ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 6. N:o 29.

Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik.

Von

C. W. OSEEN.

Mitgeteilt am 14. September 1910 durch A. LINDSTEDT und E. PHRAGMÉN.

1. Die STOKES'sche Formel für den Widerstand, den eine Kugel erfährt, die sich mit konstanter, unendlich kleiner Geschwindigkeit in einer reibenden, unzusammendrückbaren Flüssigkeit bewegt, wurde von ihrem Autor auf die folgende Weise bewiesen. Die NAVIER'schen Differentialgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeit, auf ein Koordinatensystem bezogen, welches seinen Anfangspunkt in dem Mittelpunkte der Kugel hat und sich mit dieser bewegt, lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u\,,\\
\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v\,,\\
\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w\,,\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Die zugehörigen Nebenbedingungen sind: für $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \infty : u = -u_0$, $v = 0$; $w = 0$; für $R = a : u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, wenn u_0 die Geschwindigkeit der Kugel, a ihr Radius ist und wenn die x-Achse mit der Bewegungsrichtung der Kugel zusammenfällt.

Wir nehmen an, dass die Bewegung der Flüssigkeit, von der Kugel aus beurteilt, stationär ist. Die ersten Glieder in den drei ersten Gleichungen fallen dann weg. Ferner ist offenbar, dass wenn überhaupt drei Funktionen u, v, w existieren, welche die Differentialgleichungen und Nebenbedingungen befriedigen, und welche überall ausserhalb der Kugel endliche, stetige Funktionen von x, y, z sind mit stetigen Ableitungen der zwei ersten Ordnungen, dann u, v, w, $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots \frac{\partial w}{\partial z}$ überall gleichzeitig mit u_0 gegen Null abnehmen müssen. Es liegt dann nahe anzunehmen, dass wenn u_0 klein ist, die s. g. quadratischen Glieder $u \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots$, von höherer Ordnung klein sein müssen als die Glieder $\frac{\partial p}{\partial x}, \ldots, \Delta u, \ldots$, und dass man folglich die quadratischen Glieder vernachlässigen kann. Wenn man das tut, bekommen die Differentialgleichungen die verhältnismässig einfache Form:

$$\mu \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mu \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Dieses System von Differentialgleichungen mit den Nebenbedingungen: für $R = \infty$, $u = -u_0$, $v = 0$, $w = 0$; für $R = a$, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ist leicht lösbar. Man findet, dass die Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{3}{4}\frac{a u_0}{R^3}\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) x^2 - u_0 \left(1 - \frac{3}{4}\frac{a}{R} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{R^3}\right), \\ v &= \frac{3}{4}\frac{a u_0}{R^3}\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) xy, \quad w = \frac{3}{4}\frac{a u_0}{R^3}\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) xz, \\ p &= \frac{3}{2}\frac{\mu a u_0}{R^3} x \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

die Differentialgleichungen sowie die Nebenbedingungen befriedigen. Aus diesen Formeln leitet man leicht den STOKEschen Ausdruck für den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel ab.

Ein Versuch, die STOKES'sche Formeln durch Berücksichtigung der vernachlässigten quadratischen Glieder zu verbessern, wurde im Jahre 1888 von Herrn WHITEHEAD gemacht.[1] Der Versuch scheiterte an dem Umstande, dass es sich unmöglich zeigte, Korrektionsglieder zu den Ausdrücken für u, v, w zu bestimmen, welche die bezüglichen Differentialgleichungen befriedigen, für $R = a$ und gleichzeitig für $R = \infty$ verschwinden. Herr WHITEHEAD ist geneigt diesen Umstand mit der Tatsache in Verbindung zu setzen, dass bei der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit Wirbel aufzutreten pflegen, hebt aber hervor, dass sein Ergebnis nicht ausreicht, um zu beweisen, dass solche Wirbel bei der Bewegung einer Kugel stets auftreten.

Die STOKES'sche Formel spielt bekanntlich eine grosse Rolle in der neueren Korpusculartheorie. Dies hat zu einer experimentellen Prüfung derselben geführt.[2] Diese hat gezeigt, dass für Körpern, welche mit genügender Genauigkeit sphärische Form besitzen, die Formel innerhalb gewisser Grenzen in Bezug auf Grösse und Geschwindigkeit exakt ist, ein Umstand, der offenbar gegen die Annahme spricht, dass die Bewegung einer Kugel stets Wirbel hervorrufe.

Die Frage nach der Art der Bewegung, welche die fortschreitende Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit hervorruft, wurde neuerdings eingehend von Herrn F. W. LANCHESTER besprochen.[3] Dieser Autor nimmt an, dass für jeden Körper eine Grenzgeschwindigkeit existiert, unterhalb deren die durch die Bewegung des Körpers hervorgerufene Bewegung der Flüssigkeit singularitätenfrei ist, ohne diese Annahme durch eine Analyse der Bewegungsgleichungen zu begründen.

