O ruchu kuli w ośrodku lepkim wzdłuż ściany płaskiej. — Über die Bewegung einer Kugel in einem zähen Medium längs einer ebenen Wand.

Note

de M. ***J. STOCK,***

présentée par M. M. Smoluchowski m. c. dans la séance du 9 Janvier 1911.

In einer seiner Abhandlungen über theoretische Physik [1]) behandelt H. A. Lorentz die Beeinflussung einer stationären Bewegung in einer reibenden Flüssigkeit durch eine unbegrenzte Wand infolge des Umstandes, daß an der Wand die Geschwindigkeiten Null sein müssen, da Gleitung ausgeschlossen ist. Das Lorentz'sche Verfahren besteht im folgenden: „Es sei ein stationärer Bewegungszustand M_0 mit den Geschwindigkeiten (u_0, v_0, w_0) und dem Druck p_0 gegeben; diesen haben wir bestimmt in der Voraussetzung, daß die Wand nicht da ist und die Flüssigkeit sich auch auf der negativen Seite der Wand (yz Ebene) erstreckt. Auch die Fortsetzung von M_0 hinter der Wand ist also bekannt. Wir denken uns nun auf der vorderen Seite der Wand einen Bewegungszustand, der genau das Spiegelbild jener Fortsetzung ist. Hiermit ist gemeint, daß, wenn P ein beliebiger Punkt vor der Wand und P' sein Spiegelbild ist, die Geschwindigkeit (u_1, v_1, w_1) in P das Spiegelbild der Geschwindigkeit (u_0, v_0, w_0) in P' ist, die bei Abwesenheit der Wand in P' bestehen würde. An der Wand gilt: $u_1 = - u_0$, $v_1 = v_0$, $w_1 = w_0$. Leiten wir nun aus dem Zustand M_1 einen Zustand M_{1s} ab in der Weise, daß

[1]) H. A. Lorentz: Abhandlungen über theoretische Physik, II, S. 23.

$$
(1)\ldots\quad
\begin{aligned}
u_{1s} &= u_1 - 2x\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}\\
v_{1s} &= -v_1 - 2x\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial y}\\
w_{1s} &= -w_1 - 2x\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial z}\\
p_{1s} &= p_1 + 2x\frac{\partial p_1}{\partial x} - 4\mu\frac{\partial u_1}{\partial x},
\end{aligned}
$$

so genügt $M_0 + M_{1s}$ den hydrodynamischen Grundgleichungen und der Bedingung, daß an der Wand $u_0 + u_{1s} = 0$, $v_0 + v_{1s} = 0$, $w_0 + w_{1s} = 0$ sei".

Als speziellen Fall dieser allgemeinen Erwägungen betrachtet Lorentz die Bewegung einer Kugel normal und parallel zur Wand und findet, durch einmalige Zurückwerfung der Bewegung, daß der Widerstand, den die Kugel erleidet, im Verhältnis wie

$$1 \text{ zu } 1 + \tfrac{9}{8}\frac{R}{a} \text{ bzw. } 1 + \tfrac{9}{16}\frac{R}{a}$$

vergrößert wird. R ist der Radius der Kugel, a ihr Abstand von der Wand. Auch wirkt bei der parallelen Bewegung keine Kraft auf die Kugel in einer zur Wand normalen Richtung. Dabei werden jedoch, unter der Voraussetzung, daß R/a klein gegen 1 ist, die an der Kugeloberfläche übrig bleibenden Bewegungskomponenten von M_{1s} als verschwindend klein vernachlässigt.

