 2 \bar{w}_\theta^* \cot \theta \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^* \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta, D-T}^* \sin \theta) \right] \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{Re} \frac{\partial \bar{w}_\theta^*}{\partial t^*} + \bar{w}_r^* \frac{\partial \bar{w}_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{\bar{w}_\theta^*}{r^*} \frac{\partial \bar{w}_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{1}{r^*} \bar{w}_r^* \bar{w}_\theta^* \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \theta} + \frac{2}{Re} \frac{1}{r^{*2}} \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \bar{w}_\theta^*}{\partial r^*} \right) + r^* \frac{\partial \bar{w}_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \bar{w}_\theta^*}{\partial \theta^2} \right. \\ & \quad \left. + \cot \theta \frac{\partial \bar{w}_\theta^*}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial \theta} - \frac{\bar{w}_\theta^*}{\sin^2 \theta} \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{r\theta, D-T}^*) + \frac{\tau_{r\theta, D-T}^*}{r^*} \right] \quad (52) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten

$$r^* = 1: \quad \bar{w}_r^* = 0 \quad (53)$$

$$\tau_{r\theta}^* = -\frac{4}{Re} \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\bar{w}_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (54)$$

$$r^* = \infty: \quad \bar{w}_r^* = -\sin \theta \quad (55)$$

$$\bar{w}_\theta^* = \cos \theta \quad (56)$$

$$\theta = 0; \pi: \quad \partial \bar{w}_r^* / \partial \theta = 0 \quad (57)$$

$$\bar{w}_\theta^* = 0 \quad (58)$$

Die in den Differentialgleichungen und Randbedingungen auftretenden dimensionslosen Größen sind folgendermaßen definiert:

$$t^* = \frac{t v}{R^2} \quad \text{dimensionslose Zeit} \quad (59)$$

$$\bar{w}_r^* = \bar{w}_r / w_\infty \quad \text{bezogene zeitlich gemittelte radiale Geschwindigkeitskomponente} \quad (60)$$

$$\bar{w}_\theta^* = \bar{w}_\theta / w_\infty \quad \text{bezogene zeitlich gemittelte tangentielle Geschwindigkeitskomponente} \quad (61)$$

$$\bar{p}^* = \frac{\bar{p} - p_\infty}{\rho w_\infty^2 / 2} \quad \text{bezogener Druck} \quad (62)$$

$$\tau_{r\theta}^* = \frac{\tau_{r\theta}}{\rho w_\infty^2 / 2} \quad \text{bezogene örtliche viskose Schubspannung} \quad (63)$$

Die Kontinuitätsgleichung erhält im sphärischen Koordinatensystem die folgende dimensionslose Form:

$$\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \bar{w}_r^*) + \frac{1}{r^* \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{w}_\theta^* \sin \theta) = 0 \quad (64)$$

Zur Kennzeichnung des Strömungswiderstandes dient der durch Gl. (2) definierte Widerstandsbeiwert. Er setzt sich zusammen aus einem Widerstandsbeiwert des Drucks und den viskosen sowie turbulenten Spannungen:

$$\zeta = \zeta_D + \zeta_V + \zeta_{D-T} \quad (65)$$

Die Berechnungsgleichungen für den Widerstandsbeiwert werden im nächsten Abschnitt erläutert.

4.2 Einführung der Wirbeltransportgleichung

Die gekoppelten Differentialgleichungen (51), (52) und (64) lassen sich für die gegebenen Randbedingungen mit Hilfe numerischer Methoden lösen. Bei der Verwendung von Differenzenverfahren ist es zweckmäßig, zur Erhöhung der

Stabilität der numerischen Rechnungen die Impulstransportgleichung durch die Wirbeltransportgleichung zu ersetzen. Die Wirbelstärke gibt die örtliche Drehung der Strömung an. Sie ist gleich dem Betrag des Wirbelvektors:

$$\Phi = \nabla \times \bar{w} \quad (66)$$

Wegen der vorausgesetzten Rotationssymmetrie hat der Wirbelvektor nur eine Komponente, die senkrecht zur r, θ -Ebene steht. Für den Betrag des Wirbelvektors erhält man in dimensionsloser Form die Beziehung

$$\Phi^* = \frac{1}{r^*} \left[\frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \bar{w}_\theta^*) - \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial \theta} \right] \quad (67)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten \bar{w}_r^* und \bar{w}_θ^* werden durch die Stromfunktion Ψ^* ausgedrückt. Die Stromfunktion ergibt sich aus der Integration der Kontinuitätsgleichung. Sie ist demzufolge ein Maß für den Volumenstrom um die kugelförmig angenommene Blase. Für die Geschwindigkeitskomponenten gelten die Beziehungen [35]

$$\bar{w}_r^* = -\frac{1}{r^{*2} \sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \quad (68)$$

$$\bar{w}_\theta^* = \frac{1}{r^* \sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial r^*} \quad (69)$$

Die dimensionslose Wirbelstärke und Stromfunktion werden wie folgt definiert:

$$\Phi^* = \frac{\Phi R}{w_\infty} \quad \text{Wirbelstärke} \quad (70)$$

$$\Psi^* = \frac{\Psi}{w_\infty R^2} \quad \text{Stromfunktion} \quad (71)$$

Mit Gl. (67), (68) und (69) erhält die Definitionsgleichung für die Wirbelstärke die Form

$$\Phi^* r^* \sin \theta = \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\sin \theta}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \right) \quad (72)$$

Aus Gl. (51) und (52) für das Geschwindigkeitsfeld erhält man mit Gl. (64), (67), (68) und (69) die gesuchte Wirbeltransportgleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} r^* \sin \theta + \sin \theta \frac{Re}{2} \left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Phi^*}{r^* \sin \theta} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\Phi^*}{r^* \sin \theta} \right) \right] \\ & = \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} (\Phi^* r^* \sin \theta) + \frac{\sin \theta}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi^* r^* \sin \theta) \right] \\ & - \frac{Re}{4} r^* \sin \theta \left[\frac{\partial^2 \tau_{r\theta, D-T}^*}{\partial r^{*2}} + \frac{4}{r^*} \frac{\partial \tau_{r\theta, D-T}^*}{\partial r^*} \right. \\ & \left. - \frac{1}{r^{*2}} \left(\frac{\partial^2 \tau_{r\theta, D-T}^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tau_{r\theta, D-T}^*}{\partial \theta} \cot \theta - \frac{\tau_{r\theta, D-T}^*}{\sin^2 \theta} \right) \right] \quad (73) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten hierfür

$$r^* = 1: \quad \Psi^* = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} = 0 \quad (75)$$

$$\tau_{r\theta}^* = -\frac{4}{Re} \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\bar{w}_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (54)$$

$$\Phi^* = \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial r^*} \quad (76)$$

$$r^* = \infty: \quad \Psi^* = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left(r^{*2} - \frac{1}{r^*} \right) \quad (77)$$

$$\Phi^* = 0 \quad (78)$$

$$\theta = 0; \pi: \quad \Psi^* = 0 \quad (79)$$

$$\Phi^* = 0 \quad (80)$$

Der gesamte Widerstandsbeiwert ζ setzt sich nach Gl. (65) aus dem Widerstandsbeiwert des Drucks ζ_D sowie den viskosen und turbulenten Spannungen ζ_V und ζ_{D-T} zusammen. Den Druckwiderstandsbeiwert erhält man aus der Integration des örtlichen Drucks über die Oberfläche der Blase. Mit der Definition für den dimensionslosen Druck, Gl. (62), folgt für den Druckwiderstandsbeiwert die Berechnungsgleichung

$$\zeta_D = 2 \int_0^\pi \bar{p}_w^* \sin \theta \cos \theta \, d\theta \quad (81)$$

Die Gleichung zur Berechnung des zeitlich gemittelten örtlichen Drucks \bar{p}_w^* an der Blasenoberfläche läßt sich aus Gl. (51) und (52) herleiten. Aus Gl. (52) ergibt sich zunächst mit der Kontinuitätsgleichung, Gl. (64), und der Gleichung für die Wirbelstärke, Gl. (72), die Beziehung für den tangentialen Druckgradienten

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \theta} \right)_w &= \frac{4}{Re} \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*} \right)_w + \Phi_w^* \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{w}_{\theta w}^{*2}) \\ &- \left(\frac{\partial \tau_{r\theta, D-T}^*}{\partial r^*} + 3 \tau_{r\theta, D-T}^* \right)_w \quad (82) \end{aligned}$$

Nach Integration erhält man hieraus den lokalen Druck \bar{p}_w^* . Zuvor muß jedoch in Gl. (82) für die zeitlich gemittelte Tangentialgeschwindigkeit \bar{w}_θ^* ein Ausdruck eingeführt werden, in dem die Wirbelstärke enthalten ist. Mit der Bedingung, daß an der Blasenoberfläche die viskose Schubspannung null sein soll, folgt aus Gl. (54) die Beziehung

$$\left(\frac{\partial \bar{w}_\theta^*}{\partial r^*} \right)_w - \bar{w}_{\theta w}^* = 0 \quad (83)$$

Mit Gl. (72), (68) und (69) ergibt sich daraus für die dimensionslose zeitlich gemittelte Tangentialgeschwindigkeit an der Phasengrenzfläche

$$\bar{w}_{\theta w}^* = \frac{1}{2} \Phi_w^* \quad (84)$$

Wird hiermit Gl. (82) integriert, so erhält man

$$\begin{aligned} \bar{p}_w^* &= \bar{p}_0^* + \frac{4}{Re} \int_0^\theta \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*} \right)_w + \Phi_w^* \right] d\theta - 0,25 \Phi_w^{*2} \\ &- \int_0^\theta \left(\frac{\partial \tau_{r\theta, D-T}^*}{\partial r^*} + 3 \tau_{r\theta, D-T}^* \right)_w d\theta \quad (85) \end{aligned}$$

Da der Staudruck \bar{p}_0^* eine vom Umfangswinkel unabhängige Größe ist, ist es nicht notwendig, ihn bei der Berechnung des Widerstandsbeiwerts zu berücksichtigen. Damit folgt aus Gl. (81) unter Berücksichtigung von Gl. (85) für die Berechnungsgleichung des Druckwiderstands

$$\zeta_D = 2 \int_0^\pi \left\{ \frac{4}{Re} \int_0^\theta \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*} \right)_w + \Phi_w^* \right] d\theta - 0,25 \Phi_w^{*2} - \int_0^\theta \left(\frac{\partial \tau_{r\theta, D-T}^*}{\partial r^*} + 3 \tau_{r\theta, D-T}^* \right)_w d\theta \right\} \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (86).$$

Auf den Widerstandsbeiwert der viskosen Spannungen hat lediglich die viskose Normalspannung einen Einfluß. Für sie lautet die Gleichung

$$\tau_{rr}^* = -\frac{8}{Re} \frac{\partial \bar{w}_r^*}{\partial r^*} \quad (87).$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (64) und Gl. (84) gilt für die viskose Normalspannung an der Blasenoberfläche

$$\tau_{rrw}^* = \frac{4}{Re} \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \right)_w + \Phi_w^* \cot \theta \right] \quad (88).$$

Integration von Gl. (88) über die Oberfläche der Blase führt zum Widerstandsbeiwert ζ_V aufgrund der viskosen Normalspannung. Die allgemeine Beziehung für ζ_V lautet

$$\zeta_V = 2 \int_0^\pi \tau_{rrw}^* \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (89).$$

Nach Einführen von Gl. (88) erhält man die Berechnungsgleichung

$$\zeta_V = \frac{8}{Re} \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \right)_w \sin \theta \cos \theta + \Phi_w^* \cos^2 \theta \right] d\theta \quad (90).$$

Für die Berechnung des Widerstandsbeiwertes der turbulenten Spannung wird allein die turbulente Schubspannung $\tau_{r\theta, D-T}^*$ berücksichtigt, da die turbulenten Normalspannungen gegenüber der turbulenten Schubspannung $\tau_{r\theta, D-T}^*$ sowie den viskosen Spannungen vernachlässigbar klein sind und außerdem über den Umfangswinkel θ konstant angenommen werden. Die Berechnungsgleichung für den Widerstandsbeiwert der turbulenten Spannung lautet damit

$$\zeta_{D-T} = 2 \int_0^\pi -(\tau_{r\theta, D-T, w}^* \sin^2 \theta) d\theta \quad (91).$$

Für die turbulente Schubspannung wurde bereits die empirische Gleichung (46) angegeben, die so bestimmt werden muß, daß der errechnete Widerstandsbeiwert mit dem gemessenen übereinstimmt. Die in Gl. (46) enthaltene Tangentialgeschwindigkeit muß mit Hilfe von Gl. (69) durch die Stromfunktion ausgedrückt werden.

4.3 Entwicklung der Differenzengleichungen

Für die numerische Lösung der Wirbeltransportgleichung und der Gleichungen für den Widerstandsbeiwert wurde das Differenzenverfahren angewendet. In den Differentialgleichungen werden hierbei die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten approximiert. Bei einer Unterteilung der Ortskoordinaten r^* und θ in $N-1$ und $M-1$ Schritte ergibt sich ein Netz von N mal M Gitterpunkten, an denen die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten angenähert werden müssen. Auf diese Weise wird eine Differentialgleichung durch ein System von N mal M algebraischen Gleichungen ersetzt.

Für die Ableitungen der Funktionen nach den Ortskoordinaten gelten folgende Differenzenformeln:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{2 \Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (92),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \quad (93),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left\{ g \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) f_{i+1} - \left[g \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) + g \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] f_i \right. \\ \left. + g \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) f_{i-1} \right\} \quad (94). \end{aligned}$$

In diesen zentralen Differenzenformeln bezeichnen f und g die unbekanntenen Funktionswerte, x die Ortskoordinate, Δx die Schrittweite zwischen den diskreten Funktionswerten und i die Zählgröße innerhalb des Differenzennetzes.

Da die von den instationären Transportgleichungen ausgehenden Differenzenverfahren wesentlich stabiler als die Gleichungen für den stationären Zustand sind, kann das hier behandelte Problem als instationärer Anlaufvorgang betrachtet werden, indem zusätzlich die zeitliche Änderung der Funktionswerte berücksichtigt wird. Diese Möglichkeit wurde bei der Aufstellung der Differentialgleichung bereits berücksichtigt. Zu Beginn der Rechnung muß dann eine Anfangsverteilung vorgegeben werden. Die Änderung der Funktionswerte mit der Zeit wird so lange verfolgt, bis der gesuchte stationäre Endwert erreicht ist. Zur Einsparung von Rechenzeit wurde das Anfangsfeld so gewählt, daß es dem Endzustand möglichst nahekommt. Für die Ableitung nach der Zeit wird der vordere Differenzenquotient eingesetzt [152]:

$$\frac{\partial f}{\partial t^*} \approx \frac{1}{\Delta t^*} (f^{n+1} - f^n) \quad (95).$$

Hierin bedeutet n die Zeitstufe und Δt^* die Differenz zweier Zeitstufen.

Für die in Zeitrichtung parabolischen Differentialgleichungen wird das Crank-Nicolson-Verfahren [153] angewendet. Wird in den Differentialgleichungen das Zeitglied von den ortsabhängigen Termen getrennt, so erhält man mit dem Crank-Nicolson-Faktor 0,5 die Beziehung

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t^*} = 0,5(\delta f^{n+1}) + 0,5(\delta f^n) \quad (96).$$

Für die radiale Koordinate wird ferner die Transformation $r^* = e^z$ eingeführt. Die Definitionsgleichung für die radiale Koordinate lautet damit

$$z = \ln r^* \quad (97).$$

Durch diese Koordinatentransformation ergeben sich in der Nähe der Blasenoberfläche kleine Differenzenschritte; mit zunehmendem Abstand von der Phasengrenzfläche vergrößert sich die Schrittweite. Hierdurch können starke Änderungen der Funktionswerte an der Blasenoberfläche gut erfaßt werden. Ferner werden numerische Rechnungen für eine Blase in einer nahezu unendlich ausgedehnten Flüssigkeit möglich, obwohl das Differenzenverfahren nur eine endliche Anzahl von Schritten zuläßt.

Die Aufteilung des Differenzennetzes und die gewählten Bezeichnungen sind Bild 9 zu entnehmen. In z -Richtung wird der Index i , in θ -Richtung der Index j und für die

nung hängt stark von der richtigen Wahl dieses Faktors ab. Aus den Rechnungen ergab sich ein optimaler Relaxationsfaktor für die Wirbelstärke von $\omega_\varphi=0,7$ und für die Stromfunktion von $\omega_\psi=1,6$.

Zur Verringerung der Iterationszahl und der Rechenzeit werden die Unbekannten eines neuen Zeitschritts durch Extrapolation aus den schon berechneten Zeitschritten vorausgeschätzt. Für die Extrapolation wird ein Polynom zweiter Ordnung verwendet:

$$\varphi^{n+1} = 3\varphi^n - 3\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \quad (113).$$

In der Nähe der Blasenoberfläche sind die Änderungen der örtlichen Geschwindigkeitskomponenten in radialer Richtung am größten und werden mit zunehmender Entfernung von der Blasenoberfläche geringer. Es ist daher sinnvoll, in der Nähe der Blasenoberfläche eine kleine Teilung des Differenznetzes und in großer Entfernung von der Blasenoberfläche eine größere Schrittweite vorzunehmen. Die für die radiale Koordinate z verwendete Transformation nach Gl. (97) ist für diese Anforderungen nicht ausreichend. Aus diesem Grunde wurde eine variable Schrittweitensteuerung eingeführt, mit der man von sehr kleinen Schrittweiten in der Nähe der Blasenoberfläche durch Verdopplung der Schrittweite zu größeren Teilungen des Differenznetzes übergeht. An der Blasenoberfläche wurde eine Schrittweite von $\Delta z=0,025$ und im Bereich des äußeren Randes $\Delta z=0,1$ gewählt.

Die angegebenen Differenzenformeln wurden unter der Annahme einer konstanten Schrittweite hergeleitet. Daher muß bei der numerischen Rechnung darauf geachtet werden, daß an den Knotenpunkten, an denen eine Schrittweitenänderung vorgenommen wird, auch die entsprechenden Funktionswerte bei verdoppelter Schrittweite verwendet werden. Die Schrittweite in Umfangsrichtung wurde über den Umfang der Blase nicht variiert. Sie betrug $\Delta\theta=6^\circ$.