Bevor wir weiter gehen, müssen wir uns klar machen, warum die Arbeit von Herrn WHITEHEAD zu einem negativen Ergebnis führte. Der Grund ist einfach der, dass STOKES bei der Ableitung seiner Formel Glieder vernachlässigte, welche in grosser Entfernung von der Kugel eine ausschlaggebende Bedeutung besitzen. Um dieses einzusehen, hat man

---

[1] Quart. Journ. of Math. 1888.

[2] Vgl. ZELENY und MC KEEHAN, Physik. Zeitschrift 1910 S. 78.

[3] LANCHESTER, Aerodynamics, London 1907.

nur nötig aus den Formeln 2 das Produkt $u\frac{\partial u}{\partial x}$ zu bilden. Man bekommt:

$$-\frac{3au_0^2x}{4R^3}\left(1-\frac{3x^2}{R^2}\right)+\cdots,$$

wo die nicht aufgeschriebenen Glieder in grosser Entfernung von der Kugel gegen die ausgeschriebenen klein sind. Gleichzeitig ist:

$$\mu\Delta u=-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{3}{2}\frac{\mu a u_0}{R^3}\left(1-\frac{3x^2}{R^2}\right).$$

Wie klein nun u_0 auch ist, so gibt es stets Gebiete in der Flüssigkeit, innerhalb deren das Glied $\varrho u\frac{\partial u}{\partial x}$ im Vergleich mit $\frac{\partial p}{\partial x}$ oder $\mu\Delta u$ gross ist. Es ist demnach offenbar, dass eine befriedigende Theorie nicht ohne weiteres die quadratischen Glieder vernachlässigen kann.

2. Die Frage, welche in erster Linie eine Antwort verlangt, ist die: ist, wenn eine Kugel sich mit konstanter, genügend kleiner Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit bewegt, eine singularitätenfreie, stationäre Bewegung der Flüssigkeit mit den NAVIER'schen Differentialgleichungen (oder den entsprechenden Integralgleichungen) vereinbar? Ähnliche Fragen treten in grosser Zahl in der Hydrodynamik auf. Der Körper kann z. B. andere Formen als die Kugelform haben. Was in der Frage wesentlich ist, ist folgendes: ist eine stationäre, singularitätenfreie Bewegung einer Flüssigkeit möglich, wenn ein Teil derselben durch irgend welche äussere Mittel translatorisch fortbewegt wird? Die ungleich einfachste von den vielen hieher gehörigen Fragen ist die folgende. Wir nehmen an, dass auf eine Flüssigkeit ein System von Kräften wirkt, deren Angriffspunkte sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer bestimmten Richtung fortbewegen. Die Frage ist, ob eine singularitätenfreie Bewegung der Flüssigkeit, welche von einem Punkte betrachtet, der sich mit den Kräften fortbewegt, stationär ist, unter diesen Umständen möglich ist. Es ist nicht meine Absicht, diese Frage hier zu beantworten. Ich hoffe bei einer anderen Gelegenheit auf

sie zurückkommen zu können. Hier möchte ich die mathematischen Hülfsmitteln entwickeln, welche zu einer Beantwortung der Frage notwendig sind. Es wird sich herausstellen, dass man dabei gleichzeitig eine befriedigendere Begründung der STOKES'schen Formel gewinnt.

Wir beziehen die NAVIER'schen Differentialgleichungen auf ein Koordinatensystem, welches sich in derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit wie die Angriffspunkte der wirkenden Kräfte fortbewegt. Wir legen die x-Achse in diese Richtung und nennen die Geschwindigkeit u_0. Wir haben dann, weil die Geschwindigkeit in diesem Koordinatensysteme von der Zeit unabhängig sein soll:

$$\varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u,$$

. . . .

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

wo X, Y, Z die Komponenten der wirkenden Kräfte sind. Wir setzen: $u=-u_0+u'$, $v=v'$, $w=w'$, $p=p'$ und bekommen dann:

$$\left.\begin{aligned}
-\varrho u_0\frac{\partial u'}{\partial x}+\varrho\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}+w'\frac{\partial u'}{\partial z}\right)&=X-\frac{\partial p'}{\partial x}+\mu\Delta u',\\
-\varrho u_0\frac{\partial v'}{\partial x}+\varrho\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}+w'\frac{\partial v'}{\partial z}\right)&=Y-\frac{\partial p'}{\partial y}+\mu\Delta v',\\
-\varrho u_0\frac{\partial w'}{\partial x}+\varrho\left(u'\frac{\partial w'}{d x}+v'\frac{\partial w'}{\partial y}+\omega'\frac{\partial w'}{\partial z}\right)&=Z-\frac{\partial p'}{\partial z}+\mu\Delta w',\\
\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}&=0
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

mit den Nebenbedingungen: $u'=v'=w'=0$ für $R=\infty$. Wir vernachlässigen zunächst die Glieder $\varrho u'\frac{\partial u'}{\partial x}$ etc. und betrachten also das System:

$$\left.\begin{aligned} -\varrho u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} &= X - \frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \Delta u' & -\varrho u_0 \frac{\partial v'}{\partial x} &= Y - \frac{\partial p'}{\partial y} + \mu \Delta v', \\ -\varrho u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} &= Z - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \Delta w', & \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &+ \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mit den Nebenbedingungen: für $R = \infty : u' = v' = w' = 0$.