Im folgenden versuchte ich die Rechnung weiterzuführen, und höhere Potenzen von R/a (bis zum vierten Grade) in Betracht zu ziehen, insbesondere zu dem Zwecke, um zu untersuchen, ob nicht auch Kräfte in normaler Richtung wirken, oder Drehungsmomente auftreten, was von vornherein nicht unwahrscheinlich erscheint. Dabei müssen dann die erwähnten, an der Kugeloberfläche übrig bleibenden Strömungskomponenten durch Superponierung eines weiteren Zustandes M_{1k} neutralisiert werden, welcher den Bedingungen genügt, daß auf jener Oberfläche:

$$(2)\ldots\quad u_{1s} + u_{1k} = 0,\ v_{1s} + v_{1k} = 0,\ w_{1s} + w_{1k} = 0$$

und daß u_{1k}, v_{1k}, w_{1k} im Unendlichen verschwinden.

Nun werden wieder an der ebenen Wand gewisse Strömungskomponenten übrig bleiben, welche durch Superponierung eines nach Anleitung der Formeln (1) hergestellten Zustandes M_{2s} neutralisiert werden müssen; und so fahren wir fort, solange sich noch Glieder vom vierten Grade in R/a ergeben.

Als Zustand M_0 nehmen wir somit die Bewegung an, welche durch eine Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

hervorgerufen wird, die parallel der Wand S $(x = -a)$ in Rich-

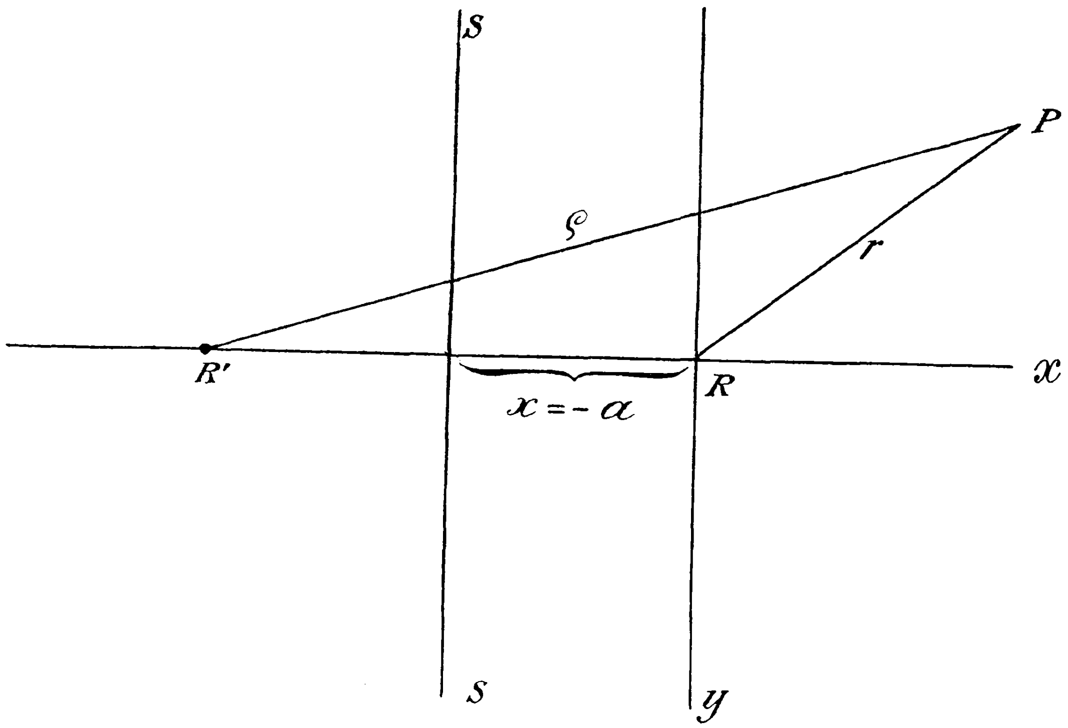

Fig. 1.

tung der Y-Achse mit der Geschwindigkeit c fortschreitet (Fig. 1).