Die Randbedingung für die Wirbelstärke an der Blasenoberfläche ist nach Gl. (76) eine Funktion der Stromfunktion. Nach Einführen der Koordinatentransformation gemäß Gl. (97) und der transformierten Wirbelstärke nach Gl. (101) lautet die Randbedingung

$$\varphi_w = 2 \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \quad (114).$$

Setzt man für die Stromfunktion ein Polynom dritten Grades an, so ergibt sich für diese Randbedingung die Differenzgleichung

$$\varphi_{1,j} = \frac{2}{15\Delta z + 27\Delta z^2} (13,5\Psi_{3,j}^* - 4\Psi_{4,j}^*) \quad (115).$$

Zur Berechnung des Druckwiderstandsbeiwerts ist gemäß Gl. (86) die Kenntnis des Gradienten der Wirbelstärke und der turbulenten Schubspannung senkrecht zur Blasenoberfläche erforderlich. Mit Gl. (97) und (101) ergibt sich für den Druckwiderstandsbeiwert die Gleichung

$$\zeta_D = 2 \int_0^\pi \left\{ \frac{4}{Re} \int_0^\theta \left[\left(\frac{\partial(\varphi/e^z)}{\partial z} \right)_w + \varphi_w \right] \frac{1}{\sin\theta} d\theta - 0,25 \frac{\varphi_w^2}{\sin^2\theta} - \int_0^\theta \left[\left(\frac{\partial\tau_{r\theta,D-T}^*}{\partial z} \right)_w + 3\tau_{r\theta,D-T}^* \right] d\theta \right\} \sin\theta \cos\theta d\theta \quad (116).$$

Die Gradienten an der Oberfläche können mit Hilfe eines Potenzansatzes

$$\varphi = a + bz + cz^2 + dz^3 \quad (117)$$

numerisch berechnet werden. Der Gradient der Wirbelstärke ergibt sich damit zu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{-11\varphi_{1,j} + 18\varphi_{2,j} - 9\varphi_{3,j} + 2\varphi_{4,j}}{6\Delta z} \quad (118).$$

Eine analoge Gleichung erhält man für den Gradienten der turbulenten Schubspannung, wenn φ durch $\tau_{r\theta,D-T}^*$ ersetzt wird. Sind die Gradienten als Funktionswerte gegeben, kann die Widerstandsgleichung numerisch integriert werden. Zur numerischen Integration wurde die Simpsonsche Regel verwendet.

Aus den mitgeteilten Gleichungen geht hervor, daß beim Berechnen des Strömungsfeldes um eine formveränderliche Blase die Reynolds-Zahl Re als Einflußgröße zu berücksichtigen ist. Im Bereich großer Reynolds-Zahlen ist der Widerstandsbeiwert formveränderlicher Blasen wesentlich höher als der formbeständiger Kugelblasen. Diese Erhöhung ist mit den Auswirkungen der ständigen Formänderungen zu erklären. Der maßgebende Anteil am Blasenwiderstand wird durch die turbulente Schubspannung $\tau_{r\theta,D-T}^*$ hervorgerufen. Da der Widerstandsbeiwert im Bereich der formlosen Blasen gemäß Bild 1 unabhängig von der Reynolds-Zahl ist, muß das demzufolge auch für die turbulente Schubspannung gelten. Die zeitlich gemittelte örtliche Geschwindigkeitsverteilung hängt dann ebenfalls nicht von der Rey-

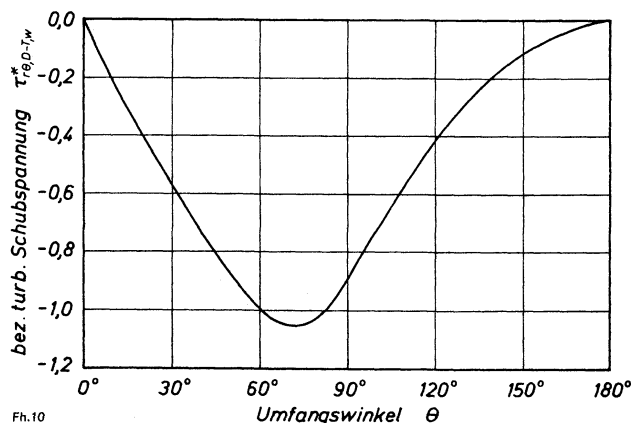


Bild 10. Bezogene turbulente Schubspannung in der Phasengrenzfläche in Abhängigkeit vom Umfangswinkel.

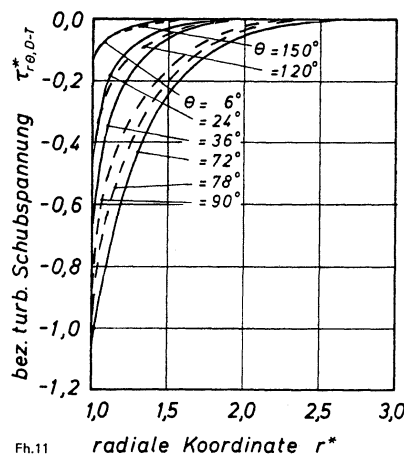
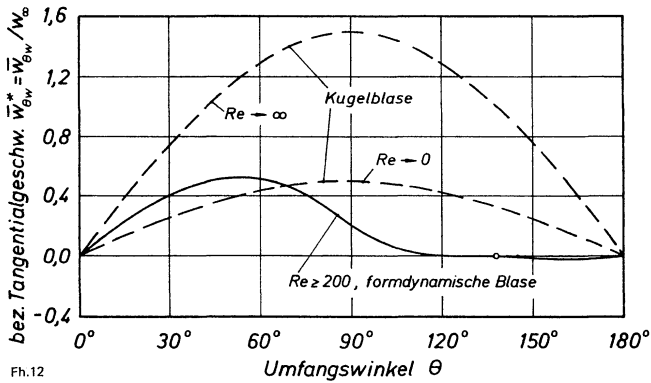
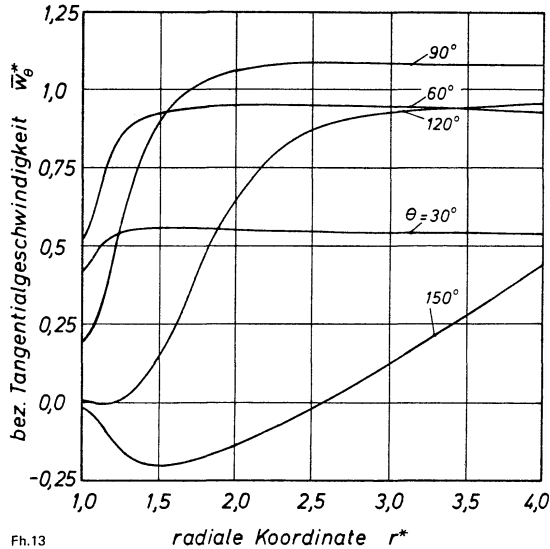


Bild 11. Bezogene turbulente Schubspannung in Abhängigkeit von der radialen Koordinate. Parameter ist der Umfangswinkel.



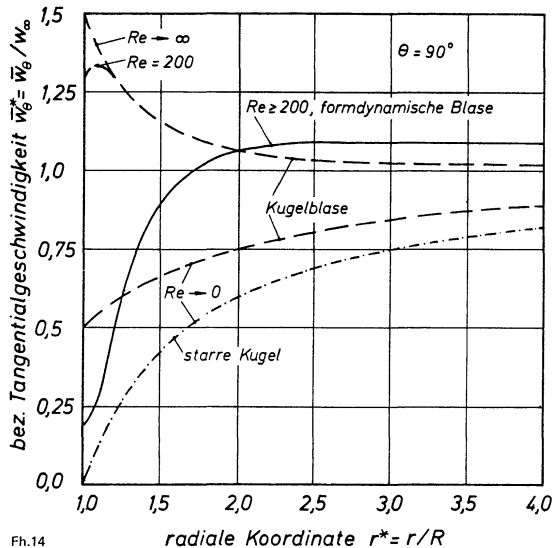
Fh.12

Bild 12. Bezojene Tangentialgeschwindigkeit in der Blasenoberfläche in Abhängigkeit vom Umfangswinkel.



Fh.13

Bild 13. Bezojene Tangentialgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der radialen Koordinate für verschiedene Umfangswinkel.



Fh.14

Bild 14. Bezojene Tangentialgeschwindigkeit bei $\theta = 90^\circ$ in Abhängigkeit von der radialen Koordinate.

nolds-Zahl ab. Die durchgeführten Rechnungen zeigen, daß diese Feststellungen für Werte der Reynolds-Zahl $Re \geq 200$ gültig sind [23].

Ein Vergleich der Widerstandsanteile ergibt, daß die turbulente Schubspannung den größten Anteil am gesamten

Widerstand der formveränderlichen Blase hat. Der sich aus der Integration des Drucks über die Blasenoberfläche ergebende Widerstand hat nur einen geringen Anteil am Gesamtwiderstand. Der durch die viskose Normalspannung auf der Blasenoberfläche hervorgerufene Widerstand ist gegenüber den übrigen Anteilen vernachlässigbar klein. Mit den Berechnungsgleichungen (86), (90) und (91) für die einzelnen Anteile ergeben sich die Werte

$$\zeta = 2,6 \quad (119),$$

$$\zeta_D = 0,4 \quad (120),$$

$$\zeta_V = 0,0007 \quad (121),$$

$$\zeta_{D-T} = 2,2 \quad (122).$$

Der für den gesamten Widerstandsbeiwert berechnete Betrag stimmt mit dem experimentell ermittelten Wert überein.

4.4 Diskussion einiger Ergebnisse

Die in diesem Abschnitt dargestellten Ergebnisse gelten für formdynamische Blasen im Bereich der Reynolds-Zahl $Re \geq 200$. Für den unteren Grenzwert der Reynolds-Zahl Re_C einer formdynamischen Blase gilt Gl.(12). Die obere Grenze ist durch den Zerfall der Blasen während des Aufsteigens gegeben, da ein bestimmtes Blasenvolumen nicht überschritten werden kann. Im Bereich dieser formdynamischen Blase wird der maßgebende Anteil am Blasenwiderstand durch die turbulente Schubspannung $\tau_{r,\theta,D-T}^*$ hervorgerufen.

In Bild 10 und 11 sind die turbulente Schubspannung in der Phasengrenzfläche über dem Umfangswinkel und die örtliche turbulente Schubspannung über der radialen Koordinate aufgetragen [23]. Mit zunehmendem Umfangswinkel steigt der Betrag der turbulenten Schubspannung steil an, durchläuft etwa bei $\theta = 72^\circ$ ein Maximum und fällt dann wieder ab. Das Maximum der turbulenten Schubspannung kennzeichnet den Ort der größten Geschwindigkeitsschwankung in tangentialer Richtung bei über den Umfang der Blase konstant angenommener radialer Schwankungsgeschwindigkeit. Die turbulente Schubspannung ist im Rückströmungsgebiet verhältnismäßig klein. Infolge der Schwankebewegung der Phasengrenzfläche ist die turbulente Schubspannung an der Grenzfläche am größten und klingt mit zunehmendem Abstand ab. Aus Bild 11 geht hervor, daß die durch Deformationsturbulenz hervorgerufene Schubspannung bereits nach einem Abstand von nur einem Blasenradius von der Oberfläche der Blase verschwunden ist.

Der bezogene zeitliche Mittelwert der Tangentialgeschwindigkeit in der Grenzfläche einer formdynamischen Blase ist in Bild 12 in Abhängigkeit vom Umfangswinkel aufgetragen. Zum Vergleich ist auch die Tangentialgeschwindigkeit in der Grenzfläche einer formbeständigen Kugelblase für Potentialströmung ($Re \rightarrow \infty$) und für schleichende Umströmung ($Re \rightarrow 0$) eingetragen. Für formdynamische Blasen wurde ein unsymmetrisches Geschwindigkeitsprofil erhalten. Aus Bild 12 ist zu erkennen, daß wegen der Wirbelbildung die Tangentialgeschwindigkeit der formdynamischen Blase im hinteren Teil der Blase extrem klein ist.

In Bild 13 ist die bezogene zeitlich gemittelte Tangentialgeschwindigkeit in der Umgebung einer formdynamischen Blase über der radialen Koordinate dargestellt. Parameter ist der Umfangswinkel θ . Der Verlauf der Tangentialgeschwindigkeit hat in der Nähe der Blasenoberfläche einen

Wendepunkt. Im Ablösegebiet ist die Tangentialgeschwindigkeit in der Phasengrenzfläche sehr klein und nimmt erst in größerem Abstand von der Oberfläche größere Werte an.

Betrachtet man die Tangentialgeschwindigkeit für den Umfangswinkel $\theta=90^\circ$ über der radialen Koordinate, so erhält man Bild 14. Neben dem Verlauf der zeitlich gemittelten Tangentialgeschwindigkeit der formdynamischen Blase sind die Profile für die Grenzfläche formbeständiger Kugelblasen aufgetragen. Der Verlauf der Tangentialgeschwindigkeit einer formstabilen Kugelblase für $Re=200$ wurde aus dem von U. Haas, H. Schmidt-Traub und H. Brauer [18] errechneten Feld der Stromfunktion umgerechnet. Außerdem ist das Profil für die schleichende Umströmung einer starren Kugel eingetragen.

Die zeitlich gemittelte Tangentialgeschwindigkeit in Oberflächennähe ist für formdynamische Blasen bei gleicher Reynolds-Zahl wesentlich kleiner als für formbeständige Blasen. Es ist bemerkenswert, daß der stochastische Deformationsprozeß eine extrem kleine Tangentialgeschwindigkeit in der Nähe der Grenzfläche zur Folge hat. Das beruht aber auf der durch die Verformungen hervorgerufenen radialen Fluidgeschwindigkeit, die ihr Maximum in der Phasengrenzfläche hat und mit zunehmendem Abstand abnimmt. Die Verformungen der Blase bewirken zeitlich und örtlich eine Umlenkung der Strömung quer zur Hauptströmungsrichtung. Durch die radiale Bewegung der Grenzfläche wird die tangential Fluidbewegung von der Blasenoberfläche verdrängt.

Die Stromfunktion, die sich aus der Integration der Kontinuitätsgleichung ergibt, ist ein Maß für den Volumenstrom zwischen zwei Stromlinien. In Bild 15 ist als Beispiel das errechnete Stromlinienfeld um eine formdynamische Blase dargestellt. Die Stromlinien vermitteln einen Eindruck von den zeitlich gemittelten örtlichen Strömungsverhältnissen

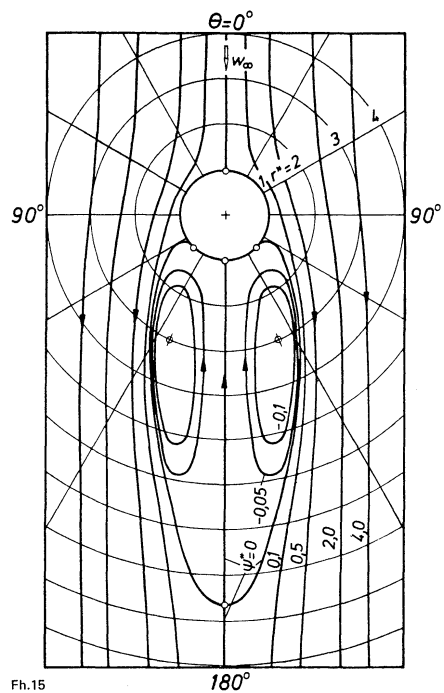


Bild 15. Linien konstanter zeitlich gemittelter Werte der Stromfunktion um eine formdynamische Blase.

um eine formdynamische Blase. Das Ablösegebiet mit Ringwirbel, das auf der Rückseite der Blase auftritt, ist ein typisches Kennzeichen für formdynamische Blasen und somit für Deformationsturbulenz. Bei der Umströmung formstabiler Kugelblasen kann ein solcher Ringwirbel nicht auftreten.

5. Instationärer Stofftransport durch die Grenzfläche einer formdynamischen Blase

Durch Formänderungen der in einer Flüssigkeit aufsteigenden Blase werden in der umgebenden Phase turbulenzähnliche Zustände erzeugt und dadurch außer Geschwindigkeitsschwankungen auch zeitliche Partialdichteschwankungen verursacht. Der instationäre Stoffaustausch zwischen einer formdynamischen Blase und der umgebenden Flüssigkeit wird entsprechend dem in Kapitel 3 beschriebenen Modell für eine volumengleiche Kugelblase berechnet. Die Wirkung der Deformationsturbulenz auf den Stofftransport wird berücksichtigt. Es wird davon ausgegangen, daß die Stoffgrößen sowie das Volumen der Blase konstant bleiben und keine weiteren Stoffquellen in der Flüssigkeit vorhanden sind. Die Stoffstromdichte der diffundierenden Komponente A soll so klein sein, daß die Dichte des Gemischs ebenfalls als konstant angesehen werden kann. Der molekulare Transport erfolgt allein durch Ficksche Diffusion. Weiterhin wird die Annahme getroffen, daß die Geschwindigkeitsverteilung um die Blase zeitlich unveränderlich ist.

Wegen der Annahme sehr kleiner Stoffstromdichten wird die Strömung durch den Stofftransport nicht beeinflusst. Zur Berechnung des Stofftransports können daher die bereits berechneten Geschwindigkeitsfelder verwendet werden.

5.1 Berechnung des Konzentrationsfeldes

5.1.1 Stofftransportgleichung

Voraussetzungsgemäß befindet sich der Stofftransportwiderstand allein in der Umgebung der Blase. Hierdurch ist die Konzentration in der Blase vom Ort unabhängig und ändert sich nur mit der Zeit, so daß die Stofftransportgleichung in der Blase entfällt. Ein Konzentrationsprofil tritt nur in der die Blase umgebenden Flüssigkeit auf. Die Stofftransportgleichung für die umgebende Flüssigkeit lautet

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \cdot w \rho_A = -\nabla \cdot m_A \quad (123)$$

Es bedeuten ρ_A die Partialdichte, m_A den Vektor der Massenstromdichte der diffundierenden Komponente A und t die Zeit

Für den Stofftransport zwischen einer formdynamischen Blase und der umgebenden Flüssigkeit wird die Stofftransportgleichung für die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeit und der Partialdichte aus Gl. (123) entwickelt. Dazu

wird die momentane örtliche Geschwindigkeit w entsprechend Gl. (40) und die momentane örtliche Partialdichte ρ_A als Summe aus ihrem zeitlichen Mittelwert $\bar{\rho}_A$ und der Schwankungsgröße ρ'_A dargestellt:

$$\rho_A = \bar{\rho}_A + \rho'_A \quad (124)$$

Führt man Gl. (40) und (124) in Gl. (123) ein, so ergibt sich die Stofftransportgleichung für turbulente Strömungen:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_A}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\rho}_A = -\nabla \cdot \bar{m}_A - \nabla \cdot \overline{w' \rho'_A} \quad (125)$$

Der die Schwankungsgrößen enthaltene Term kann als zusätzliche turbulente Massenstromdichte aufgefaßt werden. Für das Zusatzglied in Gl. (125) gilt damit die Gleichung

$$\nabla \cdot \overline{w' \rho'_A} = \nabla \cdot \dot{m}_{A,D-T} \quad (126)$$

Die gesamte Massenstromdichte \dot{m}_A setzt sich aus dem zeitlichen Mittelwert der molekularen Massenstromdichte \dot{m}_{Am} und der turbulenten Massenstromdichte $\dot{m}_{A,D-T}$ zusammen:

$$\dot{m}_A = \bar{\dot{m}}_{Am} + \dot{m}_{A,D-T} \quad (127)$$

Für die molekulare Massenstromdichte wird der Ficksche Ansatz eingeführt.