In den folgenden Rechnungen machen wir die Annahme, dass X, Y, Z stetige Funktionen von x, y, z sind.

Wir betrachten das Hülfssystem:

$$\left.\begin{aligned} \varrho u_0 \frac{\partial u''}{\partial x} &= -\frac{\partial p''}{\partial x} + \mu \Delta u'', & \varrho u_0 \frac{\partial v''}{\partial x} &= -\frac{\partial p''}{\partial y} + \mu \Delta v'', \\ \varrho u_0 \frac{\partial w''}{\partial x} &= -\frac{\partial p''}{\partial z} + \mu \Delta w'', & \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} &+ \frac{\partial w''}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

4 und 5 ergeben:

$$\mu (u'' \Delta u' + v'' \Delta v' + \omega'' \Delta w' - u' \Delta u'' - v' \Delta v'' - w' \Delta w'') -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}(u'' p' - u' p'') - \frac{\partial}{\partial y}(v'' p' - v' p'') - \frac{\partial}{\partial z}(w'' p' - w' p'') +$$

$$+ \varrho u_0 \frac{\partial}{\partial x}(u' u'' + v' v'' + w' w'') + u'' X + v'' Y + w'' Z = 0$$

und folglich:

$$\mu \int_S \left[u'' \frac{du}{dn} + v'' \frac{dv'}{dn} + w'' \frac{dw'}{dn} - u' \frac{du''}{dn} - v' \frac{dv''}{dn} - w' \frac{dw''}{dn} \right] dS -$$

$$- \int_S [(u'' \cos nx + v'' \cos ny + w'' \cos nz) p' - (u' \cos nx +$$

$$+ v' \cos ny + w' \cos nz) p''] ds + \varrho u_0 \int_S (u' u'' + v' v'' +$$

$$+ w' w'') \cos nx \, ds + \int_\Omega (u'' X + v'' Y + w'' Z) d\omega = 0,$$

wo S ein System von Flächen ist, die ein Gebiet Ω des Raumes abgrenzen, n die äussere Normale in einem Punkte von S, ds ein Flächenelement und $d\omega$ ein Volumenelement ist.

Es sei jetzt Φ eine im ganzen x, y, z-Raume existierende Funktion von x, y, z; x_0, y_0, z_0, welche mit ihren Ableitungen der vier ersten Ordnungen nach x, y, z überall endlich und stetig ist mit Ausnahme von dem Punkte $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. In der Umgebung dieses Punktes sei:

$$\Phi = r + \Phi_1,$$

wo $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ und wo für genügend kleine Werte von r:

$$|\Phi_1|, \left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}\right| < K,$$

$$\left|\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3}\right|, \left|\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3}\right| < \frac{K_1}{r},$$

wo K und K_1 positive Konstanten sind. Endlich nehmen wir an, dass Φ die Gleichung:

$$\Delta \left(\mu \Delta \Phi - \varrho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0 \tag{7}$$

befriedigt.

Wir benutzen die Gleichung 6 indem wir zunächst:

$$u'' = u_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \; v'' = u_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \; w'' = u_{13} =$$
$$= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \; p'' = p_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mu \Delta \Phi\right)$$

setzen. In der Umgebung von dem Punkte $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ haben wir dann:

$$u'' = \frac{1}{r} + \frac{(x - x_0)^2}{r^3} + u_1'', \; v'' = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{r^3} + v_1'', w'' =$$
$$= \frac{(x - x_0)(z - z_0)}{r^3} + w_1'', \; p'' = 2\mu \frac{x - x_0}{r^3} + p_1''.$$

Dabei ist für genügend kleine Werte von r:

$$|u_1''|, |v_1''|, |w_1''| < K_1' \left|\frac{\partial u_1''}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u_1''}{\partial y}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_1''}{\partial z}\right|, |p_1''| < \frac{K_1'}{r}$$

wo K' und K_1' wieder positive Konstanten sind.