Dann haben wir bekanntlich:

$$(3) \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} u_0 &= \tfrac{3}{4} Rc \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{xy}{r^3} \\ v_0 &= \tfrac{3}{4} Rc \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{y^2}{r^2} + \tfrac{1}{4} Rc \left(\frac{3}{r} + \frac{R^2}{r^3}\right) \\ w_0 &= \tfrac{3}{4} Rc \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{yz}{r^3} \\ p_0 &= \tfrac{3}{2} Rc\mu \frac{y}{r^3} + \text{const.} \end{aligned} \right.$$

Der Zustand M_1, der ein Spiegelbild von M_0 ist, ist die Bewegung, welche eine Kugel R' im Abstande $x = -2a$ vom Koordinaten-Anfang hervorbringen würde. Er ist bestimmt durch:

$$(4)\ \ldots\quad \begin{cases} u_1 = \frac{3}{4} Rc\left(1 - \frac{R^2}{\varrho^2}\right)\frac{(x+2a)\,y}{\varrho^3} \\ v_1 = \frac{3}{4} Rc\left(1 - \frac{R^2}{\varrho^2}\right)\frac{y^2}{\varrho^3} + \frac{1}{4} Rc\left(\frac{3}{\varrho} + \frac{R^2}{\varrho^3}\right) \\ w_1 = \frac{3}{4} Rc\left(1 - \frac{R^2}{\varrho^2}\right)\frac{yz}{\varrho^3} \\ p_1 = \frac{3}{2} Rc\mu\,\frac{y}{\varrho^3} + \text{const.} \end{cases}$$

Aus Gleichungen (1) und (4) finden wir die erste Zurückwerfung von der Wand, M_{1s}:

$$(5)\ \ldots\quad \begin{cases} u_{1s} = -A\,.\frac{xy}{\varrho^3} + B\,.\frac{(x+2a)\,y\,(x+a)}{\varrho^5} \\ v_{1s} = -\frac{1}{4} Rc\left(\frac{3}{\varrho} + \frac{R^2}{\varrho^3}\right) - A\,.\frac{y^2}{\varrho^3} - \\ \quad -\frac{3}{2} Rc\left[a - \frac{(x+2a)\,R^2}{\varrho^2}\right]\frac{(x+a)}{\varrho^3} + B\,\frac{y^2(x+a)}{\varrho^5} \\ w_{1s} = -A\,\frac{yz}{\varrho^3} + B\,\frac{yz\,(x+a)}{\varrho^5} \\ p_{1s} = -\frac{3}{2} Rc\,.\,\mu\,\frac{y}{\varrho^3} + 3R^3c\mu\,.\frac{y}{\varrho^5} + 2B\mu\,.\frac{(x+2a)\,.\,y}{\varrho^5} \end{cases}$$

Hierin bedeutet

$$A = \frac{3}{4} Rc\left(1 - \frac{R^2}{\varrho^2}\right),\qquad B = \frac{3}{2} Rc\left[3a - \frac{5\,(x+2a)\,R^2}{\varrho^2}\right]$$

Den Bewegungszustand M_{1k} bestimmen wir am einfachsten mittels der von Lamb[1]) angegebenen allgemeinen Lösung der hydrodynamischen Grundgleichungen:

$$(6)\ldots\quad u = \frac{1}{\mu}\sum\left[\frac{(n+3)\,r^2}{2\,(n+1)\,(2n+3)}\,\frac{\partial p_n}{\partial x} - \frac{nxp_n}{(n+1)(2n+3)}\right] + \\ + \sum\left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \left(z\,\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\,\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right)\right],$$

worin p_n, φ_n, χ_n Kugelfunktionen n-ter Ordnung, r die Entfernung vom Kugel-Mittelpunkte R bedeuten, die Geschwindigkeiten v, w durch Vertauschung von x mit y und z zu bilden sind und der

[1]) Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik S 582.