Zur Berechnung des Stofftransports wird das gleiche sphärische Koordinatensystem wie zur Berechnung des Impulstransports verwendet. Im sphärischen Koordinatensystem lautet die Stofftransportgleichung (125) in ausgeschriebener dimensionsloser Form:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \xi}{\partial Fo_m} + \frac{Re Sc}{2} \left(\bar{w}_r^* \frac{\partial \xi}{\partial r^*} + \frac{\bar{w}_\theta^*}{r^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r^{*2}} \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{\partial \xi}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \right] \\ & - \frac{Re Sc}{2} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \overline{w_r' \xi'} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^* \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\overline{w_\theta' \xi'} \sin \theta \right) \right] \quad (128) \end{aligned}$$

Außer den bereits bekannten Kennzahlen werden in dieser Gleichung und in weiteren folgende dimensionsfreie Größen verwendet:

$$\xi = \frac{\bar{\rho}_A - \rho_{A\infty}}{\rho_{Ap0} - \rho_{A\infty}} \quad \begin{array}{l} \text{örtliche dimensionslose} \\ \text{Konzentration in der} \\ \text{Flüssigkeit} \end{array} \quad (129)$$

$$\xi_p = \frac{\bar{\rho}_{Ap} - H^* \rho_{A\infty}}{\rho_{Ap0} - H^* \rho_{A\infty}} \quad \begin{array}{l} \text{örtliche dimensionslose} \\ \text{Konzentration in der} \\ \text{Phasengrenzfläche} \end{array} \quad (130)$$

Die Indizes kennzeichnen folgende Zustände: p Phasengrenzfläche, ∞ große Entfernung von der Blase, 0 zur Zeit $t = 0$.

5.1.2 Anfangs- und Randbedingungen

Zu Beginn des Konzentrationsausgleichs sind die Konzentrationen sowohl in der Blase als auch in der Flüssigkeit konstant. Die Anfangsbedingungen lauten also

$$Fo_m = 0: \quad \xi = 0 \quad (131)$$

$$\xi_p = 1 \quad (132)$$

Das Konzentrationsfeld ist im zeitlichen Mittel zu den Stau-punktgeraden rotationssymmetrisch; daraus folgt die Randbedingung

$$\theta = 0, \pi: \quad \partial \xi / \partial \theta = 0 \quad (133)$$

In unendlicher Entfernung von der Blase ist die Partialdichte unveränderlich:

$$r^* = \infty: \quad \xi = 0 \quad (134)$$

In der Phasengrenzfläche wird für alle Zeiten ein Konzentrationsgleichgewicht entsprechend dem Henryschen Gesetz, Gl. (34), angenommen. Diese Bedingung führt auf Grund der Definitionen für ξ und ξ_p gemäß Gl. (129) und (130) zu

$$r^* = 1: \quad \xi = \xi_{p1} = \xi_{p2} = \xi_p \quad (135)$$

Da der Stofftransportwiderstand nur in der Umgebung der Blase auftritt, ist die Konzentration in der Blase örtlich konstant und allein eine Funktion der Zeit. Die Stoffstromdichte ist in der Phasengrenzfläche für beide Phasen gleich. Hieraus folgt als Grenzflächenbedingung

$$r^* = 1: \quad \frac{\partial \xi_{p1}}{\partial Fo_m} = \frac{-3/2}{H^*} \int_0^\pi \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial r^*} \right)_p \sin \theta d\theta \quad (136)$$

Die Konzentration ξ_{p1} ist gleich ξ_{p2} und ebenfalls gleich der mittleren Konzentration $\bar{\xi}_1$ in der Blase.

5.1.3 Mathematischer Ansatz zur Berechnung der turbulenten Massenstromdichte

Um Gl. (128) für den Stofftransport in einer turbulenten Strömung lösen zu können, müssen die zeitlichen Mittelwerte des Produktes aus der Schwankungsgeschwindigkeit und der Schwankungskonzentration bekannt sein. Wegen der Kompliziertheit des turbulenten Austauschvorgangs gibt es noch keine rationale Theorie, die eine rein rechnerische Ermittlung dieser Mittelwerte ermöglicht. Bei dem aufzustellenden Ansatz über den Verlauf von Funktionen oder mindestens zur Festlegung von Zahlenwerten sind zusätzliche Hypothesen und experimentelle Aussagen erforderlich. Zur mathematischen Behandlung des Problems muß die von der Schwankungsbewegung hervorgerufene Massenstromdichte mit den zeitlichen Mittelwerten der Geschwindigkeit und der Konzentration verknüpft werden.

Da der Konzentrationsgradient in radialer Richtung sehr groß ist, bewirkt eine Bewegung senkrecht zur Blasenoberfläche eine größere momentane örtliche Konzentrationsdifferenz als in Richtung parallel zur Oberfläche. Zur Vereinfachung der Rechnungen soll daher angenommen werden, daß die von den Schwankungsgeschwindigkeiten in θ -Richtung hervorgerufene turbulente Massenstromdichte sehr klein ist gegenüber den Schwankungsbewegungen in r -Richtung. Von den drei Komponenten der turbulenten Massenstromdichte nach Gl. (126) soll daher nur die turbulente Massenstromdichte in radialer Richtung $\dot{m}_{Ar,D-T}$ berücksichtigt werden.

In Analogie zu dem Ansatz für die molekulare Massenstromdichte wird für die turbulente Massenstromdichte ein turbulenter Austauschkoefizient des Stoffes $\varepsilon_{m,D-T}$ einge-

führt. Für die turbulente Massenstromdichte gilt somit der Ansatz

$$\dot{m}_{Ar, D-T} = -\varepsilon_{m, D-T} \frac{\partial \bar{\rho}_A}{\partial r} \quad (137).$$

Wird dieser Ansatz in Gl.(128) eingeführt und die Geschwindigkeitskomponenten entsprechend Gl.(68) und (69) durch die Stromfunktion Ψ^* ersetzt, so ergibt sich die Stofftransportgleichung in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial Fo_m} + \frac{Re Sc}{2r^{*2} \sin \theta} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial r^*} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial r^*} \right) \\ = \frac{1}{r^{*2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r^*} \left[r^{*2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{m, D-T}}{D} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r^*} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (138). \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich zwischen theoretisch-numerisch und experimentell bestimmten Werten für den stationären Stoffaustausch an formdynamischen Blasen fand *H. Glaeser* [128] folgende Gleichung für den bezogenen turbulenten Austauschkoefizienten:

$$\frac{\varepsilon_{m, D-T}}{D} = 3,34 \cdot 10^{-5} Re^{1,45} Sc \frac{(r^*-1)}{r^{*6}} \quad (139).$$

Für die verschiedenen Werte der Reynolds-Zahl und der Schmidt-Zahl wurde der Austauschkoefizient berechnet und in Bild 16 in Abhängigkeit von der radialen Koordinate dargestellt. Ausgehend von der Blasenoberfläche bei $r^*=1$ steigt der Austauschkoefizient steil an, durchläuft ein ausgeprägtes Maximum und fällt dann wieder ab.

5.1.4 Mittlere Konzentration und Sherwood-Zahlen

Die dimensionslose mittlere Konzentration $\bar{\xi}_1$ in der Blase ist gleich der an der Phasengrenzfläche ξ_{p1} . Sie ist ein Maß für die Stoffmenge, die zwischen der Blase und der umgebenden Flüssigkeit noch übertragen werden kann.

Die Berechnung der Sherwood-Zahlen geht von der Definition eines von der Zeit t und vom Umfangswinkel θ abhängigen Stoffübergangskoeffizienten $\beta_{\theta t}$ aus:

$$\beta_{\theta t} \equiv \frac{\dot{m}_{A\theta t}}{\rho_{Ap0} - H^* \rho_{A\infty}} \quad (140).$$

Mit dem Fickschen Gesetz,

$$\dot{m}_{A\theta t} = -D \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial r} \right)_p \quad (141),$$

erhält man nach Einführen der dimensionslosen Schreibweise die Berechnungsgleichung für die örtliche momentane Sherwood-Zahl:

$$Sh_{\theta t} = -\frac{2}{H^*} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r^*} \right)_p \quad (142),$$

mit

$$Sh_{\theta t} = \frac{\beta_{\theta t} d_p}{D} \quad (143).$$

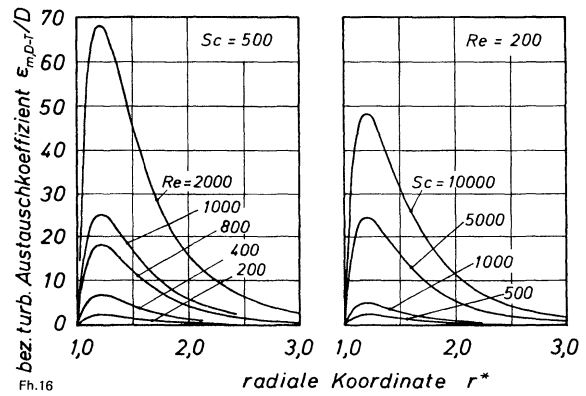


Bild 16. Bezogener turbulenter Austauschkoefizient in Abhängigkeit von der radialen Koordinate für $Sc=500$ und $Re=200$.

Parameter sind die Reynolds-Zahl und die Schmidt-Zahl.

Durch Integration über die Oberfläche der Blase erhält man den Flächenmittelwert der momentanen Sherwood-Zahl:

$$Sh_t = -\frac{1}{H^*} \int_0^\pi \left(\frac{\partial \xi}{\partial r^*} \right)_p \sin \theta d\theta \quad (144).$$

Eine weitere Integration liefert die über die Fläche und die Zeit gemittelte Sherwood-Zahl:

$$Sh = \frac{1}{Fo_m} \int_0^{Fo_m} Sh_t dFo_m \quad (145).$$

Die mittlere Konzentration in der Blase, die mit der an der Blasenoberfläche übereinstimmt, läßt sich unter Verwendung des Fickschen Gesetzes, Gl.(140), und der Definitionsgleichungen (129) und (130) auch mit Hilfe der mittleren Sherwood-Zahl ausdrücken. Sie lautet

$$\bar{\xi}_p = 1 - \frac{3}{2} Sh Fo_m \quad (146).$$

5.2 Hinweise zur numerischen Lösung der Stofftransportgleichung

Das Konzentrationsfeld in der Umgebung einer formdynamischen Blase wird durch Gl.(138) beschrieben. Nur für sehr kurze und sehr lange Zeiten lassen sich die Differentialgleichungen für das Konzentrationsfeld so weit vereinfachen, daß sich geschlossene Lösungen angeben lassen. Die Lösungsmethode ist in dem Buch von *H. Brauer* und *D. Mewes* [118] ausführlich beschrieben, und die dafür geltenden Gleichungen sind in Abschnitt 2.4.2 angegeben. Die Lösung der vollständigen Stofftransportgleichung, Gl.(138), erfolgt auf numerischem Wege. In der Nähe der Blasenoberfläche treten sehr große Konzentrationsgradienten auf. Durch Einführen der Koordinatentransformation gemäß Gl.(97) ist es möglich, die Ergebnisse der numerischen Lösung zu verbessern. Die Stofftransportgleichung erhält damit die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial Fo_m} e^{2z} + \frac{Re Sc}{2e^z \sin \theta} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ = \frac{1}{e^z} \frac{\partial}{\partial z} \left[e^z \left(1 + \frac{\varepsilon_{m, D-T}}{D} \right) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \quad (147). \end{aligned}$$

Entlang den Staupunktgeraden liefert eine Grenzwertbestimmung nach der Regel von Bernoulli-L'Hospital die Beziehung

$$\frac{\partial \xi}{\partial F_{Om}} e^{2z} - \frac{Re Sc}{2e^z \cos \theta} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta^2} \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{e^z} \frac{\partial}{\partial z} \left[e^z \left(1 + \frac{\varepsilon_{m,D-T}}{D} \right) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \quad (148).$$

Zur numerischen Berechnung der Konzentrationsverteilung wird ebenso wie zur Berechnung des Impulstransports das Crank-Nicolson-Verfahren angewendet. Das Differenzennetz wurde bereits in Bild 9 dargestellt und in Abschnitt 4.3 erläutert.

Die Differenzengleichung, mit der die Differentialgleichung (148) approximiert wird, lautet in allgemeiner Schreibweise:

$$\delta_{F_{Om}} \xi = \sigma \delta_z \xi^{n+1} + (1 - \sigma) \delta_z \xi^n + \sigma \delta_\theta \xi^{n+1} + (1 - \sigma) \delta_\theta \xi^n \quad (149).$$

Hierin haben die eingeführten Abkürzungen folgende Bedeutung:

$$\delta_{F_{Om}} \xi = e^{2z} \frac{\partial \xi}{\partial F_{Om}} \quad (150),$$

$$\delta_z \xi = \frac{1}{e^z} \frac{\partial}{\partial z} \left[e^{2z} \left(1 + \frac{\varepsilon_{m,D-T}}{D} \right) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] + \frac{Re Sc}{2e^z \sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (151),$$

$$\delta_\theta \xi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) - \frac{Re Sc}{2e^z \sin \theta} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \quad (152).$$

Entsprechend den Differenzenformeln Gl. (92) bis (95) und dem Crank-Nicolson-Faktor $\sigma=0,5$ ergibt sich das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Konzentration zum Zeitpunkt F_{Om}^{n+1} :

$$\xi_{i,j}^{n+1} = R^n + f(\xi_{i+1,j}; \xi_{i-1,j}; \xi_{i,j+1}; \xi_{i,j-1}; \Psi_{i+1,j}^*; \Psi_{i-1,j}^*; \Psi_{i,j+1}^*; \Psi_{i,j-1}^*)^{n+1} \quad (153).$$

R^n bedeutet analog zu Gl. (107) den Differenzenausdruck zum Zeitpunkt F_{Om}^n :

$$R^n = \frac{1}{0,5 \Delta F_{Om}} e^{2z} \xi_{i,j}^n + (\delta_z + \delta_\theta) \xi^n \quad (154).$$

Für die beiden Staupunktgeraden ergeben sich aus Gl. (148) die Abkürzungen:

$$\delta_z \xi = \frac{1}{e^z} \frac{\partial}{\partial z} \left[e^z \left(1 + \frac{\varepsilon_{m,D-T}}{D} \right) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] + \frac{Re Sc}{2e^z \cos \theta} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta^2} \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (155),$$

$$\delta_\theta \xi = 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \quad (156).$$

Für die vordere Staupunktgerade erhält man mit

$$R^n = \frac{1}{0,5 \Delta F_{Om}} e^{2z} \xi_{i,1}^n + (\delta_z + \delta_\theta) \xi^n \quad (157)$$

das Gleichungssystem zur Bestimmung der Konzentration:

$$\xi_{i,1}^{n+1} = R^n + f(\xi_{i+1,1}; \xi_{i-1,1}; \xi_{i,2}; \Psi_{i,1}^*; \Psi_{i,2}^*)^{n+1} \quad (158).$$

Tabelle 3. Flüssigkeitskennzahl und Re_c von Luftblasen verschiedener Flüssigkeiten bei einem Druck von 1 bar [1; 32; 156].

Flüssigkeit	Temperatur K_F K	Re_c
Wasser	285,85	$1,848 \cdot 10^{10}$
	303,15	$5,938 \cdot 10^{10}$
86 % Glycerin u. Wasser	293,15	$1,0 \cdot 10^1$
75 % Glycerin u. Wasser	288,85	$3,968 \cdot 10^3$
55 % Glycerin u. Wasser	285,65	$2,667 \cdot 10^6$
29 % Glycerin u. Wasser	295,15	$1,613 \cdot 10^9$
Äthylalkohol	285,65	$2,577 \cdot 10^8$
30 % Äthylalkohol u. Wasser	306,95	$2,326 \cdot 10^7$
8 % Äthylalkohol u. Wasser	285,95	$1,412 \cdot 10^9$
Nitrobenzol	287,45	$2,95 \cdot 10^7$
Toluol	284,95	$1,05 \cdot 10^{10}$
Isoamylalkohol	297,65	$1,245 \cdot 10^6$
Äthylacetat	298,15	$2,538 \cdot 10^{10}$
80 % Essigsäure u. Wasser	284,85	$2,404 \cdot 10^7$
7 % Natriumchlorid u. Wasser	283,75	$1,244 \cdot 10^{10}$
3,5 % Natriumchlorid u. Wasser	285,65	$1,698 \cdot 10^{10}$

Tabelle 4. Angaben zu den Meßwerten in der Literatur.

Stoffsystem Blase/Flüssigkeit	Temp. K	Durch- messer d_p in mm	Sc	Experimentatoren
CO ₂ /Wasser	293,15	0,7 – 8,4	$6,33 \cdot 10^2$	von Bogdandy, Rutsch u. Stranski [76]
CO ₂ /Wasser	–	1 – 6	–	Deindoerfer u. Humphrey [77]
CO ₂ /Wasser	293,15	8 – 42	$5,89 \cdot 10^2$	Baird u. Davidson [78]
CO ₂ /Wasser	296,65	5 – 16	$4,80 \cdot 10^2$	Redfield u. Houghton [81]
CO ₂ /wäßrige Glucoselösung	298,15		$2,80 \cdot 10^3$	
	297,15		$2,2 \cdot 10^4$	
	298,55		$1,59 \cdot 10^5$	
	299,75		$2,80 \cdot 10^5$	
	298,15		$1,43 \cdot 10^6$	
CO ₂ /Wasser	389,15	5 – 20	$8,10 \cdot 10^2$	Davenport, Richardson u. Bradshaw [82]
CO ₂ /Wasser	291,95	10 – 22	$7,91 \cdot 10^2$	Guthrie u. Bradshaw [87]
CO ₂ /Wasser	293,15	4,6 – 8,5	$6,43 \cdot 10^2$	Koide, Orito u. Hara [88]
CO ₂ /Wasser	293,15	6,35	$5,6 \cdot 10^2$	Towell, Strand u. Ackerman [93]
CO ₂ /Wasser	298,15	8,6	$4,6 \cdot 10^2$	Ishii u. Johnson [96]
O ₂ /Wasser	293,15	5,3 – 7,2	$4,8 \cdot 10^2$	Yoshida u. Akita [97]
O ₂ /Wasser	289,15	7,3	$6,0 \cdot 10^2$	Deckwer, Burckhart u. Zoll [99]
CO ₂ /Wasser	287,15	2,7 – 2,9	$8,0 \cdot 10^2$	Deckwer, Adler u. Zaidi [100]
CO ₂ /Wasser	298,15	9 – 13	–	Lindt [155]

Tabelle 5. Henry-Zahl H^* einiger Stoffe.

Stoffsystem	273,15 K	288,15 K	293,15 K	298,15 K
NH ₃ /Wasser	0,01687	0,01972	0,02062	0,02178
SO ₂ /Wasser	0,1326	0,221	0,2587	0,3063
CO ₂ /Wasser	0,58	0,937	1,072	1,153
O ₂ /Wasser	20,5	27,8	30,37	43,57

Zur Berechnung der Konzentration auf der hinteren Staupunktgeraden werden Gl. (157) und (158) und die Funktionswerte an den Gitterpunkten $j=M$ und $j=M-1$ anstelle der Punkte $j=1$ und $j=2$ verwendet.

Wegen des steilen Konzentrationsabfalls in der Nähe der Blasenoberfläche werden variable Schrittweiten für die Berechnung des Konzentrationsfeldes eingeführt und die Werte der Stromfunktion entsprechend interpoliert. Für die Interpolation wird ein Polynom dritten Grades verwendet.

Zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens wird wie für die Berechnung des Impulstransports das Verfahren der suk-

zessiven Überrelaxation nach Gl. (112) angewendet. Der optimale Relaxationsfaktor ergab sich zu $\omega_{\xi} = 0,6$.

Die numerische Berechnung des Konzentrationsgradienten an der Blasenoberfläche ist zur Berechnung der Sherwood-Zahlen erforderlich. Die Differenzgleichung entspricht Gl. (118). Die örtliche Sherwood-Zahl nach Gl. (142) lautet damit

$$Sh_{\theta t} = \frac{11 \xi_{1,j} - 18 \xi_{2,j} + 9 \xi_{3,j} - 2 \xi_{4,j}}{3 H^* \Delta z} \quad (159)$$

Die Bestimmung der momentanen Sherwood-Zahl nach Gl. (144) und der Konzentration in der Blase nach Gl. (136) erfolgt nach der Simpsonschen Regel. Die mittlere Sherwood-Zahl wird nach Gl. (145) mit der Trapezregel berechnet.