Das System S mag jetzt aus einer geschlossenen Fläche S', welche den Punkt x_0, y_0, z_0 umschliesst, und aus einer Kugel, welche ihren Mittelpunkt in diesem Punkte hat und deren Radius r' genügend klein ist, damit die Kugel innerhalb S' liegt, bestehen. Auf dieser Kugel haben wir dann:

$$\frac{du''}{dn} = \frac{1}{r^2} + \frac{(x-x_0)^2}{r^4} + \ldots, \quad \frac{dv''}{dn} = \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^4} + \ldots,$$
$$\frac{dw''}{dn} = \frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r^4} + \ldots.$$

Wir können jetzt in der Formel 6 den Grenzübergang $r' = 0$ ausführen. Wir haben, wenn u', v', w' stetige Funktionen von x, y, z mit stetigen Ableitungen nach diesen Veränderlichen und wenn p ebenfalls eine stetige Funktion ist:

$$u'(x,y,z) = u_0' + \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)(z-z_0) + \varepsilon r,$$

. . . .

$$\frac{du'}{dn} = -\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_0 \frac{x-x_0}{r} - \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right) \frac{y-y_0}{r} - \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)_0 \frac{z-z_0}{r} + \varepsilon,$$

. . . .

$$p'(x, y, z) = p_0' + \varepsilon,$$

wenn: $u_0' = u'(x_0, y_0, z_0)$ etc. und:

$$\lim_{r=0} \varepsilon = 0.$$

Wir erhalten folglich, wenn die Integrationen stets über die oben erwähnte Kugel ausgeführt werden

$$\lim_{r'=0} \int \left(u'' \frac{du'}{dn} + \cdots\right) ds = 0, \quad \lim_{r'=0} \int \left(u' \frac{du''}{dn} + \cdots\right) ds =$$
$$= u_0' \int \left(\frac{1}{r^2} + \frac{(x-x_0)^2}{r^4}\right) ds = \frac{16}{3} \pi u_0',$$

$$\lim_{r'=0} \int (u'' \cos nx + \ldots)\, p'\, ds = 0,$$

$$\lim_{r'=0} \int (u' \cos nx + \ldots) p'' ds = -\frac{8}{3} \pi \mu u_0',$$

$$\lim_{r'=0} \int (u' u'' + v' v'' + w' w'') \cos nx\, ds = 0.$$

Wir haben ferner, wenn Ω' derjenige Teil des Raumes ist, der innerhalb S' liegt:

$$\lim_{r'=0} \int_{\Omega} (u'' X + v'' Y + w'' Z) d\omega = \int_{\Omega'} (u_{11} X + u_{12} Y + u_{13} Z) d\omega.$$

Folglich:

$$8 \pi \mu u' (x_0, y_0, x_0) = \int_{\Omega'} (u_{11} X + u_{12} Y + u_{13} Z) d\omega +$$

$$+ \varrho u_0 \int_{S'} (u' u_{11} + v' u_{12} + w' u_{13}) \cos nx\, ds + \int_{S'} (u'_n p_1 - u_{1,n} p') ds +$$

$$+ \mu \int_{S'} \left[u' \frac{du_{11}}{dn} + \cdots - u_{11} \frac{du'}{dn} - \cdots \right] ds.$$

Dabei ist:

$$u'_n = u' \cos nx + v' \cos ny + w' \cos nz,$$

$$u_{1,n} = u_{11} \cos nx + u_{12} \cos ny + u_{13} \cos nz.$$

Man erhält auf dieselbe Weise:

$$8 \pi \mu v' (x_0, y_0, z_0) = \int_{\Omega'} (u_{21} X + u_{22} Y + u_{23} Z) d\omega +$$

$$+ \varrho u_0 \int_{S'} (u' u_{21} + v' u_{22} + w' u_{23}) \cos nx\, ds + \int_{S'} (u'_n p_2 - u_{2,n} p') ds +$$

$$+ \mu \int_{S'} \left[u' \frac{du_{21}}{dn} + \cdots - u_{21} \frac{du'}{dn} - \cdots \right] ds,$$

$$8 \pi \mu w' (x_0, y_0, z_0) = \int_{\Omega'} (u_{31} X + u_{32} Y + u_{33} Z) d\omega +$$

$$+ \varrho u_0 \int_{S'} (u' u_{31} + v' u_{32} + w' u_{33}) \cos nx\, ds + \int_{S'} (u'_n p_3 - u_{3,n} p') ds +$$

$$+ \mu \int_{S'} \left[u' \frac{du_{31}}{dn} + \cdots - u_{31} \frac{du'}{dn} - \cdots \right] ds,$$

wo:

$$u_{21} = u_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y},\; u_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},\; u_{23} = u_{32} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial z},$$

$$u_{31} = u_{13} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial z},\; u_{33} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2},$$

$$p_2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mu \Delta \Phi\right),\; p_3 = \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mu \Delta \Phi\right).$$