Druck p durch $p = \Sigma p_n$ bestimmt ist. Die p_n, χ_n, μ_n sind samt ihren Koeffizienten aus den Grenzbedingungen (2) aufzufinden. Hiezu entwickeln wir u_{1s}, v_{1s}, w_{1s} in der Umgebung der Kugel R (des Punktes $x = y = z = 0$) mittels der Newton'schen Formel bis zur vierten Potenz von R/a und erhalten:

$$(7)\ldots \left\{\begin{aligned}
u_{1s} &= \tfrac{9}{8}\frac{Rc}{(2a)^2}\cdot y - \tfrac{15}{4}\frac{R^3c}{(2a)^4}\cdot y - \frac{3Rc}{(2a)^3}\cdot xy + \\
&+ \tfrac{9}{2}\frac{Rc}{(2a)^4}\cdot x^2y - \tfrac{45}{16}\frac{Rc}{(2a)^4}\cdot y^3 - \tfrac{45}{16}\frac{Rc}{(2a)^4}\cdot yz^2 + \ldots \\
v_{1s} &= -\tfrac{9}{8}\frac{Rc}{2a} + \tfrac{1}{2}\frac{R^3c}{(2a)^3} + \tfrac{9}{8}\frac{Rc}{(2a)^2}\cdot x - \tfrac{3}{4}\frac{R^3c}{(2a)^4}\cdot x - \\
&- \tfrac{3}{4}\frac{Rc}{(2a)^3}x^2 + \tfrac{21}{16}\frac{Rc}{(2a)^3}\cdot y^2 + \tfrac{15}{16}\frac{Rc}{(2a)^3}\cdot z^2 - \tfrac{63}{16}\frac{Rc}{(2a)^4}\cdot xy^2 - \\
&\qquad - \tfrac{45}{16}\frac{Rc}{(2a)^4}\cdot xz^2 + \ldots \\
w_{1s} &= \tfrac{3}{8}\frac{Rc}{(2a)^3}\cdot yz - \tfrac{9}{8}\frac{Rc}{(2a)^4}\cdot xyz + \ldots \\
p_{1s} &= \frac{3Rc\mu}{(2a)^3}\cdot y - \frac{12R^3c\mu}{(2a)^5}\cdot y - \tfrac{27}{2}\frac{Rc\mu}{(2a)^4}\cdot xy + \\
&\quad + \frac{36Rc\mu}{(2a)^5}\cdot x^2y - \frac{9Rc\mu}{(2a)^5}\cdot y^3 - \frac{9Rc\mu}{(2a)^5}\cdot yz^2 + \ldots
\end{aligned}\right.$$

Dann bilden wir die Ausdrücke $xu_{1s} + yv_{1s} + zw_{1s}$ und

$$x\left(\frac{\partial w_{1s}}{\partial y} - \frac{\partial v_{1s}}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial u_{1s}}{\partial z} - \frac{\partial w_{1s}}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial v_{1s}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1s}}{\partial y}\right)$$

die nach Lamb (a. a. O.) gleich sind

$$\frac{R^2}{2}\sum\left(\frac{np_n}{2n+3} + n\varphi_n\right) \text{ bzw. } \sum n(n+1)\chi_n$$

was folgende p_n, φ_n, χ_n liefert:

$$p_{-2} = a_1\cdot\frac{y}{r^3} \qquad \varphi_{-2} = \alpha_1\cdot\frac{y}{r^3} \qquad \chi_{-2} = A_1\cdot\frac{z}{r^3}$$

$$p_{-3} = b_1\cdot\frac{xy}{r^5} \qquad \varphi_{-3} = \beta_1\cdot\frac{xy}{r^5}$$

$$p_{-4} = c_1\left(\frac{y}{r^5} - \frac{5x^2y}{r^7}\right) \quad \varphi_{-4} = \gamma_1\left(\frac{y}{r^5} - \frac{5x^2y}{r^7}\right)$$

$$p_{-5} = d_1\left(\frac{3xy}{r^7} - \frac{7x^3y}{r^9}\right) \varphi_{-5} = \delta_1\left(\frac{3xy}{r^7} - \frac{7x^3y}{r^9}\right).$$