5.3 Darstellung und Diskussion einiger Ergebnisse

Zur Berechnung des instationären Stofftransports in der Umgebung einer formdynamischen Blase wurde das in Abschnitt 4.4 diskutierte Geschwindigkeitsfeld verwendet. Die Reynolds-Zahl wurde im Bereich $200 \leq Re \leq 6000$, die Schmidt-Zahl im Bereich $0,5 \leq Sc \leq 1,0 \cdot 10^5$ und die Henry-Zahl im Bereich $1 \leq H^* \leq 100$ variiert.

Die Stoffdaten der in der Literatur häufig verwendeten Stoffsysteme sind in Tabelle 3 bis 5 zusammengestellt. In Tabelle 3 sind die Flüssigkeitskennzahl K_F und der Grenzwert der Reynolds-Zahl Re_C für Luftblasen in verschiedenen Flüssigkeiten bei einem Druck von 1 bar und bei verschiedenen Temperaturen zusammengefaßt. Die Schmidt-Zahl Sc sowie die Henry-Zahl H^* sind für einige Stoffsysteme in Tabelle 4 und 5 zu finden.

5.3.1 Örtliche und mittlere Konzentration

Zunächst werden anhand von Bild 17 die in qualitativer Form angegebenen Konzentrationsprofile in Phase 1 und in Phase 2 erläutert, die zu verschiedenen Zeiten auftreten. Da der Stofftransportwiderstand allein in der Umgebung liegt, ist der Diffusionskoeffizient D_1 größer als der Diffusionskoeffizient D_2 , und die Partialdichte ρ_{A1} ist in der Blase unabhängig vom Radius. Ferner wird angenommen, daß $H^* > 1$ und deshalb $\rho_{A1p} > \rho_{A2p}$ ist. Zur Zeit $t=0$ ist die Partialdichte $\rho_{A10} > 0$. Nach Einsetzen des Stofftransports wird die Partialdichte in der Blase kleiner, bis sie schließlich für $t=\infty$ den Gleichgewichtswert annimmt. Für eine Zwischenzeit t ist auch der Verlauf der dimensionslosen Konzentration ξ in Bild 17 dargestellt.

Die Lösung der Differentialgleichung führt unter Beachtung der Anfangs- und Randbedingungen zu der folgenden allgemeinen Gleichung für die örtliche Konzentration in der Blase umgebenden Flüssigkeit:

$$\xi = f_1(r^*; \theta; Re; Sc; F_{Om}; H^*) \quad (160)$$

Hieraus erhält man alle weiteren für das Konzentrationsfeld interessierenden Größen, insbesondere auch den an der Phasengrenzfläche auftretenden Gradienten. Mit $r^*=1$ folgt aus Gl. (160) die allgemeine Beziehung für die Konzentration in der Grenzfläche ($\xi = \xi_p$), die zugleich die Konzentration in der Blase ist:

$$\xi_p = f_2(F_{Om}; Re; Sc; H^*) \quad (161)$$

In Bild 18 ist die örtliche Konzentration ξ für $\theta=0^\circ$ und $\theta=180^\circ$ in Abhängigkeit von der radialen Koordinate r^* für

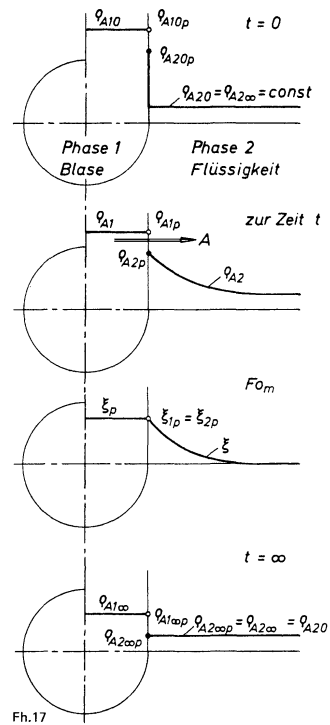


Bild 17. Konzentrationsprofile innerhalb und außerhalb der aufsteigenden Blase.

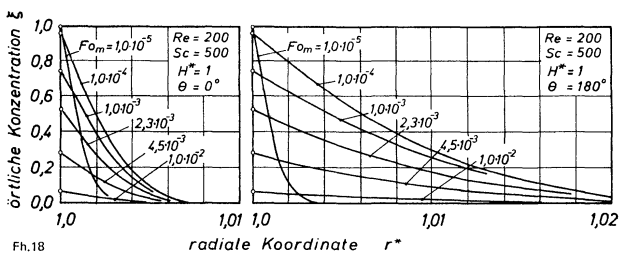


Bild 18. Örtliche Konzentration in Abhängigkeit von der radialen Koordinate für $Re = 200$, $Sc = 500$ und $H^* = 1$.

Parameter sind die Fourier-Zahl und der Umfangswinkel.

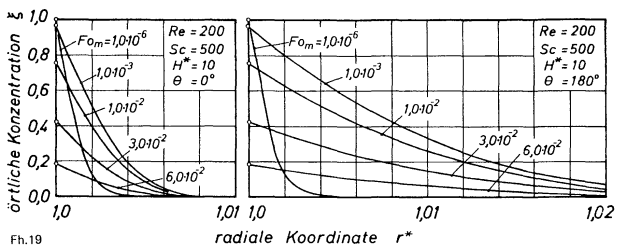


Bild 19. Örtliche Konzentration in Abhängigkeit von der radialen Koordinate für $Re = 200$, $Sc = 500$ und $H^* = 10$.

Parameter sind die Fourier-Zahl und der Umfangswinkel.

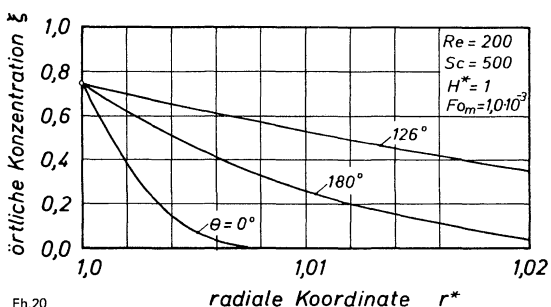
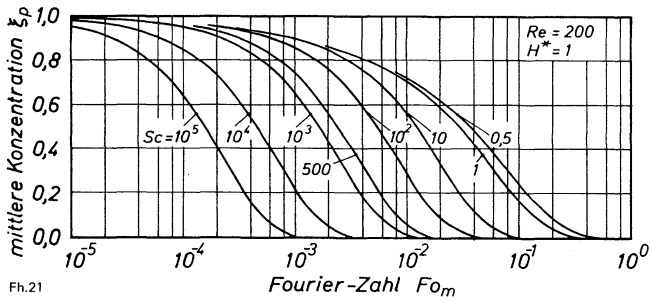
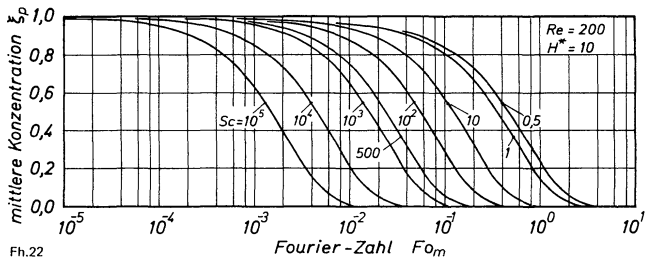


Bild 20. Örtliche Konzentration in Abhängigkeit von der radialen Koordinate für $Re = 200$, $Sc = 500$, $H^* = 1$ und $F_{Om} = 1,0 \cdot 10^{-3}$.

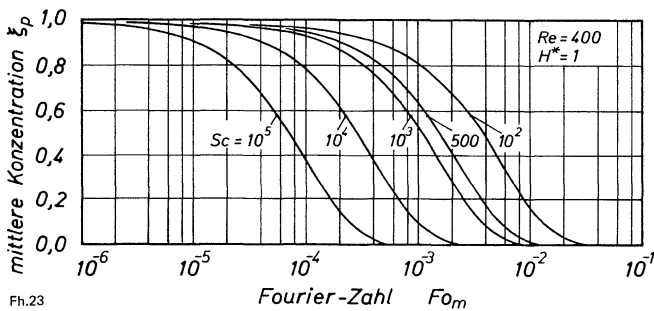
Parameter ist der Umfangswinkel.



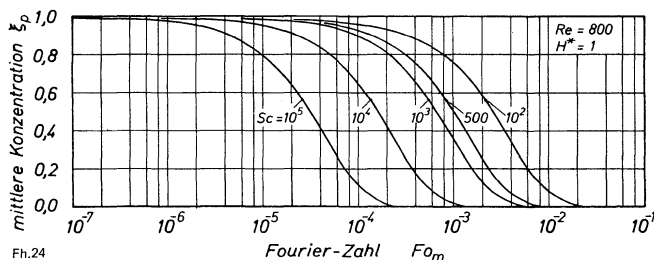
Fh.21
Bild 21. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=200$ und $H^*=1$.
 Parameter ist die Schmidt-Zahl.



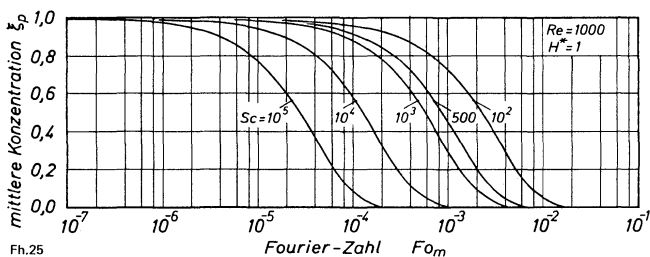
Fh.22
Bild 22. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=200$ und $H^*=10$.
 Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.23
Bild 23. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=400$ und $H^*=1$.
 Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.24
Bild 24. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=800$ und $H^*=1$.
 Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.25
Bild 25. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=1000$ und $H^*=1$.
 Parameter ist die Schmidt-Zahl.

die Henry-Zahl $H^*=1$, die Reynolds-Zahl $Re=200$ und die Schmidt-Zahl $Sc=500$ aufgetragen. Bild 19 zeigt ebenfalls die örtliche Konzentration ξ für $\theta=0^\circ$ und 180° in Abhängigkeit von der radialen Koordinate r^* für die Henry-Zahl $H^*=10$, Reynolds-Zahl $Re=200$ und die Schmidt-Zahl $Sc=500$. Als weiterer Parameter dient die Fourier-Zahl Fo_m . Wie aus diesen Bildern hervorgeht, zeigt der örtliche Konzentrationsverlauf auf der vorderen und hinteren Staupunktgeraden bei kleinen Zeiten ($Fo_m \rightarrow 0$) keine Unterschiede. Es wurde in Abschnitt 2.4.2 bereits darauf hingewiesen, daß der Stofftransport für sehr kurze Zeiten unabhängig vom Bewegungszustand der die Blase umgebenden Flüssigkeit ist. Die örtliche Konzentration ist daher bei kurzen Zeiten unabhängig vom Winkel θ . Mit wachsender Fourier-Zahl vergrößert sich der Einfluß des konvektiven Transports. In der Umgebung des vorderen Staupunkts (bei $\theta=0^\circ$) wird eine besonders dünne Konzentrationsgrenzschicht durch die der Diffusion entgegengerichtete Konvektion entwickelt, so daß sich ein sehr steiler Konzentrationsgradient einstellt. Die Grenzschichtdicke wächst mit größer werdendem Winkel θ . Auf der Rückseite der Blase bildet sich eine in die Nachlaufströmung reichende Konzentrationsschlepe aus.

Wie bereits in Abschnitt 4.4 eingehend erläutert wurde, ist die Nachlaufströmung bei der formdynamischen Blase im Gegensatz zur formstabilen Blase durch den Ringwirbel gekennzeichnet. In Bild 20 ist die örtliche Konzentration ξ in Abhängigkeit von der radialen Koordinate r^* für eine Fourier-Zahl $Fo_m=1,0 \cdot 10^{-3}$, die Reynolds-Zahl $Re=200$, die Schmidt-Zahl $Sc=500$ und die Henry-Zahl $H^*=1$ aufgetragen. Der steilste Konzentrationsabfall ist, wie auch in Bild 18 und 19, für die vordere Staupunktgerade mit $\theta=0^\circ$ festzustellen. Im Anströmbereich schwimmen die frischen Flüssigkeitselemente auf die Blasenoberfläche zu. Damit gelangt ständig von der diffundierenden Komponente A freie Flüssigkeit in die Nähe der Phasengrenzfläche. Auch im Rückströmgebiet strömt die Flüssigkeit in Richtung zur Blasenoberfläche. Der Konzentrationsabfall ist jedoch für $\theta=180^\circ$ nicht ganz so steil wie auf der vorderen Staupunktgeraden. Der Konzentrationsabfall ist für den Bereich des Ablösepunktes am flachsten, wie das Konzentrationsprofil in Bild 20 für den Winkel $\theta=126^\circ$ zeigt.

Für noch größere Werte der Reynolds-Zahl Re und der Schmidt-Zahl Sc wird die Komponente A durch die Deformationsturbulenz in erhöhtem Maße von der Blasenoberfläche in die umgebende Flüssigkeit transportiert. Damit ergibt sich an der Blasenoberfläche ein steilerer Konzentrationsgradient. Das Auftreten von Konzentrationsänderungen beschränkt sich auf einen sehr engen, phasengrenznahen Bereich. Dies besagt also, daß der Stofftransport bei formdynamischen Blasen durch benachbarte Blasen praktisch nicht beeinflusst wird.

Die im Zeitintervall zwischen $t=0$ und t über die Grenzfläche transportierte Masse M_A ist gleich der Änderung der Komponente A im Inneren der Blase:

$$M_A = V_p(\rho_{A10} - \rho_{A1}) = V_p \rho_{A10} \left(1 - \frac{\rho_{A1}}{\rho_{A10}}\right) \quad (162).$$

Mit ρ_{A1} wird der volumetrische Mittelwert der Konzentration in der Blase zur Zeit t bezeichnet und ist gleich der mittleren Konzentration an der Phasengrenzfläche ρ_{A1p} . Werden in Gl. (162) die mittlere Konzentration ξ_p nach Gl. (130) und die Henry-Zahl H^* nach Gl. (34) eingeführt und die Gleichung umgeordnet, so ergibt sich

$$\frac{M_A}{V_p \rho_{A10p}} = (1 - \xi_p) \left(1 - H^* \frac{\rho_{A2\infty}}{\rho_{A10p}} \right) \quad (163)$$

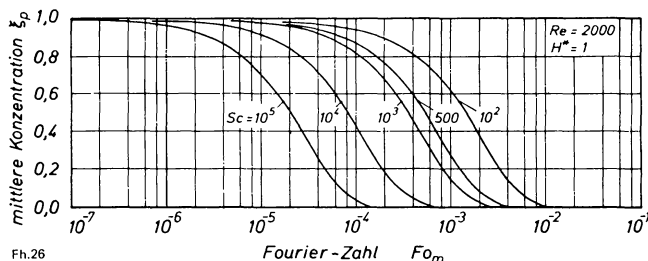
Die übergegangene Masse M_A läßt sich bei Kenntnis der mittleren Konzentration ξ_p für eine gegebene Fourier-Zahl Fo_m berechnen.

Die dimensionslose mittlere Konzentration ξ_1 in der Blase ist gleich der an der Blasenoberfläche ξ_p . Sie hat den Wert 1 bei $Fo_m = 0$ und wird mit wachsender Zeit kleiner. Der zeitliche Verlauf der Konzentration in der Blase ξ_p wird bei konstanter Reynolds-Zahl $Re = 200$ und für verschiedene Werte der Schmidt-Zahl, $0,5 \leq Sc \leq 1,0 \cdot 10^5$, in Bild 21 und 22 für die Henry-Zahlen $H^* = 1$ und $H^* = 10$ dargestellt. Diese Kurven zeigen, daß die Konzentration ξ_p in der Blase bei größerer Henry-Zahl H^* langsamer absinkt. Dieses Ergebnis ist auch zu erwarten, da gemäß Bild 17 und der Definition der Henry-Zahl H^* die größere Henry-Zahl den größten Sprung der Konzentration an der Phasengrenzfläche bedeutet und damit das für den Stofftransport maßgebende Konzentrationsgefälle $\rho_{Ap} - \rho_{A\infty}$ mit zunehmender Henry-Zahl abnimmt.

Mit wachsender Schmidt-Zahl, also mit zunehmendem konvektiven Einfluß, gehen die zeitlichen Konzentrationsänderungen bei konstanter Henry-Zahl schneller gegen den Grenzwert $\xi_p = 0$. In Bild 23 bis 27 ist die Konzentration ξ_p in der Blase in Abhängigkeit von der Zeit bei konstanter Henry-Zahl $H^* = 1$ für verschiedene Werte der Reynolds-Zahl dargestellt. Ein weiterer Parameter ist die Schmidt-Zahl Sc , die in dem in der Praxis häufig auftretenden Bereich $10^2 \leq Sc \leq 10^5$ variiert wurde. Aus den Bildern erkennt man, daß der Abbau der Konzentration ξ_p in der Blase um so schneller erfolgt, je größer die Kennzahl $Re Sc$ ist. Der Stofftransport wird mit wachsenden Werten der Kennzahl $Re Sc$ auf Grund der verstärkten Konvektion größer. Jedoch zeigen die Kurven für verschiedene Reynolds-Zahlen und Schmidt-Zahlen bei kleiner werdender Konzentration ξ_p in der Blase einen ähnlichen Verlauf, der den verlangsamten Abbau der Konzentration bedeutet. Dies ist darauf zurückzuführen, daß der für den Stofftransport maßgebende Konzentrationsgradient mit abnehmender Konzentration ξ_p in der Blase trotz der hohen Konvektion auf jeden Fall klein wird.

5.3.2 Örtliche und mittlere Sherwood-Zahl

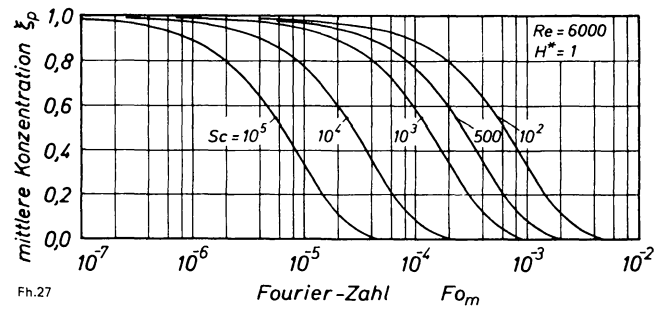
In Bild 28 ist die örtliche momentane Sherwood-Zahl $Sh_{\theta t}$ in Abhängigkeit vom Winkel θ für die Reynolds-Zahl $Re = 200$, die Schmidt-Zahl $Sc = 500$ und die Henry-Zahl $H^* = 1$ dargestellt. Weiterer Parameter ist die Fourier-Zahl Fo_m . Da die örtliche Sherwood-Zahl bei kleinen Zeiten von dem Umfangswinkel θ unabhängig ist und sehr große Werte annimmt, wurden in Bild 28 nur die Kurven für fortgeschrit-



Fh.26

Bild 26. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re = 2000$ und $H^* = 1$.