Es erübrigt die entsprechende Formel für p' zu bilden. Wir setzen zu dem Zweck in Formel 6:

$$u'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),\; v'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),\; w'' = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),\; p'' = -\varrho u_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Wir erhalten auf der Kugel $r = r'$:

$$u'' = -\frac{x - x_0}{r^3},\; \text{etc.},\; p'' = \frac{\varrho u_0 (x - x_0)}{r^3},$$

$$\frac{du''}{dn} = -2\frac{(x - x_0)}{r^4},\; \text{etc.}$$

Folglich:

$$\lim_{r'=0} \int_{r=r'} \left(u'' \frac{du'}{dn} + v'' \frac{dv'}{dn} + w'' \frac{dw'}{dn}\right) ds = -\int \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_0 (x - x_0)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_0 (z - z_0)^2\right] \frac{ds}{r^4} = -\frac{1}{3} \int \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_0\right] \frac{ds}{r^2} = 0,$$

$$\lim_{r'=0} \int_{r=r'} \left(u' \frac{du''}{dn} + \cdots\right) ds = 0,$$

$$\lim_{r'=0} \int_{r=r'} (u'' \cos nx + \cdots)\, p' ds = 4\pi p'_0,$$

$$\lim_{r'=0} \int_{r=r'} (u' \cos nx + \cdots)\, p'' ds = -\varrho u_0 u_0' \int \frac{(x - x_0)^2}{r^4} ds = -\frac{4}{3}\pi \varrho u_0 u_0',$$

$$\lim_{r'=0} \int_{r=r'} (u' u'' + \cdots) \cos nx \, ds = \frac{4}{3} \pi u_0',$$

$$\lim_{r'=0} \int_{\Omega} (u' X + v'' Y + w'' Z) d\omega = \int_{\Omega'} \left[X \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + Y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \right.$$
$$\left. + Z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\omega.$$

Also:

$$4\pi p'(x_0, y_0, z_0) = \int_{\Omega'} \left[X \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + Y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + Z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\omega +$$
$$+ \varrho u_0 \int_{S'} \left[u' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + v' \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + w' \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right] \cos nx \, ds -$$
$$- \int_{S'} \left[p' \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) + \varrho u_0 u'_n \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \right] ds + \mu \int_{S'} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{du'}{dn} + \right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{dv'}{dn} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{dw'}{dn} - u' \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - v' \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) -$$
$$\left. - w' \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right] ds.$$

Wir müssen jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die Herstellung der Funktion Φ richten. Wir betrachten zu dem Zweck das Integral:

$$-\frac{1}{2\pi} \iiint e^{-\frac{\varrho u_0 (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\bar{r}} \right) d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

wo

$$\bar{r}^2 = (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2,$$

$$R^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

während:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Die Integration wird über den ganzen Raum erstreckt. Wie unmittelbar ersichtlich, definiert das Integral eine bestimmte, stetige und stetig differenzierbare Funktion von x, y, z. Es sei S_0 eine geschlossene Fläche mit überall stetigen Tangentenebenen; Ω_0 dasjenige Raumgebiet, das innerhalb S_0 liegt. Wir setzen dann:

$$-\frac{1}{2\pi}\iiint e^{-\frac{\varrho u_0(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\bar{r}}\right)d\xi\, d\eta\, d\zeta = \Phi' + \Phi'' + \Phi''',$$

wo:

$$\Phi' = -\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega_0} e^{-\frac{\varrho u_0(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\bar{r}R},$$

$$\Phi'' = \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega_0} e^{-\frac{\varrho u_0(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\bar{r}^2},$$

und:

$$\Phi''' = -\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega'} e^{-\frac{\varrho u_0(\bar{r}-\xi+x_0}{2\mu}}\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\bar{r}}\right)d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

die Integration über den Raum ausserhalb S_0 erstreckt. Φ'' ist von x, y, z unabhängig. Wenn, wie wir jetzt voraussetzen wollen, x, y, z ein Punkt innerhalb S_0 ist, so ist ferner Φ''' beliebig oft in Bezug auf x, y, z derivierbar, und die Ableitungen sind endlich und stetig, selbst dann, wenn $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Um das Verhalten unseres Integrals in der Umgebung von dem Punkte x_0, y_0, z_0 zu studieren, haben wir also nur die Funktion Φ' zu untersuchen. Wir haben:

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega_0} e^{-\frac{\varrho u_0(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega_0} e^{-\frac{\varrho u_0(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right)d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0} e^{-\frac{\varrho u_0(\bar r - \xi + x_0)}{2\mu}} \frac{\cos nx}{\bar r R} ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0} \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{e^{-\frac{\varrho u_0(\bar r - \xi + x_0)}{2\mu}}}{\bar r} d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0} e^{-\frac{\varrho u_0(\bar r - \xi + x_0)}{2\mu}} \frac{\cos nx}{\bar r R} ds - \frac{\partial \Phi'}{\partial x_0}.$$

Wir bezeichnen im folgenden mit ψ eine beliebige Funktion von x, y, z, x_0, y_0, z_0, welche, wenn die Punkte x, y, z; x_0, y_0, z_0 innerhalb S_0 liegen, stetig und in Bezug auf den sechs Veränderlichen beliebig oft stetig differenzierbar ist. Wir haben dann:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = - \frac{\partial \Phi'}{\partial x_0} + \psi$$

und ebenso:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi'}{\partial y_0} + \psi, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial z} = - \frac{\partial \Phi'}{\partial z_0} + \psi.$$

Wir haben ebenso:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{e^{-\frac{\varrho u_0(\bar r - \xi + x_0)}{2\mu}}}{\bar r} d\xi\, d\eta\, d\zeta + \psi$$

u. s. w.