Wir setzen die p_n, φ_n, χ_n in (6) ein und erhalten durch Vergleichung mit (7) und (2) die Werte der entsprechenden Koeffizienten:

$$a_1 = \tfrac{27}{16}\frac{R^2 c\mu}{2a} - \tfrac{3}{2}\frac{R^4 c\mu}{(2a)^3} \qquad \alpha_1 = \tfrac{9}{32}\frac{R^4 c}{2a} - \tfrac{7}{20}\frac{R^6 c}{(2a)^3};\; A_1 = -\tfrac{3}{2}\frac{R^6 c}{(2a)^4}$$

$$b_1 = -\tfrac{45}{4}\frac{R^4 c\mu}{(2a)^2} + 36\frac{R^6 c\mu}{(2a)^4} \qquad \beta_1 = -\tfrac{9}{8}\frac{R^6 c}{(2a)^2} + \tfrac{27}{7}\frac{R^8 c}{(2a)^4}$$

$$c_1 = -\tfrac{567}{64}\frac{R^6 c\mu}{(2a)^3} \qquad \gamma_1 = -\tfrac{81}{128}\frac{R^8 c}{(2a)^3}$$

$$d_1 = \tfrac{81}{4}\frac{R^8 c\mu}{(2a)^4} \qquad \delta_1 = \tfrac{9}{8}\frac{R^{10} c}{(2a)^4}$$

und wenn diese Werte in M_{1k} eingesetzt und die Glieder geordnet werden, finden wir:

$$(8)\ldots\left\{\begin{aligned}
v_{1k} = {} & \frac{9R}{16a}\left[\tfrac{3}{4} Rc\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\frac{y^2}{r^3} + \tfrac{1}{4} Rc\left(\frac{3}{r}+\frac{R^2}{r^3}\right)\right] - \\
& - \tfrac{1}{16}\frac{R^3 c}{(2a)^3}\left[\frac{12R}{r} + \tfrac{7}{8}\frac{R^3}{r^3} + \tfrac{81}{8}\frac{R^5}{r^5}\right] - \tfrac{9}{8}\frac{R^6 c}{(2a)^2}\frac{x}{r^5} + \\
& + \tfrac{3}{16}\frac{R^3 c}{(2a)^4}\cdot x\left[-\frac{8R^3}{r^3} + \frac{9R^5}{r^5} + \frac{18R^7}{r^7}\right] + \\
& + \tfrac{27}{16}\frac{Rc}{(2a)^3}\cdot x^2\left[-\tfrac{7}{8}\frac{R^5}{r^5} + \tfrac{15}{8}\frac{R^7}{r^7}\right] - \\
& - \tfrac{3}{8}\frac{Rc}{(2a)^3}\cdot y^2\left[\frac{2R^3}{r^3} + \tfrac{119}{16}\frac{R^5}{r^5} - \tfrac{135}{16}\frac{R^7}{r^7}\right] - \\
& - \tfrac{45}{8}\frac{R^4 c}{(2a)^2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\frac{xy^2}{r^5} + \\
& + \tfrac{9}{8}\frac{Rc}{(2a)^4}\cdot xy^2\left[\frac{16R^5}{r^5} + \frac{6R^7}{r^7} - \frac{21R^9}{r^9}\right] - \\
& - \tfrac{45}{16}\frac{Rc}{(2a)^4}\cdot x^3\left[-\tfrac{9}{5}\frac{R^7}{r^7} + \tfrac{14}{5}\frac{R^9}{r^9}\right] + \\
& + \tfrac{2835}{128}\frac{R^6 c}{(2a)^3}\cdot\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\frac{x^2y^2}{r^7} - \tfrac{567}{8}\frac{R^8 c}{(2a)^4}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\frac{x^3y^2}{r^9}
\end{aligned}\right.$$

und analoge Reihenentwickelungen für u_{1k}, w_{1k}, p_{1k}. Die Glieder sind so angeordnet, daß durch Einsetzung von $r = R$ sofort erhellt, daß $M_{1s} + M_{1k} = 0$ ist.