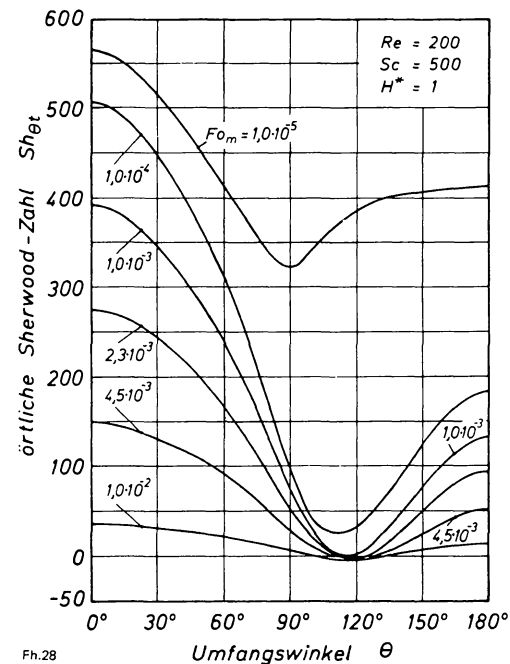
Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.27

Bild 27. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re = 6000$ und $H^* = 1$.

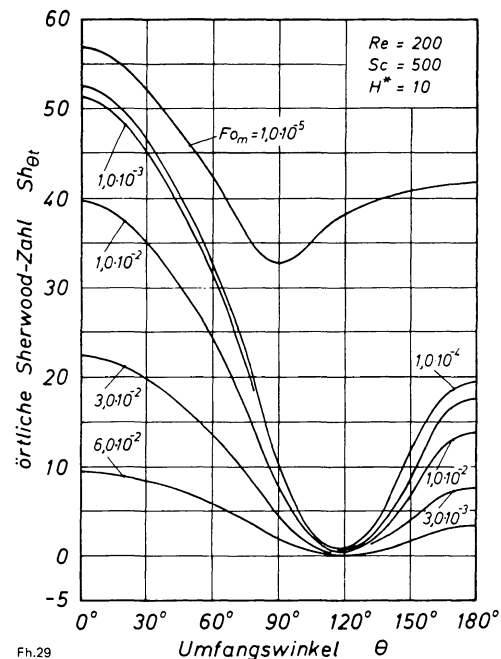
Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.28

Bild 28. Örtliche Sherwood-Zahl in Abhängigkeit vom Umfangswinkel für $Re = 200$, $Sc = 500$ und $H^* = 1$.

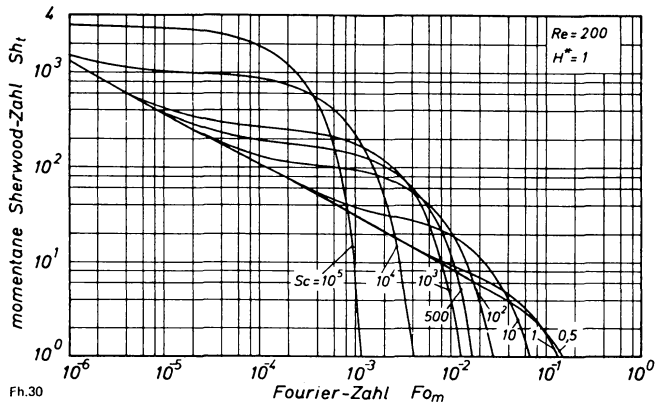
Parameter ist die Fourier-Zahl.



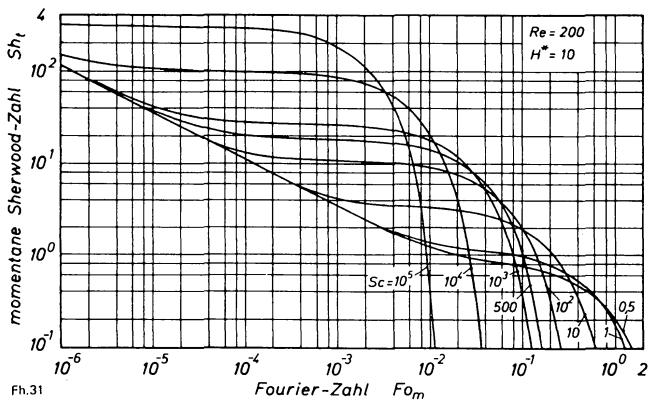
Fh.29

Bild 29. Örtliche Sherwood-Zahl in Abhängigkeit vom Umfangswinkel für $Re = 200$, $Sc = 500$ und $H^* = 10$.

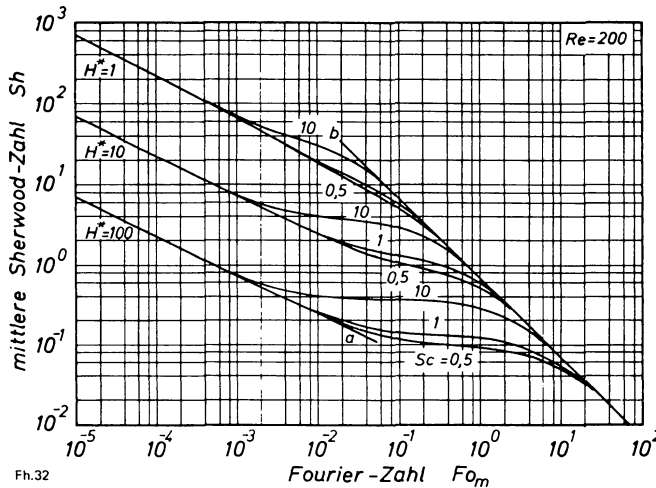
Parameter ist die Fourier-Zahl.



Fh.30 **Bild 30. Momentane Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=200$ und $H^*=1$.**
Parameter ist die Schmidt-Zahl.

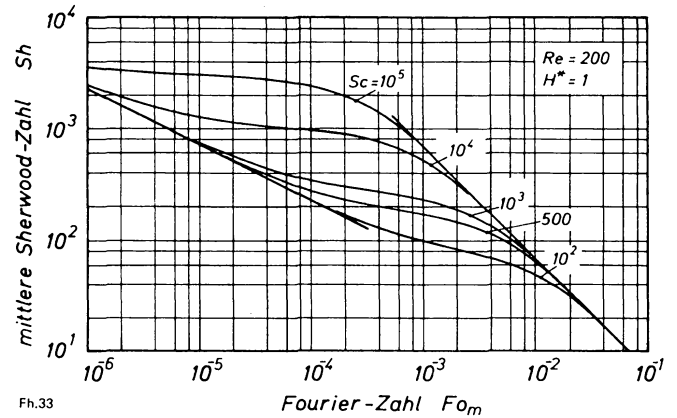


Fh.31 **Bild 31. Momentane Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=200$ und $H^*=10$.**
Parameter ist die Schmidt-Zahl.

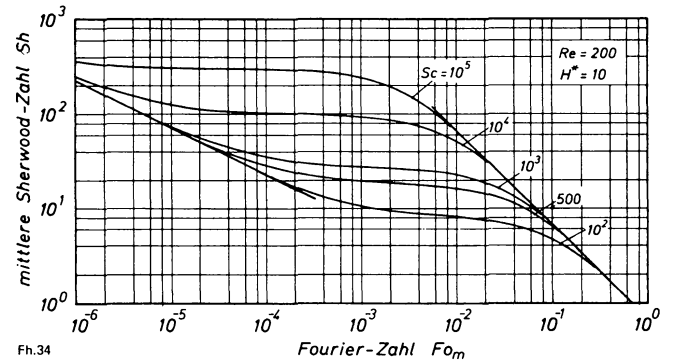


Fh.32 **Bild 32. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=200$.**
Parameter sind die Henry-Zahl und die Schmidt-Zahl. Grenzkurve a nach Gl. (35) und b nach Gl. (36).

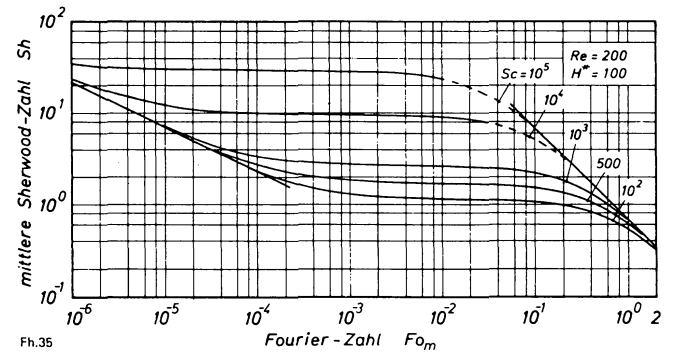
tene Zeiten aufgetragen, wenn die Konvektion einen Einfluss auf den Stofftransport ausübt. Die örtliche Sherwood-Zahl Sh_{θ_t} hat wegen des steilen Konzentrationsgradienten im vorderen Staupunkt den größten Wert. Im Gegensatz zur formstabilen Blase hat die örtliche Sherwood-Zahl bei formdynamischer Blase ihr Minimum nicht auf dem hinteren Staupunkt. Unter der Einwirkung des Ringwirbels wird die örtliche Sherwood-Zahl im Bereich von $\theta=180^\circ$ wieder erhöht. An der Stelle, wo das Flüssigkeitselement mit der Komponente A angereichert ist, hat die örtliche Sherwood-Zahl



Fh.33 **Bild 33. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=200$ und $H^*=1$.**
Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.34 **Bild 34. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=200$ und $H^*=10$.**
Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.35 **Bild 35. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=200$ und $H^*=100$.**
Parameter ist die Schmidt-Zahl.

ihr Minimum. Dieses Minimum verschiebt sich mit der Zeit zum Ablösepunkt. Für große Zeiten kann die Anreicherung des Fluidelements so stark sein, daß in der umgebenden Flüssigkeit lokal eine höhere Konzentration auftritt als in der Blase. Hierdurch erhält die örtliche Sherwood-Zahl den negativen Wert.

Bild 29 zeigt die örtliche momentane Sherwood-Zahl Sh_{θ_t} in Abhängigkeit von dem Umfangswinkel θ für $H^*=10$. Da mit wachsenden Werten von H^* die Löslichkeit abnimmt, ist die örtliche Sherwood-Zahl dementsprechend geringer.

Trotz der schwachen Löslichkeit sind die Unterschiede von $Sh_{\theta t}$ wegen der Konvektion sehr groß. Dies geht aus Bild 29 hervor, in dem für die Ordinate ein anderer Maßstab gewählt wurde als für Bild 28.

Die im Zeitpunkt t von der formdynamischen Blase abgegebene gesamte Stoffstromdichte $\dot{m}_{A t}$ wird nach der Beziehung

$$\dot{m}_{A t} = \beta_t (\rho_{A10} - H^* \rho_{A2\infty}) \quad (164)$$

berechnet. Hierin ist β_t ein über den Blasenumfang gemittelter momentaner Stoffübergangskoeffizient, der bei dimensionsloser Schreibweise durch die momentane Sherwood-Zahl Sh_t ersetzt wird. Der zeitliche Verlauf der momentanen Sherwood-Zahl bei konstanter Reynolds-Zahl ($Re=200$) und verschiedenen Werten der Schmidt-Zahl ($0,5 \leq Sc \leq 10^5$) ist in Bild 30 für $H^*=1$ und in Bild 31 für $H^*=10$ aufgetragen. Die Kurven zeigen, daß die momentane Sherwood-Zahl am Anfang des Stofftransportvorgangs steil abnimmt, danach fast zeitlich konstant bleibt und schließlich rasch abklingt. Am Anfang des Prozesses werden die Stoffe rein molekular transportiert. Während eines begrenzten Zeitabschnitts ergibt sich eine dominante Einwirkung der von der Zeit unabhängigen Konvektion, so daß die momentane Sherwood-Zahl eine Zeitlang konstant bleibt, obwohl die Konzentration der Blase ständig abnimmt. Anschließend nimmt die Konzentration ξ_p in der Blase zeitlich wieder sehr schnell ab. Je größer die Schmidt-Zahl ist, desto früher wirkt sich die Konvektion aus.

Mittelt man die momentane Sherwood-Zahl Sh_t über die Austauschzeit t , so erhält man die mittlere Sherwood-Zahl Sh . Mittels des Stoffübergangskoeffizienten β , der in der Definition der mittleren Sherwood-Zahl Sh enthalten ist, läßt sich die bis zum Zeitpunkt t insgesamt durch die Blasenoberfläche hindurchgetretene Masse M_A berechnen:

$$M_A = \beta A_p t (\rho_{A10} - H^* \rho_{A2\infty}) \quad (165)$$

In Bild 32 ist die mittlere Sherwood-Zahl Sh über der Fourier-Zahl Fo_m bei konstanter Reynolds-Zahl $Re=200$ für einige Werte der Schmidt-Zahl dargestellt; ein weiterer Parameter ist die Henry-Zahl H^* . Mit b wird die nach Gl. (36) berechnete Grenzkurve bezeichnet, der sich alle Kurven mit wachsender Fourier-Zahl annähern. Im Bereich sehr kleiner Werte für Fo_m werden die Kurven durch das Grenzgesetz gemäß Gl. (35) wiedergegeben. Aus Bild 32 geht hervor, daß die Sherwood-Zahl mit steigender Henry-Zahl H^* kleiner wird.

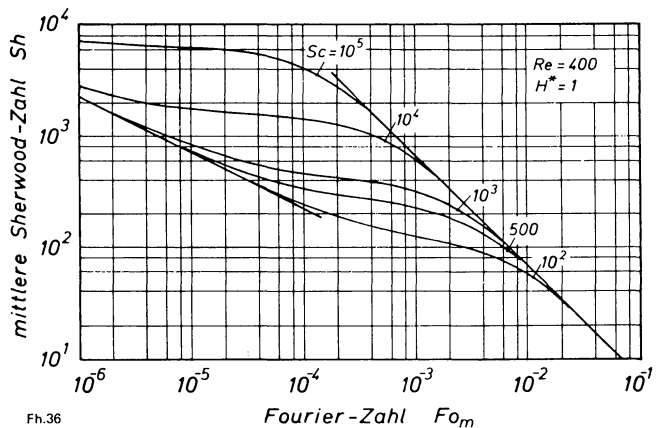
Wie in vorangegangenen Abschnitten erläutert wurde, bedeuten steigende Werte der Henry-Zahl, daß der Konzentrationssprung in der Phasengrenzfläche größer wird und gleichzeitig der für den Stofftransport in der Flüssigkeit maßgebende Konzentrationsgradient an der Phasengrenzfläche kleiner wird. Bemerkenswert am Verlauf der in Bild 32 dargestellten Kurven ist ihre Annäherung an die gemeinsame Grenzkurve b. Das heißt, daß für $Fo_m \rightarrow \infty$ der Einfluß von H^* verschwindet. Das ist darauf zurückzuführen, daß die Konzentrationen in der Phasengrenzfläche für $Fo_m \rightarrow \infty$ in jedem Fall gegen null streben, unabhängig davon, wie groß H^* ist.

Für den Fall $Re=200$ und $H^*=1$ ist die mittlere Sherwood-Zahl in Bild 33 für verschiedene Werte der Schmidt-Zahl dargestellt. Die in Bild 33 angegebenen Kurven weisen für größere Werte der Kennzahl $Re Sc$ Bereiche auf, in denen die mittlere Sherwood-Zahl von der Fourier-Zahl unabhängig und somit konstant ist. Auf diesen Sachverhalt hat H. Brauer [118] bereits hingewiesen und erläutert, daß

in diesem Bereich der konvektive Stofftransport allein bestimmend ist. Diese Tendenz ist in Bild 34 bei der Henry-Zahl $H^*=10$ und noch deutlicher in Bild 35 bei der Henry-Zahl $H^*=100$ zu erkennen. Das Kurvenfeld zeichnet sich dadurch aus, daß sich der Bereich, in dem die Sherwood-Zahl von der Fourier-Zahl als unabhängig anzusehen ist, mit zunehmenden Werten für die Kennzahl $Re Sc$ ausweitet. Diese Tendenz bleibt insbesondere für höhere Reynolds-Zahlen erhalten.

Dies geht aus Bild 36 bis 40 hervor, in denen die mittlere Sherwood-Zahl für höhere Reynolds-Zahlen und verschiedene Werte der Schmidt-Zahl dargestellt ist. Die Unabhängigkeit der Sherwood-Zahl von der Fourier-Zahl ist dadurch bedingt, daß der zeitabhängige, rein molekulare Stofftransport im Vergleich zu dem zeitunabhängigen, konvektiven Transport vernachlässigbar klein wird [118]. Das ist, wie in Bild 36 bis 40 zu sehen ist, um so eher der Fall, je größer die für den konvektiven Transport maßgebende Kennzahl $Re Sc$ ist.

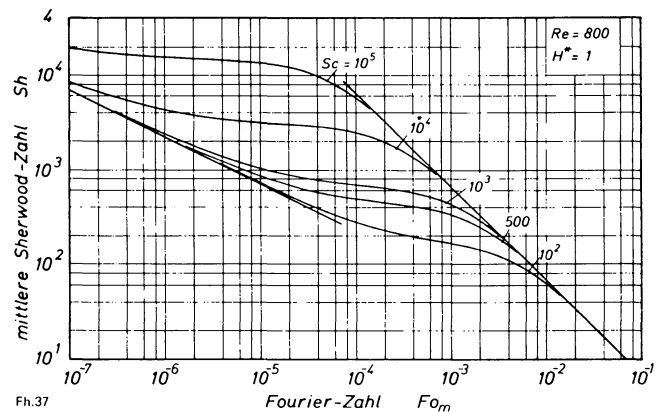
In Bild 41 ist die Abhängigkeit der mittleren Sherwood-Zahl von der Fourier-Zahl für die Schmidt-Zahl $Sc=500$ und verschiedene Reynolds-Zahlen dargestellt; ein weiterer Parameter ist die Henry-Zahl. Um die während des Stofftransports durch die Phasengrenzfläche erzielte Stoffaustauschleistung abzuschätzen, werden in Bild 41 Linien für $\xi_p=0,99$ und $\xi_p=0,5$ aufgetragen. Die Kurven zeigen deutlich, daß der Einfluß der Konvektion auf den Stofftransport um so eher eintritt, je größer die Reynolds-Zahl ist. Der Bereich, in dem der konvektive Stofftransport maßgebend ist, wird um so länger, je größer die Henry-Zahl ist.



Fh.36

Bild 36. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=400$ und $H^*=1$.

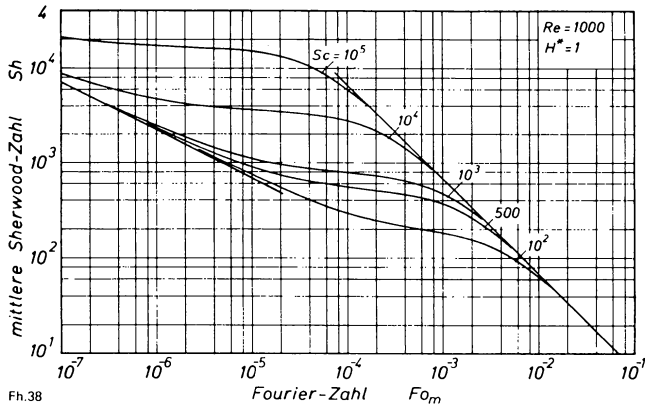
Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.37

Bild 37. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re=800$ und $H^*=1$.