Ich behaupte jetzt, dass, wenn die Punkte x, y, z; x_0, y_0, z_0 innerhalb Ω_0 liegen und wenn $r > 0$, Φ' beliebig oft in Bezug auf x, y, z; x_0, y_0, z_0 stetig differenzierbar ist. Um dieses zu beweisen, zerlegen wir Ω_0 in zwei Teile $\Omega_0^{(1)}$ und $\Omega_0^{(2)}$, von denen der erste den Punkt x, y, z, und der andere den Punkt x_0, y_0, z_0 enthält. Wir haben dann:

$$\Phi' = \Phi'_{(1)} + \Phi'_{(2)} = - \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega_0^{(1)}} e^{-\frac{\varrho u_0(\bar r - \xi + x_0)}{2\mu}} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\bar r R} -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega_0^{(2)}} e^{-\frac{\varrho u_0(\bar r - \xi + x_0)}{2\mu}} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\bar r R}.$$

Offenbar ist $\Phi'_{(1)}$ in Bezug auf x_0, y_0, z_0 beliebig oft stetig differenzierbar und $\Phi'_{(2)}$ ebenso in Bezug auf x, y, z. Ferner ist:

$$\frac{\partial \Phi'_{(1)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi'_{(1)}}{\partial x_0} + \psi_{(1)} \text{ u. s. w.},$$

wenn $\psi_{(1)}$ in Bezug auf das Gebiet $\Omega_0^{(1)}$ dieselben Bedingungen erfüllt wie ψ in Bezug auf Ω_0. Wir haben folglich:

$$\frac{\partial^2 \Phi'_{(1)}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Phi'_{(1)}}{\partial x \, \partial x_0} + \psi_{(1)} = \frac{\partial^2 \Phi'_{(1)}}{\partial x_0^2} + \psi_{(1)}$$

u. s. w. Wir sehen mithin, dass $\Phi'_{(1)}$ auch in Bezug auf x, y, z beliebig oft differenzierbar ist und natürlich ebenso $\Phi'_{(2)}$ in Bezug auf x_0, y_0, z_0. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Um jetzt das Verhalten der Funktion Φ' in der Umgebung von den singulären Werten $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ zu untersuchen, setzen wir:

$$\Phi' = -\frac{1}{2\pi} \iiint\limits_{\Omega_0} \left(e^{-\frac{\varrho u_0 (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}} - 1 + \frac{\varrho u_0}{2\pi} (\bar{r} - \xi + x,) - \frac{\varrho^2 u_0^2}{8\mu^2} (\bar{r} - \right.$$

$$\left. - \xi + x_0)^2 \right) \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{\bar{r} R} - \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_{\Omega_0} \left[1 - \frac{\varrho u_0}{2\mu} (\bar{r} - \xi + x_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varrho^2 u_0^2}{8\mu^2} (\bar{r} - \xi + x_0)^2 \right] \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{\bar{r} R}.$$

Da die Funktionen:

$$\frac{e^{-x} - 1}{x}, \ \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2}, \ \frac{e^{-x} - 1 + x - \frac{1}{2} x^2}{x^3}$$

für positive Werte von x endliche Maximalwerte besitzen, so folgt leicht, dass man eine solche positive Grösse K finden kann, dass die Funktion:

$$e^{-\frac{\varrho u_0 (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}} - 1 + \frac{\varrho u_0}{2\mu} (\bar{r} - \xi + x_0) - \frac{\varrho^2 u_0^2}{8\mu^2} (\bar{r} - \xi + x_0)^2 = E$$

folgenden Ungleichungen genügt:

$$|E| < K\bar{r}^3, \left|\frac{\partial E}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial E}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial E}{\partial z}\right| < K\bar{r}^2, \left|\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\right|, \cdots,$$

$$\left|\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right| < K\bar{r}, \left|\frac{\partial^3 E}{\partial x^3}\right| \left|\frac{\partial^3 E}{\partial x^2 \partial y}\right|, \cdots \left|\frac{\partial^3 E}{\partial z^3}\right| < K.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt sofort, dass das erste Integral in Φ' und seine Ableitungen der drei ersten Ordnungen nach x_0, y_0, z_0 endlich und stetig bleiben, wenn x, y, z sich dem Punkte x_0, y_0, z_0 nähert. Durch partielle Integration sieht man, dass dasselbe von den Ableitungen nach x, y, z gilt.