Die Bestimmung des Zustandes M_{2s} können wir uns bedeutend erleichtern, indem wir in den letzten Gleichungen von vornherein alle diejenigen Glieder streichen, welche nach Zurückwerfung Ausdrücke von höherem Grade als $(R/a)^4$ liefern; so lassen sich u_{1k}, v_{1k}, w_{1k}, p_{1k} in der Form darstellen:

$$(9) \ldots \left\{ \begin{aligned} u_{1k} &= ku_0 - \lambda^3 u_0 + \ldots & k &= \frac{9R}{16a} \\ v_{1k} &= kv_0 - \lambda^3 v_0 + \ldots & & \\ w_{1k} &= kw_0 - \lambda^3 w_0 + \ldots & \lambda &= \frac{R}{2a} \\ p_{1k} &= kp_0 - \lambda^3 p_0 + \ldots & & \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort der Zustand M_{2s}:

$$(10) \ldots \left\{ \begin{aligned} u_{2s} &= ku_{1s} - \lambda^3 u_{1s} + \ldots \\ v_{2s} &= kv_{1s} - \lambda^3 v_{1s} + \ldots \\ w_{2s} &= kw_{1s} - \lambda^3 w_{1s} + \ldots \\ p_{2s} &= kp_{1s} - \lambda^3 p_{1s} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Wenn wir weiter (7) in (10) einsetzen und nur Glieder vierter Potenz von R/a berücksichtigen, erhalten wir:

$$(11) \ldots \left\{ \begin{aligned} u_{2s} &= k\left[\tfrac{9}{8}\frac{Rc}{(2a)^2}\cdot y - \frac{3Rc}{(2a)^3}\cdot xy + \ldots\right] \\ v_{2s} &= k\left[-\frac{9Rc}{16a} + \tfrac{1}{2}\frac{R^3c}{(2a)^3} + \tfrac{9}{8}\frac{Rc}{(2a)^2}\cdot x - \tfrac{3}{4}\frac{Rc}{(2a)^3}\cdot x^2 + \right. \\ &\qquad \left. + \tfrac{21}{16}\frac{Rc}{(2a)^3}\cdot y^2 + \tfrac{15}{16}\frac{Rc}{(2a)^3}\cdot z^2 + \ldots\right] - \lambda^3\left[-\frac{9Rc}{16a} + \ldots\right] \\ w_{2s} &= k\,.\,\tfrac{3}{8}\frac{Rc}{(2a)^3}\cdot yz + \ldots \\ p_{2s} &= k\left[\frac{3Rc\mu}{(2a)^3}\cdot y - \tfrac{27}{2}\frac{Rc\mu}{(2a)^4}\cdot xy + \ldots\right] \end{aligned} \right.$$

Nun bestimmen wir wieder einen Zustand M_{2k} mittels (6) und der analog (2) gebildeten Oberflächenbedingung. In diesem Falle ist $\chi_n = 0$.

$$p_{-2}=k\left[\tfrac{27}{16}\frac{R^2c\mu}{2a}-\tfrac{3}{2}\frac{R^4c\mu}{(2a)^3}\right]\frac{y}{r^3}$$

$$p_{-3}=-k\,.\,\tfrac{45}{4}\frac{R^4c\mu}{(2a)^2}\cdot\frac{xy}{r^5}$$

$$p_{-4}=-k\,.\,\tfrac{567}{64}\frac{R^6c\mu}{(2a)^3}\left(\frac{y}{r^5}-\frac{5x^2y}{r^7}\right)$$

$$\varphi_{-2}=k\,.\left[\tfrac{9}{32}\frac{R^4c}{2a}-\tfrac{7}{20}\cdot\frac{R^6c}{(2a)^3}\right]\cdot\frac{y}{r^3}$$