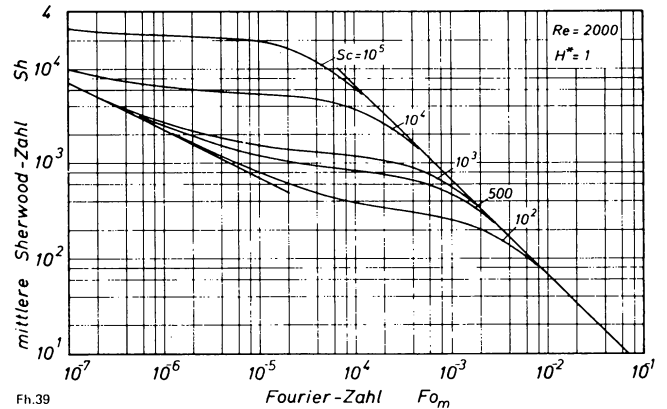
Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.38

Bild 38. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re = 1000$ und $H^* = 1$.

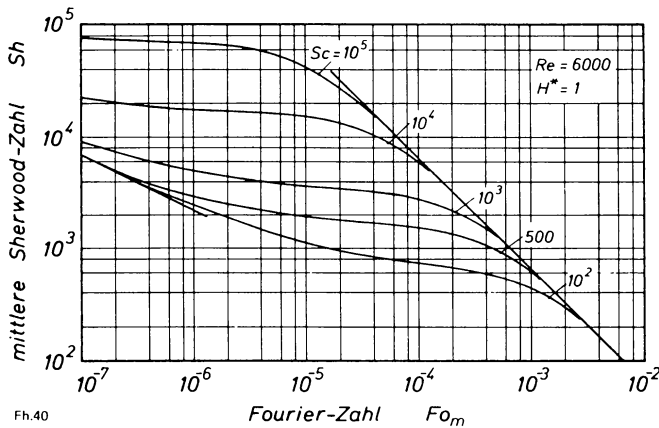
Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.39

Bild 39. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re = 2000$ und $H^* = 1$.

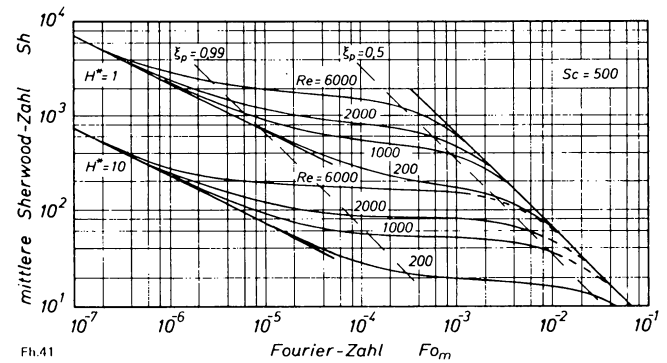
Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.40

Bild 40. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Re = 6000$ und $H^* = 1$.

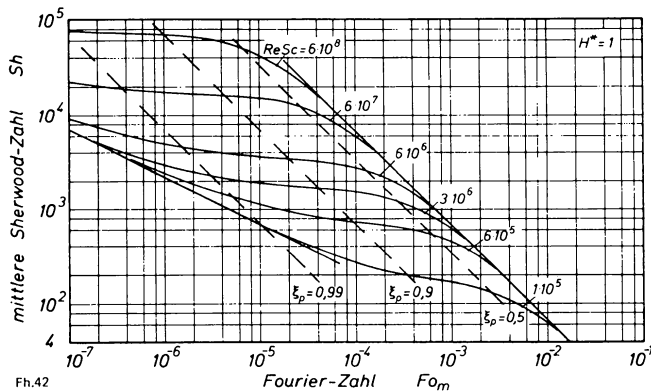
Parameter ist die Schmidt-Zahl.



Fh.41

Bild 41. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Sc = 500$.

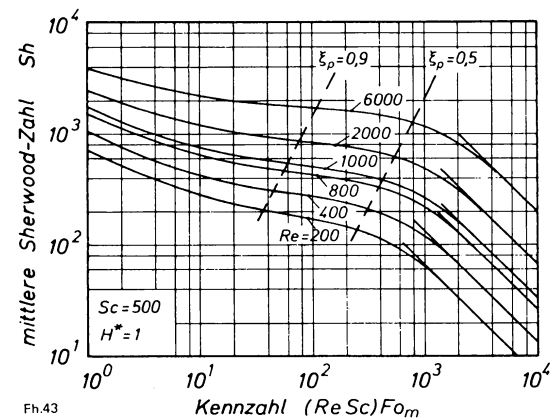
Parameter sind die Reynolds-Zahl und die Henry-Zahl.



Fh.42

Bild 42. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $H^* = 1$.

Parameter ist die Kennzahl $Re Sc$.



Fh.43

Bild 43. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Kennzahl $(Re Sc)Fo_m$ für $Sc = 500$ und $H^* = 1$.

Parameter ist die Reynolds-Zahl.

5.4 Stoffaustausch bei teilweiser Durchmischung in Längsrichtung

Die Untersuchungen zeigen, daß der Stofftransport durch die Grenzfläche der Blasen mit zunehmender Zeit stark abnimmt. Es ist daher sinnvoll, den Stofftransportprozeß nach einer gewissen Zeit abzubrechen und zum Zustand vollkommener Durchmischung in jeder Phase zurückzukehren. Um den Zeitpunkt abzuschätzen, ist noch einmal die

Abhängigkeit der mittleren Sherwood-Zahl von der Fourier-Zahl in Bild 42 für einige Werte der Kennzahl $Re Sc$ und der Henry-Zahl $H^* = 1$ dargestellt. Hier sind auch die Linien für $\xi_p = \text{const}$ eingetragen. Die Zeitabhängigkeit der Sherwood-Zahl ist insbesondere für $Fo_m \rightarrow 0$ und $Fo_m \rightarrow \infty$ bedeutsam. Der Einfluß der Konvektion setzt etwa bei $(Re Sc)Fo_m = 10$ ein, wie es bereits von *H. Brauer* [118] beschrieben wurde, und schwächt sich deutlich nach der Linie für $\xi_p = 0,5$ wieder ab.

Das Kennzahlprodukt $(Re Sc)Fo_m$ ist wie folgt definiert:

$$(Re Sc)Fo_m = \frac{w_\infty t}{d_p/4} \quad (166)$$

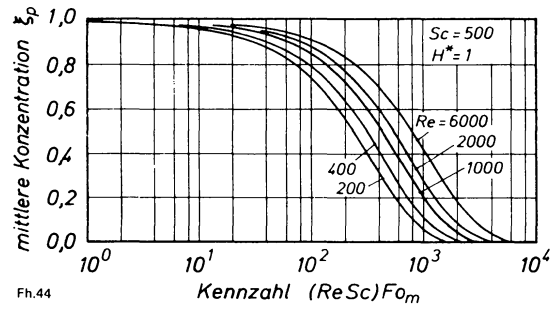
Es läßt sich als die auf den Durchmesser d_p bezogene Aufstiegshöhe $h = w_\infty t$ einer Blase mit dem Durchmesser d_p interpretieren. In Bild 43 ist die mittlere Sherwood-Zahl über der Kennzahl $(Re Sc)Fo_m$ bei konstanter Schmidt-Zahl $Sc=500$ und der Henry-Zahl $H^*=1$ für einige Werte der Reynolds-Zahl dargestellt; weiter sind die Linien für $\xi_p=0,9$ und $\xi_p=0,5$ sowie das nach Gl. (36) berechnete Grenzgesetz für $Fo_m \rightarrow \infty$ eingezeichnet. In Bild 44 ist die Konzentration ξ_p in der Blase in Abhängigkeit von $(Re Sc)Fo_m$ für gleiche Parameter angegeben. Mit Bild 43 bzw. 44 kann man bei gegebener Strömungsbedingung die übertragene Stoffmenge, die bei einer bestimmten Aufstiegshöhe erzielt wurde, leicht abschätzen.

Aus Bild 41 bis 43 geht hervor, daß der Einfluß der Konvektion nach Erreichen von $\xi_p=0,5$ sehr stark abnimmt. Gleichzeitig wird der zeitabhängige molekulare Transport für den Stoffaustauschvorgang wieder bestimmend. Das längere Verweilen der Blasen im Reaktor über den Zeitpunkt hinaus, zu dem die dimensionslose Konzentration ξ_p in der Blase den Wert 0,5 erreicht hat, ist nicht mehr sehr vorteilhaft. Die Fourier-Zahl, bei welcher die Konzentration ξ_p den Wert 0,5 erreicht, ist in Abhängigkeit von der Schmidt-Zahl in Bild 45 und in Abhängigkeit von der Kennzahl $Re Sc$ in Bild 46 für verschiedene Werte der Reynolds-Zahl dargestellt. Mit Bild 45 und 46 kann man bei gegebenen Werten für Re und Sc den durch Fo_m gegebenen Zeitpunkt berechnen, zu dem die Konzentration ξ_p in der Blase den Wert 0,5 annimmt. Je größer die Kennzahl $Re Sc$ ist, desto kleiner ist die zugehörige Fourier-Zahl.

Wie bereits erläutert wurde, ist die mittlere Sherwood-Zahl am Anfang des Stofftransportvorgangs sehr groß und klingt mit fortschreitender Zeit ab. Gleichzeitig übernimmt der zeitunabhängige konvektive Stofftransport eine dominierende Rolle. Es ist wünschenswert, vor Abschwächung des Einflusses des konvektiven Stofftransports eine neue Phasengrenzfläche zu erzeugen, damit die Stoffstromdichte groß bleibt. Aus diesem Grund wird eine teilweise Durchmischung in Längsrichtung betrachtet, bei der eine neue Phasengrenzfläche gebildet wird und der Stofftransportvorgang wieder anfängt. In dieser Betrachtung wurde angenommen, daß die neue Phasengrenzfläche in einem bestimmten Zeitabschnitt gebildet wird und die Strömungsbedingung sich dabei nicht ändert.

Als Beispiel ist in Bild 47 die Konzentration ξ_p in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für die Henry-Zahl $H^*=1$, die Schmidt-Zahl $Sc=500$ und verschiedene Werte der Reynolds-Zahl aufgetragen. Die gestrichelt dargestellten Kurven gelten für den Fall, daß die Phasengrenzfläche bei jedem Zeitabschnitt neu gebildet wird. Die dimensionslose Konzentration in der Blase ξ_p hat nach ihrer Definition bei neu gebildeter Phasengrenzfläche immer den Wert 1. Die gewählten Zeitabschnitte sind in Bild 47 eingekreist gekennzeichnet. Die Kurven zeigen den wesentlich schnelleren Abbau der Konzentration in der Blase.

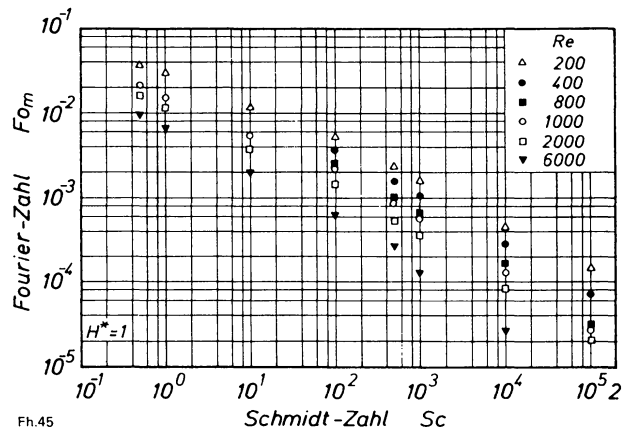
Dieses Anlaufprinzip ist insbesondere dann erforderlich, wenn der Stoffaustauschvorgang im Stoffsystem mit großer Henry-Zahl abläuft. Die technische Realisierung dieses Prinzips ist im Hubstrahlreaktor [157] zu finden, in dem der Prozeß periodisch und beliebig häufig wiederholt wird.



Fh.44

Bild 44. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Kennzahl $(Re Sc)Fo_m$ für $Sc=500$ und $H^*=1$.

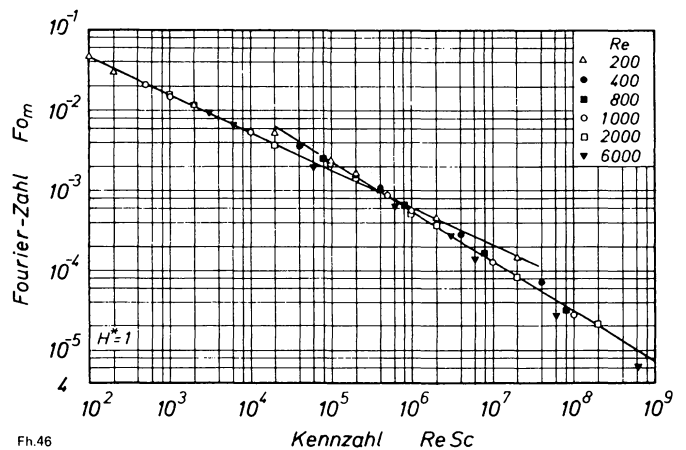
Parameter ist die Reynolds-Zahl.



Fh.45

Bild 45. Fourier-Zahl, bei der die mittlere Konzentration den Wert 0,5 hat, in Abhängigkeit von der Schmidt-Zahl.

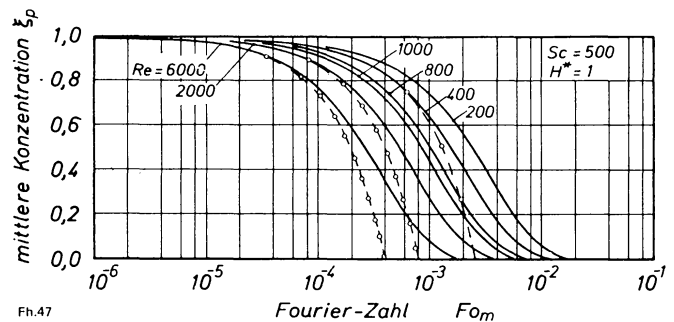
Parameter ist die Reynolds-Zahl.



Fh.46

Bild 46. Fourier-Zahl, bei der die mittlere Konzentration den Wert 0,5 hat, in Abhängigkeit von Kennzahl $Re Sc$.

Parameter ist die Reynolds-Zahl.



Fh.47

Bild 47. Mittlere Konzentration in der Blase in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $Sc=500$ und $H^*=1$.

Parameter ist die Reynolds-Zahl. Zum Vergleich zeigen die gestrichelten Kurven die mittlere Konzentration in der Blase bei teilweiser Durchmischung in Längsrichtung.

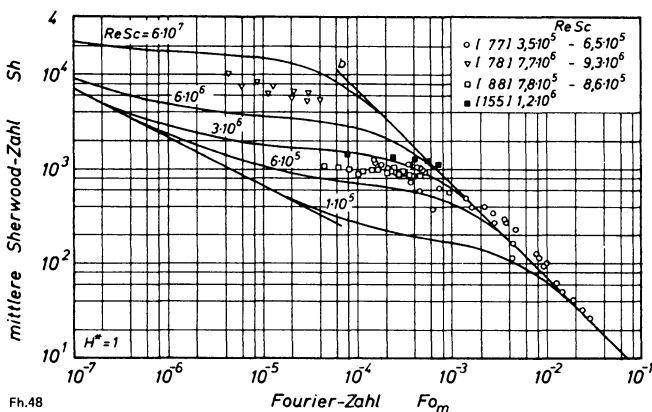
6. Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit einigen experimentellen Ergebnissen der Stoffaustauschuntersuchungen

Wie in Kapitel 2 bereits erläutert wurde, ist ein Vergleich der Ergebnisse verschiedener experimenteller Untersuchungen sehr schwierig. Entsprechend schwierig ist auch der Vergleich der theoretischen mit experimentellen Ergebnissen. Die experimentellen Untersuchungen wurden fast immer unter verschiedenen Versuchsbedingungen durchgeführt, die nicht immer vollständig angegeben wurden. Außerdem sind die Interpretationen der Meßergebnisse wegen der verschiedenen Modellannahmen unterschiedlich. Zum Vergleich mit den theoretischen Ergebnissen wurden solche experimentellen Ergebnisse für den Stoffaustausch an Einzelblasen herangezogen, für die die Zeitabhängigkeit des Stofftransports festgestellt wurde [77; 78; 88; 155]. Dabei muß der Vergleich auf das Stoffsystem $\text{CO}_2/\text{Wasser}$ beschränkt bleiben.

In Bild 48 ist die mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl Fo_m für die Henry-Zahl $H^*=1$ und für verschiedene Werte der Kennzahl $Re Sc$ dargestellt. Die experimentellen Daten gelten für einen bestimmten Bereich der Kennzahl $Re Sc$, der in Bild 48 angegeben ist. Bei der Auftragung der Meßdaten von *F.H. Deindoerfer* und *A.E. Humphrey* [77] wurde die Schmidt-Zahl zu $Sc=560$, bei denen von *J.T. Lindt* [155] zu $Sc=500$ angenommen. Da die zu den experimentellen Daten gehörigen Henry-Zahlen H^* nicht angegeben sind, wurden sie aus den mitgeteilten Temperaturen bestimmt und in Tabelle 5 für verschiedene Temperaturen zusammengestellt. Die Bestimmungsmethode wurde im einzelnen von *H. Brauer* [118] beschrieben.

Einige Meßwerte liegen teilweise über der Geraden b, die das Grenzgesetz für $Fo_m \rightarrow \infty$ darstellt. Werte der Sherwood-Zahl, die oberhalb dieses Grenzgesetzes liegen, sind jedoch unter den gegebenen physikalischen Bedingungen nicht denkbar. Die Abhängigkeit der mittleren Sherwood-Zahl von der Fourier-Zahl ist sehr deutlich, obwohl die Henry-Zahl H^* bei den jeweiligen Messungen einen geringfügig unterschiedlichen Wert hat. Insbesondere für große Werte der Fourier-Zahl ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten. Dies ist ein Hinweis dafür, daß das Modell des instationären Stofftransports an formdynamischen Blasen den Stoffaustausch zwischen einer Flüssigkeit und einem darin frei aufsteigenden Blasenschwarm richtig beschreibt.

Ein direkter Vergleich der Ergebnisse von experimentellen Untersuchungen an Blasenschwärmen mit den theoretischen Ergebnissen ist noch nicht möglich. Bei der Wiedergabe von



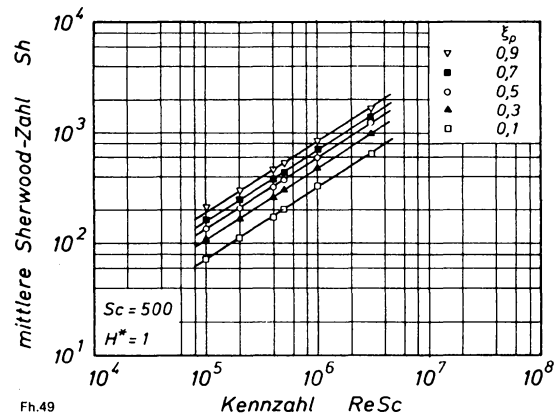
Fh.48

Bild 48. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Fourier-Zahl für $H^*=1$.

Parameter ist die Kennzahl $Re Sc$. Angaben zu den Meßwerten in Tabelle 4 und 5.

Meßwerten durch empirische Gleichungen für die zeitunabhängige Sherwood-Zahl geht man im allgemeinen von Gl. (25) aus, und die Darstellung der Meßwerte entspricht Bild 3.