Um das zweite Integral in Φ' zu untersuchen, betrachten wir die Gleichungen

$$\Delta_{\xi,\eta,\zeta}\bar{r} = \frac{2}{\bar{r}}, \quad \Delta_{\xi,\eta,\zeta}\left(\frac{1}{R}\right) = 0,$$

welche beide innerhalb Ω_0 gelten. Aus diesen Gleichungen folgt durch die gewöhnliche Green'sche Beweismethode:

$$r = -\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\bar{r}R} + \int\limits_{S_0}\left(\frac{1}{R}\frac{d\bar{r}}{dn_{\xi,\eta,\zeta}} - \bar{r}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{R}\right)\right) ds,$$

wo:

$$\frac{d}{dn_{\xi,\eta,\zeta}} = \cos nx \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos ny \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos nz \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Folglich:

$$\iiint\limits_{\Omega_0}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\bar{r}R} = -2\pi r + \psi,$$

Wir erhalten in derselben Weise:

$$\iiint\limits_{\Omega_0}\frac{x_0 - \xi}{\bar{r}R}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = -\pi r(x_0 - x) + \psi$$

u. s. w. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist, dass das zweite Integral in Φ' folgendermassen geschrieben werden kann:

$$r + \frac{\varrho u_0 r}{4\mu}(x - x_0) + \frac{\varrho^2 u_0{}^2 r^3}{72\mu^2}\left(1 + \frac{3(x - x_0)^2}{r^2}\right) + \chi,$$

wo χ eine Funktion von x, y, z; x_0, y_0, z_0 ist, welche mit ihren Ableitungen der drei ersten Ordnungen in der Umgebung von den singulären Werten $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ endlich und stetig bleibt.

Zusammenfassend kann man sagen, dass unser Integral sich in der Umgebung der singulären Werte in der oben verlangten Weise verhält.

Es erübrigt zu zeigen, dass unser Integral der Gleichung:

$$\varDelta\left(\mu \varDelta \Phi - \varrho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0$$

genügt. Man hat aber:

$$\varDelta \Phi = \varDelta \Phi' = \frac{2e^{-\frac{\varrho u_0(r - x + x_0)}{2\mu}}}{r},$$

folglich, wie zu beweisen war:

$$\left(\mu \varDelta - \varrho u_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \varDelta \Phi = 0.$$

Die Funktion Φ lässt eine einfache und für viele (aber nicht alle) Zwecke sehr bequeme Darstellung zu. Die Punkte x, y, z; x_0, y_0, z_0 seien im Gebiete Ω_0 gelegen. Wir haben:

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' + \Phi'''$$

und also:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'''}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi''}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi'''}{\partial x_0}$$

u. s. w. Wir haben also:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi''}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi'''}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'''}{\partial x_0}.$$

Das gebiet Ω_0 mag jetzt in allen Richtungen ins unendliche wachsen. Wir haben:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_0} e^{-\frac{\varrho u_0 (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}} \frac{\cos n x}{\bar{r} R} ds.$$

Folglich:

$$\lim \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x_0} \right) = 0.$$

Wir haben ferner:

$$\frac{\partial \Phi''}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_0} \iiint e^{-\frac{\varrho u_0 (\bar{\bar{r}} - \xi')}{2\mu}} \frac{d\xi' \, d\eta' \, d\zeta'}{\bar{\bar{r}}^2},$$

wo:

$$\bar{\bar{r}}^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

und die Integration über dasjenige Raumgebiet ausgeführt wird, welches man aus Ω_0 durch eine Translation $-x_0$, $-y_0$, $-z_0$ erhält. Also:

$$\frac{\partial \Phi''}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_0} e^{-\frac{\varrho u_0 (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}} \frac{\cos n x \, ds}{\bar{r}^2}.$$

Folglich:

$$\lim \frac{\partial \Phi''}{\partial x_0} = 0.$$

Wir haben endlich, wie man ohne Schwierigkeit sieht:

$$\lim \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'''}{\partial x_0} \right) = 0.$$

Folglich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = 0.$$

Man beweist auf dieselbe Weise:

$$\Delta_{x,y,z} \Phi - \Delta_{x_0, y_0, z_0} \Phi = 0.$$

Nun ist:

$$\Delta_{x,y,z} \Phi = 2 \frac{e^{-\frac{\varrho u_0 (r - x + x_0)}{2\mu}}}{r},$$

andrerseits:

$$\mu \Delta_{x_0, y_0, z_0} \Phi + \varrho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \frac{2\mu}{r},$$

folglich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2\mu}{\varrho u_0 r}\left(e^{-\frac{\varrho u_0 (r - x + x_0)}{2\mu}} - 1\right)$$

und also:

$$\Phi(x, y, z) - \Phi(x', y, z) = \frac{2\mu}{\varrho u_0}\int_{x'}^{x}\left(e^{-\frac{\varrho u_0 (r - x + x_0)}{2\mu}} - 1\right)\frac{dx}{r}.$$