$$\varphi_{-3}=-k\,.\,\tfrac{9}{8}\frac{R^6c}{(2a)^2}\cdot\frac{xy}{r^5}$$

$$\varphi_{-4}=-k\,.\,\tfrac{81}{128}\frac{R^8c}{(2a)^3}\cdot\left(\frac{y}{r^5}-\frac{5x^2y}{r^7}\right).$$

woraus

$$(12)\ldots\left\{\begin{array}{l}
v_{2k}=k^2\,.\,v_0-\dfrac{k}{16}\cdot\dfrac{R^3c}{(2a)^3}\left[\dfrac{12R}{r}+\tfrac{7}{8}\dfrac{R^3}{r^3}+\tfrac{81}{8}\dfrac{R^5}{r^5}\right]-\\
-k\,.\,\tfrac{9}{8}\dfrac{R^6c}{(2a)^2}\cdot\dfrac{x}{r^5}+k\,.\,\tfrac{27}{16}\dfrac{Rc}{(2a)^3}\cdot x^2\left[-\tfrac{7}{8}\dfrac{R^5}{r^5}+\tfrac{15}{8}\dfrac{R^7}{r^7}\right]-\\
-k\,.\,\tfrac{3}{8}\dfrac{Rc}{(2a)^3}\cdot y^2\left[\dfrac{2R^3}{r^3}+\tfrac{119}{16}\dfrac{R^5}{r^5}-\tfrac{135}{16}\dfrac{R^7}{r^7}\right]-\\
-k\,.\,\tfrac{45}{8}\dfrac{R^4c}{(2a)^2}\cdot\dfrac{xy^2}{r^5}\left(1-\dfrac{R^2}{r^2}\right)+\\
+k\,.\,\tfrac{2835}{128}\,.\,\dfrac{R^6c}{(2a)^3}\cdot\dfrac{x^2y^2}{r^7}\left(1-\dfrac{R^2}{r^2}\right)-k\,.\,\lambda^3\,.\,v_0
\end{array}\right.$$

und analoge Ausdrücke für u_{2k}, w_{2k}, p_{3k} folgen.

Auch diese Geschwindigkeiten sind von der Wand zu reflektieren, was wieder dadurch erleichtert wird, daß wir sie in der Form schreiben können:

$$v_{2k}=k^2v_0-k\lambda^3v_0+\ldots$$

Die zu superponierenden Geschwindigkeiten sind

$$(13)\ldots\left\{\begin{array}{l}
u_{3s}=k^2u_{1s}+\ldots=k^2\,.\,\tfrac{9}{8}\dfrac{Rc}{(2a)^2}\cdot y+\ldots\\
v_{3s}=k^2\left[-\dfrac{9Rc}{16a}+\tfrac{9}{8}\dfrac{Rc}{(2a)^2}\cdot x+\ldots\right]\\
w_{3s}=0+\ldots\\
p_{3s}=k^2\left[\dfrac{3Rc\mu}{(2a)^3}\cdot y+\ldots\right]
\end{array}\right.$$

Der Bewegungszustand M_{3k} wird sodann bestimmt durch:

$$p_{-2} = k^2 \cdot \tfrac{27}{16} \frac{R^2 c\mu}{2a} \cdot \frac{y}{r^3} \qquad \varphi_{-2} = k^2 \tfrac{9}{32} \frac{R^4 c}{2a}$$

$$p_{-3} = - k^2 \cdot \tfrac{45}{4} \cdot \frac{R^4 c\mu}{(2a)^2} \cdot \frac{xy}{r^5} \quad \varphi_{-3} = - k^2 \cdot \tfrac{9}{8} \frac{R^6 c}{(2a)^2}$$

und lautet:

$$(14)\ldots\ v_{3k} = k^3 v_0 - k^2 \cdot \tfrac{9}{8} \frac{R^6 c}{(2a)^2} \cdot \frac{x}{r^5} - k^2 \cdot \tfrac{45}{8} \frac{R^4 c}{(2a)^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{xy^2}{r^5} \quad \text{u. s. w.}$$