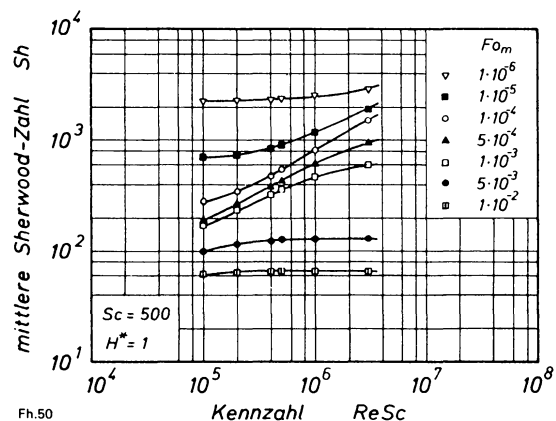
In Bild 49 und 50 ist die gerechnete mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Kennzahl $Re Sc$ für die



Fh.49

Bild 49. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Kennzahl $Re Sc$ für $Sc=500$ und $H^*=1$.

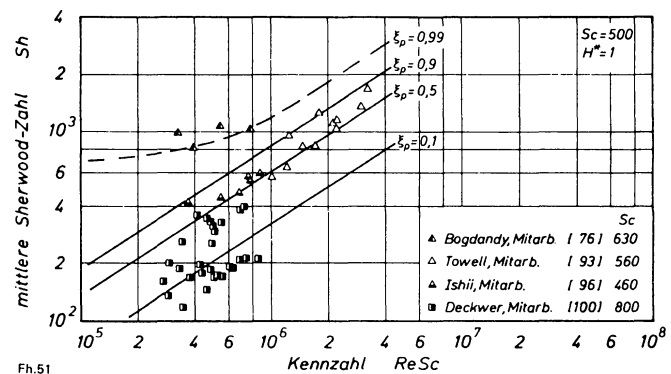
Parameter ist die mittlere Konzentration in der Blase.



Fh.50

Bild 50. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Kennzahl $Re Sc$ für $Sc=500$ und $H^*=1$.

Parameter ist die Fourier-Zahl.



Fh.51

Bild 51. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Kennzahl $Re Sc$ für $Sc=500$ und $H^*=1$.

Parameter ist die mittlere Konzentration in der Blase. Angaben zu den Meßwerten in Tabelle 4 und 5.

Schmidt-Zahl $Sc=500$ und die Henry-Zahl $H^*=1$ aufgetragen. Ein weiterer Parameter in Bild 49 ist die mittlere Konzentration ξ_p in der Blase und in Bild 50 die Fourier-Zahl Fo_m . Die Kurven in Bild 49 zeigen einen linearen Verlauf mit einer Steigung von etwa 0,64 und lassen sich durch die in der Phasengrenzfläche erzielte Stoffaustauschleistung leicht abschätzen. Die zeitliche Änderung der mittleren Sherwood-Zahl Sh bei einem bestimmten Wert der Kennzahl $Re Sc$ ist in Bild 50 zu verfolgen. In dem Bereich der Fourier-Zahl, in dem die Konvektion den Stoffaustauschvorgang bestimmt, verlaufen die Kurven dicht nebeneinander. In den Bereichen der kleinen und großen Fourier-Zahlen ist der zeitabhängige molekulare Transport für den Stoffaustausch bestimmend und deshalb die Abnahme der mittleren Sherwood-Zahl von einer Zeit zur nächsten sprunghaft.

Diese aus den Rechnungen gewonnenen Ausgleichskurven in Bild 49 und 50 wurden noch einmal in Bild 51 und 52 eingetragen, in denen die mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Kennzahl $Re Sc$ für die Schmidt-Zahl $Sc=500$ und die Henry-Zahl $H^*=1$ dargestellt ist. Für den indirekten Vergleich sind die Meßwerte verschiedener Autoren aufgetragen, die auch in Bild 3 mit gleichem Symbol eingezeichnet sind. Der zu den Meßwerten gehörige Blasendurchmesser ist in Tabelle 4 zu finden. Bei kleiner Fourier-

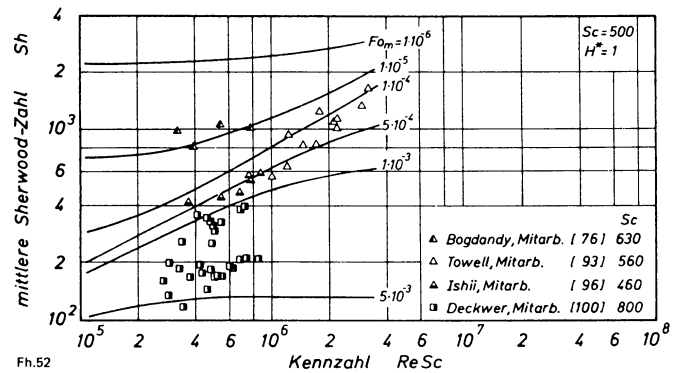


Bild 52. Mittlere Sherwood-Zahl in Abhängigkeit von der Kennzahl $Re Sc$ für $Sc=500$ und $H^*=1$.

Parameter ist die Fourier-Zahl. Angaben zu den Meßwerten in Tabelle 4 u. 5.

Zahl ist die mittlere Sherwood-Zahl wegen des steilen Konzentrationsgradienten sehr groß und nimmt mit zunehmender Zeit ab. Entsprechend den zugehörigen Durchmessern und der Verweilzeit von Blasen zeigen die Meßdaten unterschiedliche Werte der mittleren Sherwood-Zahl. Die häufig berichtete hohe Stoffaustauschleistung im unteren Teil der Blasensäule ist auch mit dem sich einstellenden steilen Konzentrationsgradienten zu erklären.

7. Zusammenfassung

Die vorliegende theoretische Arbeit befaßt sich mit dem Stoffaustauschvorgang zwischen Gas und Flüssigkeit in Blasensäulen. Zuerst wurden einige grundlegende Ergebnisse für die Bewegung und für den Stofftransport einer Einzelblase und einer Blase im Blasenschwarm erörtert. Die aus der Literatur bekannten Gleichungen zur Berechnung des Stoffaustauschs in Blasensäulen liefern sehr unterschiedliche Ergebnisse. Diese Unstimmigkeiten sind vor allem auf unvollständige Modellannahmen zurückzuführen.

Der Stoffaustausch zwischen Gasblasen und einer Flüssigkeit ist grundsätzlich instationär. Die fluiddynamische Instabilität der Phasengrenzfläche führt darüber hinaus zu periodischen und nichtperiodischen Formänderungen der Blasen.

In dieser Arbeit wurde ein den wirklichen Verhältnissen gut angenähertes Modell entwickelt, das sowohl den instationären Stofftransport zwischen einer Flüssigkeit und der darin aufsteigenden Blase als auch die dabei auftretende Deformationsturbulenz berücksichtigt. Diese Vorgänge sind fast immer in der Praxis bei Blasensäulen zu beobachten.

Die Grundlage des Modells ist die Hypothese der Deformationsturbulenz [147]. Diese besagt, daß die formdynamische Blase durch eine Kugelblase ersetzt werden darf, wenn die zeitlich und örtlich gemittelte Wirkung der Deformationsturbulenz durch die turbulente Schubspannung und durch den turbulenten Austauschoeffizienten beschrieben wird. Auf der Grundlage dieser Vorstellungen wurden die Impuls- und Stofftransportgleichungen unter Berücksichtigung der Deformationsturbulenz aufgestellt und mittels Differenzenverfahren numerisch gelöst.

Für größere Blasen wird die Deformation der Blase so stark, daß die Blase im Schwarm als Einzelblase ohne Behinderung benachbarter Blasen betrachtet werden kann.

Die Untersuchungen zeigen, daß die für den Stofftransport maßgebende Sherwood-Zahl stark von der Fourier-Zahl abhängt. Für sehr kurze und für sehr lange Zeiten wird der Stoffaustausch durch molekularen Transport bestimmt, wobei der konvektive Anteil von untergeordneter Bedeutung ist. Die Strömung ist vor allem innerhalb eines mittleren Bereichs der Fourier-Zahl für den Stofftransport von ausschlaggebender Bedeutung.

Für größere Werte der Kennzahl $Re Sc$ gibt es beim instationären Stofftransport einen Bereich, in dem die Sherwood-Zahl mit guter Näherung als unabhängig von der Fourier-Zahl betrachtet werden kann. Dieser Bereich weitet sich mit zunehmenden Werten für $Re Sc$ aus. Hier ist der konvektive Transportanteil wesentlich größer als der zeitabhängige molekulare Anteil. Die häufig veröffentlichten Meßwerte und empirischen Gleichungen für den stationären Stofftransport gelten nur in diesem Bereich. Grenzen für den jeweiligen Anwendungsbereich lassen sich nicht angeben. Darüber hinaus sind die Gleichungen wegen der stark streuenden Meßwerte sehr unsicher.

Die Untersuchungen geben ferner Aufschluß darüber, wann es zweckmäßig sein kann, den Stoffaustauschprozeß durch Neubildung der Blasen neu anlaufen zu lassen. Insbesondere hat der Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen erkennen lassen, daß das Modell der Deformationsturbulenz den instationären Stofftransportvorgang sowohl an der Einzelblase als auch an Blasenschwärmen richtig beschreibt.

8. Literatur

- [1] Brauer, H.: Grundlagen der Einphasen- und Mehrphasenströmungen. Aarau u. Frankfurt/M.: Sauerländer 1971.
- [2] Langemann, H., u. H. Kölbl: Stationäre und instationäre Konzentrationsverteilungen in Reaktoren mit abschnittsweise unterschiedlichen Eigenschaften. Verfahrenstechn. Bd. 1 (1967) S. 5/18.
- [3] Kölbl, H., u. H. Langemann: Der Stoffübergang in Gas-Flüssigkeits-Reaktoren bei verschiedenen Strömungsformen. DECHEMA Monogr. Bd. 49 (1964) S. 253/75.
- [4] Mersmann, A.: Auslegung und Maßstabsvergrößerung von Blasen- und Tropfensäulen. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 49 (1977) S. 679/91.
- [5] Peebles, F.N., u. H.J. Garber: Studies on the motion of gas bubbles in liquids. Chem. Eng. Prog. Bd. 49 (1953) S. 88/97.
- [6] Grassmann, P.: Physikalische Grundlagen der Verfahrenstechnik. 2. Aufl. Aarau u. Frankfurt/M.: Sauerländer 1970.
- [7] Hadamard, J.: Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. C.R. Acad. Sci. Paris Bd. 152 (1911) S. 1735/38.
- [8] Rybczynski, W.: Über die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium. Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie A (1911) S. 40/46.
- [9] Levich, V.G.: Physicochemical hydrodynamics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall 1962.
- [10] Batchelor, G.K.: An introduction to fluid dynamics. Cambridge: University Press 1967.
- [11] Clift, R., J.R. Grace u. M.E. Weber: Bubbles, drops and particles. New York, San Franzisko, London: Academic Press 1978.
- [12] Garner, F.H., u. D. Hammerton: Circulation inside gas bubbles. Chem. Eng. Sci. Bd. 3 (1954) S. 1/11.
- [13] Chao, B.T.: Motion of spherical gas bubbles in a viscous liquid at large Reynolds numbers. Phys. Fluids Bd. 5 (1962) pp. 69/79.
- [14] Moore, D.W.: The boundary layer on a spherical gas bubble. J. Fluid Mech. Bd. 16 (1963) S. 161/76.
- [15] Harper, J.F.: The motion of bubbles and drops through liquids. Adv. App. Mech. Bd. 12 (1972) S. 59/129.
- [16] Hamielec, A.E., T.W. Hoffman u. L.L. Ross: Numerical solution of the Navier-Stokes equation for flow past spheres. Part I: Viscous flow around spheres with and without radial mass efflux. AIChE J. Bd. 13 (1967) S. 212/19.
- [17] Hamielec, A.E., A.I. Johnson u. W.T. Houghton: Viscous flow around circulating spheres of low viscosity. AIChE J. Bd. 13 (1967) S. 220/24.
- [18] Haas, U., H. Schmidt-Traub u. H. Brauer: Umströmung kugelförmiger Blasen mit innerer Zirkulation. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 44 (1972) S. 1060/68.
- [19] Davies, R.M., u. G. Taylor: The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes. Proc. Roy. Soc. (London) A 200 (1950) S. 375/90.
- [20] Moore, D.W.: The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid Mech. Bd. 23 (1965) S. 749/66.
- [21] Collins, R.: The cycloidal-cap bubble: A neglected solution in the theory of large plane gas bubbles in liquids. Chem. Eng. Sci. Bd. 22 (1967) S. 89/97.
- [22] Parlange, J.-Y.: Spherical cap bubbles with laminar wakes. J. Fluid Mech. Bd. 37 (1969) S. 257/63.
- [23] Glaeser, H., u. H. Brauer: Berechnung des Impuls- und Stofftransports durch die Grenzfläche einer formveränderlichen Blase. VDI-Forsch.-H. 581 Düsseldorf: VDI-Verlag 1977.
- [24] Brauer, H.: Transportvorgänge in Zweiphasen-Strömungen; Transportgrößen in der Strömungsmechanik, Teil II. DFVLR, Inst. f. angew. Gasdynamik, Porz-Wahn 1973, S. 55/87.
- [25] Haberman, W.L., u. R.K. Morton: An experimental study of bubbles moving in liquids. Trans. Amer. Soc. Civil Eng. Bd. 121 (1956) S. 227/52.
- [26] Hartunian, R.A., u. W.R. Sears: On the instability of small gas bubbles moving uniformly in various liquids. J. Fluid Mech. Bd. 3 (1957) S. 27/47.
- [27] Aybers, N.M., u. A. Tapucu: The motion of gas bubbles rising through stagnant liquid. Wärme- u. Stoffübertragung Bd. 2 (1969) S. 118/28.
- [28] Aybers, N.M., u. A. Tapucu: Studies on the drag and shape of gas bubbles rising through a stagnant liquid. Wärme- u. Stoffübertragung Bd. 2 (1969) S. 171/77.
- [29] Grace, J.R.: Shapes and velocities of bubbles rising in infinite liquids. Trans. Inst. Chem. Eng. Bd. 51 (1973) S. 116/20.
- [30] Wu, B.J.C., R.T. Deluca u. P.P. Wegener: Rise speed of spherical cap bubbles at intermediate Reynolds number. Chem. Eng. Sci. Bd. 29 (1974) S. 1307/09.
- [31] Wallis, G.B.: The terminal speed of single drops or bubbles in an infinite medium. Int. J. Multiphase Flow Bd. 1 (1974) S. 491/511.
- [32] Coppus, J.H.C.: The structure of the wake behind spherical cap bubbles and its relation to the mass transfer mechanism. Diss. TH Eindhoven 1977.
- [33] Wegener, P.P., u. J.-Y. Parlange: Spherical-cap bubbles. Ann. Rev. Fluid Mech. Bd. 5 (1973) S. 79/100.
- [34] Ihme, F., H. Schmidt-Traub u. H. Brauer: Theoretische Untersuchung über die Umströmung und den Stoffübergang an Kugeln. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 44 (1972) S. 306/13.
- [35] Happel, J., u. H. Brenner: Low Reynolds number hydrodynamics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall 1965.
- [36] Burgers, J.M.: On the influence of the concentration of a suspension upon the sedimentation velocity. Proc. konigl. Ned. Akad. Wetenschap (Amsterdam) Bd. 44 (1941) S. 1045/51; Bd. 45 (1942) S. 9/16.
- [37] Zuber, N.: On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime. Chem. Eng. Sci. Bd. 19 (1964) S. 897/917.
- [38] Brauer, H., u. E. Kriegel: Kornbewegung bei der Sedimentation. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 38 (1966) S. 321/30.
- [39] Kaskas, A.A.: Schwarmgeschwindigkeiten in Mehrkornsuspensionen am Beispiel der Sedimentation. Diss. TU Berlin 1970.
- [40] Happel, J.: Viscous flow in multiparticle systems, slow motion of fluid relative to beds of spherical particles. AIChE J. Bd. 4 (1958) S. 197/201.
- [41] Kuwabara, S.: The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in a viscous flow at small Reynolds numbers. J. Phys. Soc. Japan Bd. 14 (1959) S. 527/32.