Aus diesen Formeln folgt u. a.:

$$u_{11} = \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{2e^{-\frac{\varrho u_0 (r - x + x_0)}{2\mu}}}{r} - \frac{2\mu}{\varrho u_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 (r - x + x_0)}{2\mu}} - 1}{r},$$

$$u_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{2\mu}{\varrho u_0}\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 (r - x + x_0)}{2\mu}} - 1}{r},$$

$$u_{13} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = -\frac{2\mu}{\varrho u_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 (r - x + x_0)}{2\mu}} - 1}{r}.$$

3. Wir kehren zu der Frage nach der durch die translatorische Bewegung einer Kugel hervorgerufenen Bewegung einer reibenden Flüssigkeit zurück. Wir wollen dieses Problem unter Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung in u_0 lösen. Wir betrachten zu dem Zweck die Funktionen:

$$\left.\begin{aligned}
u' &= \frac{3}{2}\frac{a u_0}{R} e^{-\frac{\varrho u_0 (R + x)}{2\mu}} + \frac{3\mu a}{2\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 (R + x)}{2\mu}} - 1}{R} - \\
&\qquad - \frac{a^3 u_0}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right),\\
v' &= \frac{3\mu a}{2\varrho}\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 (R + x)}{2\mu}} - 1}{R} - \frac{a^3 u_0}{4}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{R}\right),\\
w' &= \frac{3\mu a}{2\varrho}\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 (R + x)}{2\mu}} - 1}{R} - \frac{a^3 u_0}{4}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{1}{R}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$p' = -\frac{3\mu u_0}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\varrho a^3 u_0^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Diese Funktionen genügen dem System 4 mit $X = Y = Z = 0$ und den Nebenbedingungen: für $R = \infty : u' = v' = w' = 0$, für $R = a : u' = u_0$, $v' = 0$, $w' = 0$, wenn man nämlich im letzten Falle die Grössen von zweiter Ordnung in u_0 vernachlässigt.

Die durch die Formeln 8 definirte Bewegung der Flüssigkeit ergibt für den Widerstand, welchen die Flüssigkeit gegen die Bewegung der Flüssigkeit ausübt, denselben Wert wie die von STOKES betrachtete, wenn man bei der Berechnung nur die Glieder erster Ordnung in u_0 berücksichtigt. Aber die hier betrachtete Bewegung weicht in ihrem ganzen Charakter von der STOKES'schen ab. Man sieht das am Besten, wenn man bemerkt, dass für grosse Werte von R, die Geschwindigkeit vor der Kugel wie $\frac{K}{R^2}$ abnimmt, hinter der Kugel dagegen wie $\frac{K'}{R}$. In der von STOKES untersuchten Bewegung herscht vor und hinter der Kugel vollständige Symmetrie (vom Vorzeichen der Geschwindigkeit abgesehen). Wenn u_0 gegen Null abnimmt, nähert sich unsere Verteilung der Geschwindigkeiten überall der von STOKES betrachteten, aber die Konvergenz ist keineswegs gleichmässig. Wie klein auch u_0 ist, so gibt es stets Gebiete, in denen die hier betrachtete Bewegung ganz anders als die STOKES'sche verläuft. Ich glaube, dass es jetzt deutlich ist, warum der Versuch von Herrn WHITEHEAD scheitern musste.

Zusammenfassung.

1. Bei der von STOKES gegebenen Ableitung der s. g. STOKES'schen Formel werden Glieder vernachlässigt, welche in grosser Entfernung von der Kugel ausschlaggebend sind. Durch diesen Umstand wird es bedingt, dass der von Herrn WHITEHEAD gemachte Versuch die von STOKES gegebenen Formeln für die durch die Translation einer Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit durch Berücksichtigung der qvadratischen Glieder zu verbessern, scheitern musste.

2. Um dem genannten Übelstand abzuhelfen, muss man auch in erster Annäherung in den NAVIER'schen Differential-

gleichungen gewisse mit dem Faktor u_0 (u_0 = der Geschwindigkeit der Kugel) behafteten Glieder beibehalten. Zu dem so erhaltenen linearen Systeme wurden die verallgemeinerten GREEN'schen Formeln aufgestellt.

3. Mittelst den so gewonnenen Hilfsmitteln wurde die durch die genügend langsame Translation einer Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit untersucht. Diese Bewegung weicht in hinreichender Entfernung von der Kugel selbst bei den kleinsten Werten von u_0 beträchtlich von der STOKES'schen Bewegung ab. Die STOKES'sche Formel für den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel erleidet dadurch keinen Eintrag in ihrer Gültigkeit.

Tryckt den 8 november 1910.

Uppsala 1910. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.