Aus (14) folgt der durch die Wand zurückgeworfene Zustand M_{4s}:

$$(15)\ldots\ v_{4s} = - k^3 \cdot \frac{9Rc}{16a} + \ldots \qquad u_{4s} = v_{4s} = p_{4s} = 0$$

und endlich M_{4k}:

$$(16)\ldots \left\{ \begin{aligned} u_{4k} &= k^4 u_0 + \ldots \\ v_{4k} &= k^4 v_0 + \ldots \\ w_{4k} &= k^4 v_0 + \ldots \\ p_{4k} &= k^4 p_0 + \ldots \end{aligned} \right.$$

Folglich ist der allen Bedingungen genügende Bewegungszustand

$$M_0 + M_{1s} + M_{1k} + M_{2s} + M_{2k} + M_{3s} + M_{3k} + M_{4s} + M_{4k}$$

und die entsprechenden Geschwindigkeiten lauten

$$\begin{aligned} u &= u_0 \left[\frac{1-k^5}{1-k} - \lambda^3 (1+k)\right] + u_{1s} \left[\frac{1-k^3}{1-k} - \lambda^3\right] + \ldots \\ v &= v_0 \left[\frac{1-k^5}{1-k} - \lambda^3 (1+k)\right] + v_{1s} \left[\frac{1-k^4}{1-k} - \lambda^3\right] + \ldots \\ w &= v_0 \left[\frac{1-k^5}{1-k} - \lambda^3 (1+k)\right] + w_{1s} \left[1 + k - \lambda^3\right] + \ldots \\ p_{1s} &= p_0 \left[\frac{1-k^5}{1-k} - \lambda^3 (1+k)\right] + p_{1s} \left[\frac{1-k^3}{1-k} - \lambda^3\right] + \ldots \end{aligned}$$

Natürlich steht nichts im Wege, die Annäherungs-Rechnung in derselben Weise bis zu beliebig hohen Potenzen von R/a weiterzuführen.

Auf Grund der erhaltenen Werte von u, v, w lassen sich nun in bekannter Weise[1]) die Kräfte, die auf die Kugel wirken, und die Drehungsmomente berechnen. Die aus dem Bewegungszustande M_{1s} berechneten Kräfte F_x, F_y, F_z ergeben sich zu Null. Dagegen liefert der Zustand M_0 den bekannten, von Stokes berechneten Beitrag $6\pi\mu Rc$, so daß die resultierenden Kräfte lauten:

$$(17)\ldots \begin{cases} F_x = F_z = 0 \\ F_y = 6\pi\mu Rc\left[\dfrac{1}{1-\dfrac{9R}{16a}} - \left(\dfrac{R}{2a}\right)^3\left(1+\dfrac{9R}{16a}\right)\right] \end{cases}$$

Auch ergibt sich, daß das Drehungsmoment in bezug auf die Z Achse M_z verschwindet, und dasselbe gilt schon aus Symmetriegründen bezüglich der Momente M_x, M_y.

Das Resultat obiger Ausführungen läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

1) Eine Kugel, die sich in einem zähen Medium parallel einer ebenen Wand langsam bewegt, erleidet einen Widerstand in der Richtung der Bewegung, der durch Anwesenheit der Wand im Verhältnis

$$1 \text{ zu } \left[\frac{1}{1-\dfrac{9R}{16a}} - \left(\frac{R}{2a}\right)^3\left(1+\frac{9R}{16a}\right)\right]$$

bei Berücksichtigung vierter Potenzen von R/a vergrößert wird; in der Richtung senkrecht zur Wand dagegen wirken auf die Kugel keine Kräfte, solange in den hydrodynamischen Grundgleichungen die Glieder $u\,\partial u/\partial x$ u. s. w. vernachlässigt werden.

2) Das Drehungsmoment ist in diesem Falle ebenfalls Null.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Ratschläge spreche ich Hrn. Prof. Smoluchowski meinen herzlichsten Dank aus.

[1]) Lamb a. a. O.