- [42] *Richardson, J.F.*, u. *W.N. Zaki*: Part 1, sedimentation and fluidisation. *Trans. Inst. Chem. Eng. Bd. 32* (1954) S. 35/53.
- [43] *Lewis, W.K.*, *E.R. Gilliland* u. *W.C. Bauer*: Characteristics of fluidized particles. *Ind. Eng. Chem. Bd. 41* (1949) S. 1104/17.
- [44] *Lewis, E.W.*, u. *E.W. Bowerman*: Fluidization of solid particles in liquids. *Chem. Eng. Prog. Bd. 48* (1952) S. 603/10.
- [45] *Barnea, E.*, u. *J. Mizrahi*: A generalized approach to the fluid dynamics of particulate systems, part 1: General correlation for fluidization and sedimentation in solid multiparticle systems. *Chem. Eng. J. Bd. 5* (1973) S. 171/89.
- [46] *Barnea, E.*, u. *J. Mizrahi*: A generalized approach to the fluid dynamics of particulate systems, part 2: Sedimentation and fluidization of clouds of spherical liquid drops. *Can. J. Chem. Eng. Bd. 53* (1975) S. 461/68.
- [47] *Gal-Or, B.*, u. *S. Waslo*: Hydrodynamics of an ensemble of drops (or bubbles) in the presence or absence of surfactants. *Chem. Eng. Sci. Bd. 23* (1968) S. 1431/46.
- [48] *Gal-Or, B.*: On motion of bubbles and drops. *Can. J. Chem. Eng. Bd. 48* (1970) S. 526/31.
- [49] *Marrucci, G.*: Rising velocity of a swarm of spherical bubbles. *IEC Fundl. Bd. 4* (1965) S. 224/25.
- [50] *Brauer, H.*, u. *H. Thiele*: Bewegung von Partikelschwärmen. *Chem.-Ing.-Techn. Bd. 45* (1973) S. 909/12.
- [51] *Lapidus, L.*, u. *J.C. Elgin*: Mechanics of vertical-moving fluidized systems. *AIChE J. Bd. 3* (1957) S. 63/68.
- [52] *Turner, J.C.R.*: On bubble flow in liquids and fluidised beds. *Chem. Eng. Sci. Bd. 21* (1966) S. 971/74.
- [53] *Davidson, J.F.*, u. *D. Harrison*: The behavior of a continuously bubbling fluidised bed. *Chem. Eng. Sci. Bd. 21* (1966) S. 731/38.
- [54] *Wallis, G.B.*: One-dimensional two-phase flow. New York: McGraw Hill 1969.
- [55] *Bridge, A.G.*, *L. Lapidus* u. *J.C. Elgin*: The mechanics of vertical gas-liquid fluidised system I; counter-current flow. *AIChE J. Bd. 10* (1964) S. 819/26.
- [56] *Lockett, M.J.*, u. *R.D. Kirkpatrick*: Ideal bubbly flow and actual flow in bubble columns. *Trans. Inst. Chem. Eng. Bd. 53* (1975) S. 267/73.
- [57] *Ishii, M.*, u. *N. Zuber*: Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows. *AIChE J. Bd. 25* (1979) S. 843/55.
- [58] *Freedman, W.*, u. *J.F. Davidson*: Hold-up and liquid circulation in bubble columns. *Trans. Inst. Chem. Eng. Bd. 47* (1969) S. 251/62.
- [59] *Hills, J.H.*: The rise of a large bubble through a swarm of smaller ones. *Trans. Inst. Chem. Eng. Bd. 53* (1975) S. 224/33.
- [60] *Hills, J.H.*, u. *R.C. Darton*: The rising velocity of a large bubble in a bubble swarm. *Trans. Inst. Chem. Eng. Bd. 54* (1976) S. 258/64.
- [61] *Buchholz, R.*, *W. Zakrzewski* u. *K. Schügerl*: Meßtechniken zur Bestimmung der Eigenschaften von Blasen in Blasensäulen. *Chem.-Ing.-Techn. Bd. 51* (1979) S. 568/75.
- [62] *Hughmark, G.A.*: Holdup and mass transfer in bubble columns. *I&EC Proc. Des. & Dev. Vol. 6* (1967) pp. 218/20.
- [63] *Kato, Y.*, u. *A. Nishiwaki*: Longitudinal dispersion coefficient of a liquid in a bubble column. *Int. Chem. Eng. Bd. 12* (1972) S. 182/87.
- [64] *Kim, S.D.*, *C.G.J. Baker* u. *M.A. Bergougnou*: Holdup and axial mixing characteristics of two and three phase fluidised beds. *Can. J. Chem. Eng. Bd. 50* (1972) S. 695/701.
- [65] *Akita, K.*, u. *F. Yoshida*: Gas holdup and volumetric mass transfer coefficient in bubble columns; effects of liquid properties. *I&EC Proc. Des. & Dev. Bd. 12* (1973) S. 76/80.
- [66] *Akita, K.*, u. *F. Yoshida*: Bubble size, interfacial area, and liquid-phase mass transfer coefficient in bubble columns. *I&EC Proc. Des. & Dev. Bd. 13* (1974) S. 84/91.
- [67] *Hikita, H.*, u. *H. Kikukawa*: Liquid-phase mixing in bubble columns; effect of liquid properties. *Chem. Eng. J. Bd. 8* (1974) S. 191/97.
- [68] *Gestrich, W.*, u. *W. Rähse*: Der relative Gasgehalt von Blasenschichten. *Chem.-Ing.-Techn. Bd. 47* (1975) S. 8/13.
- [69] *Gestrich, W.*, u. *W. Krauss*: Die spezifische Phasengrenzfläche in Blasenschichten. *Chem.-Ing.-Techn. Bd. 47* (1975) S. 360/67.
- [70] *Kumar, A.*, *T.E. Degaleesan*, *G.S. Laddha* u. *H.E. Hoelscher*: Bubble swarm characteristics in bubble columns. *Can. J. Chem. Eng. Bd. 54* (1976) S. 503/08.
- [71] *Hikita, H.*, *S. Asai*, *K. Tanigawa*, *K. Segawa* u. *M. Kitao*: Gas hold-up in bubble columns. *Chem. Eng. J. Bd. 20* (1980) S. 59/67.
- [72] *Friedel, L.*, *P. Herbrechtsmeier* u. *R. Steiner*: Relativer Gasgehalt in Blasensäulen-Abstromreaktoren. *Chem.-Ing.-Techn. Bd. 52* (1980) S. 534/35.
- [73] *Fujie, K.*, *M. Takaine*, *H. Kubota* u. *Y. Miyaji*: Flow and oxygen transfer in cocurrent gas-liquid downflow. *J. Chem. Eng. Japan Bd. 13* (1980) S. 188/93.
- [74] *Iodache, O.M.*, u. *O.I. Muntean*: Stochastic approach to the hydrodynamics of gas-liquid dispersions. *I&EC Fundl. Bd. 20* (1981) S. 204/07.
- [75] *Shah, Y.T.*, *B.G. Kelkar*, *S.P. Goldbole* u. *W.-D. Deckwer*: Design parameters estimations for bubble column reactors. *AIChE J. Bd. 28* (1982) S. 353/79.
- [76] *von Bogdandy, L.*, *W. Rutsch* u. *I.N. Stranski*: Gasaustausch zwischen Blasen und gaslösenden Flüssigkeiten. *Chem.-Ing.-Techn. Bd. 31* (1959) S. 580/82.
- [77] *Deindoerfer, F.H.*, u. *A.E. Humphrey*: Mass transfer from individual gas bubbles. *Ind. Eng. Chem. Bd. 53* (1961) S. 755/59.
- [78] *Baird, M.H.I.*, u. *J.F. Davidson*: Gas absorption by large rising bubbles. *Chem. Eng. Sci. Bd. 17* (1962) S. 87/93.
- [79] *Leonard, J.H.*, u. *G. Houghton*: Mass transfer and velocity of rise phenomena for single bubbles. *Chem. Eng. Sci. Bd. 18* (1963) S. 133/42.
- [80] *Calderbank, P.H.*, u. *A.C. Lochiel*: Mass transfer coefficients, velocities and shapes of carbon dioxide bubbles in free rise through distilled water. *Chem. Eng. Sci. Bd. 19* (1964) S. 485/503.
- [81] *Redfield, J.A.*, u. *G. Houghton*: Mass transfer and drag coefficients for single bubbles at Reynolds numbers of 0,02-5000. *Chem. Eng. Sci. Bd. 20* (1965) S. 131/39.
- [82] *Davenport, W.G.*, *F.D. Richardson* u. *A.V. Bradshaw*: Spherical cap bubbles in low density liquids. *Chem. Eng. Sci. Bd. 22* (1967) S. 1221/35.
- [83] *Garbarini, G.R.*, u. *C. Tien*: Mass transfer from single gas bubble - a comprehensive study on experimental methods. *Can. J. Chem. Eng. Bd. 47* (1969) S. 35/41.

- [84] Johnson, A.I., F. Besik u. A.E. Hamielec: Mass transfer from a single rising bubble. Can. J. Chem. Eng. Bd. 47 (1969) S. 559/64.
- [85] Calderbank, P.H., D.S.L. Johnson u. J. Loudon: Mechanics and mass transfer of single bubbles in free rise through some Newtonian and non-Newtonian liquids. Chem. Eng. Sci. Bd. 25 (1970) S. 235/56.
- [86] Raymond, D.R., u. S.A. Zieminsky: Mass transfer and drag coefficients of bubbles rising in dilute aqueous solutions. AIChE J. Bd. 17 (1971) S. 57/65.
- [87] Guthrie, R.I.L., u. A.V. Bradshaw: Spherical capped gas bubbles rising in aqueous media. Chem. Eng. Sci. Bd. 28 (1973) S. 191/203.
- [88] Koide, K., Y. Orito u. Y. Hara: Mass transfer from single bubbles in Newtonian liquids. Chem. Eng. Sci. Bd. 29 (1974) S. 417/25.
- [89] Koide, K., T. Hayashi, K. Sumino u. S. Iwamoto: Mass transfer from single bubbles in aqueous solutions of surfactants. Chem. Eng. Sci. Bd. 31 (1976) S. 963/67.
- [90] Coppus, J.H.C., u. K. Rietema: Mass transfer from spherical cap bubbles, the contribution of the bubble rear. Trans. Inst. Chem. Eng. Bd. 59 (1981) S. 54/63.
- [91] Griffith, R.M.: Mass transfer from drops and bubbles. Chem. Eng. Sci. Bd. 12 (1960) S. 198/213.
- [92] Pritchard, C.L., u. S.K. Biswas: Mass transfer from drops in forced convection. Brit. Chem. Eng. Bd. 12 (1967) S. 879/85.
- [93] Towell, G.D., C.P. Strand u. G.H. Ackerman: Mixing and mass transfer in large diameter bubble columns. AIChE - Int. Chem. Eng. Symp. Ser. Bd. 10 (1965) S. 97/105.
- [94] Botton, R., D. Cosserat u. J.C. Charpentier: Mass transfer in bubble columns operating at high gas throughputs. Chem. Eng. J. Bd. 20 (1980) S. 87/94.
- [95] Coppock, P.D., u. G.T. Meiklejohn: The behaviour of gas bubbles in relation to mass transfer. Trans. Inst. Chem. Eng. Bd. 29 (1951) S. 75/86.
- [96] Ishii, T., u. A.I. Johnson: Mass transfer without and with chemical reaction in dispersed gas/liquid two-phase flows. Can. J. Chem. Eng. Bd. 48 (1970) S. 56/63.
- [97] Yoshida, F., u. K. Akita: Performance of gas bubble columns; Volumetric liquid-phase mass transfer coefficient and gas hold up. AIChE J. Bd. 11 (1965) S. 9/13.
- [98] Chang, C.L.: Stoffaustausch und Durchmischung im Gas-Flüssigkeitsphase-Reaktor. Diss. TU Berlin 1969.
- [99] Deckwer, W.-D., R. Burckhart u. G. Zoll: Mixing and mass transfer in tall bubble columns. Chem. Eng. Sci. Bd. 29 (1974) S. 2177/88.
- [100] Deckwer, W.-D., I. Adler u. A. Zaidi: A comprehensive study on CO₂-interphase mass transfer in vertical cocurrent and countercurrent gas-liquid flow. Can. J. Chem. Eng. Bd. 56 (1978) S. 43/55.
- [101] Oels, U.: Stoffaustauschmessungen an einem Blasen-säulen-Fermenter. Diss. TU Hannover 1975.
- [102] Sideman, S., O. Hortacsu u. J.W. Fulton: Mass transfer in gas-liquid contacting systems. Ind. Eng. Chem. Bd. 58 (1966) S. 32/47.
- [103] Mashelkar, R.A.: Bubble columns. Brit. Chem. Eng. Bd. 15 (1970) S. 1297/1304.
- [104] Deckwer, W.-D.: Blasen-säulen-Reaktoren - ihre modellmäßige Erfassung und Berechnung. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 49 (1977) S. 213/23.
- [105] Deckwer, W.-D.: Grundlagen der Reaktionsführung. Gas/Flüssig-Reaktoren. Fort. Verfahrenstechn. Bd. 15, S. 303/33. Düsseldorf: VDI-Verlag 1977.
- [106] Bartholomé, E., H.H. Mayer u. H.W. Schmidt: Aufbau und Einsatz eines Computerprogramms zur Beschreibung chemischer Umsetzungen in Blasen-säulen. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 45 (1973) S. 974/79
- [107] Shah, Y.T., G.J. Stiegel u. M.M. Sharma: Backmixing in gas-liquid reactors. AIChE J. Bd. 24 (1978) S. 369/400.
- [108] Frössling, N.: Über die Verdunstung fallender Tropfen. Gerl. Beit. Geophysik Bd. 52 (1938) S. 170/216.
- [109] Ranz, W.E., u. W.R. Marshall: Evaporation from drops. Chem. Eng. Prog. Bd. 48 (1952) S. 141/46; S. 173/80.
- [110] Garner, F.H., A. Foord u. M. Tayeban: Mass transfer from circulating liquid drops. J. Appl. Chem. Bd. 9 (1959) S. 315/23.
- [111] Schügerl, K., J. Lücke u. U. Oels: Bubble column bioreactors. Adv. Biochem. Eng. Bd. 7 (1977) S. 1/84.
- [112] Srikrishna, M., K. Sivaji u. G.S.R. Narasimhamurty: Mechanics of liquid drops in air. Chem. Eng. J. Bd. 24 (1982) S. 27/34.
- [113] Calderbank, P.H., u. M.B. Moo-Young: The continuous phase heat and mass transfer properties of dispersions. Chem. Eng. Sci. Bd. 16 (1961) S. 39/54.
- [114] Reuß, M.: Stoffübergang in Blasen-säulen. Diss. TU Berlin 1970.
- [115] Gestrich, W., H. Esenwein u. W. Krauss: Der flüssigkeitsseitige Stoffübergangskoeffizient in Blasen-schichten. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 48 (1976) S. 399/407.
- [116] Kaštanek, F.: The volume mass transfer coefficient in a bubble bed column. Coll. Czech. Chem. Comm. Bd. 42 (1977) S. 2491/97.
- [117] Hikita, H., S. Asai, K. Tanigawa, K. Segawa u. M. Kitao: The volumetric liquid-phase mass transfer coefficient in bubble columns. Chem. Eng. J. Bd. 22 (1981) S. 61/69.
- [118] Brauer, H., u. D. Mewes: Stoffaustausch einschließlich chemischer Reaktionen. Aarau u. Frankfurt/M.: Sauerländer 1971
- [119] Brauer, H., u. D. Mewes: Strömungswiderstand sowie stationärer Stoff- und Wärmeübergang an Blasen und Tropfen. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 44 (1972) S. 953/56.
- [120] Brauer, H.: Impuls-, Stoff- und Wärmetransport durch die Grenzfläche kugelförmiger Partikeln. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 45 (1973) S. 1099/1103.
- [121] Oellrich, L., H. Schmidt-Traub u. H. Brauer: Theoretische Berechnung des Stofftransports in der Umgebung einer Einzelblase. Chem. Eng. Sci. Bd. 28 (1973) S. 711/21.
- [122] Brauer, H.: Particle/fluid transport processes. Fortschr. Verfahrenstechn. Bd. 17, S. 61/99. Düsseldorf: VDI-Verlag 1979.
- [123] Boussinesq, J.: Calcul du pouvoir refroidissant des courant fluids. J. Math. Pur. App. Ser. 6 Bd. 1 (1905) S. 285/332.
- [124] Higbie, R.: The rate of absorption of a pure gas into a still liquid during short periods of exposure. Trans. Amer. Instn. Chem. Engrs. Bd. 31 (1935) S. 365/89.
- [125] Baird, M.H.I., u. A.E. Hamielec: Forced convection transfer around spheres at intermediate Reynolds number. Can J. Chem. Eng. Bd. 40 (1962) S. 119/21.
- [126] Lochiel, A.C., u. P.H. Calderbank: Mass transfer in the continuous phase around axisymmetric bodies of revolution. Chem. Eng. Sci. Bd. 19 (1964) S. 471/84.
- [127] Winnikow, S.: The heat and mass transfer from a fluid sphere at large Reynolds and Peclet number. Can. J. Chem. Eng. Bd. 46 (1968) S. 217/22.

- [128] *Glaeser, H.*: Berechnung des Impuls- und Stofftransportes durch die Grenzfläche einer formveränderlichen Blase. Diss. TU Berlin 1976.
- [129] *Ruckenstein, E.*: On mass transfer in the continuous phase from spherical bubbles or drops. Chem. Eng. Sci. Bd. 19 (1964) S. 131/46.
- [130] *Waslo, S.*, u. *B. Gal-Or*: Boundary layer theory for mass and heat transfer in clouds of moving drops, bubbles or solid particles. Chem. Eng. Sci. Bd. 26 (1971) S. 829/38.
- [131] *Le Clair, B.P.*, u. *A.E. Hamielec*: Viscous flow through particle assemblages at intermediate Reynolds numbers - a cell model for transport in bubble swarms. Can. J. Chem. Eng. Bd. 49 (1971) S. 713/20.
- [132] *Yaron, I.*, u. *B. Gal-Or*: High Reynolds number fluid dynamics and heat and mass transfer in real concentrated particulate two-phase systems. Int. J. Heat Mass Transfer Bd. 16 (1973) S. 887/95.
- [133] *Yaron, I.*, *B. Gal-Or*: Convective mass or heat transfer from size-distributed drops, bubbles or solid particles. Int. J. Heat Mass Transf. Bd. 14 (1971) S. 727/37.
- [134] *Kumar, S.*, u. *K.K. Sirkar*: Creeping flow mass transfer in a cloud of size distributed round drops at high Schmidt numbers. Chem. Eng. Sci. Bd. 34 (1979) S. 1231/42.
- [135] *Ruckenstein, E.*: Mass transfer between a single drop and a continuous phase. Int. J. Heat Mass Transf. Bd. 10 (1967) S. 1785/92.
- [136] *Taunton, J.W.*, u. *E.N. Lightfoot*: Transient effects in mass transfer to circulating drops. Int. J. Heat Mass Transf. Bd. 12 (1969) S. 1718/22.
- [137] *Chao, B.T.*, u. *J.L.S. Chen*: Series solution of unsteady heat or mass transfer to a translating fluid sphere. Int. J. Heat Mass Transf. Bd. 13 (1970) S. 359/67.
- [138] *Dang, V.D.*, u. *E. Ruckenstein*: High Reynolds numbers unsteady convective mass transfer from fluid spheres. Int. J. Heat Mass Transf. Bd. 16 (1973) S. 1371/84.
- [139] *Brauer, H.*: Unsteady state mass transfer through the interface of spherical particles. Int. J. Heat Mass Transf. Bd. 21 (1978) S. 438/53 u. S. 454/65.
- [140] *Plöcker, U.J.*, u. *H. Schmidt-Traub*: Instationärer Stofftransport zwischen einer Einzelkugel und einer ruhenden Umgebung. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 44 (1972) S. 313/19.
- [141] *Davis, J.T.*: Turbulence phenomena. New York, San Franzisko, London: Academic Press 1972.
- [142] *Zheleznyak, A.S.*, *A.M. Landau*, *A.V. Gorbunov* u. *B.D. Losev*: Study of the mechanism of mass transfer in crowded flow. J. Appl. Chem. USSR Bd. 52 (1979) S. 2588/90.
- [143] *Calderbank, P.H.*: Gas absorption from bubbles. Trans. Inst. Chem. Eng. Bd. 45 (1967) S. 209/33.
- [144] *Ueyama, K.*, u. *T. Miyauchi*: Properties of recirculating turbulent two phase flow in gas bubble columns. AIChE J. Bd. 25 (1979) S. 258/66.
- [145] *Kojima, E.*, *T. Akehata* u. *T. Shirai*: Behavior of single air bubbles held stationary in downward flows. J. Chem. Eng. Japan Bd. 8 (1975) S. 108/113.
- [146] *Hallensleben, J.*: Simultaner Stoffaustausch von CO₂ und Sauerstoff an Einzelblasen und in Blasenschwärmen. Diss. TU Hannover 1980.
- [147] *Brauer, H.*: Turbulenz in mehrphasigen Strömungen. Chem.-Ing.-Techn. Bd. 51 (1979) S. 934/48.
- [148] *De Nevers, N.*: Bubble driven fluid circulations. AIChE J. Bd. 14 (1968) S. 222/26.
- [149] *Schlichting, H.*: Boundary-layer theory. 7th ed. New York: McGraw-Hill Book Company 1979.
- [150] *Rotta, J.C.*: Turbulente Strömungen. Stuttgart: G.B. Teubner 1972
- [151] *Monin, A.S.*, u. *A.M. Yaglom*: Statistical fluid mechanics. Mechanics of Turbulence, Bd. I. The MIT Press 1979.
- [152] *Collatz, L.*: The numerical treatment of differential equations. 3rd ed. Berlin, Heidelberg, Göttingen: Springer 1960.
- [153] *Smith, G.D.*: Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Braunschweig: Vieweg 1970
- [154] *Gram, C.*: Selected numerical methods. Kopenhagen: Regnecentralen 1962.
- [155] *Lindt, J.T.*: Time dependent mass transfer from single bubbles. Diss. TH Delft 1971.
- [156] *Tadaki, T.*, u. *S. Maeda*: On the shape and velocity of single air bubbles rising in various liquids. Chem. Eng. (Japan) Bd. 25 (1961) S. 254/64.
- [157] *Brauer, H.*, u. *D. Sucker*: Biological waste water treatment in a high efficiency reactor. Ger. Chem. Eng. Bd. 2 (1979) S. 77/86.

